О суммировании

УДК 372.851:376.545

Михеев Юрий Викторович

*Федеральное государственное научное учреждение
«Институт педагогических исследований одаренности детей»
Российской академии образования*

Россия, г. Новосибирск, ул. Приморская, д. 22, телефон: (383) 345-80-21

edusoft@ngs.ru

В статье рассматриваются некоторые методические подходы к изучению суммирования в общеобразовательной школе на профильном и специализированном уровне.

Ключевые слова: математика, обучение, числовая последовательность, числовой ряд.

В школьном курсе математики задачи на суммирование большого числа величин чаще всего вызывают затруднения даже на уровне простейших ситуаций. Примером может служить изучение формул для нахождения суммы начальных членов арифметической или геометрической прогрессии. Не секрет, что в применении этих формул возникает масса ошибок, и в основном связанных с неправильным использованием общих формул.

Ситуация еще больше усугубляется, если рассматривать другие задачи на суммирование. Чаще всего каждая такая задача представляется как задача высокого уровня сложности, и может предлагаться только учащимся, проявляющий особый интерес к математике, в том числе и олимпиадникам. Более того, многие из задач на суммирование и на таком уровне следует воспринимать как сложные. Сравнительно простыми следует считать отдельные задачи, в которых требуется доказать, что рассматриваемая сумма равна заданному выражению, зависящему от переменного числа слагаемых. В этом случае соответствующее равенство, как правило, доказывается методом математической индукции. Примером такой задачи можно считать известное равенство

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Другое дело – представить заданную сумму в виде некоторого неизвестного заранее выражения, зависящего от переменного числа слагаемых. В таком случае отыскать решение задачи уже значительно сложнее. Более того, иногда приходится придумывать не совсем стандартные шаги, чтобы добраться до цели. Тем не менее, и в данном направлении можно выявить некоторые общие подходы.

Прежде всего, отметим, что если мы желаем в некоторой сумме вида $\sum_{k=1}^{n} a_k$ иметь ответ, выраженный компактной формулой $S(n)$, то тогда можно записать два равенства:

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S(n)$, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k = S(n-1)$. Вычитая из первого равенства по частям второе равенство, получаем $a_n = S(n) - S(n-1)$, и такое равенство обязано выполняться при каждом $n > 1$. Если дополнительно принять, что $S(0)$ определено и $a_1 = S(1) - S(0)$, то при каждом натуральном n получаем следующий результат.

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n =$$
$$= (S(1) - S(0)) + (S(2) - S(1)) + (S(3) - S(2)) + ... + (S(n) - S(n-1)) = S(n) - S(0).$$

Отсюда следует, что если $S(0) = 0$, то для построенной последовательности (a_k) сразу выполняется поставленное вначале условие, что $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S(n)$. Если же $S(0) \neq 0$, то можно чуть изменить требования к ожидаемому значению суммы и получить следующий результат: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S(n) - S(0)$.

Аналогичный результат можно получить и в том случае, когда ожидаемое значение суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ представляется в виде $C - F(n)$, где C – некоторая постоянная величина, $F(n)$ – функция, заданная компактным выражением.

На основе приведенных результатов можно получать многочисленные примеры на суммирование членов последовательностей.

Пример 1. Пусть $S(n) = n^3$. Тогда $a_k = k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ при каждом $k \geq 1$, причем $S(0) = 0$. Отсюда следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = n^3$. Этот результат можно представить также в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} (3k - 3k + 1) = 3 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum\limits_{k=1}^{n} k + \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = 3 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = n^3$, откуда получается, что $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Пример 2. Пусть $S(n) = n^4$. Тогда $a_k = k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$ при каждом $k \geq 1$, причем $S(0) = 0$. Отсюда следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} (4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = n^4$. Этот результат можно представить также в виде $4\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = 6 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 - 4 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k + \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = k(k+1)(2k+1) - 2k(k+1) + k + k^4 =$ $= k^2 \cdot (k+1)^2$, откуда $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Пример 3. Пусть $S(n) = n!$. Тогда $a_k = k! - (k-1)! = (k-1) \cdot (k-1)!$ при каждом $k \geq 1$, причем $S(0) = 1$. Отсюда следует, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Пример 4. Пусть $S(n) = q^n$, где q – заданное число, не равное 1. Тогда $a_k = q^k - q^{k-1} = q^{k-1} \cdot (q-1)$ при каждом $k \geq 1$, причем $S(0) = 1$. Отсюда следует, что

$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}\cdot(q-1)=q^n-1$. В итоге приходим к известной формуле $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$.

Пример 5. Пусть $S(n)=C-\frac{1}{n+1}$, где C – временно неизвестное постоянное число. Тогда $a_k=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}$ при каждом $k\ge 1$, причем $S(0)=C-1$. Отсюда следует, что $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=C-\frac{1}{n+1}-(C-1)=1-\frac{1}{n+1}$.

