Длина окружности

УДК 372.851:514.122

Марковичев Александр Сергеевич

Федеральное государственное научное учреждение
«Институт педагогических исследований одаренности детей»
Российской академии образования

Россия, г. Новосибирск, ул. Приморская, д. 22, телефон: (383) 345-80-21

edusoft@ngs.ru

В статье представлен опыт изучения темы «Длина окружности» в курсе математики Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета

Ключевые слова: специализированное обучение, профильное обучение, математика, длина окружности, длина дуги окружности, длина кривой.

Введение

Тригонометрические функции числового аргумента обычно определяют, предполагая интуитивно ясным понятия длины окружности и длины дуги окружности. Однако, как легко увидеть (см., например, [1, §3] или [2]), даже понятие длины отрезка не столь просто, как могло бы на первый взгляд показаться, и, во всяком случае, требует хорошего владения теорией действительного числа. Понятие длины произвольной кривой еще более сложно и многогранно, поэтому для определения длины окружности мы будем использовать определения, не применимые в общем случае, но дающие для окружности правильный результат и более наглядные. А именно, длиной окружности мы будем называть единственное число, заключенное между периметрами выпуклых многоугольников, вписанных в окружность, и периметрами выпуклых многоугольников, описанных вокруг этой окружности. Другие определения и рассуждения, рассматриваемые в первом параграфе данной статьи, либо объясняют появление этого определения, либо заменяют его на более удобные и более «конструктивные». Во втором параграфе определяется длина дуги окружности, и доказывается, что длина любой дуги окружности единичного радиуса принадлежит промежутку $[0; 2\pi]$. Основным утверждением параграфа является теорема о том, что для любого числа $\rho \in [0; 2\pi]$ найдется дуга окружности единичного радиуса длины ρ. Теорему эту в школьном курсе часто даже забывают сформулировать, хотя именно она через числовую (или «тригонометрическую») окружность позволяет определить тригонометрические функции числового аргумента. В последнем параграфе вкратце приведены соображения, которые в общих чертах поясняют, что такое длина кривой. Материал статьи в течение долгого времени использовался при преподавании темы «Длина окружности» в курсе математики Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета, поэтому автор счел целесообразным привести в конце каждого параграфа контрольные вопросы, задачи и упражнения.

ФГНУ ИПИО РАО, Педагогические заметки. 2012. Т. 5, выпуск 1.

1. Определения длины окружности

Напомним, что выпуклый многоугольник, M лежит по одну сторону от прямой, проходящей через любые две соседние вершины. Сумму длин сторон многоугольника M называют его периметром и обозначают обычно $p(M)$.

Лемма. *Если выпуклый многоугольник* L *лежит внутри многоугольника* M*, то периметр* $p(L)$ *не превосходит периметра* $p(M)$:

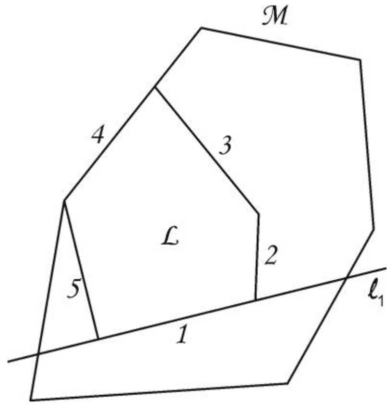

Рис. 1.

Доказательство. Занумеруем каким-то образом (не обязательно последовательно) стороны многоугольника L. Через первую сторону проведем прямую l_1, которая либо проходит по стороне многоугольника M, либо пересекает контур этого многоугольника в двух точках (рис. 1). Пусть M_1 – часть многоугольника M, лежащая по ту же сторону от прямой l_1, что и многоугольник L. Ясно, что многоугольник M_1 выпуклый. Если прямая l_1 проходит по стороне, то многоугольник M_1 может совпадать с многоугольником M. Так как отрезок прямой короче любой ломаной, соединяющей две данные точки, периметр $p(M)$ не меньше периметра $p(M_1)$:

$$p(M) \geq p(M_1).$$

Рассмотрим многоугольники M_1 и L. Ясно, что L содержится в M_1. Проведя прямую l_2, отрежем от M_1 выпуклый многоугольник M_2, лежащий по ту же сторону от l_2, что и многоугольник L. Иногда многоугольник M_2 может совпасть с многоугольником M_1. Как и ранее,

$$p(M_1) \geq p(M_2).$$

Осуществляя указанную процедуру отрезания n раз, где n – число сторон многоугольника L, получим неравенства

$$p(M) \geq p(M_1) \geq p(M_2) \geq ... \geq p(M_n).$$

Но последний многоугольник M_n совпадает с многоугольником L, поэтому

$$p(M) \geq p(L).$$

Лемма доказана.

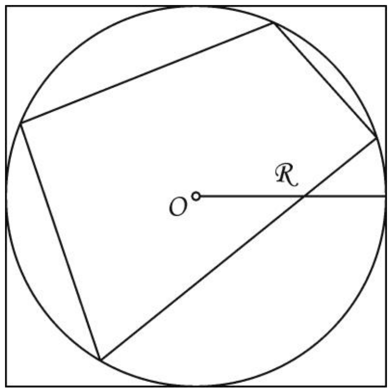

Рис. 2.

