МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

И. Б. ЛЯПУНОВ, С. Б. ТРЕПАКОВА

ВАРИАНТЫ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ СУНЦ НГУ ЗА 2022 Г.

Методическое пособие

НОВОСИБИРСК
2022

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
Л 97

Ляпунов, И. Б.

Л 97 Варианты конкурсных задач по математике СУНЦ НГУ за 2022 г. : метод. пособие / И. Б. Ляпунов, С. Б. Трепакова ; СУНЦ НГУ. — Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2022. — 72 с.

ISBN 978–5–4437–1313–7

Сборник содержит конкурсные задачи по математике для 9 и 11-х классов СУНЦ НГУ за 2022 г. Все задачи снабжены решениями или подробными указаниями, ответами и критериями оценивания. Данное методическое пособие предназначено для оканчивающих школу учащихся СУНЦ НГУ, учителей старших классов, а также для всех, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7

ISBN 978–5–4437–1313–7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое издание содержит варианты конкурсных задач по математике 9 и 11-х классов СУНЦ НГУ за 2022 г. Расположение задач традиционное для такого рода изданий — по классам и вариантам. Продолжительность работы выпускников над задачами одного варианта составляет 3 ч 55 мин. Из-за различия в программах выпускникам физико-математического и химико-биологического профиля предлагались различные по трудности варианты задач, для 11 класса, сответственно, 211—214 и 221—224, а для 9 класса — 2911—2914 и 2921—2924. Задачи для 9 класса по традиции размещены после задач для 11 класса. Все задачи снабжены решениями или подробными указаниями, критериями оценивания и ответами. Задачи настоящего сборника позволяют составить представление о требованиях к подготовке выпускников СУНЦ НГУ по математике.

Все задачи являются оригинальными, в том смысле, что составлены заново, именно для данного этапа конкурса, при этом, часть идей по составлению задач заимствована из материалов вступительных испытаний ведущих вузов страны разных лет.

Пособие будет полезно как учащимся СУНЦ НГУ, оканчивающим школу, так и учителям старших классов, а также всем, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

И. Б. Ляпунов, С. Б. Трепакова

РАЗДЕЛ 1

УСЛОВИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ

2022 год, 11 класс

Вариант 211

1. а) Решить уравнение

$$\cos x - 5\sin 2x + \cos 3x = \frac{3\sin 2x + 6\cos x}{\sin x + 1}.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{11\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{(4x^2)} \dfrac{96-4x^2}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором равные стороны $AB = BC = 6$, $\sin\angle BAC = \frac{5}{6}$. Из вершины A проведен диаметр описанной окружности, пересекающий сторону BC в точке D. Найти площадь треугольника ABD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно два различных значения переменной x удовлетворяют равенству $\dfrac{x-5}{x^2-16} \cdot \left(2x - 2a - \sqrt{x^2-(a+3)x+3a}\right) = 0$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 2$ и $BC = 8$, все ее боковые ребра SA, SB и SC имеют одинаковую длину. Около пирамиды $SABC$ описана сфера радиуса $R = 9$. Найти объем пирамиды $SABC$ и двугранный угол при ребре AC, рассмотреть все возможные случаи.

Вариант 212

1. а) Решить уравнение
$$\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \frac{2\sin 2x - 4\sin x}{\cos x - 1}.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{19\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{(9x^2)} \dfrac{200 - 5x^2}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором равные стороны $AB = BC = 8$, $\sin\angle BAC = \frac{7}{8}$. Из вершины A проведен диаметр описанной окружности, пересекающий сторону BC в точке D. Найти площадь треугольника ABD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно два различных значения переменной x удовлетворяют равенству $\dfrac{x-9}{x^2-64} \cdot \left(2x - 2a - \sqrt{x^2 - (a+7)x + 7a}\right) = 0$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$ и $BC = 10$, все ее боковые ребра SA, SB и SC имеют одинаковую длину. Около пирамиды $SABC$ описана сфера радиуса $R = 15$. Найти объем пирамиды $SABC$ и двугранный угол при ребре AC, рассмотреть все возможные случаи.

Вариант 213

1. а) Решить уравнение
$$\cos x + 3\sin 2x - \cos 3x = \frac{2\sin 2x - 4\cos x}{\sin x - 1}.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{15\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{(16x^2)} \dfrac{90 - 6x^2}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором равные стороны $AB = BC = 10$, $\sin\angle BAC = \frac{9}{10}$. Из вершины A проведен диаметр описанной окружности, пересекающий сторону BC в точке D. Найти площадь треугольника ABD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно два различных значения переменной x удовлетворяют равенству $\dfrac{x-10}{x^2-25}\cdot\left(3x-3a-\sqrt{x^2-(a+4)x+4a}\right)=0$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=6$ и $BC=8$, все ее боковые ребра SA, SB и SC имеют одинаковую длину. Около пирамиды $SABC$ описана сфера радиуса $R=13$. Найти объем пирамиды $SABC$ и двугранный угол при ребре AC, рассмотреть все возможные случаи.

Вариант 214

1. а) Решить уравнение

$$\sin x+5\sin 2x-\sin 3x=\frac{3\sin 2x+6\sin x}{\cos x+1}.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{13\pi}{4};-\frac{7\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{(9x^2)}\dfrac{252-4x^2}{x}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором равные стороны $AB=BC=8$, $\sin\angle BAC=\frac{3}{4}$. Из вершины A проведен диаметр описанной окружности, пересекающий сторону BC в точке D. Найти площадь треугольника ABD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно два различных значения переменной x удовлетворяют равенству $\dfrac{x-11}{x^2-49}\cdot\left(3x-3a-\sqrt{x^2-(a+5)x+5a}\right)=0$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=4$ и $BC=6$, все ее боковые ребра SA, SB и SC имеют одинаковую длину. Около пирамиды $SABC$ описана сфера радиуса $R=7$. Найти объем пирамиды $SABC$ и двугранный угол при ребре AC, рассмотреть все возможные случаи.

Вариант 221

1. а) Решить уравнение $2\cos x\cos 2x - 5\sin 2x = 6\cos x$.

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{11\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{|2x|}\dfrac{96-4x^2}{x} \leqslant 1$.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором равные стороны $AB = BC = 6$, $\sin\angle BAC = \frac{5}{6}$. Из вершины A проведен диаметр описанной окружности, пересекающий сторону BC в точке D. Найти длину отрезка AD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно два различных значения переменной x удовлетворяют равенству $(x-5)\cdot\left(2x-2a-\sqrt{x^2-(a+3)x+3a}\right)=0$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 2$ и $BC = 8$, все ее боковые ребра SA, SB и SC имеют одинаковую длину. Около пирамиды $SABC$ описана сфера радиуса $R = 9$. Найти объем пирамиды $SABC$ и двугранный угол при ребре AC, если высота пирамиды больше радиуса сферы.

Вариант 222

1. а) Решить уравнение $2\cos x\sin 2x - 3\sin 2x = 4\sin x$.

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{19\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{|3x|}\dfrac{200-5x^2}{x} \leqslant 1$.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором равные стороны $AB = BC = 8$, $\sin\angle BAC = \frac{7}{8}$. Из вершины A проведен диаметр описанной окружности, пересекающий сторону BC в точке D. Найти длину отрезка AD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно два различных значения переменной x удовлетворяют равенству $(x-9)\cdot\left(2x-2a-\sqrt{x^2-(a+7)x+7a}\right)=0$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$ и $BC = 10$, все ее боковые ребра SA, SB и SC имеют одинаковую длину. Около пирамиды $SABC$ описана сфера радиуса $R = 15$. Найти объем пирамиды $SABC$ и двугранный угол при ребре AC, если высота пирамиды больше радиуса сферы.

Вариант 223

1. а) Решить уравнение $2\sin x \sin 2x + 3\sin 2x = 4\cos x$.

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{15\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{|4x|} \dfrac{90 - 6x^2}{x} \leqslant 1$.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором равные стороны $AB = BC = 10$, $\sin\angle BAC = \frac{9}{10}$. Из вершины A проведен диаметр описанной окружности, пересекающий сторону BC в точке D. Найти длину отрезка AD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно два различных значения переменной x удовлетворяют равенству $(x - 10)\cdot\left(3x - 3a - \sqrt{x^2 - (a+4)x + 4a}\right) = 0$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 6$ и $BC = 8$, все ее боковые ребра SA, SB и SC имеют одинаковую длину. Около пирамиды $SABC$ описана сфера радиуса $R = 13$. Найти объем пирамиды $SABC$ и двугранный угол при ребре AC, если высота пирамиды больше радиуса сферы.

Вариант 224

1. а) Решить уравнение $-2\sin x \cos 2x + 5\sin 2x = 6\sin x$.

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{13\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{|3x|} \dfrac{252 - 4x^2}{x} \leqslant 1$.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором равные стороны $AB = BC = 8$, $\sin\angle BAC = \frac{3}{4}$. Из вершины A проведен диаметр описанной окружности, пересекающий сторону BC в точке D. Найти длину отрезка AD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно два различных значения переменной x удовлетворяют равенству $(x-11)\cdot\left(3x-3a-\sqrt{x^2-(a+5)x+5a}\right)=0$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=4$ и $BC=6$, все ее боковые ребра SA, SB и SC имеют одинаковую длину. Около пирамиды $SABC$ описана сфера радиуса $R=7$. Найти объем пирамиды $SABC$ и двугранный угол при ребре AC, если высота пирамиды больше радиуса сферы.

2022 год, 9 класс

Вариант 2911

1. Два поезда одновременно выходят навстречу друг другу из городов A и C, расстояние между которыми 160 км, и встречаются через 1 ч 20 мин. Продолжая движение с той же скоростью, поезд, вышедший из A, прибывает в C на 2 ч раньше, чем другой поезд, продолживший после встречи движение со своей скоростью, прибывает в A. Найти скорости обоих поездов.

2. Числа $15\cdot(1+\sin 2\alpha)$, $17\cdot\left(\sqrt{-\sin 4\alpha}\right)^2$ и $77\cdot(1-\sin 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$.

3. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D. Длины отрезков AD, DB и DC относятся как $1:7:2$, соответственно. Радиус окружности, описанной около треугольника BDC, равен $\frac{49}{8\sqrt{3}}$. Известно, что на одной прямой лежат точка B и центры O_1, O_2 окружностей, описанных около треугольников ADC и BDC. Найти стороны треугольника ABC и его площадь, не используя формулу Герона.

4. Решить неравенство $\dfrac{x|x^2-7|}{x+4-\sqrt{x+46}}\leqslant\dfrac{x^3-7x}{x+4-\sqrt{x+46}}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y|+|x|=a, \\ |y^2-18y|=81-x^2 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 2912

1. Два поезда одновременно выходят навстречу друг другу из городов A и C, расстояние между которыми 240 км, и встречаются через 2 ч 24 мин. Продолжая движение с той же скоростью, поезд, вышедший из A, прибывает в C на 2 ч раньше, чем другой поезд, продолживший после встречи движение со своей скоростью, прибывает в A. Найти скорости обоих поездов.

2. Числа $13 \cdot (1 - \sin 2\alpha)$, $19 \cdot \left(\sqrt{-\sin 4\alpha}\right)^2$ и $111 \cdot (1 + \sin 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$.

3. В треугольнике EFG на стороне EF выбрана точка K. Длины отрезков EK, KF и KG относятся как $3 : 7 : 4$, соответственно. Радиус окружности, описанной около треугольника FKG, равен $\frac{49}{6\sqrt{5}}$. Известно, что на одной прямой лежат точка F и центры O_1, O_2 окружностей, описанных около треугольников EKG и FKG. Найти стороны треугольника EFG и его площадь, не используя формулу Герона.

4. Решить неравенство $\dfrac{x|x^2 - 23|}{x + 3 - \sqrt{x + 59}} \leqslant \dfrac{x^3 - 23x}{x + 3 - \sqrt{x + 59}}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ |x^2 - 16x| = 64 - y^2 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 2913

1. Два поезда одновременно выходят навстречу друг другу из городов A и C, расстояние между которыми 350 км, и встречаются через 2 ч 55 мин. Продолжая движение с той же скоростью, поезд, вышедший из A, прибывает в C на 2 ч раньше, чем другой поезд, продолживший после встречи движение со своей скоростью, прибывает в A. Найти скорости обоих поездов.

2. Числа $7\cdot(1+\sin 2\alpha)$, $18\cdot\left(\sqrt{-\sin 4\alpha}\right)^2$ и $185\cdot(1-\sin 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$.

3. В треугольнике LNP на стороне LN выбрана точка Q. Длины отрезков LQ, QN и QP относятся как $1:8:2$, соответственно. Радиус окружности, описанной около треугольника NQP, равен $\frac{64}{6\sqrt{7}}$. Известно, что на одной прямой лежат точка N и центры O_1, O_2 окружностей, описанных около треугольников LQP и NQP. Найти стороны треугольника LNP и его площадь, не используя формулу Герона.

4. Решить неравенство $\dfrac{x|x^2-3|}{x+5-\sqrt{x+47}} \leqslant \dfrac{x^3-3x}{x+5-\sqrt{x+47}}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y|+|x|=a, \\ |y^2-14y|=49-x^2 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 2914

1. Два поезда одновременно выходят навстречу друг другу из городов A и C, расстояние между которыми 600 км, и встречаются через 6 ч 40 мин. Продолжая движение с той же скоростью, поезд, вышедший из A, прибывает в C на 3 ч раньше, чем другой поезд, продолживший после встречи движение со своей скоростью, прибывает в A. Найти скорости обоих поездов.

2. Числа $11\cdot(1-\sin 2\alpha)$, $16\cdot\left(\sqrt{-\sin 4\alpha}\right)^2$ и $93\cdot(1+\sin 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$.

3. В треугольнике PRT на стороне PR выбрана точка V. Длины отрезков PV, VR и VT относятся как $3:11:4$, соответственно. Радиус окружности, описанной около треугольника RVT, равен $\frac{121}{6\sqrt{13}}$. Известно, что на одной прямой лежат точка R и центры O_1, O_2 окружностей, описанных около треугольников PVT и RVT.

Найти стороны треугольника PRT и его площадь, не используя формулу Герона.

4. Решить неравенство $\dfrac{x|x^2-13|}{x+6-\sqrt{x+96}} \leqslant \dfrac{x^3-13x}{x+6-\sqrt{x+96}}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ |x^2-12x|=36-y^2 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 2921

1. Расстояние между городами A и C пассажирский поезд преодолевает за 5 ч, а электричка — за 7 ч. Из A в C вышел пассажирский поезд, а из C в A — одновременно — электричка. Через какое время пассажирский поезд встретится с электричкой? Указать время в целых часах и минутах.

2. Числа $15\cdot(1+\sin 2\alpha)$, $17\cdot\sin 4\alpha$ и $77\cdot(1-\sin 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$.

3. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D. Длины отрезков AD, DB и DC относятся как $1:7:2$, соответственно, а длина стороны BC равна 7. Известно, что на одной прямой лежат точка B и центры O_1, O_2 окружностей, описанных около треугольников ADC и BDC. Найти стороны треугольника ABC и его площадь, не используя формулу Герона.

4. Решить неравенство $\dfrac{|x^2-7|}{x+4-\sqrt{x+46}} \geqslant \dfrac{x^2-7}{x+4-\sqrt{x+46}}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y-|x|=a, \\ |y^2-18y|=81-x^2 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 2922

1. Расстояние между городами A и C пассажирский поезд преодолевает за 4 ч, а электричка — за 6 ч. Из A в C вышел пассажирский поезд, а из C в A — одновременно — электричка. Через какое время пассажирский поезд встретится с электричкой? Указать время в целых часах и минутах.

2. Числа $13\cdot(1-\sin 2\alpha)$, $19\cdot\sin 4\alpha$ и $111\cdot(1+\sin 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$.

3. В треугольнике EFG на стороне EF выбрана точка K. Длины отрезков EK, KF и KG относятся как $3:7:4$, соответственно, а длина стороны FG равна 7. Известно, что на одной прямой лежат точка F и центры O_1, O_2 окружностей, описанных около треугольников EKG и FKG. Найти стороны треугольника EFG и его площадь, не используя формулу Герона.

4. Решить неравенство $\dfrac{|x^2-23|}{x+3-\sqrt{x+59}} \geqslant \dfrac{x^2-23}{x+3-\sqrt{x+59}}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y-|x|=a, \\ |y^2+16y|=64-x^2 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 2923

1. Расстояние между городами A и C пассажирский поезд преодолевает за 3 ч, а электричка — за 7 ч. Из A в C вышел пассажирский поезд, а из C в A — одновременно — электричка. Через какое время пассажирский поезд встретится с электричкой? Указать время в целых часах и минутах.

2. Числа $7\cdot(1+\sin 2\alpha)$, $18\cdot\sin 4\alpha$ и $185\cdot(1-\sin 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$.

3. В треугольнике LNP на стороне LN выбрана точка Q. Длины отрезков LQ, QN и QP относятся как $1:8:2$, соответственно, а длина стороны NP равна 8. Известно, что на одной прямой лежат точка N и центры O_1, O_2 окружностей, описанных около треугольников LQP и NQP. Найти стороны треугольника LNP и его площадь, не используя формулу Герона.

4. Решить неравенство $\dfrac{|x^2-3|}{x+5-\sqrt{x+47}} \geqslant \dfrac{x^2-3}{x+5-\sqrt{x+47}}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y-|x|=a, \\ |y^2-14y|=49-x^2 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 2924

1. Расстояние между городами A и C пассажирский поезд преодолевает за 6 ч, а электричка — за 9 ч. Из A в C вышел пассажирский поезд, а из C в A — одновременно — электричка. Через какое время пассажирский поезд встретится с электричкой? Указать время в целых часах и минутах.

2. Числа $11\cdot(1-\sin 2\alpha)$, $16\cdot\sin 4\alpha$ и $93\cdot(1+\sin 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$.

3. В треугольнике PRT на стороне PR выбрана точка V. Длины отрезков PV, VR и VT относятся как $3:11:4$, соответственно, а длина стороны RT равна 11. Известно, что на одной прямой лежат точка R и центры O_1, O_2 окружностей, описанных около треугольников PVT и RVT. Найти стороны треугольника PRT и его площадь, не используя формулу Герона.

4. Решить неравенство $\dfrac{|x^2-13|}{x+6-\sqrt{x+96}} \geqslant \dfrac{x^2-13}{x+6-\sqrt{x+96}}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y-|x|=a, \\ |y^2+12y|=36-x^2 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

РАЗДЕЛ 2

УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

2022 год, 11 класс

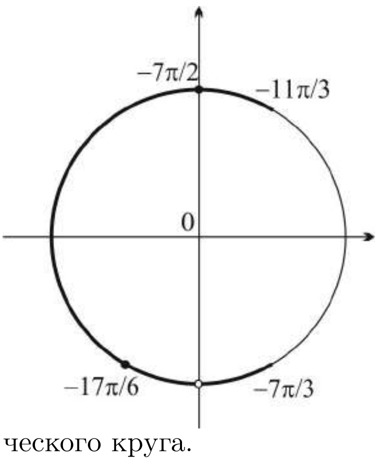
Вариант 211

1. а) Указание: данное уравнение имеет смысл при $\sin x+1 \neq 0$, последовательно преобразуя его, имеем

$$2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x - 5 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 6 \cdot \cos x}{\sin x + 1},$$

$$2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x - 5 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{3 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (\sin x + 1)}{\sin x + 1},$$

$\cos x \cdot (\cos 2x - 5 \sin x) = 3 \cos x$, $\cos x \cdot (1 - 2\sin^2 x - 5 \sin x - 3) = 0$, откуда $\cos x = 0$ или $2\sin^2 x + 5 \sin x + 2 = 0$. Из серии решений первого уравнения $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ следует исключить решения уравнения $\sin x + 1 = 0$, в итоге $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ — в ответ.