Пример 6. Пусть $S(n)=\sin nx$, где x – некоторое число. Тогда $a_k=\sin kx-\sin((k-1)x=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{(2k-1)x}{2}$ при каждом $k\ge 1$, причем $S(0)=0$. Отсюда следует, что $\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{(2k-1)x}{2}=\sin nx$. Этот результат можно представить также в виде $\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)x}{2}=\frac{\sin nx}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Иногда при нахождении сумм можно применять метод неопределенных коэффициентов, когда на основе известных примеров можно высказать гипотезу относительно общего вида суммы с неизвестными коэффициентами. Тогда с использованием значений сумм при начальных значениях переменных можно составить, решить некоторую систему уравнений, подставить найденные значения в предполагаемую формулу суммы и доказать получающийся результат, например, методом математической индукции.

Пример 7. В примере 5 было найдено, что $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$. Поэтому переходя к вычислению суммы $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, есть основания предполагать, что $S_n=a-\frac{b}{(n+1)(n+2)}$, где a, b – некоторые константы. Подставляя значения $n=1,2$, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=a-\frac{b}{2\cdot 3}\\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}=a-\frac{b}{3\cdot 4}\end{cases}.$$

Решая эту систему, получаем $a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{2}$. В результате приходим к гипотезе, что $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$, в верности которой можно убедиться, проведя доказательство методом математической индукции.

Пример 8. Из рассмотренных примеров 1 и 2 относительно сумм вида $\sum_{k=1}^{n}k^p$, где p – натуральное число, для суммы $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^4$ можно высказать гипотезу, что

$S(n)=a_0n^5+a_1n^4+a_2n^3+a_3n^2+a_4n+a_5$, где $a_i,\ 0\le i\le 5,$ – некоторые конкретные числа. Подставляя значения $n=1,2,3,4,5$, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1 \\ 32a_0+16a_1+8a_2+4a_3+2a_4+a_5=1 \\ 243a_0+81a_1+27a_2+9a_3+3a_4+a_5=1 \\ 1024a_0+256a_1+64a_2+16a_3+4a_4+a_5=1 \\ 3125a_0+625a_1+125a_2+25a_3+5a_4+a_5=1 \end{cases}$$

После этого с теоретической точки зрения поставленную задачу можно считать решенной, потому что остается получить решение данной системы, подставить найденные значения неизвестных в заготовленную форму ответа и доказать правильность методом математической индукции. С другой стороны, данный метод довольно громоздкий, так как требует выполнения большого объема вычислительной работы. В данном примере более удобным является способ решения, аналогичный рассмотренному в примерах 1 и 2.

Полученные результаты можно обобщать также в направлении суммирования членов бесконечной последовательности чисел. С этой целью вводятся понятия числового ряда, сходимости (суммируемости) и расходимости ряда.

Числовым рядом называют выражение вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, где (a_k) – заданная бесконечная последовательность чисел.

Каждому числовому ряду сопоставляют последовательность сумм $\sum_{k=1}^{n} a_k$, каждая из которых называется частичной суммой заданного ряда, и довольно часто используется обозначение $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Далее в классическом случае вводятся основные определения.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется сходящимся, если последовательность (S_n) его частичных сумм имеет предел.

Если этот предел равен S_o, то число S_o называют суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Иногда сходящийся ряд называют суммируемым.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется расходящимся, если последовательность (S_n) его частичных сумм не имеет предела.

При таком подходе суммируемый ряд в некотором смысле можно считать обобщением суммирования на суммы с бесконечным числом слагаемых. Естественно, что расходящемуся ряду в классическом случае никакой суммы не приписывают.

В тех случаях, когда частичные суммы ряда удается представить в виде формулы, вопрос о сходимости ряда сводится к выяснению сходимости или расходимости последовательности частичных сумм.

Пример 9. В примере 5 получено, что $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$. Так как $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ сходящийся, и его сумма равна 1.

Пример 10. Пусть $|q|<1$. В примере 4 получено, что $\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$. Так как $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=\frac{1}{1-q}$, то ряд $\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}$ сходящийся, и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$. Аналогично получается, что $\sum_{k=1}^{n}b_1q^{k-1}=\frac{b_1}{1-q}$, а это соответствует известной формуле для суммы «бесконечно убывающей» геометрической прогрессии.

В тех случаях, когда частичные суммы ряда не удается представить в виде компактной формулы, задача о выяснении сходимости или расходимости ряда усложняется. Многие способы решения такой задачи рассматриваются в вузовских курсах математического анализа. В одной статье это представить невозможно. Ограничимся только одним из критериев сходимости числового ряда с положительными членами.

Критерий сходимости. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ с положительными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Этого критерия иногда достаточно, чтобы разобраться со сходимостью ряда.

Пример 11. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. В данном случае частичные суммы ряда представить в виде компактного выражения от числа слагаемых не удается. Однако, можно провести следующие рассуждения. При каждом $k>1$ получаем, что $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}$. Поэтому $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k-1)}=1+\left(1-\frac{1}{n}\right)<2$. Следовательно, последовательность (S_n) ограничена, а поэтому рассматриваемый ряд сходится. Отметим, что сумму данного ряда, равную $\frac{\pi^2}{6}$, без дополнительных результатов из курса математического анализа находить непросто.