В основу определения длины окружности положим следующие естественные соображения.

Во-первых, если окружность разбита на несколько дуг, то длина всей окружности должна равняться сумме длин полученных дуг (аддитивность).

Во-вторых, длина дуги должна быть не меньше длины отрезка, соединяющего его концы.

Отсюда следует, что длина окружности должна быть не меньше периметра любого вписанного в нее выпуклого многоугольника.

Описав вокруг окружности O радиуса R квадрат, найдем, что всякий вписанный в окружность O выпуклый многоугольник M лежит внутри квадрата, и по лемме его периметр не меньше периметра квадрата, равного $8R$ (рис. 2). Таким образом, множество периметров всех вписанных в окружность O выпуклых многоугольников ограничено сверху, и, стало быть, имеет верхнюю грань.

Определение. *Длиной окружности называется верхняя грань множества периметров выпуклых многоугольников, вписанных в эту окружность.*

Теорема. *Пусть P – правильный многоугольник, вписанный в окружность. Длина окружности равна $\sup\limits_k\{p(P_k)\}$, где $P_0 = P$, ..., P_{k+1} – правильный вписанный многоугольник, получающийся из P_k удвоением числа сторон.*

Доказательство. Вследствие леммы

$$p(P) = p(P_0) \le p(P_1) \le p(P_2) \le \ldots \le p(P_k) \le \ldots \le 8R.$$

Оценим длину a_k стороны многоугольника $p(P_k)$. Пусть исходный многоугольник P имеет n сторон, тогда P_1 имеет $2n$ сторон, ..., P_k имеет $2^k n$ сторон. Поэтому

$$p(P_k) = 2^k n \cdot a_k \le 8R,$$

и

$$a_k \le \frac{8R}{2^k n}.$$

Помимо вписанных многоугольников P_1, P_2, …, P_k, … построим описанные многоугольники Q_1, Q_2, …, Q_k, … так, что стороны многоугольника Q_k касаются окружности в вершинах многоугольника P_k.

Покажем, что длина c окружности заключена между периметрами $p(P_k)$ и $p(Q_k)$ многоугольников P_k и Q_k:

$$p(P_k) < c < p(Q_k). \qquad (*)$$

Левое неравенство сразу следует из определения длины окружности. Докажем правое неравенство. Пусть M – произвольный вписанный в окружность выпуклый многоугольник. Тогда M лежит внутри Q_k, и по лемме для любого k:

$$p(M) \le p(Q_k).$$

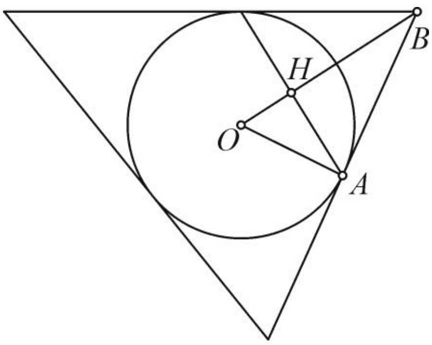

Рис. 3.

Если бы длина окружности $c = \sup\limits_M\{p(M)\}$ оказалась больше некоторого $p(Q_{k_0})$, то по определению верхней грани множества нашелся бы вписанный в окружность выпуклый многоугольник M_0, периметр которого $p(M_0)$ больше $p(Q_{k_0})$. Но, как уже было отмечено, это невозможно. Следовательно, для всех k число $c \le p(Q_k)$, и правое из неравенств (*) тоже установлено.

Если A – вершина многоугольника P, B – вершина многоугольника лежащая на стороне, проходящей через A, H – точка пересечения OB со стороной многоугольника P_k (рис. 3), то в силу подобия треугольников OAB и OHA имеем

$$\frac{p(Q_k)}{p(p_k)} = \frac{OA}{OH}.$$

$p(Q_k) - p(P_k) = p(P_k)\left(\frac{OA}{OH} - 1\right) = \frac{p(P_k)}{OH}(OA - OH) \le \frac{p(P_k)}{OH} \cdot AH$ (вследствие неравенства треугольника $OA \le OH + AH$), но $OH > \frac{R}{2}$ и $AH = \frac{a_k}{2} \le \frac{8R}{2^{k+1} \cdot n}$. Отсюда

$$p(Q_k)-p(P_k)<8R\cdot\frac{2}{R}\cdot\frac{8R}{2^{k+1}\cdot n}=\frac{64R}{2^k\cdot n}\underset{k\to\infty}{\to}0.$$

Таким образом, множество X периметров многоугольников P_k и множество Y периметров многоугольников $Q_k(k = 0, 1, 2, \ldots)$ являются примыкающими, и не только разделяются числом c вследствие неравенств (*), но и число c является единственным разделяющим эти множества числом:

$$\sup_k\{p\ (P_k)\}=c=\inf_k\{p\ (Q_k)\}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим две окружности O и O' радиусов R и R'. Длины окружностей обозначим c и c'. Пусть P и P' – правильные выпуклые n-уголышки, вписанные соответственно в окружности O и O'; через Q и Q' обозначим описанные вокруг O и O' многоугольники, стороны которых касаются окружностей соответственно в вершинах многоугольников P и P'.