Во втором уравнении выполним замену $y = \sin x$, $y \in [-1; 1]$, получим уравнение $2y^2 + 5y + 2 = 0$, корни которого $y_1 = -2$ — посторонний, так как $y_1 \notin [-1; 1]$ и $y_2 = -\frac{1}{2}$. Выполнив обратную замену, получим уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$, имеющее корни $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — в ответ.

б) Корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}\right]$, отберем с помощью тригонометрического круга.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
б) $-\frac{17\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{2}$.

2. Указание: наше неравенство имеет смысл при ограничениях

$$\begin{cases} 4x^2 > 0, \\ 4x^2 \neq 1, \\ \dfrac{96-4x^2}{x} > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(x+2\sqrt{6})(x-2\sqrt{6})}{x} < 0, \end{cases}$$

откуда имеем ограничение $x \in (-\infty; -2\sqrt{6}) \cup (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 2\sqrt{6})$.

Перепишем неравенство в эквивалентном виде

$$\log_{(4x^2)} \tfrac{96-4x^2}{x} \leqslant \log_{(4x^2)} 2|x|$$

и решим его на каждом промежутке его области существования.

Пусть $x \in (-\infty; -2\sqrt{6})$, тогда верно $|x| = -x$ и $4x^2 > 1$, при потенцировании знак неравенства сохранится, имеем

$$\tfrac{96-4x^2}{x} \leqslant -2x,\ \tfrac{96-2x^2}{x} \leqslant 0,\ \tfrac{x^2-48}{x} \geqslant 0,\ \tfrac{(x+4\sqrt{3})(x-4\sqrt{3})}{x} \geqslant 0,$$

откуда $x \in [-4\sqrt{3}; 0) \cup [4\sqrt{3}; +\infty)$, с учетом ограничения находим $x \in [-4\sqrt{3}; -2\sqrt{6})$ — в ответ.

Пусть $x \in (0; \frac{1}{2})$, тогда верно $|x| = x$ и $4x^2 < 1$, при потенцировании знак неравенства изменится, имеем

$$\tfrac{96-4x^2}{x} \geqslant 2x,\ \tfrac{96-6x^2}{x} \geqslant 0,\ \tfrac{x^2-16}{x} \leqslant 0,\ \tfrac{(x+4)(x-4)}{x} \leqslant 0,$$

$x \in (-\infty; -4] \cup (0; 4]$, с учетом ограничения $x \in (0; \frac{1}{2})$ — в ответ.

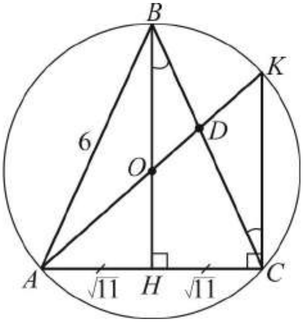
Пусть $x \in (\frac{1}{2}; 2\sqrt{6})$, тогда верно $|x| = x$ и $4x^2 > 1$, при потенцировании знак неравенства сохранится, имеем

$$\tfrac{96-4x^2}{x} \leqslant 2x,\ \tfrac{96-6x^2}{x} \leqslant 0,\ \tfrac{x^2-16}{x} \geqslant 0,\ \tfrac{(x+4)(x-4)}{x} \geqslant 0,$$

$x \in [-4; 0) \cup [4; +\infty)$, с учетом ограничения $x \in [4; 2\sqrt{6})$ — в ответ.

Ответ: $[-4\sqrt{3}; -2\sqrt{6}) \cup (0; \frac{1}{2}) \cup [4; 2\sqrt{6})$.

3. Указание: проведем высоту BH к основанию AC. Тогда



в равнобедренном треугольнике проведенная высота BH является медианой, откуда $AH = HC$. Из прямоугольного треугольника ABH имеем $BH = AB \cdot \sin\angle HAB$. Следовательно, $BH = 5$. По теореме Пифагора находим $AH = \sqrt{36-25} = \sqrt{11}$, основание $AC = 2\sqrt{11}$. Так как треугольник ABC равнобедренный, то центр O описанной окружности лежит на высоте BH или на ее продолжении за точку H. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $\frac{AB}{\sin\angle BCA} = 2R$, где R — радиус описанной окружности. Получаем $R = \frac{6}{2\cdot\frac{5}{6}} = \frac{18}{5}$. Длина отрезка $OH = 5 - \frac{18}{5} = \frac{7}{5}$. Найдем, в каком отношении точка D делит сторону BC. Заметим, что опирающийся на диаметр AK угол ACK — прямой, откуда $OH||KC$, отрезок OH является средней линией треугольника ACK и $2\cdot OH = KC = \frac{14}{5}$. Накрест лежащие углы при параллельных прямых BH и KC — углы HBD и KCD, равны. Углы BDO и CDK равны, как вертикальные, следовательно треугольники OBD и KCD подобны, откуда $\frac{BD}{DC} = \frac{BO}{KC} = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$. Далее находим $\frac{BD}{BC} = \frac{9}{16}$. Теперь искомая $S_{\triangle ABD} = \frac{9}{16}\cdot S_{\triangle ABC} = \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{11}\cdot 5 = \frac{45\sqrt{11}}{16}$.

Замечание. Найти отношение $\frac{BD}{DC}$ также можно с помощью теоремы Менелая, записав соотношение $\frac{BO}{OH}\cdot\frac{HA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB} = 1$ и подставив в него числовые данные.

Ответ: $\frac{45\sqrt{11}}{16}$.

4. Указание: равенство имеет смысл при $x \neq \pm 4$, одновременно, подкоренное выражение должно быть неотрицательно.

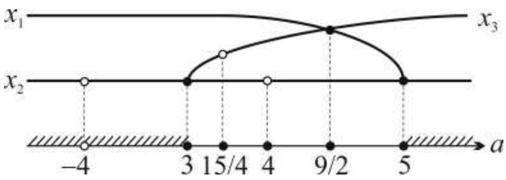
Из равенства нулю первого множителя имеем корень $x_1 = 5$. Этот корень существует при условии $(x_1)^2 - (a+3)x_1 + 3a \geqslant 0$, перепишем условие в виде $(x_1 - a)(x_1 - 3) \geqslant 0$. После подстановки $x_1 = 5$ получим $(5-a)(5-3) \geqslant 0$, откуда $a \leqslant 5$. Понятно, что $x_1 \neq \pm 4$, поэтому дополнительных ограничений на a для существования корня $x_1 = 5$ не возникает. Итак, $x_1 = 5$ при $a \leqslant 5$.

Из равенства нулю второго множителя имеем эквивалентное уравнение $2(x-a) = \sqrt{(x-a)(x-3)}$, которое при $x - a \geqslant 0$ равносильно $4(x-a)^2 = (x-a)(x-3)$. Последнее уравнение распадается на два $x - a = 0$ и $4(x-a) = x - 3$, оно имеет корни $x_2 = a$ при $a \neq \pm 4$ и $x_3 = \frac{4a-3}{3}$ при $\frac{4a-3}{3} - a \geqslant 0$ и $\frac{4a-3}{3} \neq \pm 4$. В итоге корень x_3 существует при $a \geqslant 3$ и $a \neq \frac{15}{4} \Leftrightarrow \frac{4a-3}{3} \neq 4$. Условие $\frac{4a-3}{3} = -4$ дает $a = -\frac{9}{4}$, что противоречит условию $a \geqslant 3$ и соответствует исключению постороннего корня.

Таким образом, данное уравнение может иметь одновременно до трех корней при различных a:

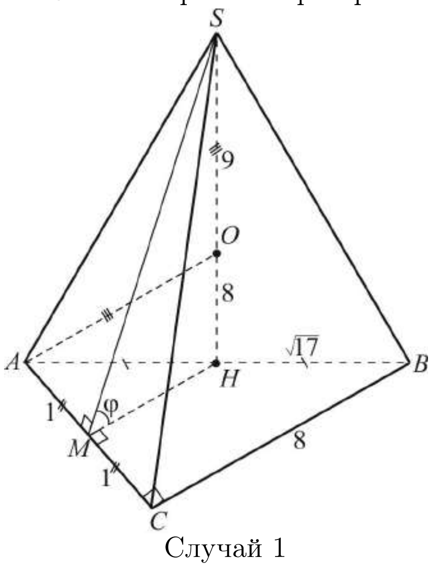
$$\left[\begin{array}{ll} x_1 = 5, & a \leqslant 5, \\ x_2 = a, & a \neq \pm 4, \\ x_3 = \dfrac{4a-3}{3}, & a \geqslant 3 \text{ и } a \neq \dfrac{15}{4}. \end{array}\right.$$

Число корней может уменьшиться, если часть из них совпадет, или один из корней станет посторонним за счет его выхода из области существования уравнения. Найдем сначала случаи совпадения корней. Имеем $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a = 5$, $x_1 = x_3 \Leftrightarrow a = \frac{9}{2}$ и $x_2 = x_3 \Leftrightarrow a = 3$. Над числовой осью для параметра a нанесем линиями с «выколотыми» точками области существования корней x_1, x_2 и x_3, согласно рисунку. Пересечению линий соответствуют совпадения корней. Требуется, чтобы произвольная вертикальная прямая над числовой осью имела ровно два пересечения с линиями. Области, которым соответствуют ровно два корня, заштрихованы на числовой оси, также выделены отдельные точки, соответствующие ровно двум корням.

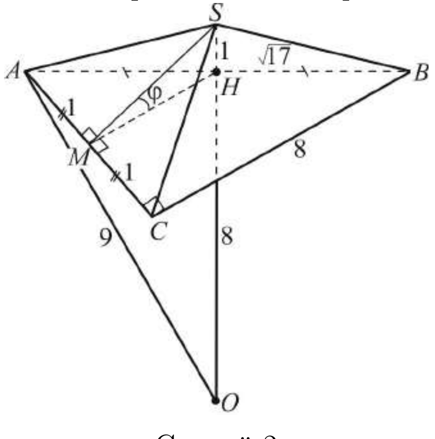


Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-4; 3] \cup \{\frac{15}{4}; 4; \frac{9}{2}\} \cup [5; +\infty)$.

5. Указание: так как боковые ребра пирамиды равны между собой, то вершина S проектируется в точку H — центр описанной окружности около основания ABC. При этом точка H является серединой гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2\sqrt{17}$, $AH = \sqrt{17}$. Проведем MH — среднюю линию треугольника ABC, где M — середина AC. Средняя



Случай 1



Случай 2

линия MH параллельна BC и равна половине BC, следовательно, $MH=4$ и $MH\perp AC$. Центр O сферы, описанной около данной пирамиды, также проектируется в центр H, описанной около основания ABC окружности. Следовательно, точки S, H и O лежат на одной прямой.

Случай 1. Центр O лежит между точками S и H. В прямоугольном треугольнике AHO гипотенуза $AO=R=9$, катет $OH=\sqrt{9^2-17}=8$. Высота $SH=SO+OH=9+8=17$. Искомый объем $V_{SABC}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 8)\cdot 17=\frac{136}{3}$. Далее, SM — наклонная, MH — проекция наклонной SM на плоскость ABC и $MH\perp AC$, по теореме о трех перпендикулярах $SM\perp AC$, т. е. $\varphi=\angle SMH$ — линейный угол двугранного угла при ребре AC. Из прямоугольного треугольника SMH находим $\operatorname{tg}\varphi=\frac{17}{4}$. Искомый угол $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{17}{4}$.

Случай 2. Точка H лежит между точками S и O. В прямоугольном треугольнике AHO гипотенуза $AO=R=9$, катет $OH=\sqrt{9^2-17}=8$. Тогда $SH=SO-OH=9-8=1$. Искомый объем $V_{SABC}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 8)\cdot 1=\frac{8}{3}$. Далее, SM — наклонная, MH — проекция SM на плоскость ABC, $MH\perp AC$. По теореме о трех перпендикулярах $SM\perp AC$. Угол $\varphi=\angle SMH$ — линейный угол двугранного угла при ребре AC. Из прямоугольного треугольника SMH находим $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{4}$. Искомый угол $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

Ответ: $V_1=\frac{136}{3}$, $\varphi_1=\operatorname{arctg}\frac{17}{4}$, $V_2=\frac{8}{3}$, $\varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

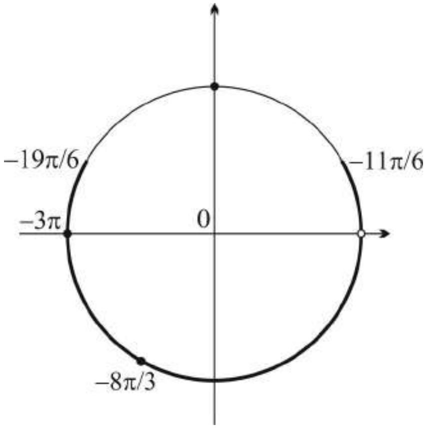
Вариант 212

1. а) Указание: данное уравнение имеет смысл при $\cos x-1\neq 0$, последовательно преобразуя его, имеем

$$2\cdot\sin 2x\cdot\cos x-3\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x=\frac{2\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x-4\cdot\sin x}{\cos x-1},$$

$$2\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos x-3\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x=\frac{2\cdot 2\cdot\sin x\cdot(\cos x-1)}{\cos x-1},$$

$\sin x\cdot(2\cos^2 x-3\cos x)=2\sin x$, $\sin x\cdot(2\cos^2 x-3\cos x-2)=0$, откуда $\sin x=0$ или $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$. Из серии решений первого уравнения $x=\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$ следует исключить решения уравнения $\cos x-1=0$, в итоге $x=\pi+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$ — в ответ.



Во втором уравнении выполним замену $y = \cos x$, $y \in [-1;1]$, получим уравнение $2y^2 - 3y - 2 = 0$, корни которого $y_1 = 2$ — посторонний, так как $y_1 \notin [-1;1]$ и $y_2 = -\frac{1}{2}$. Выполнив обратную замену, получим уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$, имеющее корни $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — в ответ.

б) Корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{19\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}\right]$, отберем с помощью тригонометрического круга.

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) -3π, $-\frac{8\pi}{3}$.

2. Указание: наше неравенство имеет смысл при ограничениях

$$\begin{cases} 9x^2 > 0, \\ 9x^2 \neq 1, \\ \dfrac{200 - 5x^2}{x} > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{(x + 2\sqrt{10})(x - 2\sqrt{10})}{x} < 0, \end{cases}$$

откуда имеем ограничение $x \in (-\infty; -2\sqrt{10}) \cup (0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; 2\sqrt{10})$.

Перепишем неравенство в эквивалентном виде

$$\log_{(9x^2)} \frac{200-5x^2}{x} \leqslant \log_{(9x^2)} 3|x|$$

и решим его на каждом промежутке его области существования.

Пусть $x \in (-\infty; -2\sqrt{10})$, тогда верно $|x| = -x$ и $9x^2 > 1$, при потенцировании знак неравенства сохранится, имеем

$$\frac{200-5x^2}{x} \leqslant -3x, \ \frac{200-2x^2}{x} \leqslant 0, \ \frac{x^2-100}{x} \geqslant 0, \ \frac{(x+10)(x-10)}{x} \geqslant 0,$$

откуда $x \in [-10; 0) \cup [10; +\infty)$, с учетом ограничения находим $x \in [-10; -2\sqrt{10})$ — в ответ.

Пусть $x \in (0; \frac{1}{3})$, тогда верно $|x| = x$ и $9x^2 < 1$, при потенцировании знак неравенства изменится, имеем

$$\frac{200-5x^2}{x} \geqslant 3x, \ \frac{200-8x^2}{x} \geqslant 0, \ \frac{x^2-25}{x} \leqslant 0, \ \frac{(x+5)(x-5)}{x} \leqslant 0,$$

$x \in (-\infty; -5] \cup (0; 5]$, с учетом ограничения $x \in (0; \frac{1}{3})$ — в ответ.

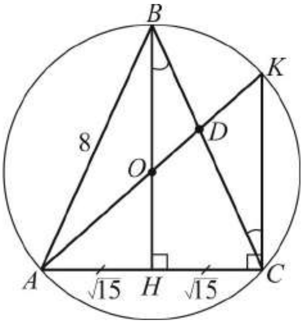
Пусть $x \in (\frac{1}{3}; 2\sqrt{10})$, тогда верно $|x| = x$ и $9x^2 > 1$, при потенцировании знак неравенства сохранится, имеем

$$\frac{200-5x^2}{x} \leqslant 3x,\ \frac{200-8x^2}{x} \leqslant 0,\ \frac{x^2-25}{x} \geqslant 0,\ \frac{(x+5)(x-5)}{x} \geqslant 0,$$

$x \in [-5; 0) \cup [5; +\infty)$, с учетом ограничения $x \in [5; 2\sqrt{10})$ — в ответ.

Ответ: $[-10; -2\sqrt{10}) \cup (0; \frac{1}{3}) \cup [5; 2\sqrt{10})$.

3. Указание: проведем высоту BH к основанию AC. Тогда в равнобедренном треугольнике проведенная высота BH является медианой, откуда $AH = HC$. Из прямоугольного треугольника ABH имеем $BH = AB \cdot \sin\angle HAB$. Следовательно, $BH = 7$. По теореме Пифагора находим $AH = \sqrt{64-49} = \sqrt{15}$, основание $AC = 2\sqrt{15}$. Так как треугольник ABC равнобедренный, то центр O описанной окружности лежит на высоте BH или на ее продолжении за точку H. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $\frac{AB}{\sin\angle BCA} = 2R$, где R — радиус описанной окружности. Получаем $R = \frac{8}{2\cdot\frac{7}{8}} = \frac{32}{7}$. Длина отрезка $OH = 7 - \frac{32}{7} = \frac{17}{7}$. Найдем, в каком отношении точка D делит сторону BC. Заметим, что опирающийся на диаметр AK угол ACK — прямой, откуда $OH||KC$, отрезок OH является средней линией треугольника ACK и $2 \cdot OH = KC = \frac{34}{7}$. Накрест лежащие углы при параллельных прямых BH и KC — углы HBD и KCD, равны. Углы BDO и CDK равны, как вертикальные, следовательно треугольники OBD и KCD подобны, откуда $\frac{BD}{DC} = \frac{BO}{KC} = \frac{32}{34} = \frac{16}{17}$. Далее находим $\frac{BD}{BC} = \frac{16}{33}$. Теперь искомая $S_{\triangle ABD} = \frac{16}{33} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{16}{33} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{15} \cdot 7 = \frac{112\sqrt{15}}{33}$.



Замечание. Найти отношение $\frac{BD}{DC}$ также можно с помощью теоремы Менелая, записав соотношение $\frac{BO}{OH} \cdot \frac{HA}{AC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$ и подставив в него числовые данные.

Ответ: $\frac{112\sqrt{15}}{33}$.

4. Указание: равенство имеет смысл при $x \neq \pm 8$, одновременно, подкоренное выражение должно быть неотрицательно.

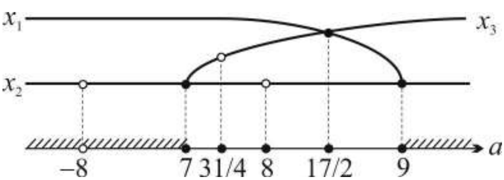
Из равенства нулю первого множителя имеем корень $x_1 = 9$. Этот корень существует при условии $(x_1)^2 - (a+7)x_1 + 7a \geqslant 0$, перепишем условие в виде $(x_1 - a)(x_1 - 7) \geqslant 0$. После подстановки $x_1 = 9$ получим $(9 - a)(9 - 7) \geqslant 0$, откуда $a \leqslant 9$. Понятно, что $x_1 \neq \pm 8$, поэтому дополнительных ограничений на a для существования корня $x_1 = 9$ не возникает. Итак, $x_1 = 9$ при $a \leqslant 9$.

