Новый способ нахождения решений уравнения Кортевега-де Фриза

Михаил Сметанецкий

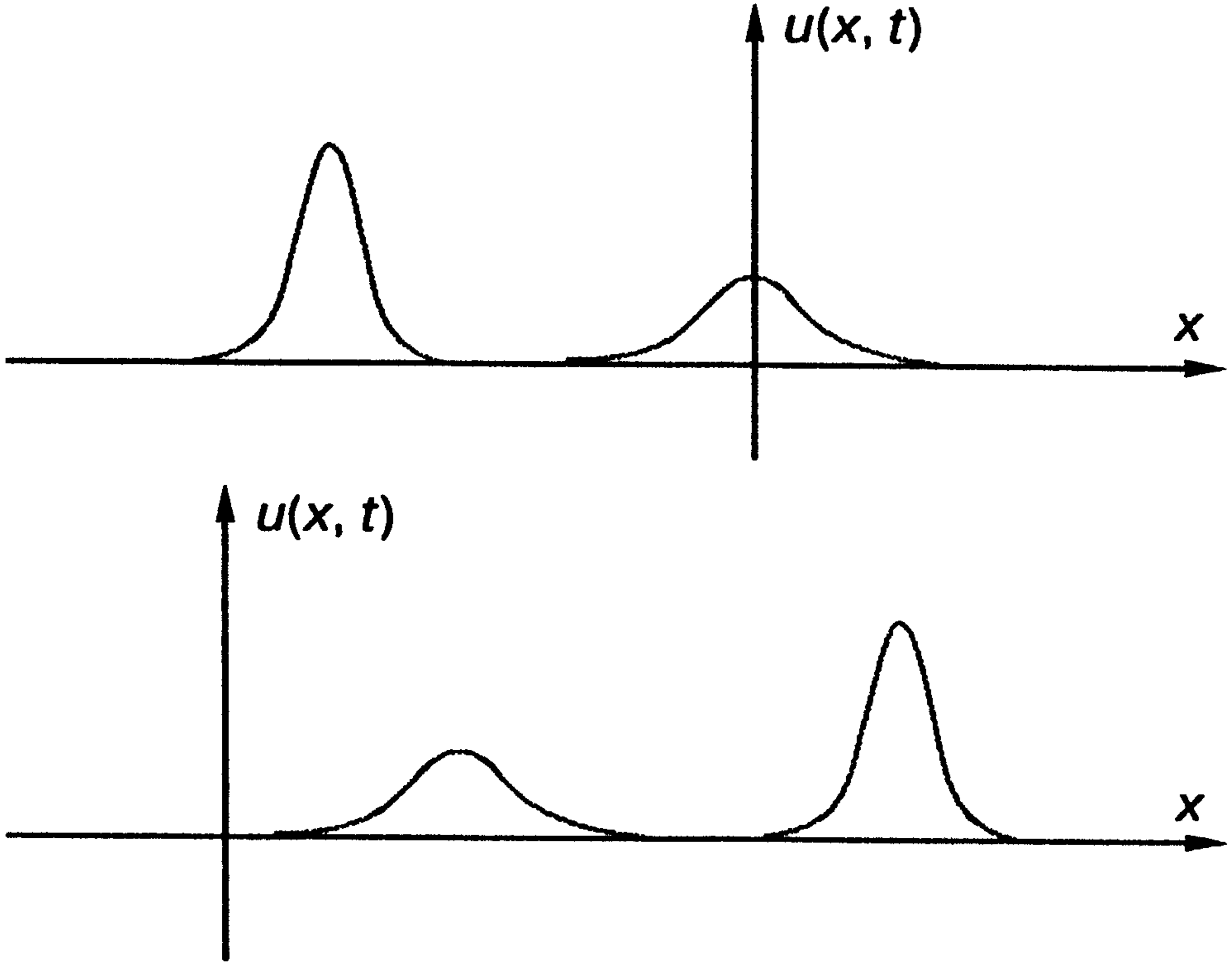
СУНЦ НГУ, 10 – класс

МНСК – 2018

В 1834 году шотландский инженер Скотт Рассел открыл замечательное явление – солитоны. Солитоны – это уединенные волны, которые не меняют форму со временем.