Если P_k и P'_k получены из многоугольников P и P' последовательным удвоением числа сторон Q_k и Q'_k – описанные многоугольники, касающиеся окружностей соответственно в вершинах многоугольников P_k и P'_k то согласно формуле (*)

$$p(P_k)\le c\le p(Q_k),\quad p(P'_k)\le c'\le p(P'_k),$$

причем c и c' – единственные числа, заключенные в указанных границах.

Но мы знаем, что многоугольники P'_k, P_k, Q'_k и Q_k подобны, и

$$\frac{a'_k}{a_k}=\frac{b'_k}{b_k}=\frac{R'}{R},$$

где a_k, a'_k, b_k, b'_k – длины сторон соответственно многоугольников P_k, P'_k, Q_k и Q'_k.

Отсюда

$$\frac{p(P'_k)}{p(P_k)}=\frac{p(Q'_k)}{p(Q_k)}=\frac{R'}{R}.$$

Следовательно,

$$2^k n\cdot a'_k=2^k n\cdot a_k\frac{R'}{R}\le c\frac{R'}{R}\le 2^k n\cdot b_k\frac{R'}{R}=2^k n\cdot b'_k$$

и

$$c'=c\frac{R'}{R}\quad \text{или}\quad \frac{c}{R}=\frac{c'}{R'}.$$

Мы установили, что отношение $\frac{c}{2R}$ не зависит от окружности. Это отношение принято обозначать греческой буквой π. Итак,

$$c = 2\pi R.$$

Число π – иррациональное, как показал в 1766 году немецкий математик И. Ламберт (1728 – 1777); его доказательство было уточнено в 1794 году французским математиком А. Лежандром (1752 – 1833). Используя идеи французского математика XIL Эрмита (1822 – 1901), немецкий математик Ф. Линдеман в 1882 году доказал, что π – трансцендентное число, то есть не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Таким образом выяснилось, что знаменитая задача древности о квадратуре круга, то есть задача о построении с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу, неразрешима. Как и всякое иррациональное число, π представляется бесконечной непериодической десятичной дробью:

$$\pi = 3{,}14159265358\ldots$$

Для запоминания этой записи может пригодиться фраза: «Это я знаю и помню прекрасно, пи многие знаки мне лишни, напрасны».

Еще несколько определений длины окружности можно извлечь из задач и упражнений, приведенных в конце параграфа.

Контрольные вопросы

1. Какой многоугольник называется выпуклым?

2. Как соотносятся между собой периметры двух выпуклых многоугольников, один из которых лежит внутри другого?

3. В каком случае $p(M_k) = p(M_{k+1})$?

4. Как определяется длина окружности?

5. Можно ли в неравенстве (*) нестрогие неравенства заменить на строгие?

6. Верно ли утверждение: длина окружности равна $\inf\limits_k\{p(Q_k)\}$, где $Q_0 = Q$ – правильный многоугольник, описанный вокруг окружности, …, Q_{k+1} – правильный описанный многоугольник, получающийся из Q_k удвоением числа сторон?

7. Как связана длина окружности и периметр вписанного в окружность выпуклого многоугольника?

8. Как связана длина окружности и периметр описанного выпуклого многоугольника?

9. Пусть $\tilde{X}$ – множество периметров вписанных в окружность выпуклых многоугольников, $\tilde{Y}$ – множество периметров выпуклых описанных многоугольников. Какое число разделяет эти множества? Является ли оно единственным разделяющим эти множества числом?

10. Чему равно отношение длины любой окружности к ее радиусу?

11. Почему фраза, приведенная в конце параграфа, полезна для запоминания десятичных знаков числа π?

Задачи и упражнения

1. Докажите, что $3 < \pi < 4$.

2. Докажите, что длина окружности равна $\lim p(P_k)$, где $P_0 = P$, …, P_{k+1} – правильный вписанный многоугольник, получающийся из P_k удвоением числа сторон.

Таким образом, вследствие упражнения 1 и теоремы можно дать еще два, эквивалентных исходному, определения длины окружности – как верхней грани множества $\{p(P_k)\}$ периметров правильных многоугольников, получающихся из произвольного правильного многоугольника P, вписанного в окружность, последовательным: удвоением числа сторон, и как предела $\lim p(P_k)$ возрастающей последовательности периметров этих многоугольников.

3. Докажите, что длина окружности равна нижней грани множества периметров выпуклых многоугольников, описанных вокруг окружности.

4. Докажите, что для всякого правильного многоугольника Q, описанного вокруг окружности, длина окружности равна $\inf\limits_k\{p\,(Q_k)\}$, где $Q_0 = Q$, …, Q_{k+1} – правильный описанный многоугольник, получающийся из Q_k удвоением числа сторон.

5. Докажите, что длина окружности равна $\lim p(Q_k)$.

6. Докажите, что длина окружности равна $\sup_k\{p\,(M_k)\}$, где M_k – правильные k-угольники, вписанные в окружность ($k = 3, 4, 5, \ldots$).