Из равенства нулю второго множителя имеем эквивалентное уравнение $2(x-a) = \sqrt{(x-a)(x-7)}$, которое при $x - a \geqslant 0$ равносильно $4(x-a)^2 = (x-a)(x-7)$. Последнее уравнение распадается на два $x - a = 0$ и $4(x - a) = x - 7$, оно имеет корни $x_2 = a$ при $a \neq \pm 8$ и $x_3 = \frac{4a-7}{3}$ при $\frac{4a-7}{3} - a \geqslant 0$ и $\frac{4a-7}{3} \neq \pm 8$. В итоге корень x_3 существует при $a \geqslant 7$ и $a \neq \frac{31}{4} \Leftrightarrow \frac{4a-7}{3} \neq 8$. Условие $\frac{4a-7}{3} = -8$ дает $a = -\frac{17}{4}$, что противоречит условию $a \geqslant 7$ и соответствует исключению постороннего корня.

Таким образом, данное уравнение может иметь одновременно до трех корней при различных a:

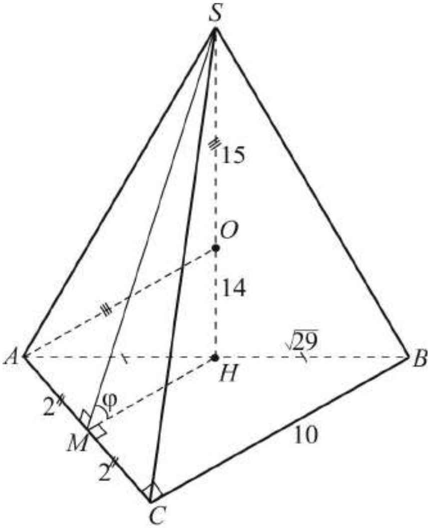
$$\left[\begin{array}{ll} x_1 = 9, & a \leqslant 9, \\ x_2 = a, & a \neq \pm 8, \\ x_3 = \dfrac{4a-7}{3}, & a \geqslant 7 \text{ и } a \neq \dfrac{31}{4}. \end{array}\right.$$

Число корней может уменьшиться, если часть из них совпадет, или один из корней станет посторонним за счет его выхода из области существования уравнения. Найдем сначала случаи совпадения корней. Имеем $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a = 9$, $x_1 = x_3 \Leftrightarrow a = \frac{17}{2}$ и $x_2 = x_3 \Leftrightarrow a = 7$. Над числовой осью для параметра a нанесем линиями с «выколотыми» точками области существования корней x_1, x_2 и x_3, согласно рисунку. Пересечению линий соответствуют совпадения корней. Требуется, чтобы произвольная вертикальная прямая над числовой осью имела ровно два пересечения с линиями. Области, которым соответствуют ровно два корня, заштрихованы на числовой оси, также выделены отдельные точки, соответствующие ровно двум корням.

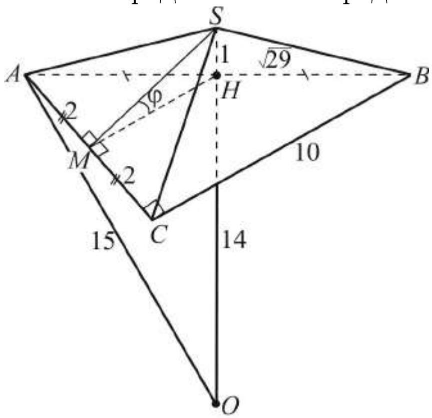


Ответ: $(-\infty; -8) \cup (-8; 7] \cup \{\frac{31}{4}; 8; \frac{17}{2}\} \cup [9; +\infty)$.

5. Указание: так как боковые ребра пирамиды равны между собой, то вершина S проектируется в точку H — центр описанной окружности около основания ABC. При этом точка H является серединой гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{4^2 + 10^2} = 2\sqrt{29}$, $AH = \sqrt{29}$. Проведем MH — среднюю линию треугольника ABC, где M — середина AC. Средняя линия MH параллельна BC и равна половине BC, следовательно, $MH = 5$ и $MH \perp AC$. Центр O сферы, описанной около данной пирамиды, также проектируется в центр H, описанной около основания ABC окружности. Следовательно, точки S, H и O лежат на одной прямой.



Случай 1



Случай 2

Случай 1. Центр O лежит между точками S и H. В прямоугольном треугольнике AHO гипотенуза $AO = R = 15$, катет $OH = \sqrt{15^2 - 29} = 14$. Высота $SH = SO + OH = 15 + 14 = 29$. Искомый объем $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10) \cdot 29 = \frac{580}{3}$. Далее, SM — наклонная, MH — проекция наклонной SM на плоскость ABC и $MH \perp AC$, по теореме о трех перпендикулярах $SM \perp AC$, т. е. $\varphi = \angle SMH$ — линейный угол двугранного угла при ребре AC. Из прямоугольного треугольника SMH находим $\operatorname{tg} \varphi = \frac{29}{5}$. Искомый угол $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{29}{5}$.

Случай 2. Точка H лежит между точками S и O. В прямоугольном треугольнике AHO гипотенуза $AO = R = 15$, катет $OH = \sqrt{15^2 - 29} = 14$. Тогда $SH = SO - OH = 15 - 14 = 1$. Искомый объем $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10) \cdot 1 = \frac{20}{3}$. Далее, SM — наклонная, MH — проекция SM на плоскость ABC, $MH \perp AC$. По теореме о трех перпендикулярах $SM \perp AC$. Угол $\varphi = \angle SMH$ — линейный угол двугранного угла при ребре AC. Из прямоугольного треугольника SMH находим $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{5}$. Искомый угол $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$.

Ответ: $V_1 = \frac{580}{3}$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{29}{5}$, $V_2 = \frac{20}{3}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$.

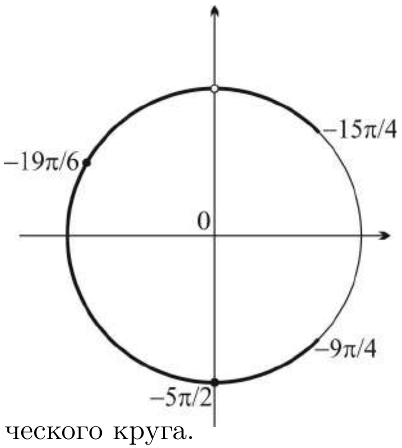
Вариант 213

1. а) Указание: данное уравнение имеет смысл при $\sin x - 1 \neq 0$, последовательно преобразуя его, имеем

$$2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x + 3 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - 4 \cdot \cos x}{\sin x - 1},$$

$$2 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x + 3 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (\sin x - 1)}{\sin x - 1},$$

$\cos x \cdot (2\sin^2 x + 3\sin x) = 2\cos x$, $\cos x \cdot (2\sin^2 x + 3\sin x - 2) = 0$, откуда $\cos x = 0$ или $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$. Из серии решений первого уравнения $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ следует исключить решения уравнения $\sin x - 1 = 0$, в итоге $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ — в ответ.



Во втором уравнении выполним замену $y = \sin x$, $y \in [-1; 1]$, получим уравнение $2y^2 + 3y - 2 = 0$, корни которого $y_1 = -2$ — посторонний, так как $y_1 \notin [-1; 1]$ и $y_2 = \frac{1}{2}$. Выполнив обратную замену, получим уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$, имеющее корни $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — в ответ.

б) Корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{15\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}\right]$, отберем с помощью тригонометрического круга.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;
б) $-\frac{19\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{2}$.

2. Указание: наше неравенство имеет смысл при ограничениях

$$\begin{cases} 16x^2 > 0, \\ 16x^2 \neq 1, \\ \dfrac{90-6x^2}{x} > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{(x+\sqrt{15})(x-\sqrt{15})}{x} < 0, \end{cases}$$

откуда имеем ограничение $x \in (-\infty; -\sqrt{15}) \cup (0; \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}; \sqrt{15})$.

Перепишем неравенство в эквивалентном виде

$$\log_{(16x^2)} \tfrac{90-6x^2}{x} \leqslant \log_{(16x^2)} 4|x|$$

и решим его на каждом промежутке его области существования.

Пусть $x \in (-\infty; -\sqrt{15})$, тогда верно $|x| = -x$ и $16x^2 > 1$, при потенцировании знак неравенства сохранится, имеем

$$\tfrac{90-6x^2}{x} \leqslant -4x, \ \tfrac{90-2x^2}{x} \leqslant 0, \ \tfrac{x^2-45}{x} \geqslant 0, \ \tfrac{(x+3\sqrt{5})(x-3\sqrt{5})}{x} \geqslant 0,$$

откуда $x \in [-3\sqrt{5}; 0) \cup [3\sqrt{5}; +\infty)$, с учетом ограничения находим $x \in [-3\sqrt{5}; -\sqrt{15})$ — в ответ.

Пусть $x \in (0; \frac{1}{4})$, тогда верно $|x| = x$ и $16x^2 < 1$, при потенцировании знак неравенства изменится, имеем

$$\tfrac{90-6x^2}{x} \geqslant 4x, \ \tfrac{90-10x^2}{x} \geqslant 0, \ \tfrac{x^2-9}{x} \leqslant 0, \ \tfrac{(x+3)(x-3)}{x} \leqslant 0,$$

$x \in (-\infty; -3] \cup (0; 3]$, с учетом ограничения $x \in (0; \frac{1}{4})$ — в ответ.

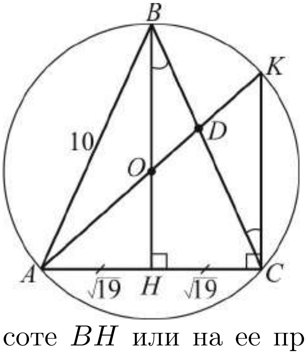
Пусть $x \in (\frac{1}{4}; \sqrt{15})$, тогда верно $|x| = x$ и $16x^2 > 1$, при потенцировании знак неравенства сохранится, имеем

$$\tfrac{90-6x^2}{x} \leqslant 4x, \ \tfrac{90-10x^2}{x} \leqslant 0, \ \tfrac{x^2-9}{x} \geqslant 0, \ \tfrac{(x+3)(x-3)}{x} \geqslant 0,$$

$x \in [-3; 0) \cup [3; +\infty)$, с учетом ограничения $x \in [3; \sqrt{15})$ — в ответ.

Ответ: $[-3\sqrt{5}; -\sqrt{15}) \cup (0; \frac{1}{4}) \cup [3; \sqrt{15})$.

3. Указание: проведем высоту BH к основанию AC. Тогда



в равнобедренном треугольнике проведенная высота BH является медианой, откуда $AH = HC$. Из прямоугольного треугольника ABH имеем $BH = AB \cdot \sin\angle HAB$. Следовательно, $BH = 9$. По теореме Пифагора находим $AH = \sqrt{100-81} = \sqrt{19}$, основание $AC = 2\sqrt{19}$. Так как треугольник ABC равнобедренный, то центр O описанной окружности лежит на высоте BH или на ее продолжении за точку H. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $\frac{AB}{\sin\angle BCA} = 2R$, где R — радиус описанной окружности. Получаем $R = \frac{10}{2\cdot\frac{9}{10}} = \frac{50}{9}$. Длина отрезка $OH = 9 - \frac{50}{9} = \frac{31}{9}$. Найдем, в каком отношении точка D делит сторону BC. Заметим, что опирающийся на диаметр AK угол ACK — прямой, откуда $OH||KC$, отрезок OH является средней линией треугольника ACK и $2 \cdot OH = KC = \frac{62}{9}$. Накрест лежащие углы при параллельных прямых BH и KC — углы HBD и KCD, равны. Углы BDO и CDK равны, как вертикальные, следовательно треугольники OBD и KCD подобны, откуда $\frac{BD}{DC} = \frac{BO}{KC} = \frac{50}{62} = \frac{25}{31}$. Далее находим $\frac{BD}{BC} = \frac{25}{56}$. Теперь искомая $S_{\triangle ABD} = \frac{25}{56} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{25}{56} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{19} \cdot 9 = \frac{225\sqrt{19}}{56}$.

Замечание. Найти отношение $\frac{BD}{DC}$ также можно с помощью теоремы Менелая, записав соотношение $\frac{BO}{OH} \cdot \frac{HA}{AC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$ и подставив в него числовые данные.

Ответ: $\frac{225\sqrt{19}}{56}$.

4. Указание: равенство имеет смысл при $x \neq \pm 5$, одновременно, подкоренное выражение должно быть неотрицательно.

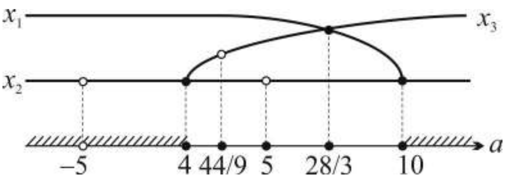
Из равенства нулю первого множителя имеем корень $x_1 = 10$. Этот корень существует при условии $(x_1)^2 - (a+4)x_1 + 4a \geqslant 0$, перепишем условие в виде $(x_1 - a)(x_1 - 4) \geqslant 0$. После подстановки $x_1 = 10$ получим $(10-a)(10-4) \geqslant 0$, откуда $a \leqslant 10$. Понятно, что $x_1 \neq \pm 5$, поэтому дополнительных ограничений на a для существования корня $x_1 = 10$ не возникает. Итак, $x_1 = 10$ при $a \leqslant 10$.

Из равенства нулю второго множителя имеем эквивалентное уравнение $3(x-a) = \sqrt{(x-a)(x-4)}$, которое при $x - a \geqslant 0$ равносильно $9(x-a)^2 = (x-a)(x-4)$. Последнее уравнение распадается на два $x - a = 0$ и $9(x-a) = x - 4$, оно имеет корни $x_2 = a$ при $a \neq \pm 5$ и $x_3 = \frac{9a-4}{8}$ при $\frac{9a-4}{8} - a \geqslant 0$ и $\frac{9a-4}{8} \neq \pm 5$. В итоге корень x_3 существует при $a \geqslant 4$ и $a \neq \frac{44}{9} \Leftrightarrow \frac{9a-4}{8} \neq 5$. Условие $\frac{9a-4}{8} = -5$ дает $a = -4$, что противоречит условию $a \geqslant 4$ и соответствует исключению постороннего корня.

Таким образом, данное уравнение может иметь одновременно до трех корней при различных a:

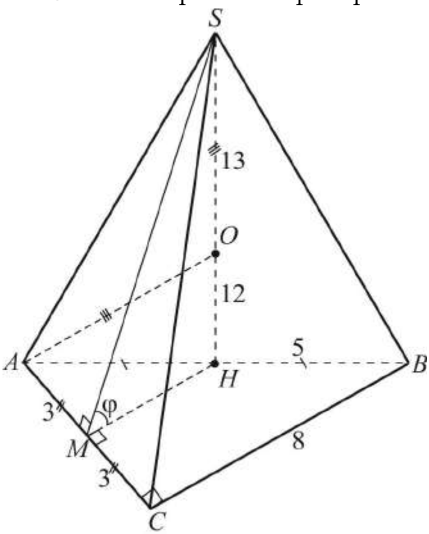
$$\left[\begin{array}{ll} x_1 = 10, & a \leqslant 10, \\ x_2 = a, & a \neq \pm 5, \\ x_3 = \dfrac{9a-4}{8}, & a \geqslant 4 \text{ и } a \neq \dfrac{44}{9}. \end{array}\right.$$

Число корней может уменьшиться, если часть из них совпадет, или один из корней станет посторонним за счет его выхода из области существования уравнения. Найдем сначала случаи совпадения корней. Имеем $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a = 10$, $x_1 = x_3 \Leftrightarrow a = \frac{28}{3}$ и $x_2 = x_3 \Leftrightarrow a = 4$. Над числовой осью для параметра a нанесем линиями с «выколотыми» точками области существования корней x_1, x_2 и x_3, согласно рисунку. Пересечению линий соответствуют совпадения корней. Требуется, чтобы произвольная вертикальная прямая над числовой осью имела ровно два пересечения с линиями. Области, которым соответствуют ровно два корня, заштрихованы на числовой оси, также выделены отдельные точки, соответствующие ровно двум корням.

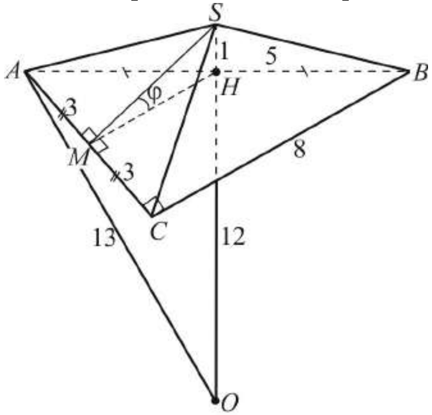


Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; 4] \cup \{\frac{44}{9}; 5; \frac{28}{3}\} \cup [10; +\infty)$.

5. Указание: так как боковые ребра пирамиды равны между собой, то вершина S проектируется в точку H — центр описанной окружности около основания ABC. При этом точка H является серединой гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 2\sqrt{25}$, $AH = \sqrt{25}$. Проведем MH — среднюю линию треугольника ABC, где M — середина AC. Средняя



Случай 1



Случай 2

линия MH параллельна BC и равна половине BC, следовательно, $MH = 4$ и $MH \perp AC$. Центр O сферы, описанной около данной пирамиды, также проектируется в центр H, описанной около основания ABC окружности. Следовательно, точки S, H и O лежат на одной прямой.

Случай 1. Центр O лежит между точками S и H. В прямоугольном треугольнике AHO гипотенуза $AO = R = 13$, катет $OH = \sqrt{13^2 - 25} = 12$. Высота $SH = SO + OH = 13 + 12 = 25$. Искомый объем $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8) \cdot 25 = \frac{600}{3}$. Далее, SM — наклонная, MH — проекция наклонной SM на плоскость ABC и $MH \perp AC$, по теореме о трех перпендикулярах $SM \perp AC$, т. е. $\varphi = \angle SMH$ — линейный угол двугранного угла при ребре AC. Из прямоугольного треугольника SMH находим $\operatorname{tg}\varphi = \frac{25}{4}$. Искомый угол $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{25}{4}$.

Случай 2. Точка H лежит между точками S и O. В прямоугольном треугольнике AHO гипотенуза $AO = R = 13$, катет $OH = \sqrt{13^2 - 25} = 12$. Тогда $SH = SO - OH = 13 - 12 = 1$. Искомый объем $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8) \cdot 1 = \frac{24}{3}$. Далее, SM — наклонная, MH — проекция SM на плоскость ABC, $MH \perp AC$. По теореме о трех перпендикулярах $SM \perp AC$. Угол $\varphi = \angle SMH$ — линейный угол двугранного угла при ребре AC. Из прямоугольного треугольника SMH находим $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{4}$. Искомый угол $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

Ответ: $V_1 = 200$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{25}{4}$, $V_2 = 8$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

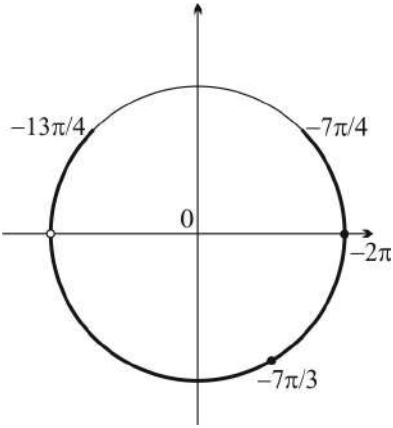
Вариант 214

1. а) Указание: данное уравнение имеет смысл при $\cos x + 1 \neq 0$, последовательно преобразуя его, имеем

$$-2 \cdot \cos 2x \cdot \sin x + 5 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 6 \cdot \sin x}{\cos x + 1},$$

$$-2 \cdot \cos 2x \cdot \sin x + 5 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot (\cos x + 1)}{\cos x + 1},$$

$\sin x \cdot (-\cos 2x + 5\cos x) = 3\sin x$, $\sin x \cdot (1 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 3) = 0$, откуда $\sin x = 0$ или $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$. Из серии решений первого уравнения $x = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ следует исключить решения уравнения $\cos x + 1 = 0$, в итоге $x = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ — в ответ.