Пример 12. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. В данном случае представить частичные суммы ряда в виде компактного выражения от числа слагаемых также не удается. Однако, можно провести следующие рассуждения. При каждом $m>1$ получаем, что

$$\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\frac{1}{2^{m-1}+3}\dots+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}>$$

$$>\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}\dots+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}>\frac{2^{m-1}}{2^m}=\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$S_{2^n}=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+....+$$

$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+...+\frac{1}{2^n}\right)>1+\frac{(n-1)}{2}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что последовательность (S_n) не ограничена, а поэтому рассматриваемый ряд не сходится.

Помимо рассмотренных сумм рассматривают также двойные суммы, тройные и т. д., когда наборы чисел рассматриваются в виде массивов с двумя или несколькими индексами. Например, если рассматривается набор чисел a_{ijk}, где $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, $1\le k\le p$, то символом $\sum\limits_{i=1,\,j=1,k=1}^{m,n,p} a_{ijk}$ обозначают сумму всех чисел данного набора. Отметим, что $\sum\limits_{i=1,\,j=1,k=1}^{m,n,p} a_{ijk}=\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{p}a_{ijk}\right)\right)$, причем порядок суммирования по индексам можно изменять.

По аналогии с рядами, которые рассматривались выше, рассматриваются также кратные ряды, то есть двойные ряды, тройные и т. д. Сходимость кратных рядов в общем случае рассматривать сложно, а в случае рядов с положительными членами все резко упрощается. Например, если рассматривается двойной ряд с положительными членами, который обозначается как $\sum\limits_{i=1,\,j=1}^{\infty} a_{ij}$, то для него суммы вида $S_{mn}=\sum\limits_{i=1,\,j=1}^{m,n} a_{ij}$ называются частичными суммами, и ряд называется суммируемым (сходящимся), если множество всех частичных сумм ограничено. В этом случае точная верхняя грань множества $\{S_{mn},\, m\in N,\, n\in N\}$ называется суммой двойного ряда.

Иногда рассматривается и обобщение в виде $\sum\limits_{k\in M} a_k$, где суммирование производится по индексам, принадлежащим заданному множеству, в частности, подмножеству множества натуральных чисел.

Выше на примерах было показано, что в компактном виде суммы рядов представляются далеко не всегда. Более того, когда члены суммируемой последовательности имеют достаточно простой вид, то во многих случаях сумму выразить в простом виде либо сложно, либо невозможно. На этом фоне может показаться удивительным, что для отдельных рядов, которые внешне выглядят пугающе, удается найти сумму, причем с использованием математического аппарата, мало отличающегося от аппарата школьной математики. Один из таких примеров произвел на автора в свое время огромное впечатление.

Рассмотрим ряд, который имеет вид

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+\frac{1}{120}+\frac{1}{124}+\frac{1}{127}+...,$$

где в знаменателях дробей по порядку без повторения перечислены все числа вида $n-1$, где число n является точной степенью некоторого натурального числа, большего 1, то есть квадраты натуральных чисел, кубы, четвертые степени, пятые степени, и так далее.

Приведенные выше примеры и понятия (с небольшими дополнениями) позволяют установить, что сумма данного ряда равна 1.

Сначала заметим, что каждое число, которое больше 1 и является степенью натурального числа, можно единственным образом представить в виде m^k, где $k \geq 2$, а число m уже не является точной степенью. Поэтому множество всех точных степеней можно описать как множество всех чисел вида m^k, где m принимает все значения, не являющиеся точными степенями, а переменная k все натуральные значения, большие 1. Следовательно, если обозначить через S_o сумму интересующего нас ряда, то $S_o = \sum_{m \in F} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k - 1}$, где F есть множество всех натуральных чисел, не являющихся точными степенями. Далее, в силу формулы из примера 4 имеем $\frac{1}{m^k - 1} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{m^{pk}}$. Поэтому

$S_o = \sum_{m \in F} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{m^{pk}}$. Переставляя порядок суммирования (для рядов с положительными членами это возможно всегда), получаем $S_o = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{m \in F} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^p} \right)^k \right)$. При каждом k стоящая внутри двойная сумма представляет из себя сумму k-х степеней чисел вида $\frac{1}{m^p}$, где $p \geq 1$, а $m \in F$. Остается понять, что множество всех чисел вида m^k с указанными значениями m и k совпадает без повторений с множеством всех натуральных чисел, больших 1. Следовательно, $S_o = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{m \in F} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^p} \right)^k \right) = S_o = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right)$.

Так как при каждом значении n внутренняя сумма $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ есть сумма членов бесконечной геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{n}$ и знаменателем $q = \frac{1}{n}$, то $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{(n-1)n}$. В итоге $S_o = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$, в силу результата, полученного в примере 9.

Последний пример может служить основой для серьезной исследовательской работы по математике в старших классах.

Литература

1. Никитин, А. А., Михеев, Ю. В. Математика: Теория и практика. Часть 2. Элементарный математический анализ // Новосибирск: Изд-во РИЦ НГУ, 2005.
2. Медных, А. Д., Михеев, Ю. В. Суммирование конечных последовательностей / Задание для учащихся заочной физико-математической школы. – Новосибирск: РИЦ СУНЦ НГУ. – 2002.