7. Докажите, что длина окружности равна $\lim p(M_k)$, где M_k – правильные k-угольники, вписанные в окружность ($k = 3, 4, 5, \ldots$).

Трудность решения этой задачи состоит в том, что нужно обойтись без доказательства возрастания последовательности периметров правильных многоугольников M_k, поскольку оно предполагает знание тригонометрии.

8. Докажите, что длина окружности равна $\inf_k\{p(N_k)\}$, где N_k – правильные описанные k-угольники ($k = 3, 4, 5, \ldots$).

9. Докажите, что длина окружности равна $\lim p(M_k)$, где M_k – правильные описанные k-угольники ($k = 3, 4, 5, \ldots$).

10. Пусть a_k – длина стороны вписанного в окружность радиуса R правильного многоугольника P_k полученного из правильного многоугольника P последовательным удвоением числа сторон.

а) Докажите, что $a_{k+1}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_k^2}{4}}$.

б) Найдите приближенное значение числа π, заменив длину окружности периметром правильного 96-угольиика.

в) Оцените точность полученного значения для числа π.

г) Для какого k знание периметра правильного $3 \cdot 2^k$-угольника позволит найти значение π с точностью до 0,001?

11. Многоугольник, описанный вокруг окружности радиуса r каким-то образом разрезан на треугольники. Доказать, что сумма радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники, больше r.

2. Длина дуги окружности

Для определения длины дуги окружности нам потребуются ломаные, вписанные в эту дугу. Пусть $\cup AB$ – произвольная дуга окружности O радиуса R, γ – выпуклая ломаная с концами в точках A и B, вершины которой лежат на дуге $\cup AB$ (рис. 4). Всякая такая ломаная γ является частью выпуклого многоугольника, вписанного в окружность, поэтому периметр ломаной γ меньше $8R$.

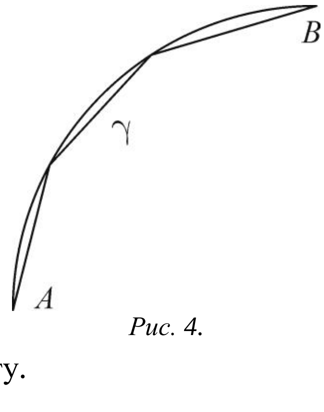

Рис. 4.

Определение. Длиной $\rho(\cup AB)$ дуги $\cup AB$ называется верхняя грань множества периметров выпуклых ломаных, вписанных в эту дугу.

Длина дуги обладает свойством аддитивности:

Теорема 1. *Пусть C – точка, лежащая на дуге $\cup AB$. Тогда*

$$\rho(\cup AC) + \rho(\cup CB) = \rho(\cup AB).$$

Другими словами,

$$\rho(\cup AC) + \rho(\cup CB) = \rho(\cup AC + \cup CB).$$

Доказательство. Обозначим $\rho(\cup AC)$ через ρ_1, $\rho(\cup AC)$ – через ρ_2, $\rho(\cup AB)$ – через ρ. Требуется доказать, что $\rho = \rho_1 + \rho_2$, т. е. что число $\rho_1 + \rho_2$ является верхней гранью множества периметров ломаных, вписанных в дугу $\cup AC$.

1) Докажем вначале, что $\rho_1 + \rho_2$ – верхняя граница указанного множества периметров.

Пусть γ – произвольная выпуклая ломаная, вписанная в дугу $\cup AB$. Добавив к вершинам ломаной γ еще точку C, если она не было вершиной γ, получим новую ломаную γ', вписанную в дугу $\cup AB$. Обозначим через γ_1 часть ломаной γ', вписанную в дугу $\cup AC$, через γ_2 – часть ломаной γ', вписанную в дугу $\cup CB$. Ясно, что

$$p(\gamma) \le p(\gamma') = p(\gamma_1) + p(\gamma_2),$$

но $p(\gamma_1) \le \rho_1$, $p(\gamma_1) \le \rho_2$, поэтому для любой ломаной γ

$$p(\gamma) \le \rho_1 + \rho_2.$$

Отсюда

$$\rho = \sup_{\gamma} p(\gamma) \le \rho_1 + \rho_2 .$$

2) Теперь докажем, что $\rho_1 + \rho_2$ – минимальная из верхних границ множества периметров ломаных γ, вписанных в дугу $\cup AB$.

Возьмем произвольное положительное число ε. Требуется доказать, что найдется ломаная γ, периметр которой больше числа $\rho_1 + \rho_2 - \varepsilon$:

$$\rho_1 + \rho_2 - \varepsilon < p(\gamma).$$

По определению ρ_1 найдется такая ломаная γ_1, вписанная в дугу $\cup AC$, что

$$\rho_1 - \tfrac{\varepsilon}{2} < p(\gamma_1);$$

аналогично, по определению ρ_2 найдется такая ломаная γ_2, вписанная в дугу $\cup CB$, что

$$\rho_2 - \tfrac{\varepsilon}{2} < p(\gamma_2).$$

В качестве искомой ломаной γ, очевидно, можно взять $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$:

$$\rho_1 + \rho_2 - \varepsilon < p(\gamma_1) + p(\gamma_2) = p(\gamma_1 + \gamma_2).$$

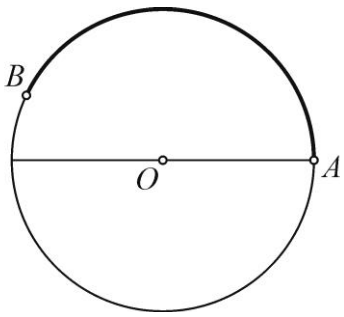

Рис. 5.