Во втором уравнении выполним замену $y = \cos x$, $y \in [-1; 1]$, получим уравнение $2y^2 - 5y + 2 = 0$, корни которого $y_1 = 2$ — посторонний, так как $y_1 \notin [-1; 1]$ и $y_2 = \frac{1}{2}$. Выполнив обратную замену, получим уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$, имеющее корни $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — в ответ.

б) Корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}\right]$, отберем с помощью тригонометрического круга.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$, -2π.

2. Указание: наше неравенство имеет смысл при ограничениях

$$\begin{cases} 9x^2 > 0, \\ 9x^2 \neq 1, \\ \dfrac{252 - 4x^2}{x} > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{(x + 3\sqrt{7})(x - 3\sqrt{7})}{x} < 0, \end{cases}$$

откуда имеем ограничение $x \in (-\infty; -3\sqrt{7}) \cup (0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; 3\sqrt{7})$.

Перепишем неравенство в эквивалентном виде

$$\log_{(9x^2)} \tfrac{252-4x^2}{x} \leqslant \log_{(9x^2)} 3|x|$$

и решим его на каждом промежутке его области существования.

Пусть $x \in (-\infty; -3\sqrt{7})$, тогда верно $|x| = -x$ и $9x^2 > 1$, при потенцировании знак неравенства сохранится, имеем

$$\tfrac{252-4x^2}{x} \leqslant -3x,\ \tfrac{252-x^2}{x} \leqslant 0,\ \tfrac{x^2-252}{x} \geqslant 0,\ \tfrac{(x+6\sqrt{7})(x-6\sqrt{7})}{x} \geqslant 0,$$

откуда $x \in [-6\sqrt{7}; 0) \cup [6\sqrt{7}; +\infty)$, с учетом ограничения находим $x \in [-6\sqrt{7}; -3\sqrt{7})$ — в ответ.

Пусть $x \in (0; \frac{1}{3})$, тогда верно $|x| = x$ и $9x^2 < 1$, при потенцировании знак неравенства изменится, имеем

$$\tfrac{252-4x^2}{x} \geqslant 3x,\ \tfrac{252-7x^2}{x} \geqslant 0,\ \tfrac{x^2-36}{x} \leqslant 0,\ \tfrac{(x+6)(x-6)}{x} \leqslant 0,$$

$x \in (-\infty; -6] \cup (0; 6]$, с учетом ограничения $x \in (0; \frac{1}{3})$ — в ответ.

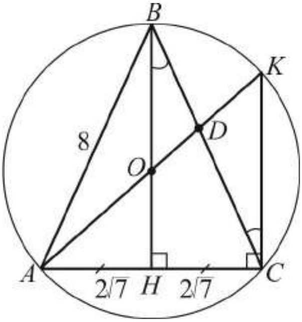
Пусть $x \in (\frac{1}{3}; 3\sqrt{7})$, тогда верно $|x| = x$ и $9x^2 > 1$, при потенцировании знак неравенства сохранится, имеем

$$\frac{252-4x^2}{x} \leqslant 3x,\ \frac{252-7x^2}{x} \leqslant 0,\ \frac{x^2-36}{x} \geqslant 0,\ \frac{(x+6)(x-6)}{x} \geqslant 0,$$

$x \in [-6;0) \cup [6;+\infty)$, с учетом ограничения $x \in [6;3\sqrt{7})$ — в ответ.

Ответ: $[-6\sqrt{7};-3\sqrt{7}) \cup (0;\frac{1}{3}) \cup [6;3\sqrt{7})$.

3. Указание: проведем высоту BH к основанию AC. Тогда в равнобедренном треугольнике проведенная высота BH является медианой, откуда $AH = HC$. Из прямоугольного треугольника ABH имеем $BH = AB \cdot \sin\angle HAB$. Следовательно, $BH = 6$. По теореме Пифагора находим $AH = \sqrt{64-36} = 2\sqrt{7}$, основание $AC = 4\sqrt{7}$. Так как треугольник ABC равнобедренный, то центр O описанной окружности лежит на высоте BH или на ее продолжении за точку H. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $\frac{AB}{\sin\angle BCA} = 2R$, где R — радиус описанной окружности. Получаем $R = \frac{8}{2\cdot\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}$. Длина отрезка $OH = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$. Найдем, в каком отношении точка D делит сторону BC. Заметим, что опирающийся на диаметр AK угол ACK — прямой, откуда $OH||KC$, отрезок OH является средней линией треугольника ACK и $2\cdot OH = KC = \frac{4}{3}$. Накрест лежащие углы при параллельных прямых BH и KC — углы HBD и KCD, равны. Углы BDO и CDK равны, как вертикальные, следовательно треугольники OBD и KCD подобны, откуда $\frac{BD}{DC} = \frac{BO}{KC} = \frac{16}{4} = \frac{4}{1}$. Далее находим $\frac{BD}{BC} = \frac{4}{5}$. Теперь искомая $S_{\triangle ABD} = \frac{4}{5}\cdot S_{\triangle ABC} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{7}\cdot 6 = \frac{48\sqrt{7}}{5}$.



Замечание. Найти отношение $\frac{BD}{DC}$ также можно с помощью теоремы Менелая, записав соотношение $\frac{BO}{OH}\cdot\frac{HA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB} = 1$ и подставив в него числовые данные.

Ответ: $\frac{48\sqrt{7}}{5}$.

4. Указание: равенство имеет смысл при $x \neq \pm 7$, одновременно, подкоренное выражение должно быть неотрицательно.

Из равенства нулю первого множителя имеем корень $x_1 = 11$. Этот корень существует при условии $(x_1)^2 - (a+5)x_1 + 5a \geqslant 0$, перепишем условие в виде $(x_1 - a)(x_1 - 5) \geqslant 0$. После подстановки

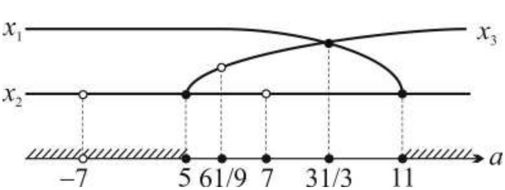
$x_1 = 11$ получим $(11-a)(11-5) \geqslant 0$, откуда $a \leqslant 11$. Понятно, что $x_1 \neq \pm 7$, поэтому дополнительных ограничений на a для существования корня $x_1 = 11$ не возникает. Итак, $x_1 = 11$ при $a \leqslant 11$.

Из равенства нулю второго множителя имеем эквивалентное уравнение $3(x-a) = \sqrt{(x-a)(x-5)}$, которое при $x-a \geqslant 0$ равносильно $9(x-a)^2 = (x-a)(x-5)$. Последнее уравнение распадается на два $x-a=0$ и $9(x-a) = x-5$, оно имеет корни $x_2 = a$ при $a \neq \pm 7$ и $x_3 = \frac{9a-5}{8}$ при $\frac{9a-5}{8} - a \geqslant 0$ и $\frac{9a-5}{8} \neq \pm 7$. В итоге корень x_3 существует при $a \geqslant 5$ и $a \neq \frac{61}{9} \Leftrightarrow \frac{9a-5}{8} \neq 7$. Условие $\frac{9a-5}{8} = -7$ дает $a = -\frac{51}{9}$, что противоречит условию $a \geqslant 5$ и соответствует исключению постороннего корня.

Таким образом, данное уравнение может иметь одновременно до трех корней при различных a:

$$\left[\begin{array}{ll} x_1 = 11, & a \leqslant 11, \\ x_2 = a, & a \neq \pm 7, \\ x_3 = \dfrac{9a-5}{8}, & a \geqslant 5 \text{ и } a \neq \dfrac{61}{9}. \end{array}\right.$$

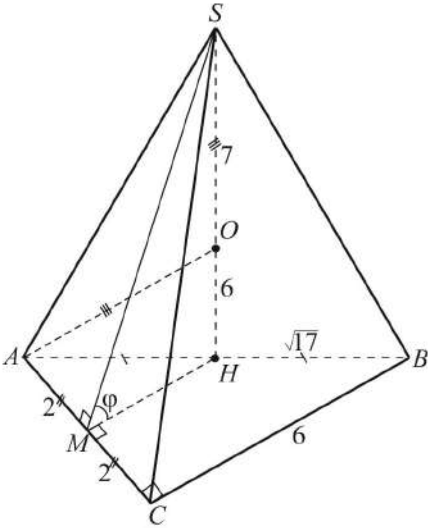
Число корней может уменьшиться, если часть из них совпадет, или один из корней станет посторонним за счет его выхода из области существования уравнения. Найдем сначала случаи совпадения корней. Имеем $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a = 11$, $x_1 = x_3 \Leftrightarrow a = \frac{31}{3}$ и $x_2 = x_3 \Leftrightarrow a = 5$. Над числовой осью для параметра a нанесем линиями с «выколотыми» точками области существования



корней x_1, x_2 и x_3, согласно рисунку. Пересечению линий соответствуют совпадения корней. Требуется, чтобы произвольная вертикальная прямая над числовой осью имела ровно два пересечения с линиями. Области, которым соответствуют ровно два корня, заштрихованы на числовой оси, также выделены отдельные точки, соответствующие ровно двум корням.

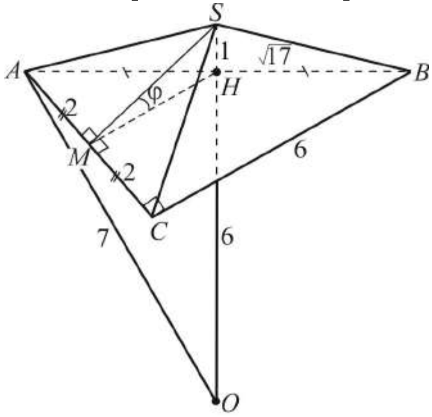
Ответ: $(-\infty; -7) \cup (-7; 5] \cup \{\frac{61}{9}; 7; \frac{31}{3}\} \cup [11; +\infty)$.

5. Указание: так как боковые ребра пирамиды равны между собой, то вершина S проектируется в точку H — центр описанной окружности около основания ABC. При этом точка H является серединой гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{4^2+6^2} = 2\sqrt{13}$, $AH = \sqrt{13}$.



Случай 1

Проведем MH — среднюю линию треугольника ABC, где M — середина AC. Средняя



Случай 2

линия MH параллельна BC и равна половине BC, следовательно, $MH = 3$ и $MH \perp AC$. Центр O сферы, описанной около данной пирамиды, также проектируется в центр H, описанной около основания ABC окружности. Следовательно, точки S, H и O лежат на одной прямой.

Случай 1. Центр O лежит между точками S и H. В прямоугольном треугольнике AHO гипотенуза $AO = R = 7$, катет $OH = \sqrt{7^2-13} = 6$. Высота $SH = SO + OH = 7 + 6 = 13$. Искомый объем $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6) \cdot 13 = \frac{156}{3}$. Далее, SM — наклонная, MH — проекция наклонной SM на плоскость ABC и $MH \perp AC$, по теореме о трех перпендикулярах $SM \perp AC$, т. е. $\varphi = \angle SMH$ — линейный угол двугранного угла при ребре AC. Из прямоугольного треугольника SMH находим $\operatorname{tg}\varphi = \frac{13}{3}$. Искомый угол $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{13}{3}$.

Случай 2. Точка H лежит между точками S и O. В прямоугольном треугольнике AHO гипотенуза $AO = R = 7$, катет $OH = \sqrt{7^2 - 13} = 6$. Тогда $SH = SO - OH = 7 - 6 = 1$. Искомый объем $V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6)\cdot 1 = \frac{12}{3}$. Далее, SM — наклонная, MH — проекция SM на плоскость ABC, $MH \perp AC$. По теореме о трех перпендикулярах $SM \perp AC$. Угол $\varphi = \angle SMH$ — линейный угол двугранного угла при ребре AC. Из прямоугольного треугольника SMH находим $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}$. Искомый угол $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Ответ: $V_1 = 52$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{13}{3}$, $V_2 = 4$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Варианты 221–224

Каждая задача варианта 22N либо является частным случаем задачи с таким же номером из варианта 21N, либо совпадает с ней в большей части.

1. Решение совпадает с решением задачи из варианта 21N, при этом отсутствует необходимость отбирать корни по нулю знаменателя, в ответ добавится исключенная серия решений. При отборе корней на отрезке, к ответу разобранной ранее задачи, добавится «выколотая» точка.

2. Решение совпадает с решением задачи из варианта 21N, после умножения обеих частей неравенства на $\frac{1}{2}$ и внесения множителя 2 из знаменателя в основание логарифма в виде степени.

3. Нахождение требуемого отрезка сводится к применению коэффициента подобия, найденного при решении задачи из варианта 21N, для деления радиуса окружности на две части, отношение которых равно полученному коэффициенту, затем одну из найденных частей надо сложить с радиусом.

4. Решение отличается от решения задачи из варианта 21N, меньшим числом возможностей из-за отсутствия запретных точек. В ответ не войдут случаи посторонних корней, имевших место в аналогичной задаче.

5. Частный случай задачи из варианта 21N.

Ответы размещены в конце сборника.

Критерии оценивания, 11 класс

Полное и обоснованное решение каждой задачи с правильным ответом оценивалось по 7 баллов. Частично верные решения оценивались в соответствии с таблицей, 0 баллов выставлялось, если решение не удовлетворяло ни одному из критериев.

Физико-математические классы, варианты 211–214

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 1	7
Описка в ответе при верном решении либо вычислительная ошибка в п. «б», не повлиявшая на ответ.	6
Выполнен верно только п. «а».	5
Одно из: 1) п. «а» выполнен без исключения нулей знаменателя, либо 2) вследствие вычислительной ошибки получены неверные корни промежуточного уравнения при дальнейшем верном отборе из полученных серий в п. «б» в обоих случаях.	4
П. «а» выполнен частично верно при дальнейшем неверном отборе из полученных серий в п. «б».	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 2	7
В ответе потеряна одна допустимая граничная точка.	6
В ответе потеряны две допустимых граничных точки.	5
Одно из: арифметическая ошибка, приведшая к другому неравенству, либо имеются все верные шаги решения без учета знака модуля, ответ выписан.	4
Одно из: выставлен неверный знак неравенства при потенцировании, при остальных верных действиях до ответа, или при остальных верных действиях в ответе присутствует хотя бы одна запрещенная точка.	2
Во всех остальных случаях.	0

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 3	7
Задача доведена до ответа с одной арифметической ошибкой на стадии вычисления площади.	6
При верном ходе решения допущено более одной арифметической ошибки, ответ выписан.	4
Имеется верное геометрическое рассуждение (найдены подобия, выписаны верные отношения отрезков), которое можно довести до правильного ответа, ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 4	7
В ответе потеряно ровно одно из значений, отвечающих за совпадение корней.	6
В ответе потеряны только одно или два из значений, отвечающих за посторонние корни.	5
В ответе частично потеряны значения отвечающие как за посторонние корни, так и за совпадение корней, либо допущена арифметическая ошибка.	4
Ответ состоит либо из нескольких отдельных верных значений, либо только из двух лучей, возможно без граничных и «выколотых» точек.	2
В ответе ровно одно верное значение.	1
Во всех остальных случаях.	0
Задача 5	7
Одна арифметическая ошибка, ход решения верный.	6
Верный ответ получен только для одного случая.	5
Две арифметические ошибки при рассмотрении обоих случаев, либо одна, при рассмотрении одного случая.	4
Две арифметические ошибки, рассмотрен только один случай до ответа, либо верно найдены только объемы в обоих случаях, поиск угла отсутствует.	3
Верно найден только объем в одном из случаев, поиск угла отсутствует.	2
Во всех остальных случаях.	0

Химико-биологические классы, варианты 221–224

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 1	7
Описка в ответе при верном решении, либо вычислительная ошибка в п. «б», не повлиявшая на ответ.	6
Выполнен верно только п. «а».	5
П. «а» выполнен частично верно, или вследствие вычислительной ошибки в п. «а» получены неверные корни промежуточного уравнения, при дальнейшем верном отборе из полученных серий в п. «б».	4
П. «а» выполнен частично верно, при дальнейшем неверном отборе из полученных серий в п. «б».	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 2	7
В ответе потеряна одна допустимая граничная точка.	6
В ответе потеряны две допустимых граничных точки.	5
Одно из: арифметическая ошибка, приведшая к другому неравенству, либо имеются все верные шаги решения без учета знака модуля, ответ выписан.	4
Одно из: выставлен неверный знак неравенства при потенцировании, при остальных верных действиях до ответа, или при остальных верных действиях в ответе присутствует хотя бы одна запрещенная точка.	2
Во всех остальных случаях.	0

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 3	7
Задача доведена до ответа с одной арифметической ошибкой на стадии вычисления последнего отрезка.	6
При верном ходе решения допущено более одной арифметической ошибки, ответ выписан.	4
Имеется верное геометрическое рассуждение (найдены подобия, выписаны верные отношения отрезков), которое можно довести до правильного ответа, ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 4	7
В ответе потеряно ровно одно из значений, отвечающих за совпадение корней.	6
В ответе потеряно более одного из значений, отвечающих за совпадение корней, либо допущена арифметическая ошибка при верном ходе решения.	4
Ответ состоит либо из нескольких отдельных верных значений, либо только из двух лучей, возможно без граничных точек.	2
В ответе ровно одно верное значение.	1
Во всех остальных случаях.	0
Задача 5	7
Одна арифметическая ошибка, ход решения верный.	6
Две арифметические ошибки при верном ходе решения, ответ выписан.	4
Верно найден только объем, поиск угла отсутствует.	2
Во всех остальных случаях.	0

2022 год, 9 класс

Вариант 2911

1. Указание: пусть скорость первого поезда равна x км/ч, скорость второго — y км/ч. Из условия задачи следует, что $x > y > 0$. Так как поезда встретились через 1 ч 20 мин, то верно соотношение $160 = \frac{4}{3}(x+y)$. С другой стороны, время движения первого поезда из города A в город C равно $\frac{160}{x}$ ч, а второго — из города C в город A — $\frac{160}{y}$ ч, по условию $\frac{160}{y} = \frac{160}{x} + 2$. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 160 = \frac{4}{3}(x+y), \\ \frac{160}{y} = \frac{160}{x} + 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 120 = x + y, \\ \frac{80}{y} = \frac{80}{x} + 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 120 - x, \\ 0 = \frac{80}{x} - \frac{80}{120-x} + 1. \end{cases}$$

Решая последнее уравнение системы при $x \neq 0$ и $x \neq 120$, имеем $80(x-120)+80x+x(x-120) = 0$; $x^2+40x-120\cdot 80 = 0$; $x_1 = -120$ или $x_2 = 80$ ($\frac{D}{4} = 100^2, x_{1,2} = -20 \pm 100$). Условию соотношения скоростей $x > y > 0$ удовлетворяет только значение $x = 80$. Тогда $y = 120 - 80$, $y = 40$.

Ответ: 80 и 40 км/ч.

2. Указание: по определению геометрической прогрессии первый член и знаменатель прогрессии ненулевые, каждый последующий член получается умножением предыдущего на знаменатель, следовательно, нулевых членов в прогрессии нет. Вместе с условием существования корня это означает, что $(-\sin 4\alpha) > 0$, откуда должно быть $\sin 4\alpha < 0$. По формуле синуса двойного угла имеем $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha < 0$, т. е. $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ — оба ненулевые и разных знаков.