Позже в 1895 году голландские математики Кортевег и де Фриз вывели уравнение, описывающее солитоны

$$u_t = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}),\ u = u(x,t).$$


u(x, t)
x
u(x, t)
x

Рассмотрим функцию

$$\psi(x,t,z) = e^{xz+tz^3}\left(1+\frac{\xi_1(x,t)}{z-\gamma_1}+\frac{\xi_2(x,t)}{z-\gamma_2}+\cdots+\frac{\xi_g(x,t)}{z-\gamma_g}\right),$$

где z - комплексная переменная, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g$ - некоторые константы.

Выберем точки комплексной плоскости $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Пусть L^{js} - дифференциальный оператор по переменной z с постоянными коэффициентами α^{js}

$$L^{js} = \alpha_K^{js}\partial_z^K + \alpha_{K-1}^{js}\partial_z^{K-1} + \cdots + \alpha_0^{js}, \qquad \alpha_p^{js} \in \mathbb{C}, \quad 1 \le j \le g, \ \ 1 \le s \le m$$

Найдем функции ξ_1(x,t), …, ξ_g(x,t) из системы линейных уравнений

$$L^{j1}\big(\psi(x,t,z)\big)\big|_{z=a_1} + \cdots + L^{jm}\big(\psi(x,t,z)\big)\big|_{z=a_m}=0, \qquad 1 \le j \le g.$$

Теорема. Предположим, что функция $z^2\psi$ удовлетворяет условию

$$L^{j1}\big(z^2\psi(x,t,z)\big)|_{z=a_1}+\cdots+L^{jm}\big(z^2\psi(x,t,z)\big)|_{z=a_m}=0.$$

Тогда функция ψ является собственной функцией для одномерного оператора Шредингера, т.е.

$$\big(\partial_x^2+u(x,t)\big)\psi(x,t,z)=z^2\psi(x,t,z),$$

где $u=\frac{-\partial_x^2 S(x,t)}{S(x,t)}$, $\quad S=1-\frac{\xi_1(x,t)}{\gamma_1}-\frac{\xi_2(x,t)}{\gamma_2}-\cdots-\frac{\xi_g(x,t)}{\gamma_g}$.

А также удовлетворяет уравнению

$$\left(\partial_t-\left(\partial_x^3+\frac{3}{2}u\partial_x+\frac{3}{4}u_x\right)\right)\psi=0.$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега-де Фриза

$$u_t=\frac{1}{4}(6uu_x+u_{xxx}).$$

Пример 1. Пусть ψ имеет вид

$$\psi = e^{xz+tz^3}\left(1 + \frac{\xi_1(x,t)}{z-\gamma_1} + \frac{\xi_2(x,t)}{z-\gamma_2}\right)$$

и удовлетворяет следующим условиям

$$\psi(x,t,a_1) = \psi(x,t,-a_1),\ \psi(x,t,a_2) = \psi(x,t,-a_2).$$

Тогда при

$$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = 3,\ \ a_1 = 2,\ \ a_2 = 4$$

получаем

$$u(x,t) = \frac{160e^{16t+4x}(9 + 28e^{112t+4x} + 630e^{128t+8x} + 6300e^{144t+12x} + 1225e^{256t+16x})}{(1 + 45e^{16t+4x} + 35e^{128t+8x} + 175e^{144t+12x})^2}$$

Пример 2. Пусть ψ имеет вид

$$\psi = e^{xz+tz^3}\left(1 + \frac{\xi_1(x,t)}{z-\gamma_1}\right)$$

и потребуем

$$\partial_z(\psi)|_{z=0} = 0.$$

Тогда

$$\xi_1 = \frac{x\gamma_1^2}{x\gamma_1 + 1}.$$

$z^2\psi$ удовлетворяет $\partial_z(z^2\psi)|_{z=0} = 0$, а $u = -\frac{2\gamma^2}{(x\gamma+1)^2}$.

Пример 3. Пусть ψ имеет вид

$$\psi = e^{xz+tz^3}\left(1+\frac{\xi_1(x,t)}{z-\gamma_1}+\frac{\xi_2(x,t)}{z-\gamma_2}\right)$$

и потребуем

$$\partial_z(\psi)|_{z=0} = 0, \quad \partial_z{}^3(\psi)|_{z=0} = 0.$$

При $\gamma_1 = 1, \ \ \gamma_2 = -1$

$$u = -\frac{6x(6t+x^3)}{(x^3-3t)^2}.$$

Спасибо за внимание!