Теорема 1 доказана.

Следствие 2 (*Монотонность длины дуги*). *Если дуга $\cup AC$ является частью дуги $\cup AB$ (то есть точка $C \in \cup AB$), то $p(\cup AC) \le p(\cup AB)$.*

Таким образом, длина дуги окружности единичного радиуса заключена между числами 0 и 2π.

Теорема 2. *Пусть α – произвольное число из промежутка* $[0; 2\pi)$. *Тогда на окружности единичного радиуса найдется $\cup AB$, длина которой равна α* (рис. 5).

Когда мы сопоставляли произвольному действительному числу α некоторую точку на прямой, нам потребовалось выбрать начальную точку и масштабный отрезок, который далее делился на 10^n частей ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

В случае измерения дуг окружности выбор масштабного отрезка по существу сделан – им естественно считать саму окружность. Но дуги окружности проще всего делить на 2^n частей.

По условию теоремы

$$0 \le \frac{\alpha}{2\pi} < 1.$$

Заметим, что для любого натурального n однозначно определяются такие числа a_i, равные либо 0, либо 1 (i = 1, 2, 3, …, n), что

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} \le \frac{\alpha}{2\pi} < \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \qquad (*)$$

В самом деле, для $n = 1$ утверждение выглядит очевидным: для $\frac{\alpha}{2\pi} < \frac{1}{2}$ число $a_1 = 0$, для $\frac{1}{2} \le \frac{\alpha}{2\pi} < 1$ число $a_1 = 1$. Если неравенства (*) справедливы для некоторого n, то однозначно определяется число a_{n+1}, равное либо 0, либо 1, для которого

$$\frac{a_{n+1}}{2} \le \left(\frac{\alpha}{2\pi} - \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n}\right)\right) \cdot 2^n < \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{1}{2},$$

и, следовательно,

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} \le \frac{\alpha}{2\pi} < \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Обозначим через e_1 полуокружность, через e_2 – дугу в четверть окружности, через e_3 – дугу, составляющую одну восьмую часть окружности, …, через e_n – дугу, составляющую $\frac{1}{2^n}$-ую часть окружности.

Откладывая от точки A a_1 раз дугу e_1, от конца B_1 полученной дуги откладывая a_2 раз дугу e_2, …, от конца B_{n-1} полученной дуги откладывая a_n раз дугу e_n, получим дугу $\cup AB_n$; отложив от точки B_n дугу e_n еще один раз, получим дугу $\cup AB'_n$ (рис. 6). Вследствие теоремы 1

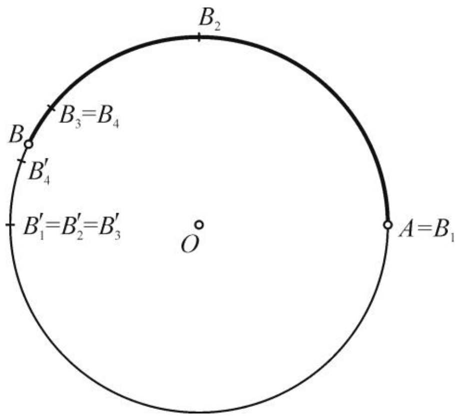

Рис. 6.

$$\rho(\cup AB_n) = \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n}\right) \cdot 2\pi, \qquad \rho(\cup AB_n) = \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) \cdot 2\pi.$$

Получена последовательность дуг $\cup B_nB'_n$ вложенных друг в друга, причем при достаточно большом n дуга $\cup B_nB'_n$ окажется меньше любой наперед выбранной дуги той же окружности, и поэтому все эти дуги имеют единственную общую точку B.

Ввиду монотонности длины дуги $\rho(\cup AB_n) \le \rho(\cup AB) \le \rho(\cup AB'_n)$, поэтому

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} \le \frac{1}{2\pi}\rho(\cup AB) < \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Но двоичные дроби слева и справа имеют общий предел, равный числу $\frac{\alpha}{2\pi}$, следовательно

$$\frac{1}{2\pi}\rho(\cup AB) = \frac{\alpha}{2\pi},$$

и $\rho(\cup AB) = \alpha$.

Теорема доказана.

Определим *градусную меру* центрального угла. Угол, опирающийся на дугу длиной в $\frac{1}{360}$-ую длины окружности, называют углом в 1° (один градус). Про дугу, заключающую центральный угол в 1°, принято говорить, что ее градусная мера равна 1°.