Применяя определение геометрической прогрессии, имеем уравнение $\frac{17\left(\sqrt{-\sin 4\alpha}\right)^2}{15\cdot(1+\sin 2\alpha)} = \frac{77\cdot(1-\sin 2\alpha)}{17\left(\sqrt{-\sin 4\alpha}\right)^2}$, откуда по правилу пропорции получаем $289\sin^2 4\alpha = 1155\cdot(1-\sin^2 2\alpha)$. С учетом основного тригонометрического тождества $289\cdot\sin^2 4\alpha = 1155\cos^2 2\alpha$. По формулам двойного угла $289\cdot 4\cdot\sin^2 2\alpha\cdot\cos^2 2\alpha = 1155\cos^2 2\alpha$. Сократим обе части уравнения на $\cos^2 2\alpha \neq 0$, получим $\sin^2 2\alpha = \frac{1155}{1156}$,

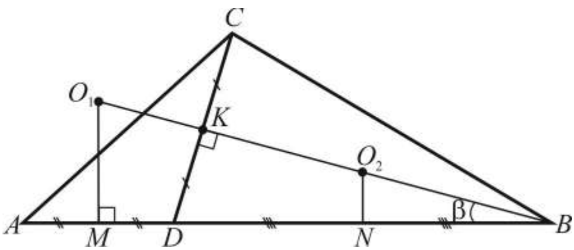
$\sin 2\alpha = \pm\frac{\sqrt{1155}}{34}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ найдем $\cos^2 2\alpha = \frac{1}{1156}$, $\cos 2\alpha = \pm\frac{1}{34}$. По формуле половинного угла искомое значение $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

Случай 1, $\cos 2\alpha = \frac{1}{34}$. Тогда $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{1155}}{34}$, так как $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ разных знаков. Подставляя найденные значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ в формулу тангенса, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{1155}}{34}}{1+\frac{1}{34}} = -\sqrt{\frac{33}{35}}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{33}{35}}$ — в ответ.

Случай 2, $\cos 2\alpha = -\frac{1}{34}$. Тогда $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{1155}}{34}$, так как $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ разных знаков. Подставляя найденные значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ в формулу тангенса, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{1155}}{34}}{1-\frac{1}{34}} = \sqrt{\frac{35}{33}}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{35}{33}}$ — в ответ.

Ответ: $-\sqrt{\frac{33}{35}}$; $\sqrt{\frac{35}{33}}$.

3. Указание: пусть $AD = x$, $DB = 7x$, $DC = 2x$. Заметим, что центры O_1 и O_2 данных окружностей лежат на серединных перпендикулярах O_1M и O_2N к отрезкам AD и DB, соответственно. Кроме того, отрезок CD — общая хорда окружностей, описанных около треугольников ADC и BDC. Следовательно, линия центров O_1O_2 перпендикулярна CD и делит её пополам, а треугольник BDC равнобедренный, $BD = BC$. Пусть K — середина CD, тогда $KD = x$. Точки B, O_2, K и O_1 лежат на одной прямой. Обозначим угол ABK через β. Прямоугольные треугольники KBD и NBO_2 подобны по острому углу β. При этом $\sin\beta = \frac{DK}{BD} = \frac{x}{7x} = \frac{1}{7}$, а $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-(\frac{1}{7})^2} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$. По условию, радиус описанной около треугольника BDC окружности — отрезок $O_2B = \frac{49}{8\sqrt{3}}$. Тогда $NB = O_2B\cdot\cos\beta = \frac{49}{8\sqrt{3}}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{7}{2}$, откуда



$DB = BC = 7$, $AD = 1$, $DC = 2$, $AB = 8$. По теореме косинусов для треугольника ACD, имеем $AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cdot(-\frac{1}{7}) = \frac{39}{7}$ ($\cos\angle ADC = -\cos\angle BDC = -\sin\beta = -\frac{1}{7}$). Тогда $AC = \sqrt{\frac{39}{7}}$. Искомая $S_{ABC} = S_{ADC} + S_{BDC} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 7\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{32\sqrt{3}}{7}$.

Ответ: 8; 7; $\sqrt{\frac{39}{7}}$; $S = \frac{32\sqrt{3}}{7}$.

4. Указание: исходное неравенство имеет смысл при условиях

$$\begin{cases} x + 46 \geqslant 0, \\ x + 4 - \sqrt{x+46} \neq 0. \end{cases}$$

Решим отдельно уравнение $x + 4 - \sqrt{x+46} = 0$. При $x + 4 \geqslant 0$ возводим в квадрат обе части уравнения, имеем $(x+4)^2 = x + 46$, корень $x_1 = -10$ — посторонний, $x_2 = 3$, откуда находим ограничение $x \in [-46; 3) \cup (3; +\infty)$.

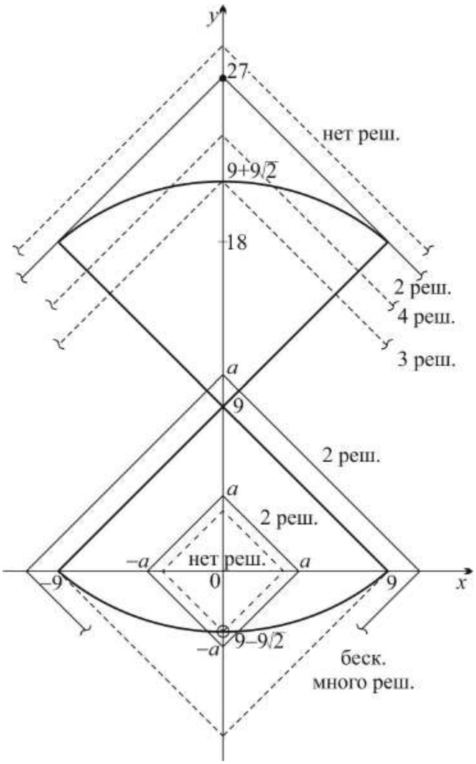
Перепишем исходное неравенство в виде $\frac{x(|x^2-7|-(x^2-7))}{x+4-\sqrt{x+46}} \leqslant 0$. Заметим, при произвольных a выражение $(|a|-a)$ принимает только неотрицательные значения в силу верного неравенства $|a| \geqslant a$, причем при $a < 0$ значения $(|a| - a)$ строго положительные, а при $a \geqslant 0$ справедливо равенство $(|a| - a) = 0$. Рассмотрим в данной задаче отдельно случаи равенства и строгого неравенства.

Если $\frac{x(|x^2-7|-(x^2-7))}{x+4-\sqrt{x+46}} = 0$, то при $x \in [-46; 3) \cup (3; +\infty)$ должно быть $x(|x^2 - 7| - (x^2 - 7)) = 0$, откуда $x = 0$ или $x^2 - 7 \geqslant 0$. С учетом ограничений $x \in [-46; -\sqrt{7}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{7}; 3) \cup (3; +\infty)$ — в ответ в случае равенства.

Если $\frac{x(|x^2-7|-(x^2-7))}{x+4-\sqrt{x+46}} < 0$, то $\frac{x}{x+4-\sqrt{x+46}}\cdot(|x^2-7|-x^2+7) < 0$, но $|x^2-7|-x^2+7 > 0 \Leftrightarrow x^2-7 < 0$, поэтому $\frac{x}{x+4-\sqrt{x+46}} < 0$. Заметим, что $x + 4 - \sqrt{x+46} < 0$ при $x \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7})$, откуда находим $x > 0$. Учитывая все ограничения этого случая, имеем $x \in (0; \sqrt{7})$ — в ответ.

Ответ: $[-46; -\sqrt{7}] \cup [0; 3) \cup (3; +\infty)$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество —



квадрат с центром в точке $(0;0)$ и вершинами в точках $(a;0)$, $(-a;0)$, $(0;a)$, $(0;-a)$ при $a>0$. При $a=0$ множество вырождается в точку $(0;0)$. При $a<0$ первое множество пусто. Второе множество располагается в полосе $-9\leqslant x\leqslant 9$. При $y^2-18y\geqslant 0$ второе уравнение преобразуется к виду $y^2-18y=81-x^2$, оно приводится к уравнению окружности $x^2+(y-9)^2=162$. С учетом ограничения, в этом случае в множество войдут две дуги окружности. При $y^2-18y<0$ второе уравнение преобразуется к виду $18y-y^2=81-x^2$, или $(y-9)^2-x^2=0$. Разложив на множители разность квадратов, получим $(y-9-x)\cdot(y-9+x)=0$, что соответствует отрезкам двух пересекающихся прямых $y-9-x=0$ и $y-9+x=0$ внутри полосы $y\in(0;18)$. Окончательно, второе множество состоит из двух отрезков пересекающихся прямых, завершающихся двумя дугами окружностей. Координаты точек пересечения второго множества с осями координат можно найти из рисунка.

При небольших значениях a квадрат и второе множество не пересекаются, при $a=9\sqrt{2}-9$ они имеют ровно одну общую точку, затем, при $a\in(9\sqrt{2}-9;9)$ — две общие точки, при $a=9$ — общие отрезки, дающие бесконечно много общих точек (решений), далее, при $a\in(9;9+9\sqrt{2})$ — две общие точки, затем, при $a=9+9\sqrt{2}$ — три, далее, с увеличением значения a — четыре, до момента, когда стороны квадрата не станут касательными к дуге окружности при $a = 27$, дающем две общие точки, далее, при увеличении значения a, общие точки отсутствуют. Поскольку при достаточно больших значениях a часть второго множества находится внутри квадрата, зависящего от параметра, на рисунке такие квадраты при различных значениях a изображены частично. Число общих точек двух множеств равно числу решений системы.

Ответ: $(9\sqrt{2} - 9; 9) \cup (9; 9 + 9\sqrt{2}) \cup \{27\}$.

Вариант 2912

1. Указание: пусть скорость первого поезда равна x км/ч, скорость второго — y км/ч. Из условия задачи следует, что $x > y > 0$. Так как поезда встретились через 2 ч 24 мин, то верно соотношение $240 = \frac{12}{5}(x + y)$. С другой стороны, время движения первого поезда из города A в город C равно $\frac{240}{x}$ ч, а второго — из города C в город A — $\frac{240}{y}$ ч, по условию $\frac{240}{y} = \frac{240}{x} + 2$. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 240 = \frac{12}{5}(x+y), \\ \frac{240}{y} = \frac{240}{x} + 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100 = x + y, \\ \frac{120}{y} = \frac{120}{x} + 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 100 - x, \\ 0 = \frac{120}{x} - \frac{120}{100-x} + 1. \end{cases}$$

Решая последнее уравнение системы при $x \neq 0$ и $x \neq 100$, имеем $120(x - 100) + 120x + x(x - 100) = 0$; $x^2 + 140x - 100 \cdot 120 = 0$; $x_1 = -200$ или $x_2 = 60$ $(\frac{D}{4} = 130^2, x_{1,2} = -70 \pm 130)$. Условию соотношения скоростей $x > y > 0$ удовлетворяет только значение $x = 60$. Тогда $y = 100 - 60$, $y = 40$.

Ответ: 60 и 40 км/ч.

2. Указание: по определению геометрической прогрессии первый член и знаменатель прогрессии ненулевые, каждый последующий член получается умножением предыдущего на знаменатель, следовательно, нулевых членов в прогрессии нет. Вместе с условием существования корня это означает, что $(-\sin 4\alpha) > 0$, откуда должно быть $\sin 4\alpha < 0$. По формуле синуса двойного угла имеем $\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha < 0$, т. е. $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ — оба ненулевые и разных знаков.

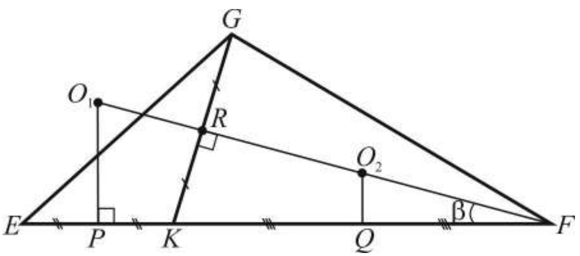
Применяя определение геометрической прогрессии, имеем уравнение $\frac{19\left(\sqrt{-\sin 4\alpha}\right)^2}{13\cdot(1-\sin 2\alpha)} = \frac{111\cdot(1+\sin 2\alpha)}{19\left(\sqrt{-\sin 4\alpha}\right)^2}$, откуда по правилу пропорции получаем $361\sin^2 4\alpha = 1443\cdot(1-\sin^2 2\alpha)$. С учетом основного тригонометрического тождества $361\cdot\sin^2 4\alpha = 1443\cos^2 2\alpha$. По формулам двойного угла $361\cdot 4\cdot\sin^2 2\alpha\cdot\cos^2 2\alpha = 1443\cos^2 2\alpha$. Сократим обе части уравнения на $\cos^2 2\alpha \neq 0$, получим $\sin^2 2\alpha = \frac{1443}{1444}$, $\sin 2\alpha = \pm\frac{\sqrt{1443}}{38}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ найдем $\cos^2 2\alpha = \frac{1}{1444}$, $\cos 2\alpha = \pm\frac{1}{38}$. По формуле половинного угла искомое значение $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

Случай 1, $\cos 2\alpha = \frac{1}{38}$. Тогда $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{1443}}{38}$, так как $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ разных знаков. Подставляя найденные значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ в формулу тангенса, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{1443}}{38}}{1+\frac{1}{38}} = -\sqrt{\frac{37}{39}}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{37}{39}}$ — в ответ.

Случай 2, $\cos 2\alpha = -\frac{1}{38}$. Тогда $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{1443}}{38}$, так как $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ разных знаков. Подставляя найденные значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ в формулу тангенса, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{1443}}{38}}{1-\frac{1}{38}} = \sqrt{\frac{39}{37}}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{39}{37}}$ — в ответ.

Ответ: $-\sqrt{\frac{37}{39}}$; $\sqrt{\frac{39}{37}}$.

3. Указание: пусть $EK = 3x$, $KF = 7x$, $KG = 4x$. Заметим, что центры O_1 и O_2 данных окружностей лежат на серединных перпендикулярах O_1P и O_2Q к отрезкам EK и KF, соответственно. Кроме того, отрезок GK — общая хорда окружностей, описанных около треугольников EKG и FKG. Следовательно, линия центров O_1O_2 перпендикулярна GK и делит её пополам, а треугольник FKG равнобедренный, $FK = FG$. Пусть R — середина GK, тогда



$RK = 2x$. Точки F, O_2, R и O_1 лежат на одной прямой. Обозначим угол EFR через β. Прямоугольные треугольники RFK и QFO_2 подобны по острому углу β. При этом $\sin\beta = \frac{KR}{FK} = \frac{2x}{7x} = \frac{2}{7}$, а $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-(\frac{2}{7})^2} = \sqrt{\frac{45}{49}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$. По условию, радиус описанной около треугольника FKG окружности — отрезок $O_2F = \frac{49}{6\sqrt{5}}$. Тогда $QF = O_2F \cdot \cos\beta = \frac{49}{6\sqrt{5}} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{7} = \frac{7}{2}$, откуда $KF = FG = 7$, $EK = 3$, $KG = 4$, $EF = 10$. По теореме косинусов для треугольника EGK, имеем $EG^2 = 3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot(-\frac{2}{7}) = \frac{223}{7}$ ($\cos\angle EKG = -\cos\angle FKG = -\sin\beta = -\frac{2}{7}$). Тогда $EG = \sqrt{\frac{223}{7}}$. Искомая $S_{EFG} = S_{EKG}+S_{FKG} = \frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot7\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7} = \frac{60\sqrt{5}}{7}$.

Ответ: 10; 7; $\sqrt{\frac{223}{7}}$; $S = \frac{60\sqrt{5}}{7}$.

4. Указание: исходное неравенство имеет смысл при условиях

$$\begin{cases} x+59 \geqslant 0, \\ x+3-\sqrt{x+59} \neq 0. \end{cases}$$

Решим отдельно уравнение $x+3-\sqrt{x+59} = 0$. При $x+3 \geqslant 0$ возводим в квадрат обе части уравнения, имеем $(x+3)^2 = x+59$, корень $x_1 = -10$ — посторонний, $x_2 = 5$, откуда находим ограничение $x \in [-59; 5) \cup (5; +\infty)$.

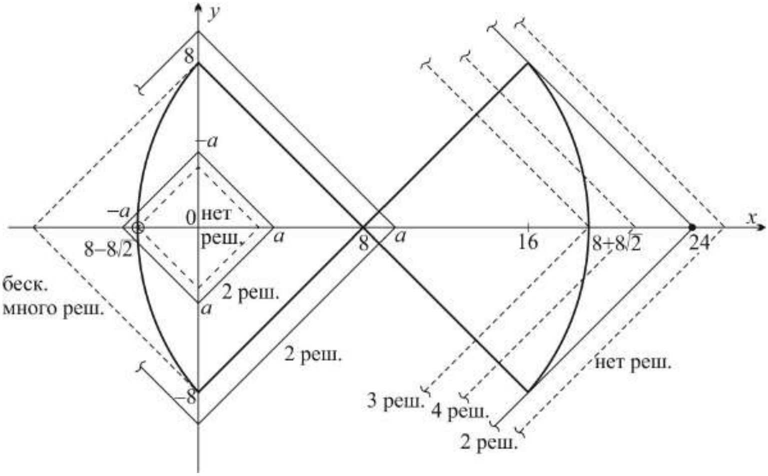
Перепишем исходное неравенство в виде $\frac{x(|x^2-23|-(x^2-23))}{x+3-\sqrt{x+59}} \leqslant 0$. Заметим, при произвольных a выражение $(|a|-a)$ принимает только неотрицательные значения в силу верного неравенства $|a| \geqslant a$, причем при $a<0$ значения $(|a|-a)$ строго положительные, а при $a \geqslant 0$ справедливо равенство $(|a|-a) = 0$. Рассмотрим в данной задаче отдельно случаи равенства и строгого неравенства.

Если $\frac{x(|x^2-23|-(x^2-23))}{x+3-\sqrt{x+59}} = 0$, то при $x \in [-59; 5)\cup(5; +\infty)$ должно быть $x(|x^2-23|-(x^2-23)) = 0$, откуда $x = 0$ или $x^2-23 \geqslant 0$. С учетом ограничений $x \in [-59; -\sqrt{23}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{23}; 5) \cup (5; +\infty)$ — в ответ в случае равенства.

Если $\frac{x(|x^2-23|-(x^2-23))}{x+3-\sqrt{x+59}} < 0$, то $\frac{x}{x+3-\sqrt{x+59}}\cdot(|x^2-23|-x^2+23) < 0$, но $|x^2-23|-x^2+23 > 0 \Leftrightarrow x^2-23 < 0$, поэтому $\frac{x}{x+3-\sqrt{x+59}} < 0$. Заметим, что $x+3-\sqrt{x+59} < 0$ при $x \in (-\sqrt{23}; \sqrt{23})$, откуда находим $x > 0$. Учитывая все ограничения этого случая, имеем $x \in (0; \sqrt{23})$ — в ответ.

Ответ: $[-59; -\sqrt{23}] \cup [0; 5) \cup (5; +\infty)$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек на координатной плоскости согласно рисунку.



Первое множество — квадрат с центром в точке $(0; 0)$ и вершинами в точках $(a; 0)$, $(-a; 0)$, $(0; a)$, $(0; -a)$ при $a > 0$. При $a = 0$ множество вырождается в точку $(0; 0)$. При $a < 0$ первое множество пусто. Второе множество располагается в горизонтальной полосе $-8 \leqslant y \leqslant 8$. При $x^2 - 16x \geqslant 0$ второе уравнение преобразуется к виду $x^2 - 16x = 64 - y^2$, оно приводится к уравнению окружности $y^2 + (x-8)^2 = 128$. С учетом ограничения, в этом случае в множество войдут две дуги окружности. При $x^2 - 16x < 0$ второе уравнение преобразуется к виду $16x - x^2 = 64 - y^2$, или $(x-8)^2 - y^2 = 0$. Разложив на множители разность квадратов, получим $(x - 8 - y) \cdot (x - 8 + y) = 0$, что соответствует отрезкам двух пересекающихся прямых $x - 8 - y = 0$ и $x - 8 + y = 0$ внутри полосы $x \in (0; 16)$. Окончательно, второе множество состоит из двух отрезков пересекающихся прямых, завершающихся двумя дугами окружностей. Координаты точек пересечения второго множества с осями координат можно установить из рисунка.

