

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Новосибирский государственный университет
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НГУ

УТВЕРЖДАЮ:

Председатель Ученого совета СУНЦ НГУ

д.ф.-м.н., профессор Н.И. Яворский

Программа спецкурса «Олимпиадные задачи по математике»

Преподаватель: Храмцов Дмитрий Геннадьевич

Аннотация программы спецкурса

Спецкурс рассчитан на сильных учащихся, желающих принимать участие в олимпиадах по математике и интересующихся нестандартными задачами. В начале каждого занятия кратко излагается необходимый теоретический материал, демонстрируется решение одной-двух простых задач по теме данного занятия, после чего учащимся предлагается решать задачи самостоятельно. К концу занятия большая часть этих задач разбирается у доски, обсуждается не только решение как таковое, но и возможные недочёты или частичные продвижения к решению и как они оценивались бы при проверке работ на реальной олимпиаде. Обязательное домашнее задание не предусмотрено, однако тем учащимся, которые желают ещё дополнительно самостоятельно готовиться к олимпиадам, предоставляются необходимые материалы. Часть заданий носит исследовательский характер.

Целью курса является формирование у школьников креативного мышления и творческой активности, в том числе с использованием методологии теории решения изобретательских задач, а также реализация творческих способностей талантливой молодежи, повышение уровня их инновационной компетенции, активизация инновационной деятельности. Предполагается, что по окончании данного курса учащиеся приобретут навыки и знания, необходимые для участия в олимпиадах по математике: они узнают некоторые приёмы, которые недостаточно освещены или же не освещены вовсе обязательной школьной программой, они будут иметь адекватное представление о сложности задач, предлагающихся на олимпиадах того или иного уровня, они получают также некоторое представление о том, какими принципами как правило руководствуется жюри при проверке работ и соответственно как следует вести себя на апелляции.

Особо подчеркну, что большинство обсуждаемых на спецкурсе задач взято из реальных олимпиад прошлых лет, включая Всероссийскую олимпиаду, Турнир Городов, Всесибирскую олимпиаду, олимпиады Москвы, Санкт-Петербурга и другие.

Программа спецкурса рассчитана на 52 часа (2 семестра)

Содержание программы

I семестр:

1. Инвариант (2 часа)
2. Полуинвариант, элементарные преобразования (2 часа)
3. Индукция (2 часа)
4. Принцип крайнего (2 часа)
5. Принцип Дирихле (2 часа)
6. Дискретная непрерывность (2 часа)

7. Подсчёт вариантов, снабжение парой, соответствия (2 часа)
8. Комбинаторика «Пример + оценка» (2 часа)
9. Многочлены (2 часа)
10. Игры (2 часа)
11. Задачи с таблицами (2 часа)
12. Неравенства о средних (2 часа)
13. Перестановочные неравенства, транснавенство (2 часа)

II семестр:

1. Графы (2 часа)
2. Раскраски (2 часа)
3. Разрезания и оклейка (2 часа)
4. Замощения плоскости (2 часа)
5. Выпуклые многоугольники (2 часа)
6. Комбинаторная геометрия «пример + оценка» (2 часа)
7. Делимость и остатки (2 часа)
8. НОД и НОК натуральных чисел (2 часа)
9. Взвешивания и тесты (2 часа)
10. Задачи на построение (2 часа)
11. Поворотная гомотетия (2 часа)
12. Радикальные оси (2 часа)
13. Стереометрия (2 часа)

Примеры задач:

1. У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно возьмём наибольший нечётный делитель и сложим все эти делители. Докажите, что получится n^2 .
2. Пусть p и q - последовательные различные простые числа, большие 2. Докажите, что $p+q$ является произведением трёх (возможно, не всех различных) натуральных чисел, больших 1.
3. Можно ли прямоугольник 5 на 7 покрыть уголками из трёх клеток в несколько слоёв так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащим уголкам?
4. Фома и Ерёма делят кучу из 25 монет в 1, 2, 3, ..., 25 алтынов. На каждом ходу один из них выбирает монету из кучи, а другой говорит, кому ее отдать. Первый раз выбирает Фома, далее — тот, у кого сейчас больше алтынов, при равенстве — тот же, кто в прошлый раз. Может ли Фома действовать так, чтобы в итоге обязательно получить больше алтынов, чем Ерёма, или Ерёма всегда сможет Фоме помешать?
5. Две окружности пересекаются в точках A и B . Их общая касательная касается их в точках P и Q . Прямая AB пересекает прямую PQ в точке M . Точка B отображается симметрично относительно точки M в точку B' . Прямые $B'P$ и $B'Q$ пересекают вторично окружности в точках E и F соответственно. Докажите, что точки E , B , F лежат на одной прямой.
6. Даны две концентрические окружности. Циркулем и линейкой постройте прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.
7. По кругу произвольным образом расставлены числа 1, 2, ..., 30. Стоящие на соседних местах числа можно поменять местами. После некоторого количества таких операций оказалось, что каждое число переместилось на диаметрально противоположное место. Докажите, что в некоторый момент меняли местами числа, сумма которых равна 31.
8. В тетраэдре $SABC$ на ребре AC выбрана произвольная точка D . Сферы, вписанные в тетраэдры $SABD$ и $SCBD$ касаются плоскости ABC в точках P и Q соответственно.

- Докажите, что угол PBQ равен углу SDB .
9. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки P, Q и R соответственно, такие, что $AP:PB=BQ:QC=CR:RA=2:1$. Известно, что треугольник PQR - равносторонний. Доказать, что треугольник ABC тоже равносторонний.
 10. Существуют ли 2010 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых?
 11. Найти все тройки натуральных чисел такие, что произведение любых двух из них при делении на третье даёт остаток 1.
 12. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше m^2+1 точек с целыми координатами. Докажите, что в нём найдётся $m+1$ точек с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.
 13. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n , что $P(1)+P(2)+\dots+P(n)$ делится на k .
 14. Сколькими различными способами можно разбить множество всех натуральных чисел от 1 до 2014 на три непустых подмножества так, чтобы ни одно из них не содержало двух последовательных чисел?
 15. При каких n в любой толпе из n человек найдутся двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой толпе и при этом имеющих тут общего знакомого, либо общего незнакомого.
 16. Доказать, что из 11 различных двузначных чисел всегда можно выбрать два не пересекающихся подмножества, средние арифметические чисел в каждом из которых равны.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

1. Н.Х. Агаханов и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006: Окружной и финальный этапы. М.: МЦНМО, 2007.
2. Н.В. Горбачёв, Сборник олимпиадных задач по математике, М.: МЦНМО, 2004.
3. В.В. Прасолов, Задачи по планиметрии, М.: Наука, 1986.
4. А.А. Фомин, Г.М. Кузнецова, Международные математические олимпиады, М.: Дрофа, 1988.

б) дополнительная литература:

1. Математические турниры имени А.П. Савина. Составитель А.В. Спивак. М.: Бюро Квантум, 2006.
2. Задачник «Кванта». Математика. Под редакцией Н.Б. Васильева. М.: Бюро Квантум, 2006.
3. Геометрические олимпиады им. И.Ф. Шарыгина. Составители А.А. Заславский, В.Ю. Протасов, Д.И. Шарыгин. М.: МЦНМО, 2007.

в) интернет-ресурсы:

<http://www.mccme.ru/>
<http://www.turgor.ru/>
<http://problems.ru/>
<http://www.mathlinks.ro/>
<http://www.artofproblemsolving.com>

Согласовано:

Заведующий кафедрой математики
Академик РАО, проф., д.ф.-м.н.

А.А. Никитин