Для определения градусной меры центрального угла используют процедуру, вполне аналогичную процедуре сопоставления точке прямой действительного числа. В качестве единицы измерения берут дугу в 1°, то есть дугу в $\frac{1}{360}$-ую окружности (оставляя в стороне вопрос о практической осуществимости подобного деления). По традиции дуга в 1° делится вначале на 60 равных частей. Величина центрального угла, опирающегося на $\frac{1}{60}$-ую дуги в 1°, равна 1' (одной минуте), величина центрального угла, опирающегося на $\frac{1}{60}$-ую дуги в 1', равна 1" (одной секунде). Каждое дальнейшее деление принято производить на 10 равных частей. Впрочем, всё чаще дугу в 1° начинают сразу делить на 10 частей.

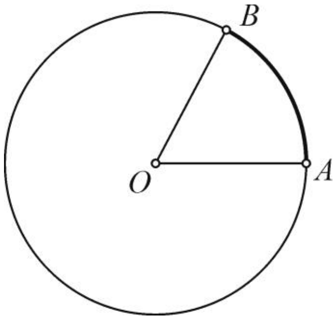

Рис. 7.

Радианной или *круговой мерой* центрального угла AOB называется отношение длины дуги $\cup AB$ окружности O к радиусу отрезка: $\frac{\rho(\cup AB)}{R}$ (рис. 7). Таким образом, для окружности единичного радиуса длина дуги и радианная мера центрального угла, опирающегося на эту дугу, измеряются одним и тем же числом.

Очевидно, что и градусная и радианная мера обладает аддитивностью и монотонностью.

Установим связь между градусной и радианной мерой центрального угла.

Теорема 3. *Пусть ρ – длина дуги $\cup AB$ окружности радиуса R, α – градусная мера центрального угла AOB. Тогда*

$$\rho = 2\pi R \frac{\alpha}{360}.$$

Начиная от точки A, будем последовательно откладывать дугу в $\frac{1}{2}$-ую часть длины окружности, где n – какое-то натуральное число. Получим точки A, A_1, A_2, …, A_{n-1}:

$$\angle AOA_1 = \angle A_1OA_2 = ... = \angle A_{n-1}OA = \frac{360°}{n}.$$

$$\rho(AA_1) = \rho(A_1A_2) = ... = \rho(A_{n-1}A) = \frac{2\pi R}{n}.$$

Существует такое целое число m, что точка B лежит на дуге $\cup A_mA_{m+1}$, т. е. длины соответствующих дуг связаны неравенствами:

$$\frac{360°}{n} m \le \alpha° < \frac{360°}{n}(m+1); \quad \frac{2\pi R}{n} m \le \rho < \frac{2\pi R}{n}(m+1).$$

Из указанных неравенств следуют такие неравенства:

$$\frac{n\alpha}{360} - 1 < m \le \frac{n\alpha}{360} < m+1 \le \frac{n\alpha}{360} + 1;$$

$$\frac{2\pi R}{n}\left(\frac{n\alpha}{360} - 1\right) < \rho < \frac{2\pi R}{n}\left(\frac{n\alpha}{360} + 1\right).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ последнем неравенстве, вследствие теоремы о зажимающих последовательностях получим:

$$\rho = \frac{2\pi R\alpha}{360}.$$

Следствие 1. *Длина ρ дуги окружности радиуса R и радианная мера опирающегося на эту дугу центрального угла связаны формулой*

$$\rho = R \cdot \alpha_r.$$

Следствие 2. *Градусная α и радианная α_r меры угла связаны следующими формулами:*

$$\alpha_r = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha, \quad \alpha = \frac{360}{2\pi} \cdot \alpha_r.$$

Угол в 1 радиан опирается на дугу, длина которой равна радиусу окружности, его градусная мера равна $\frac{360°}{2\pi} = 57°17'44{,}8''$. Обратно, радианная мера угла в 1° равна $\frac{\pi}{180} = 0{,}01745329...$.

Контрольные вопросы

1. Что называется длиной дуги окружности?

2. Какая ломаная называется вписанной в дугу окружности?

3. Какая ломаная называется выпуклой?

4. Почему длина любой выпуклой ломаной, вписанной в дугу окружности, меньше длины этой дуги?

5. Почему для любой выпуклой ломаной, вписанной в дугу окружности, найдется выпуклая ломаная, вписанная в ту же дугу и имеющая больший периметр?

6. Пусть C – точка, лежащая на дуге $\cup AB$. Почему для любой выпуклой ломаной γ, вписанной в дугу $\cup AB$, найдутся ломаные γ_1 и γ_2, вписанные соответственно в дуги $\cup AC$ и $\cup CB$, для которых $p(\gamma) < p(\gamma_1) + p(\gamma_2)$?

7. Что означает равенство $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$?

8. Сформулируйте аддитивность длины дуги.

9. В чем состоит монотонность длины дуги? Как она доказывается?

10. Почему $\rho(\cup AB) \geq 0$?

11. В каких границах заключена длина дуги окружности радиуса R?

12. Почему длина дуги e_n, составляющей $\frac{1}{2^n}$-ую часть окружности: единичного радиуса, равна $\frac{\pi}{2^{n-1}}$?

13. Что из себя представляет дуга $\cup B_1B'_1$. полученная при доказательстве теоремы 2?

14. Чему равна длина дуги $\cup B_nB'_n$?

15. Как вы понимаете то, что дуга $\cup B_nB'_n$ окажется меньше любой наперед выбранной дуги той же окружности?