При небольших значениях a квадрат и второе множество не пересекаются, при $a = 8\sqrt{2} - 8$ они имеют ровно одну общую точку, затем, при $a \in (8\sqrt{2}-8; 8)$ — две общие точки, при $a = 8$ — общие отрезки, дающие бесконечно много общих точек (решений), далее, при $a \in (8; 8+8\sqrt{2})$ — две общие точки, затем, при $a = 8+8\sqrt{2}$ — три, далее, с увеличением значения a — четыре, до момента, когда стороны квадрата не станут касательными к дуге окружности при $a = 24$, дающем две общие точки, далее, при увеличении значения a, общие точки отсутствуют. Поскольку при достаточно больших значениях a часть второго множества находится внутри квадрата, зависящего от параметра, на рисунке такие квадраты при различных значениях a изображены частично. Число общих точек двух множеств равно числу решений системы.

Ответ: $(8\sqrt{2}-8; 8) \cup (8; 8+8\sqrt{2}) \cup \{24\}$.

Вариант 2913

1. Указание: пусть скорость первого поезда равна x км/ч, скорость второго — y км/ч. Из условия задачи следует, что $x > y > 0$. Так как поезда встретились через 2 ч 55 мин, то верно соотношение $350 = \frac{35}{12}(x+y)$. С другой стороны, время движения первого поезда из города A в город C равно $\frac{350}{x}$ ч, а второго — из города C в город A — $\frac{350}{y}$ ч, по условию $\frac{350}{y} = \frac{350}{x} + 2$. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 350 = \frac{35}{12}(x+y), \\ \frac{350}{y} = \frac{350}{x} + 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 120 = x+y, \\ \frac{175}{y} = \frac{175}{x} + 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 120 - x, \\ 0 = \frac{175}{x} - \frac{175}{120-x} + 1. \end{cases}$$

Решая последнее уравнение системы при $x \neq 0$ и $x \neq 120$, имеем $175(x-120) + 175x + x(x-120) = 0$; $x^2 + 230x - 120 \cdot 175 = 0$; $x_1 = -300$ или $x_2 = 70$ ($\frac{D}{4} = 185^2, x_{1,2} = -115 \pm 185$). Условию соотношения скоростей $x > y > 0$ удовлетворяет только значение $x = 70$. Тогда $y = 120 - 70$, $y = 50$.

Ответ: 70 и 50 км/ч.

2. Указание: по определению геометрической прогрессии первый член и знаменатель прогрессии ненулевые, каждый последующий член получается умножением предыдущего на знаменатель, следовательно, нулевых членов в прогрессии нет. Вместе с условием существования корня это означает, что $(-\sin 4\alpha) > 0$, откуда должно быть $\sin 4\alpha < 0$. По формуле синуса двойного угла имеем $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha < 0$, т. е. $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ — оба ненулевые и разных знаков.

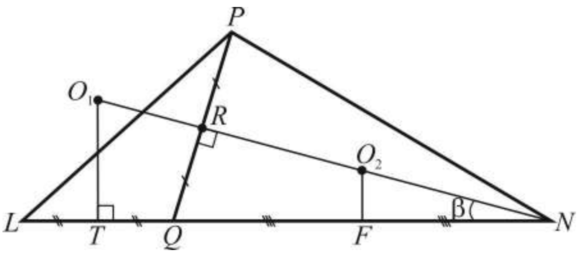
Применяя определение геометрической прогрессии, имеем уравнение $\frac{18\left(\sqrt{-\sin 4\alpha}\right)^2}{7\cdot(1+\sin 2\alpha)} = \frac{185\cdot(1-\sin 2\alpha)}{18\left(\sqrt{-\sin 4\alpha}\right)^2}$, откуда по правилу пропорции получаем $324\sin^2 4\alpha = 1295\cdot(1-\sin^2 2\alpha)$. С учетом основного тригонометрического тождества $324\cdot\sin^2 4\alpha = 1295\cos^2 2\alpha$. По формулам двойного угла $324\cdot 4\cdot\sin^2 2\alpha\cdot\cos^2 2\alpha = 1295\cos^2 2\alpha$. Сократим обе части уравнения на $\cos^2 2\alpha \neq 0$, получим $\sin^2 2\alpha = \frac{1295}{1296}$, $\sin 2\alpha = \pm\frac{\sqrt{1295}}{36}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ найдем $\cos^2 2\alpha = \frac{1}{1296}$, $\cos 2\alpha = \pm\frac{1}{36}$. По формуле половинного угла искомое значение $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

Случай 1, $\cos 2\alpha = \frac{1}{36}$. Тогда $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{1295}}{36}$, так как $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ разных знаков. Подставляя найденные значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ в формулу тангенса, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{1295}}{36}}{1+\frac{1}{36}} = -\sqrt{\frac{35}{37}}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{35}{37}}$ — в ответ.

Случай 2, $\cos 2\alpha = -\frac{1}{36}$. Тогда $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{1295}}{36}$, так как $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ разных знаков. Подставляя найденные значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ в формулу тангенса, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{1295}}{36}}{1-\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{37}{35}}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{37}{35}}$ — в ответ.

Ответ: $-\sqrt{\frac{35}{37}}$; $\sqrt{\frac{37}{35}}$.

3. Указание: пусть $LQ = x$, $QN = 8x$, $QP = 2x$. Заметим, что центры O_1 и O_2 данных окружностей лежат на серединных перпендикулярах O_1T и O_2F к отрезкам LQ и QN, соответственно. Кроме того, от-



резок PQ — общая хорда окружностей, описанных около треугольников LQP и NQP. Следовательно, линия центров O_1O_2 перпендикулярна PQ и делит её пополам, а треугольник NQP равнобедренный, $NQ = NP$. Пусть R — середина PQ, тогда $RQ = x$. Точки N, O_2, R и O_1 лежат на одной прямой. Обозначим угол LNR через β. Прямоугольные треугольники RNQ и FNO_2 подобны по острому углу β. При этом $\sin\beta = \frac{QR}{NQ} = \frac{x}{8x} = \frac{1}{8}$, а $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-(\frac{1}{8})^2} = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$. По условию, радиус описанной около треугольника NQP окружности — отрезок $O_2N = \frac{64}{6\sqrt{7}}$. Тогда $FN = O_2N\cdot\cos\beta = \frac{64}{6\sqrt{7}}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{8}{2}$, откуда $QN = NP = 8$, $LQ = 1$, $QP = 2$, $LN = 9$. По теореме косинусов для треугольника LPQ, имеем $LP^2 = 1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot(-\frac{1}{8}) = \frac{11}{2}$ ($\cos\angle LQP = -\cos\angle NQP = -\sin\beta = -\frac{1}{8}$). Тогда $LP = \sqrt{\frac{11}{2}}$. Искомая $S_{LNP} = S_{LQP}+S_{NQP} = \frac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot8\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{27\sqrt{7}}{8}$.

Ответ: 9; 8; $\sqrt{\frac{11}{2}}$; $S = \frac{27\sqrt{7}}{8}$.

4. Указание: исходное неравенство имеет смысл при условиях

$$\begin{cases} x+47 \geqslant 0, \\ x+5-\sqrt{x+47} \neq 0. \end{cases}$$

Решим отдельно уравнение $x+5-\sqrt{x+47} = 0$. При $x+5 \geqslant 0$ возводим в квадрат обе части уравнения, имеем $(x+5)^2 = x+47$, корень $x_1 = -11$ — посторонний, $x_2 = 2$, откуда находим ограничение $x \in [-47; 2) \cup (2; +\infty)$.

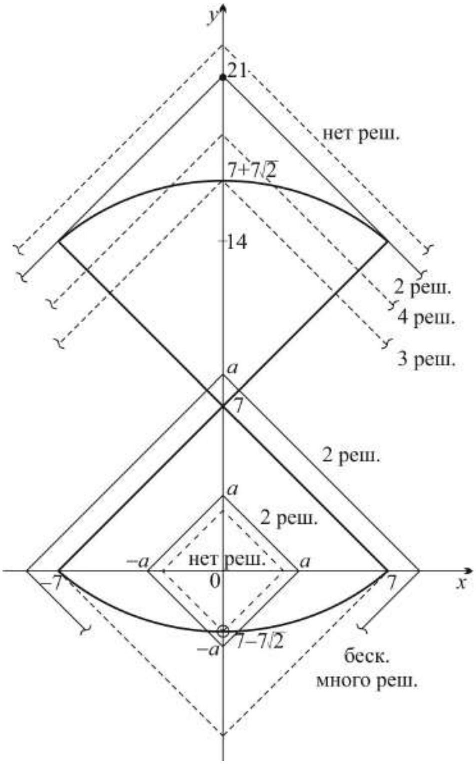
Перепишем исходное неравенство в виде $\frac{x(|x^2-3|-(x^2-3))}{x+5-\sqrt{x+47}} \leqslant 0$. Заметим, при произвольных a выражение $(|a|-a)$ принимает только неотрицательные значения в силу верного неравенства $|a| \geqslant a$, причем при $a < 0$ значения $(|a|-a)$ строго положительные, а при $a \geqslant 0$ справедливо равенство $(|a|-a) = 0$. Рассмотрим в данной задаче отдельно случаи равенства и строгого неравенства.

Если $\frac{x(|x^2-3|-(x^2-3))}{x+5-\sqrt{x+47}} = 0$, то при $x \in [-47; 2) \cup (2; +\infty)$ должно быть $x(|x^2-3|-(x^2-3)) = 0$, откуда $x = 0$ или $x^2-3 \geqslant 0$. С учетом ограничений $x \in [-47; -\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{3}; 2) \cup (2; +\infty)$ — в ответ в случае равенства.

Если $\frac{x(|x^2-3|-(x^2-3))}{x+5-\sqrt{x+47}} < 0$, то $\frac{x}{x+5-\sqrt{x+47}} \cdot (|x^2-3|-x^2+3) < 0$, но $|x^2-3|-x^2+3 > 0 \Leftrightarrow x^2-3 < 0$, поэтому $\frac{x}{x+5-\sqrt{x+47}} < 0$. Заметим, что $x+5-\sqrt{x+47} < 0$ при $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, откуда находим $x > 0$. Учитывая все ограничения этого случая, имеем $x \in (0; \sqrt{3})$ — в ответ.

Ответ: $[-47; -\sqrt{3}] \cup [0; 2) \cup (2; +\infty)$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество —



квадрат с центром в точке $(0; 0)$ и вершинами в точках $(a; 0)$, $(-a; 0)$, $(0; a)$, $(0; -a)$ при $a > 0$. При $a = 0$ множество вырождается в точку $(0; 0)$. При $a < 0$ первое множество пусто. Второе множество располагается в полосе $-7 \leqslant x \leqslant 7$. При $y^2 - 14y \geqslant 0$ второе уравнение преобразуется к виду $y^2 - 14y = 49 - x^2$, оно приводится к уравнению окружности $x^2 + (y-7)^2 = 98$. С учетом ограничения, в этом случае в множество войдут две дуги окружности. При $y^2 - 14y < 0$ второе уравнение преобразуется к виду $14y - y^2 = 49 - x^2$, или $(y-7)^2 - x^2 = 0$. Разложив на множители разность квадратов, получим $(y-7-x) \cdot (y-7+x) = 0$, что соответствует отрезкам двух пересекающихся прямых $y - 7 - x = 0$ и $y - 7 + x = 0$ внутри полосы $y \in (0; 14)$. Окончательно, второе множество состоит из двух отрезков пересекающихся прямых, завершающихся двумя дугами окружностей. Координаты точек пересечения второго множества с осями координат можно найти из рисунка.

При небольших значениях a квадрат и второе множество не пересекаются, при $a = 7\sqrt{2} - 7$ они имеют ровно одну общую точку, затем, при $a \in (7\sqrt{2} - 7; 7)$ — две общие точки, при $a = 7$ — общие отрезки, дающие бесконечно много общих точек (решений), далее, при $a \in (7; 7 + 7\sqrt{2})$ — две общие точки, затем, при $a = 7 + 7\sqrt{2}$ — три, далее, с увеличением значения a — четыре, до момента, когда стороны квадрата не станут касательными к дуге окружности при $a = 21$, дающем две общие точки, далее, при увеличении значения a, общие точки отсутствуют. Поскольку при достаточно больших значениях a часть второго множества находится внутри квадрата, зависящего от параметра, на рисунке такие квадраты при различных значениях a изображены частично. Число общих точек двух множеств равно числу решений системы.

Ответ: $(7\sqrt{2} - 7; 7) \cup (7; 7 + 7\sqrt{2}) \cup \{21\}$.

Вариант 2914

1. Указание: пусть скорость первого поезда равна x км/ч, скорость второго — y км/ч. Из условия задачи следует, что $x > y > 0$. Так как поезда встретились через 6 ч 40 мин, то верно соотношение $600 = \frac{20}{3}(x + y)$. С другой стороны, время движения первого поезда из города A в город C равно $\frac{600}{x}$ ч, а второго — из города C в город A — $\frac{600}{y}$ ч, по условию $\frac{600}{y} = \frac{600}{x} + 3$. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 600 = \frac{20}{3}(x + y), \\ \frac{600}{y} = \frac{600}{x} + 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 90 = x + y, \\ \frac{200}{y} = \frac{200}{x} + 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 90 - x, \\ 0 = \frac{200}{x} - \frac{200}{90-x} + 1. \end{cases}$$

Решая последнее уравнение системы при $x \neq 0$ и $x \neq 90$, имеем $200(x-90)+200x+x(x-90) = 0$; $x^2+310x-90\cdot 200 = 0$; $x_1 = -360$ или $x_2 = 50$ ($\frac{D}{4} = 205^2, x_{1,2} = -155 \pm 205$). Условию соотношения скоростей $x > y > 0$ удовлетворяет только значение $x = 50$. Тогда $y = 90 - 50$, $y = 40$.

Ответ: 50 и 40 км/ч.

2. Указание: по определению геометрической прогрессии первый член и знаменатель прогрессии ненулевые, каждый последующий член получается умножением предыдущего на знаменатель, следовательно, нулевых членов в прогрессии нет. Вместе с условием существования корня это означает, что $(-\sin 4\alpha) > 0$, откуда должно быть $\sin 4\alpha < 0$. По формуле синуса двойного угла имеем $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha < 0$, т. е. $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ — оба ненулевые и разных знаков.

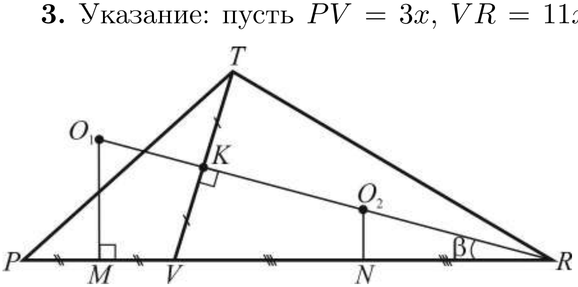
Применяя определение геометрической прогрессии, имеем уравнение $\frac{16\left(\sqrt{-\sin 4\alpha}\right)^2}{11\cdot(1-\sin 2\alpha)} = \frac{93\cdot(1+\sin 2\alpha)}{16\left(\sqrt{-\sin 4\alpha}\right)^2}$, откуда по правилу пропорции получаем $256\sin^2 4\alpha = 1023\cdot(1-\sin^2 2\alpha)$. С учетом основного тригонометрического тождества $256\cdot\sin^2 4\alpha = 1023\cos^2 2\alpha$. По формулам двойного угла $256\cdot 4\cdot\sin^2 2\alpha\cdot\cos^2 2\alpha = 1023\cos^2 2\alpha$. Сократим обе части уравнения на $\cos^2 2\alpha \neq 0$, получим $\sin^2 2\alpha = \frac{1023}{1024}$, $\sin 2\alpha = \pm\frac{\sqrt{1023}}{32}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ найдем $\cos^2 2\alpha = \frac{1}{1024}$, $\cos 2\alpha = \pm\frac{1}{32}$. По формуле половинного угла искомое значение $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

Случай 1, $\cos 2\alpha = \frac{1}{32}$. Тогда $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{1023}}{32}$, так как $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ разных знаков. Подставляя найденные значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ в формулу тангенса, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{1023}}{32}}{1+\frac{1}{32}} = -\sqrt{\frac{31}{33}}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{31}{33}}$ — в ответ.

Случай 2, $\cos 2\alpha = -\frac{1}{32}$. Тогда $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{1023}}{32}$, так как $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ разных знаков. Подставляя найденные значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ в формулу тангенса, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{1023}}{32}}{1-\frac{1}{32}} = \sqrt{\frac{33}{31}}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{33}{31}}$ — в ответ.

Ответ: $-\sqrt{\frac{31}{33}}$; $\sqrt{\frac{33}{31}}$.

3. Указание: пусть $PV = 3x$, $VR = 11x$, $VT = 4x$. Заметим, что центры O_1 и O_2 данных окружностей лежат на серединных перпендикулярах O_1M и O_2N к отрезкам PV и VR, соответственно. Кроме того, отрезок



TV — общая хорда окружностей, описанных около треугольников PVT и RVT. Следовательно, линия центров O_1O_2 перпендикулярна TV и делит её пополам, а треугольник RVT равнобедренный, $RV = RT$. Пусть K — середина TV, тогда $KV = 2x$. Точки R, O_2, K и O_1 лежат на одной прямой. Обозначим угол PRK через β. Прямоугольные треугольники KRV и NRO_2 подобны по острому углу β. При этом $\sin\beta = \frac{VK}{RV} = \frac{2x}{11x} = \frac{2}{11}$, а $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-(\frac{2}{11})^2} = \sqrt{\frac{117}{121}} = \frac{3\sqrt{13}}{11}$. По условию, радиус описанной около треугольника RVT окружности — отрезок $O_2R = \frac{121}{6\sqrt{13}}$. Тогда $NR = O_2R\cdot\cos\beta = \frac{121}{6\sqrt{13}}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{11} = \frac{11}{2}$, откуда $VR = RT = 11$, $PV = 3$, $VT = 4$, $PR = 14$. По теореме косинусов для треугольника PTV, имеем $PT^2 = 3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot(-\frac{2}{11}) = \frac{323}{11}$ ($\cos\angle PVT = -\cos\angle RVT = -\sin\beta = -\frac{2}{11}$). Тогда $PT = \sqrt{\frac{323}{11}}$. Искомая $S_{PRT} = S_{PVT}+S_{RVT} = \frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\frac{3\sqrt{13}}{11}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot11\cdot\frac{3\sqrt{13}}{11} = \frac{84\sqrt{13}}{11}$.

Ответ: 14; 11; $\sqrt{\frac{323}{11}}$; $S = \frac{84\sqrt{13}}{11}$.

4. Указание: исходное неравенство имеет смысл при условиях

$$\begin{cases} x+96 \geqslant 0, \\ x+6-\sqrt{x+96} \neq 0. \end{cases}$$

Решим отдельно уравнение $x+6-\sqrt{x+96} = 0$. При $x+6 \geqslant 0$ возводим в квадрат обе части уравнения, имеем $(x+6)^2 = x+96$, корень $x_1 = -15$ — посторонний, $x_2 = 4$, откуда находим ограничение $x \in [-96;4)\cup(4;+\infty)$.