16. Почему для дуги, меньшей любой наперед выбранной дуги той же окружности, ее длина будет сколь угодно мала?

17. На какую дугу окружности опирается угол в 1°; 2°; 3°; 30°; 45°; 90°; 120°; 180°?

18. В каких границах заключена градусная мера центрального угла?

19. В каких границах заключена радианная мера центрального угла?

20. Чему равна градусная мера угла, если его радианная мера равна π; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{10}$; $\frac{\pi}{18}$; $\frac{\pi}{180}$; $\frac{\pi}{360}$?

Задачи и упражнения

1. Докажите, что $\rho(\cup AB) > 0$.

2. Спроектируем точки дуги $\cup B_nB'_n$ полученной при доказательстве теоремы 2, на диаметр $B_1B'_1$. Получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $C_nC'_n$.

а) Докажите, что при достаточно большом n отрезок $C_nC'_n$ окажется меньше любого наперед выбранного отрезка, и поэтому все эти отрезки имеют единственную общую точку C.

б) Докажите, что прообраз B точки C при проектировании является единственной общей точкой дуг $\cup B_nB'_n$.

3. Докажите, что длина $\rho(\cup AB)$ дуги $\cup AB$ равна нижней грани множества периметров выпуклых ломаных, описанных около этой дуги.

3. Длина кривой

Длина, так же как и площадь, и объем, входит в число наиболее широко известных математических понятий – тех, с которыми мы постоянно встречаемся в практической жизни. Для древних понятия длины, площади, объема были первичными понятиями, ясными сами по себе и не требующими логических определений. Их интересовало место, занимаемое линией, поверхностью или телом в пространстве. Затруднения начинались только тогда, когда требовалось измерить это место, отнести ему некоторое число. Вспомним, например, измерение диагонали квадрата.

На протяжении многих столетий математика видела свою задачу лишь в вычислении длин (а также и площадей, и объемов). Однако вычисления должны на чем-то основываться, на каких-то постулатах, принципах, которые позволяли бы получать в качестве длины линии определенное число.

В [1, §3], [2] было выделено несколько подобных постулатов для нахождения длин отрезков. *Длиной отрезка* называлось число $\rho(a)$, где ρ – отображение множества отрезков в множество R действительных чисел, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $\rho(a) > 0$;

(ii) существует такой отрезок е, что $\rho(e) = 1$;

(iii) $a = b \Rightarrow \rho(a) = \rho(b)$;

(iv) $\rho(a + b) = \rho(a) + \rho(b)$.

Для того, чтобы найти значение этого отображения р на диагонали квадрата со стороной, равной 1, требуется произвести бесконечное число операций, в результате которых получится бесконечная десятичная дробь

$$1{,}4142135623373...$$

В чем состоят эти операции? Вначале выбирается некоторый «масштаб измерения» – единичный отрезок e.

На прямой AB, где отрезок AB – диагональ квадрата, сторона которого отрезок равна единичному отрезку e, от точки A откладывается отрезок AA_0, равный отрезку e. Если отложить отрезок e два раза, то его правый конец уже перейдет через точку B. Далее берется отрезок $e_1 = \frac{e}{10}$ и 4 раза откладывается от точки A_0. Получается точка A_1. Если отложить отрезок e_1 пять раз, то его правый конец уже перейдет через точку B. Далее берется отрезок $e_2 = \frac{e}{10^2}$ и 1 Раз откладывается от точки A_1. Получается точка A_2 (рис. 8). Если отложить отрезок e_2 2 раза, то его правый конец уже перейдет через точку B. Отрезок $e_3 = \frac{e}{10^3}$ от точки A_2 откладывается 4 раза, отрезок $e_4 = \frac{e}{10^4}$ от точки A_3 откладывается 2 раза, отрезок $e_5 = \frac{e}{10^5}$ от точки A_4 откладывается 1 раз, отрезок $e_6 = \frac{e}{10^6}$ от точки A_5 откладывается 3 раза, и т. д.

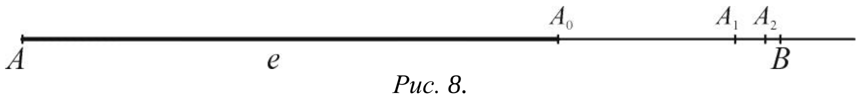

Рис. 8.

Как же измерять длину кривой линии? Естественно заменить кривую линию более простой, а именно, ломаной с «очень большим числом» звеньев, предполагая, что увеличение числа звеньев приведет к более точному измерению длины кривой. Однако, анализ этого подхода выявляет ряд проблем.

Первые трудности возникают уже при попытках дать определение кривой линии. Однако, здесь мы не будем приводить и анализировать различные определения кривых. Некоторые (и притом весьма естественные) из них приводят к существованию «кривых линий», сплошь заполняющих квадрат [4].

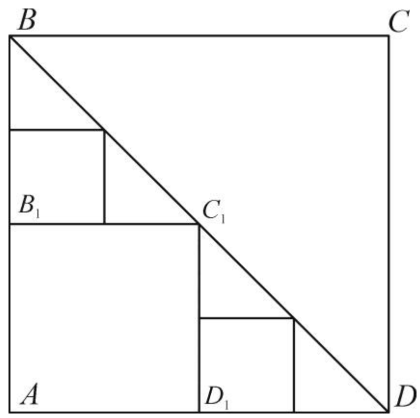

Рис. 9.

Можно также по-разному определять длину кривой. Выяснилось, что если принять за длину кривой предел длин ломаных, «сколь угодно близко прилегающих» к кривой, то этот предел может оказаться бесконечным – имеются кривые, у которых сколь угодно малая дуга не имеет конечной длины, или, если угодно, имеет бесконечную длину.

Более того, как показывает нижеследующий пример, само понятие приближения ломаными не обязательно выпуклой кривой нуждается в уточнении.

Рассмотрим квадрат $ABCD$. Пусть точки B_1, C_1, D_1 – соответственно середины стороны AB, диагонали BD, стороны DA. Длина ломаной $L_1 = BB_1C_1D_1D$ равна $|AB| + |AD| = 2$ (рис. 9). Проделывая подобные построения для треугольников BB_1C_1 и C_1D_1D получаем ломаную L_2 той же длины, состоящую из восьми звеньев, и т. д. При неограниченном увеличении числа звеньев эти ломаные «стремятся» к BD_1, поэтому предел их длины (а все они имеют длину 2) равен длине BD.

Основой этого софизма является следующее заключение: так как последовательность ломаных L_1, L_2, L_3, …; сходится к отрезку BD, то $\rho(BD) = \lim\limits_{n\to\infty}\rho(L_n)$.

Таким образом, неверно, что $\rho\left(\lim\limits_{n\to\infty} L_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\rho(L_n)$.

Сказанное заставляет нас осторожнее относится к определению понятия длины кривой, и, прежде всего, определять ее не для всех кривых, а только для так называемых спрямляемых кривых.

При различных подходах к определению длины кривой тем не менее выполняются некоторые общие свойства длины. Каким естественным условиям должна удовлетворять длина кривой линии? Эти условия следующие:

(i) длина линии – неотрицательное число: $\rho(L) > 0$;

(ii) существует отрезок, длина которого равна 1;

(iii) равные линии имеют равные длины:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow \rho(L_1) = \rho(L_2);$$

(iv) длина линии, составленной из двух линий, последовательно примыкающих друг к другу, равна сумме длин составляющих линий:

$$\rho(L_1 + L_2) = \rho(L_1) + \rho(L_2).$$

(v) пусть L – некоторая кривая линия, ε – произвольное положительное число. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что для всякой линии удовлетворяющей условию $d(L, L') < \delta$. Выполнено соотношение

$$\rho(L') > \rho(L) - \varepsilon.$$

Последнее нуждается в комментарии. Смысл этого условия состоит в том, что если линия L' достаточно близко прилегает к линии L, то длина линии L' не может оказаться намного меньше длины L (в то время, как длина «близкой» линии L' может быть сколь угодно больше длины L) (рис. 10).

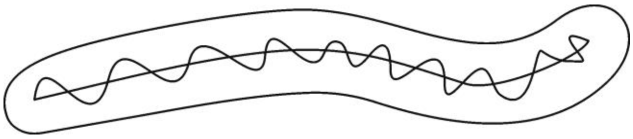

Рис. 10.

Число $d(L, L')$ называется отклонением кривой линии L' от линии L и определяется так: если $O(L, r)$ – множество точек всех кругов радиуса r с центрами в точках кривой L (r-окрестность линии L), то

$$d(L, L') = \inf_{L' \subseteq O(L,r)} \{r\}.$$

Свойства (i)-(v) дают нам аксиоматическое определение длины кривой, освобожденное от тех моментов, которые можно счесть слишком частными. При таком подходе к длине кривой необходимо доказывать ее существование и единственность, т. е. то, что разные процедуры нахождения длины одной кривой не могут привести к разным численным значениям длины [5].

Нетрудно проверить, что определенная в § 2 длина дуги окружности удовлетворяет свойствам (i)-(iv). Несколько сложнее доказать, что выполнено свойство (v).

Контрольные вопросы

1. Каким постулатам удовлетворяет длина ρ отрезка?

2. Сколько раз при измерении длины диагонали единичного квадрата от точки A_6 откладывается отрезок $e_7 = \frac{e}{10^7}$; от точки A_7 откладывается отрезок $e_8 = \frac{e}{10^8}$?

Задачи и упражнения

1. Придумайте софизм, «доказывающий», что π = 2.

Литература

1. Марковичев, А. С. Вопросы дидактики профильного обучения математике. О действительных числах сфере / Педагогические заметки. – Новосибирск: Изд. ИПИО РАО, 2009. – Т. 2. – выпуск 2. – 17-36 с.
2. Дубнов, Я. С. Измерение отрезков. – М., Физматгиз, 1963.
3. Лебег, А. Об измерении величин. – М., Учпедгиз, 1960.
4. Пархоменко, А. С. Что такое линия. – М., ГИТТЛ, 1954.
5. Болтянский, В. Г. Длина кривой и площадь поверхности / Энциклопедия элементарной математики – книга пятая. – М., Наука, 1966 – с.89-141.