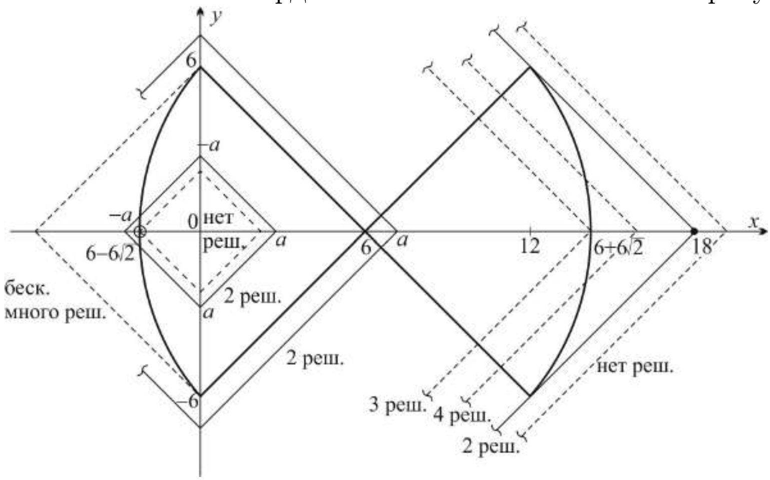
Перепишем исходное неравенство в виде $\frac{x(|x^2-13|-(x^2-13))}{x+6-\sqrt{x+96}} \leqslant 0$. Заметим, при произвольных a выражение $(|a|-a)$ принимает только неотрицательные значения в силу верного неравенства $|a| \geqslant a$, причем при $a<0$ значения $(|a|-a)$ строго положительные, а при $a \geqslant 0$ справедливо равенство $(|a|-a) = 0$. Рассмотрим в данной задаче отдельно случаи равенства и строгого неравенства.

Если $\frac{x(|x^2-13|-(x^2-13))}{x+6-\sqrt{x+96}} = 0$, то при $x \in [-96;4)\cup(4;+\infty)$ должно быть $x(|x^2-13|-(x^2-13)) = 0$, откуда $x=0$ или $x^2-13 \geqslant 0$. С учетом ограничений $x \in [-96;-\sqrt{13}]\cup\{0\}\cup[\sqrt{13};4)\cup(4;+\infty)$ — в ответ в случае равенства.

Если $\frac{x(|x^2-13|-(x^2-13))}{x+6-\sqrt{x+96}} < 0$, то $\frac{x}{x+6-\sqrt{x+96}} \cdot (|x^2-13|-x^2+13) < 0$, но $|x^2-13|-x^2+13 > 0 \Leftrightarrow x^2-13 < 0$, поэтому $\frac{x}{x+6-\sqrt{x+96}} < 0$. Заметим, что $x+6-\sqrt{x+96} < 0$ при $x \in (-\sqrt{13}; \sqrt{13})$, откуда находим $x > 0$. Учитывая все ограничения этого случая, имеем $x \in (0; \sqrt{13})$ — в ответ.

Ответ: $[-96; -\sqrt{13}] \cup [0; 4) \cup (4; +\infty)$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек на координатной плоскости согласно рисунку.



Первое множество — квадрат с центром в точке $(0; 0)$ и вершинами в точках $(a; 0)$, $(-a; 0)$, $(0; a)$, $(0; -a)$ при $a > 0$. При $a = 0$ множество вырождается в точку $(0; 0)$. При $a < 0$ первое множество пусто. Второе множество располагается в горизонтальной полосе $-6 \leqslant y \leqslant 6$. При $x^2 - 12x \geqslant 0$ второе уравнение преобразуется к виду $x^2 - 12x = 36 - y^2$, оно приводится к уравнению окружности $y^2 + (x-6)^2 = 72$. С учетом ограничения, в этом случае в множество войдут две дуги окружности. При $x^2 - 12x < 0$ второе уравнение преобразуется к виду $12x - x^2 = 36 - y^2$, или $(x-6)^2 - y^2 = 0$. Разложив на множители разность квадратов, получим $(x-6-y) \cdot (x-6+y) = 0$, что соответствует отрезкам двух пересекающихся прямых $x-6-y=0$ и $x-6+y=0$ внутри полосы $x \in (0; 12)$. Окончательно, второе множество состоит из двух отрезков пересекающихся прямых, завершающихся двумя дугами окружностей. Координаты точек пересечения второго множества с осями координат можно установить из рисунка.

При небольших значениях a квадрат и второе множество не пересекаются, при $a = 6\sqrt{2} - 6$ они имеют ровно одну общую точку, затем, при $a \in (6\sqrt{2} - 6; 6)$ — две общие точки, при $a = 6$ — общие отрезки, дающие бесконечно много общих точек (решений), далее, при $a \in (6; 6 + 6\sqrt{2})$ — две общие точки, затем, при $a = 6 + 6\sqrt{2}$ — три, далее, с увеличением значения a — четыре, до момента, когда стороны квадрата не станут касательными к дуге окружности при $a = 18$, дающем две общие точки, далее, при увеличении значения a, общие точки отсутствуют. Поскольку при достаточно больших значениях a часть второго множества находится внутри квадрата, зависящего от параметра, на рисунке такие квадраты при различных значениях a изображены частично. Число общих точек двух множеств равно числу решений системы.

Ответ: $(6\sqrt{2} - 6; 6) \cup (6; 6 + 6\sqrt{2}) \cup \{18\}$.

Вариант 2921

1. Указание: пусть расстояние между городами A и C равно S км. Тогда скорость поезда равна $\frac{S}{5}$ км/ч, а скорость электрички — $\frac{S}{7}$ км/ч. Пусть поезд и электричка встретятся через t ч. Составим уравнение $S = t \cdot (\frac{S}{5} + \frac{S}{7})$, $1 = t \cdot (\frac{1}{5} + \frac{1}{7})$, $t = \frac{35}{12}$ ч, что составляет 2 ч 55 мин.

Ответ: 2 ч 55 мин.

2. Совпадает частично с задачей из варианта 2911. Для поиска $\operatorname{tg}\alpha$ в решении указанной задачи имеются все данные.

3. Решение задачи из варианта 2911 содержит все необходимые рассуждения и вычисления для получения ответа.

4. Указание: исходное неравенство имеет смысл при условиях

$$\begin{cases} x + 46 \geqslant 0, \\ x + 4 - \sqrt{x + 46} \neq 0. \end{cases}$$

Решим отдельно уравнение $x + 4 - \sqrt{x + 46} = 0$. При $x + 4 \geqslant 0$ возводим в квадрат обе части уравнения, имеем $(x + 4)^2 = x + 46$, корень $x_1 = -10$ — посторонний, $x_2 = 3$, откуда находим ограничение $x \in [-46; 3) \cup (3; +\infty)$.

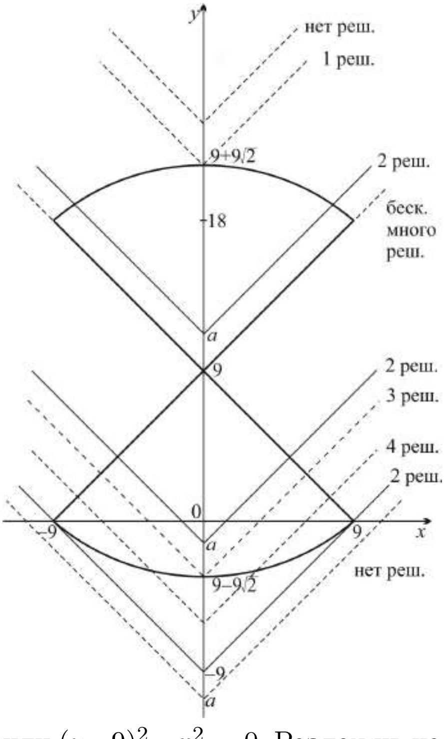
Перепишем исходное неравенство в виде $\frac{|x^2-7|-(x^2-7)}{x+4-\sqrt{x+46}} \geqslant 0$. Заметим, что при произвольных a выражение $(|a| - a)$ принимает только неотрицательные значения в силу верного неравенства $|a| \geqslant a$, причем при $a < 0$ значения $(|a|-a)$ строго положительные, а при $a \geqslant 0$ верно равенство $(|a| - a) = 0$. Рассмотрим отдельно случаи равенства и строгого неравенства в нашей задаче.

Если $\frac{|x^2-7|-(x^2-7)}{x+4-\sqrt{x+46}} = 0$, то при $x \in [-46;3) \cup (3;+\infty)$ должно быть $|x^2-7|-(x^2-7) = 0$, откуда $x^2-7 \geqslant 0$. С учетом ограничений $x \in [-46;-\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7};3) \cup (3;+\infty)$ — в ответ.

Если $\frac{|x^2-7|-(x^2-7)}{x+4-\sqrt{x+46}} > 0$, то $\frac{1}{x+4-\sqrt{x+46}} \cdot (|x^2-7| - x^2 + 7) > 0$, но $|x^2-7|-x^2+7 > 0 \Leftrightarrow x^2-7 < 0$, поэтому $\frac{1}{x+4-\sqrt{x+46}} > 0$. Заметим, что $x + 4 - \sqrt{x+46} < 0$ при $x \in (-\sqrt{7};\sqrt{7})$, откуда неравенство не имеет решений в данном случае.

Ответ: $[-46;-\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7};3) \cup (3;+\infty)$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — ломаная с вершиной $(0;a)$ и направленными вверх ветвями, является графиком уравнения $y = |x| + a$. При изменении значения параметра a эта ломаная перемещается параллельным переносом вдоль оси ординат. Второе множество располагается в вертикальной полосе $-9 \leqslant x \leqslant 9$. При условии $y^2 - 18y \geqslant 0$ второе уравнение преобразуется к виду $y^2-18y = 81-x^2$, оно приводится к уравнению окружности $x^2 + (y-9)^2 = 162$. С учетом ограничения, в этом случае в множество войдут две дуги окружности. При $y^2 - 18y < 0$ второе уравнение преобразуется к виду $18y - y^2 = 81 - x^2$,



или $(y-9)^2-x^2 = 0$. Разложив на множители разность квадратов,

получим новое уравнение $(y-9-x)\cdot(y-9+x)=0$, что соответствует отрезкам двух пересекающихся прямых $y-9-x=0$ и $y-9+x=0$ внутри полосы $y\in(0;18)$. Окончательно, второе множество состоит из двух отрезков пересекающихся прямых, завершающихся двумя дугами окружностей.

При $a<-9$ первое и второе множество не пересекаются, при $a=-9$ они имеют две общие точки, затем при $a\in(-9;9-9\sqrt{2})$ — четыре, при $a=9-9\sqrt{2}$ — три, затем, при $a\in(9-9\sqrt{2};9)$ — две, при $a=9$ — общие отрезки, дающие бесконечно много общих точек, при $a\in(9;9\sqrt{2}+9)$ они снова имеют две общие точки, при $a=9\sqrt{2}+9$ — одну, далее, при увеличении значения a, общие точки отсутствуют. Число общих точек двух множеств равно числу решений системы.

Ответ: $\{-9\}\cup(9\sqrt{2}-9;9)\cup(9;9\sqrt{2}+9)$.

Вариант 2922

1. Указание: пусть расстояние между городами A и C равно S км. Тогда скорость поезда равна $\frac{S}{4}$ км/ч, а скорость электрички — $\frac{S}{6}$ км/ч. Пусть поезд и электричка встретятся через t ч. Составим уравнение $S=t\cdot(\frac{S}{4}+\frac{S}{6})$, $1=t\cdot(\frac{1}{4}+\frac{1}{6})$, $t=\frac{12}{5}$ ч, что составляет 2 ч 24 мин.

Ответ: 2 ч 24 мин.

2. Совпадает частично с задачей из варианта 2912. Для поиска $\operatorname{tg}\alpha$ в решении указанной задачи имеются все данные.

3. Решение задачи из варианта 2912 содержит все необходимые рассуждения и вычисления для получения ответа.

4. Указание: исходное неравенство имеет смысл при условиях

$$\begin{cases} x+59\geqslant 0,\\ x+3-\sqrt{x+59}\neq 0.\end{cases}$$

Решим отдельно уравнение $x+3-\sqrt{x+59}=0$. При $x+3\geqslant 0$ возводим в квадрат обе части уравнения, имеем $(x+3)^2=x+59$, корень $x_1=-10$ — посторонний, $x_2=5$, откуда находим ограничение $x\in[-59;5)\cup(5;+\infty)$.

Перепишем исходное неравенство в виде $\frac{|x^2-23|-(x^2-23)}{x+3-\sqrt{x+59}}\geqslant 0$. Заметим, что при произвольных a выражение $(|a|-a)$ принима-

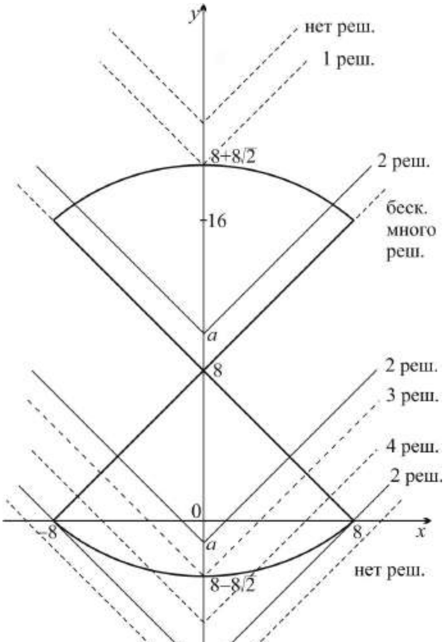
ет только неотрицательные значения в силу верного неравенства $|a| \geqslant a$, причем при $a < 0$ значения $(|a|-a)$ строго положительные, а при $a \geqslant 0$ верно равенство $(|a|-a) = 0$. Рассмотрим отдельно случаи равенства и строгого неравенства в нашей задаче.

Если $\frac{|x^2-23|-(x^2-23)}{x+3-\sqrt{x+59}} = 0$, то при $x \in [-59; 5) \cup (5; +\infty)$ должно быть $|x^2-23|-(x^2-23) = 0$, откуда $x^2 - 23 \geqslant 0$. С учетом ограничений $x \in [-59; -\sqrt{23}] \cup [\sqrt{23}; 5) \cup (5; +\infty)$ — в ответ.

Если $\frac{|x^2-23|-(x^2-23)}{x+3-\sqrt{x+59}} > 0$, то $\frac{1}{x+3-\sqrt{x+59}} \cdot (|x^2-23|-x^2+23) > 0$, но $|x^2-23|-x^2+23 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 23 < 0$, поэтому $\frac{1}{x+3-\sqrt{x+59}} > 0$. Заметим, что $x + 3 - \sqrt{x+59} < 0$ при $x \in (-\sqrt{23}; \sqrt{23})$, откуда неравенство не имеет решений в данном случае.

Ответ: $[-59; -\sqrt{23}] \cup [\sqrt{23}; 5) \cup (5; +\infty)$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество —



ломаная с вершиной $(0; a)$ и направленными вверх ветвями, является графиком уравнения $y = |x| + a$. При изменении значения параметра a эта ломаная перемещается параллельным переносом вдоль оси ординат. Второе множество располагается в вертикальной полосе $-8 \leqslant x \leqslant 8$. При условии $y^2 - 16y \geqslant 0$ второе уравнение преобразуется к виду $y^2 - 16y = 64 - x^2$, оно приводится к уравнению окружности $x^2 + (y-8)^2 = 128$. С учетом ограничения, в этом случае в множество войдут две дуги окружности. При $y^2 - 16y < 0$ второе уравнение преобразуется к виду $16y - y^2 = 64 - x^2$, или $(y-8)^2 - x^2 = 0$. Разложив на множители разность квадратов,

получим новое уравнение $(y-8-x)\cdot(y-8+x)=0$, что соответствует отрезкам двух пересекающихся прямых $y-8-x=0$ и $y-8+x=0$ внутри полосы $y\in(0;16)$. Окончательно, второе множество состоит из двух отрезков пересекающихся прямых, завершающихся двумя дугами окружностей.

При $a<-8$ первое и второе множество не пересекаются, при $a=-8$ они имеют две общие точки, затем при $a\in(-8;8-8\sqrt{2})$ — четыре, при $a=8-8\sqrt{2}$ — три, затем, при $a\in(8-8\sqrt{2};8)$ — две, при $a=8$ — общие отрезки, дающие бесконечно много общих точек, при $a\in(8;8\sqrt{2}+8)$ они снова имеют две общие точки, при $a=8\sqrt{2}+8$ — одну, далее, при увеличении значения a, общие точки отсутствуют. Число общих точек двух множеств равно числу решений системы.

Ответ: $\{-24\}\cup(-8\sqrt{2}-8;-8)\cup(-8;8\sqrt{2}-8)$.

Вариант 2923

1. Указание: пусть расстояние между городами A и C равно S км. Тогда скорость поезда равна $\frac{S}{3}$ км/ч, а скорость электрички — $\frac{S}{7}$ км/ч. Пусть поезд и электричка встретятся через t ч. Составим уравнение $S=t\cdot(\frac{S}{3}+\frac{S}{7})$, $1=t\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{7})$, $t=\frac{21}{10}$ ч, что составляет 2 ч 06 мин.

Ответ: 2 ч 06 мин.

2. Совпадает частично с задачей из варианта 2913. Для поиска $\operatorname{tg}\alpha$ в решении указанной задачи имеются все данные.

3. Решение задачи из варианта 2913 содержит все необходимые рассуждения и вычисления для получения ответа.

4. Указание: исходное неравенство имеет смысл при условиях

$$\begin{cases} x+47\geqslant 0,\\ x+5-\sqrt{x+47}\neq 0. \end{cases}$$

Решим отдельно уравнение $x+5-\sqrt{x+47}=0$. При $x+5\geqslant 0$ возводим в квадрат обе части уравнения, имеем $(x+5)^2=x+47$, корень $x_1=-11$ — посторонний, $x_2=2$, откуда находим ограничение $x\in[-47;2)\cup(2;+\infty)$.

Перепишем исходное неравенство в виде $\frac{|x^2-3|-(x^2-3)}{x+5-\sqrt{x+47}}\geqslant 0$. Заметим, что при произвольных a выражение $(|a|-a)$ принима-

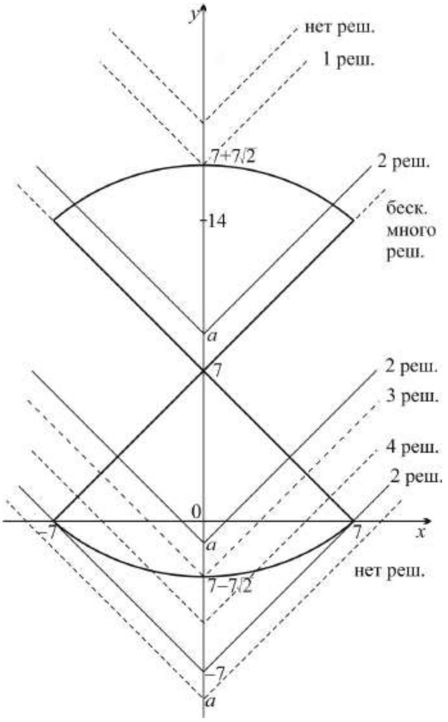
ет только неотрицательные значения в силу верного неравенства $|a| \geqslant a$, причем при $a < 0$ значения $(|a|-a)$ строго положительные, а при $a \geqslant 0$ верно равенство $(|a| - a) = 0$. Рассмотрим отдельно случаи равенства и строгого неравенства в нашей задаче.

Если $\frac{|x^2-3|-(x^2-3)}{x+5-\sqrt{x+47}} = 0$, то при $x \in [-47; 2) \cup (2; +\infty)$ должно быть $|x^2-3|-(x^2-3) = 0$, откуда $x^2-3 \geqslant 0$. С учетом ограничений $x \in [-47; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2) \cup (2; +\infty)$ — в ответ.

Если $\frac{|x^2-3|-(x^2-3)}{x+5-\sqrt{x+47}} > 0$, то $\frac{1}{x+5-\sqrt{x+47}} \cdot (|x^2 - 3| - x^2 + 3) > 0$, но $|x^2-3|-x^2+3 > 0 \Leftrightarrow x^2-3 < 0$, поэтому $\frac{1}{x+5-\sqrt{x+47}} > 0$. Заметим, что $x + 5 - \sqrt{x + 47} < 0$ при $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, откуда неравенство не имеет решений в данном случае.

Ответ: $[-47; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2) \cup (2; +\infty)$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — ломаная с вершиной $(0; a)$ и направленными вверх ветвями, является графиком уравнения $y = |x| + a$. При изменении значения параметра a эта ломаная перемещается параллельным переносом вдоль оси ординат. Второе множество располагается в вертикальной полосе $-7 \leqslant x \leqslant 7$. При условии $y^2 - 14y \geqslant 0$ второе уравнение преобразуется к виду $y^2-14y = 49-x^2$, оно приводится к уравнению окружности $x^2 + (y - 7)^2 = 98$. С учетом ограничения, в этом случае в множество войдут две дуги окружности. При $y^2 - 14y < 0$ второе уравнение преобразуется к виду $14y - y^2 = 49 - x^2$, или $(y-7)^2-x^2 = 0$. Разложив на множители разность квадратов,



получим новое уравнение $(y-7-x)\cdot(y-7+x)=0$, что соответствует отрезкам двух пересекающихся прямых $y-7-x=0$ и $y-7+x=0$ внутри полосы $y\in(0;14)$. Окончательно, второе множество состоит из двух отрезков пересекающихся прямых, завершающихся двумя дугами окружностей.

При $a<-7$ первое и второе множество не пересекаются, при $a=-7$ они имеют две общие точки, затем при $a\in(-7;7-7\sqrt{2})$ — четыре, при $a=7-7\sqrt{2}$ — три, затем, при $a\in(7-7\sqrt{2};7)$ — две, при $a=7$ — общие отрезки, дающие бесконечно много общих точек, при $a\in(7;7\sqrt{2}+7)$ они снова имеют две общие точки, при $a=7\sqrt{2}+7$ — одну, далее, при увеличении значения a, общие точки отсутствуют. Число общих точек двух множеств равно числу решений системы.

Ответ: $\{-7\}\cup(7\sqrt{2}-7;7)\cup(7;7\sqrt{2}+7)$.

Вариант 2924

1. Указание: пусть расстояние между городами A и C равно S км. Тогда скорость поезда равна $\frac{S}{6}$ км/ч, а скорость электрички — $\frac{S}{9}$ км/ч. Пусть поезд и электричка встретятся через t ч. Составим уравнение $S=t\cdot(\frac{S}{6}+\frac{S}{9})$, $1=t\cdot(\frac{1}{6}+\frac{1}{9})$, $t=\frac{18}{5}$ ч, что составляет 3 ч 36 мин.

Ответ: 3 ч 36 мин.

2. Совпадает частично с задачей из варианта 2914. Для поиска $\operatorname{tg}\alpha$ в решении указанной задачи имеются все данные.

3. Решение задачи из варианта 2914 содержит все необходимые рассуждения и вычисления для получения ответа.

4. Указание: исходное неравенство имеет смысл при условиях

$$\begin{cases} x+96\geqslant 0,\\ x+6-\sqrt{x+96}\neq 0.\end{cases}$$

Решим отдельно уравнение $x+6-\sqrt{x+96}=0$. При $x+6\geqslant 0$ возводим в квадрат обе части уравнения, имеем $(x+6)^2=x+96$, корень $x_1=-15$ — посторонний, $x_2=4$, откуда находим ограничение $x\in[-96;4)\cup(4;+\infty)$.

Перепишем исходное неравенство в виде $\frac{|x^2-13|-(x^2-13)}{x+6-\sqrt{x+96}}\geqslant 0$. Заметим, что при произвольных a выражение $(|a|-a)$ принима-

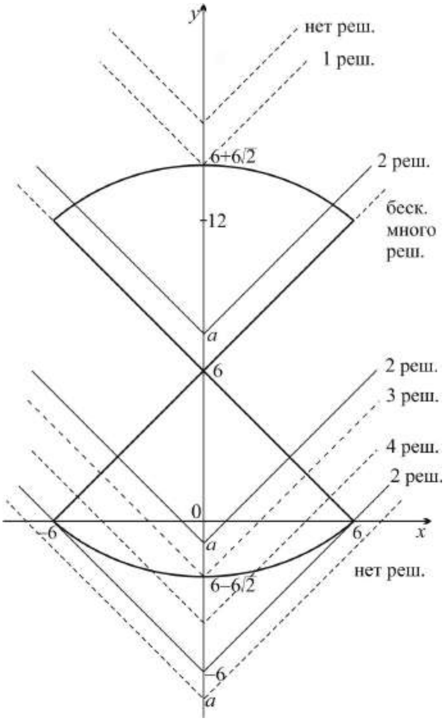
ет только неотрицательные значения в силу верного неравенства $|a| \geqslant a$, причем при $a < 0$ значения $(|a|-a)$ строго положительные, а при $a \geqslant 0$ верно равенство $(|a|-a) = 0$. Рассмотрим отдельно случаи равенства и строгого неравенства в нашей задаче.

Если $\frac{|x^2-13|-(x^2-13)}{x+6-\sqrt{x+96}} = 0$, то при $x \in [-96; 4) \cup (4; +\infty)$ должно быть $|x^2-13|-(x^2-13) = 0$, откуда $x^2 - 13 \geqslant 0$. С учетом ограничений $x \in [-96; -\sqrt{13}] \cup [\sqrt{13}; 4) \cup (4; +\infty)$ — в ответ.

Если $\frac{|x^2-13|-(x^2-13)}{x+6-\sqrt{x+96}} > 0$, то $\frac{1}{x+6-\sqrt{x+96}} \cdot (|x^2-13| - x^2 + 13) > 0$, но $|x^2-13| - x^2 + 13 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 13 < 0$, поэтому $\frac{1}{x+6-\sqrt{x+96}} > 0$. Заметим, что $x + 6 - \sqrt{x+96} < 0$ при $x \in (-\sqrt{13}; \sqrt{13})$, откуда неравенство не имеет решений в данном случае.

Ответ: $[-96; -\sqrt{13}] \cup [\sqrt{13}; 4) \cup (4; +\infty)$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — ломаная с вершиной $(0; a)$ и направленными вверх ветвями, является графиком уравнения $y = |x| + a$. При изменении значения параметра a эта ломаная перемещается параллельным переносом вдоль оси ординат. Второе множество располагается в вертикальной полосе $-6 \leqslant x \leqslant 6$. При условии $y^2 - 12y \geqslant 0$ второе уравнение преобразуется к виду $y^2 - 12y = 36 - x^2$, оно приводится к уравнению окружности $x^2 + (y-6)^2 = 72$. С учетом ограничения, в этом случае в множество войдут две дуги окружности. При $y^2 - 12y < 0$ второе уравнение преобразуется к виду $12y - y^2 = 36 - x^2$, или $(y-6)^2 - x^2 = 0$. Разложив на множители разность квадратов,



получим новое уравнение $(y-6-x)\cdot(y-6+x)=0$, что соответствует отрезкам двух пересекающихся прямых $y-6-x=0$ и $y-6+x=0$ внутри полосы $y\in(0;12)$. Окончательно, второе множество состоит из двух отрезков пересекающихся прямых, завершающихся двумя дугами окружностей.

При $a<-6$ первое и второе множество не пересекаются, при $a=-6$ они имеют две общие точки, затем при $a\in(-6;6-6\sqrt{2})$ — четыре, при $a=6-6\sqrt{2}$ — три, затем, при $a\in(6-6\sqrt{2};6)$ — две, при $a=6$ — общие отрезки, дающие бесконечно много общих точек, при $a\in(6;6\sqrt{2}+6)$ они снова имеют две общие точки, при $a=6\sqrt{2}+6$ — одну, далее, при увеличении значения a, общие точки отсутствуют. Число общих точек двух множеств равно числу решений системы.

Ответ: $\{-18\}\cup(-6\sqrt{2}-6;-6)\cup(-6;6\sqrt{2}-6)$.

Критерии оценивания, 9 класс

Полное и обоснованное решение каждой задачи с правильным ответом оценивалось по 7 баллов. Частично верные решения оценивались в соответствии с таблицей, 0 баллов выставлялось, если решение не удовлетворяло ни одному из критериев.

Физико-математические классы, варианты 2911–2914

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 1	7
Описка в ответе при верном решении.	6
Арифметическая ошибка, задача доведена до ответа.	4
Одно из: более одной арифметической ошибки, при этом задача доведена до ответа, либо записана только верная система (уравнение) без ответа.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 2	7
Одна арифметическая ошибка в конце, ответ получен.	6
Одно из: более одной арифметической ошибки, при этом ответ получен с двумя решениями, либо верно рассмотрен только один случай.	4
Одно из: рассмотрен только один случай с неверным ответом, либо имеется верное рассуждение (выписано уравнение), которое можно довести до правильного ответа, при этом ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 3	7
Ответ получен с одной арифметической ошибкой или опиской.	6
Неверно применена формула площади.	4
Имеется верное геометрическое рассуждение (найдены равные углы, либо подобные треугольники, либо составлены верные уравнения), которое можно довести до правильного ответа. Ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 4	7
Потеря ровно одной граничной точки.	6
Потеря более одной из граничных точек.	5
Одно из: при верном ходе решения допущена одна арифметическая ошибка в вычислениях корней знаменателя или границ промежутков, либо из рассмотрения не исключен верно найденный ноль знаменателя, ответ выписан.	4
Одно из: сокращение обеих частей неравенства на множитель без учета его знака, либо возведение в квадрат обеих частей неравенства с радикалом без учета знака части неравенства, не являющейся радикалом, ответ выписан.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 5	7
Описка в ответе при верном решении.	6
При выписанном ответе одно из: потеряно решение в виде граничной (отдельной) точки, либо допущена арифметическая ошибка при вычислении границ параметра при верном анализе случаев, либо в ответе содержится только один верный промежуток.	4
Ответ отличается от верного включением хотя бы одного граничного значения параметра, соответствующего другому числу решений системы.	3
Имеется верное рассуждение (верно определены и изображены множества, соответствующие каждому уравнению, их взаимное расположение, намечена схема решения), которое можно довести до правильного ответа, ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0

Химико-биологические классы, варианты 2921–2924

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 1	7
Описка в ответе при верном решении.	6
Арифметическая ошибка, задача доведена до ответа.	4
Одно из: более одной арифметической ошибки, при этом задача доведена до ответа, либо записано только верное уравнение без ответа.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 2	7
Одна арифметическая ошибка в конце, ответ получен.	6
Одно из: более одной арифметической ошибки, при этом ответ получен с двумя решениями, либо верно рассмотрен только один случай.	4
Одно из: рассмотрен только один случай с неверным ответом или имеется верное рассуждение (выписано уравнение), которое можно довести до правильного ответа, при этом ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 3	7
Ответ получен с одной арифметической ошибкой или опиской.	6
Неверно применена формула площади.	4
Имеется верное геометрическое рассуждение (найдены равные углы, либо подобные треугольники, либо составлены верные уравнения), которое можно довести до правильного ответа. Ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 4	7
Потеря ровно одной граничной точки.	6
Потеря более одной из граничных точек.	5
Одно из: при верном ходе решения допущена одна арифметическая ошибка в вычислениях корней знаменателя или границ промежутков, либо из рассмотрения не исключен верно найденный ноль знаменателя, ответ выписан.	4
Одно из: сокращение обеих частей неравенства на множитель без учета его знака, либо возведение в квадрат обеих частей неравенства с радикалом без учета знака части неравенства, не являющейся радикалом, ответ выписан.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 5	7
Описка в ответе при верном решении.	6
При выписанном ответе одно из: потеряно решение в виде отдельной точки, либо допущена арифметическая ошибка при вычислении границ параметра при верном анализе случаев, либо в ответе содержится только один верный промежуток.	4
Ответ отличается от верного включением хотя бы одного граничного значения параметра, соответствующего другому числу решений системы.	3
Имеется верное рассуждение (верно определены и изображены множества, соответствующие каждому уравнению, их взаимное расположение, намечена схема решения), которое можно довести до правильного ответа, ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0

Р А З Д Е Л 3

ОТВЕТЫ

2022 год, 11 класс

Вариант 211

1. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z};\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{2}$.
2. $[-4\sqrt{3}; -2\sqrt{6}) \cup (0; \frac{1}{2}) \cup [4; 2\sqrt{6})$.
3. $\frac{45\sqrt{11}}{16}$.
4. $(-\infty; -4) \cup (-4; 3] \cup \{\frac{15}{4}; 4; \frac{9}{2}\} \cup [5; +\infty)$.
5. $V_1 = \frac{136}{3}$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{17}{4}$, $V_2 = \frac{8}{3}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

Вариант 212

1. а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi,\ -\frac{8\pi}{3}$.
2. $[-10; -2\sqrt{10}) \cup (0; \frac{1}{3}) \cup [5; 2\sqrt{10})$.
3. $\frac{112\sqrt{15}}{33}$.
4. $(-\infty; -8) \cup (-8; 7] \cup \{\frac{31}{4}; 8; \frac{17}{2}\} \cup [9; +\infty)$.
5. $V_1 = \frac{580}{3}$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{29}{5}$, $V_2 = \frac{20}{3}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$.

Вариант 213

1. а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6},\ -\frac{5\pi}{2}$.
2. $[-3\sqrt{5}; -\sqrt{15}) \cup (0; \frac{1}{4}) \cup [3; \sqrt{15})$.
3. $\frac{225\sqrt{19}}{56}$.
4. $(-\infty; -5) \cup (-5; 4] \cup \{\frac{44}{9}; 5; \frac{28}{3}\} \cup [10; +\infty)$.
5. $V_1 = 200$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{25}{4}$, $V_2 = 8$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

Вариант 214

1. а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$, -2π.
2. $[-6\sqrt{7};-3\sqrt{7})\cup(0;\frac{1}{3})\cup[6;3\sqrt{7})$.
3. $\frac{48\sqrt{7}}{5}$.
4. $(-\infty;-7)\cup(-7;5]\cup\{\frac{61}{9};7;\frac{31}{3}\}\cup[11;+\infty)$.
5. $V_1=52$, $\varphi_1=\operatorname{arctg}\frac{13}{3}$, $V_2=4$, $\varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Вариант 221

1. а) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$.
2. $[-4\sqrt{3};-2\sqrt{6})\cup(0;\frac{1}{2})\cup[4;2\sqrt{6})$.
3. $\frac{45}{8}$.
4. $(-\infty;3]\cup\{\frac{9}{2}\}\cup[5;+\infty)$.
5. $V=\frac{136}{3}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{17}{4}$.

Вариант 222

1. а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; πm, $m\in\mathbb{Z}$; б) -3π, $-\frac{8\pi}{3}$, -2π.
2. $[-10;-2\sqrt{10})\cup(0;\frac{1}{3})\cup[5;2\sqrt{10})$.
3. $\frac{224}{33}$.
4. $(-\infty;7]\cup\{\frac{17}{2}\}\cup[9;+\infty)$.
5. $V=\frac{580}{3}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{29}{5}$.

Вариант 223

1. а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{19\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{2}$.
2. $[-3\sqrt{5};-\sqrt{15})\cup(0;\frac{1}{4})\cup[3;\sqrt{15})$.
3. $\frac{225}{28}$.
4. $(-\infty;4]\cup\{\frac{28}{3}\}\cup[10;+\infty)$.
5. $V=200$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{25}{4}$.

Вариант 224

1. а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; πm, $m\in\mathbb{Z}$; б) -3π, $-\frac{7\pi}{3}$, -2π.
2. $[-6\sqrt{7};-3\sqrt{7})\cup(0;\frac{1}{3})\cup[6;3\sqrt{7})$.
3. $\frac{48}{5}$.
4. $(-\infty;5]\cup\{\frac{31}{3}\}\cup[11;+\infty)$.
5. $V=52$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{13}{3}$.

2022 год, 9 класс

Вариант 2911

1. 80 и 40 км/ч. **2.** $-\sqrt{\frac{33}{35}}$; $\sqrt{\frac{35}{33}}$. **3.** 8; 7; $\sqrt{\frac{39}{7}}$; $S=\frac{32\sqrt{3}}{7}$.
4. $[-46;-\sqrt{7}]\cup[0;3)\cup(3;+\infty)$. **5.** $(9\sqrt{2}-9;9)\cup(9;9+9\sqrt{2})\cup\{27\}$.

Вариант 2912

1. 60 и 40 км/ч. **2.** $-\sqrt{\frac{37}{39}}$; $\sqrt{\frac{39}{37}}$. **3.** 10; 7; $\sqrt{\frac{223}{7}}$; $S=\frac{60\sqrt{5}}{7}$.
4. $[-59;-\sqrt{23}]\cup[0;5)\cup(5;+\infty)$. **5.** $(8\sqrt{2}-8;8)\cup(8;8+8\sqrt{2})\cup\{24\}$.

Вариант 2913

1. 70 и 50 км/ч. **2.** $-\sqrt{\frac{35}{37}}$; $\sqrt{\frac{37}{35}}$. **3.** 9; 8; $\sqrt{\frac{11}{2}}$; $S=\frac{27\sqrt{7}}{8}$.
4. $[-47;-\sqrt{3}]\cup[0;2)\cup(2;+\infty)$. **5.** $(7\sqrt{2}-7;7)\cup(7;7+7\sqrt{2})\cup\{21\}$.

Вариант 2914

1. 50 и 40 км/ч. **2.** $-\sqrt{\frac{31}{33}}$; $\sqrt{\frac{33}{31}}$. **3.** 14; 11; $\sqrt{\frac{323}{11}}$; $S=\frac{84\sqrt{13}}{11}$.
4. $[-96;-\sqrt{13}]\cup[0;4)\cup(4;+\infty)$. **5.** $(6\sqrt{2}-6;6)\cup(6;6+6\sqrt{2})\cup\{18\}$.

Вариант 2921

1. 2 ч 55 мин. **2.** $\pm\sqrt{\frac{33}{35}}$; $\pm\sqrt{\frac{35}{33}}$. **3.** $8; 7; \sqrt{\frac{39}{7}}; S=\frac{32\sqrt{3}}{7}$.
4. $[-46;-\sqrt{7}]\cup[\sqrt{7};3)\cup(3;+\infty)$.
5. $\{-9\}\cup(9\sqrt{2}-9;9)\cup(9;9\sqrt{2}+9)$.

Вариант 2922

1. 2 ч 24 мин. **2.** $\pm\sqrt{\frac{37}{39}}; \pm\sqrt{\frac{39}{37}}$. **3.** $10; 7; \sqrt{\frac{223}{7}}; S = \frac{60\sqrt{5}}{7}$.
4. $[-59; -\sqrt{23}] \cup [\sqrt{23}; 5) \cup (5; +\infty)$.
5. $\{-24\} \cup (-8\sqrt{2} - 8; -8) \cup (-8; 8\sqrt{2} - 8)$.

Вариант 2923

1. 2 ч 06 мин. **2.** $\pm\sqrt{\frac{35}{37}}; \pm\sqrt{\frac{37}{35}}$. **3.** $9; 8; \sqrt{\frac{11}{2}}; S = \frac{27\sqrt{7}}{8}$.
4. $[-47; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2) \cup (2; +\infty)$.
5. $\{-7\} \cup (7\sqrt{2} - 7; 7) \cup (7; 7\sqrt{2} + 7)$.

Вариант 2924

1. 3 ч 36 мин. **2.** $\pm\sqrt{\frac{31}{33}}; \pm\sqrt{\frac{33}{31}}$. **3.** $14; 11; \sqrt{\frac{323}{11}}; S = \frac{84\sqrt{13}}{11}$.
4. $[-96; -\sqrt{13}] \cup [\sqrt{13}; 4) \cup (4; +\infty)$.
5. $\{-18\} \cup (-6\sqrt{2} - 6; -6) \cup (-6; 6\sqrt{2} - 6)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ляпунов Игорь Борисович,
Трепакова Светлана Борисовна

ВАРИАНТЫ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИКЕ
СУНЦ НГУ ЗА 2022 Г.

Методическое пособие

Технический редактор *Т. В. Иванова*

Графические работы *А. Г. Иванова*

Верстка *И. Б. Ляпунова*

Подписано в печать 20.05.2022 г.
Формат $60 \times 84/16$ Уч.-изд. л. 4,5. Усл. печ. л. 4,19.
Тираж 300 экз. Заказ № 55
Издательско-полиграфический центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2