Вопросы дидактики профильного обучения математике. О действительных числах. Часть 2

УДК 372.851:511.11
Марковичев Александр Сергеевич
Новосибирский государственный университет

Россия, г. Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2, телефон: +7-963-949-94-23

markalex@ngs.ru

Настоящая статья продолжает работу автора, помещенную в предыдущем номере журнала. Приведен другой возможный вариант установления свойств арифметических операций над действительными числами с использованием фундаментальных последовательностей.

Ключевые слова: действительное число, фундаментальная последовательность, арифметические операции.

§ 4. Действительные числа и фундаментальные последовательности

Рассмотрение действительного числа как *класса эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел* слишком абстрактно и не обладает «достаточной конструктивностью», чтобы его можно было бы избрать для целей профильного преподавания, однако использование фундаментальных последовательностей рациональных чисел может облегчить доказательство свойств арифметических операций над действительными числами, взятыми как бесконечные десятичные дроби. Одно дело – рассматривать обширный класс последовательностей рациональных чисел, одни из которых имеют предел (рациональное число), другие не имеют предела (называясь при этом «сходящимися в себе»), и беря в качестве предела каждой последовательности из этого класса новый, «идеальный» объект – сам этот класс. Легче работать с уже зафиксированными объектами – бесконечными десятичными дробями, с точки зрения школьников представляющихся вполне конструктивными, понятными объектами, несмотря на их бесконечность.

Нам потребуется доказать известную теорему о сходимости всякой фундаментальной последовательности, но доказательство, в отличие от общеизвестного, не должно использовать свойств арифметических операций над действительными числами, тем более, что и сами операции легче будет определить с помощью фундаментальных последовательностей.

Основным утверждением о действительных числах, на которое нам придется опираться, является теорема Кантора о стягивающейся последовательности вложенных друг в друга числовых промежутков. Для этого нам потребуется более внимательно, чем раньше, рассмотреть **порядок на множестве действительных чисел.**

Определение. Положим $a<b$, если найдется такое натуральное число n_0, что $a_{(n_0)} \underset{\mathbb{Q}}{<} b_{(n_0)}$. Значок $\underset{\mathbb{Q}}{<}$ показывает, что конечные десятичные дроби $a_{(n_0)}$ и $b_{(n_0)}$ мы сравниваем как рациональные числа. Чтобы несколько следующих утверждений имели более осмысленный вид, некоторое время будем использовать это громоздкое обозначение. Данное нами определение выглядит вполне естественным и явно совпадает с известным правилом сравнения конечных десятичных дробей, если числа a и b записываются в виде конечной десятичной дроби.

1. Пусть $a=\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, $b=\beta_{0,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$, $a<b \Leftrightarrow$ либо $\alpha_0<\beta_0$, либо найдется такое натуральное число n_0, что $\alpha_k<\beta_k\left(k=0,1,2,\ldots,n_0-1\right)$ и $\alpha_{n_0}<\beta_{n_0}$. Если $a_{n_0}\underset{\mathbb{Q}}{<}b_{n_0}$, то для всех $n>n_0$ $a_{(n)}\underset{\mathbb{Q}}{<}b_{(n)}$. Достаточно доказать, что из $a_{(n)}\underset{\mathbb{Q}}{<}b_{(n)}$ следует $a_{(n+1)}\underset{\mathbb{Q}}{<}b_{(n+1)}$. В самом деле, $a_{(n)}\underset{\mathbb{Q}}{<}b_{(n)}\Rightarrow a_{(n)}+10^{-n}\underset{\mathbb{Q}}{\le}b_{(n)}$. Но $a_{(n+1)}\underset{\mathbb{Q}}{<}a_{(n)}+10^{-n}\underset{\mathbb{Q}}{\le}b_{(n)}\underset{\mathbb{Q}}{\le}b_{(n+1)}$. С другой стороны, для всех натуральных $n<n_0$ $a_{(n)}\underset{\mathbb{Q}}{\le}b_{(n)}$. Предположим, что для некоторого $k<n_0$ $a_{(k)}\underset{\mathbb{Q}}{>}b_{(k)}$. В силу предыдущего $a_{n_0}>b_{n_0}$, вопреки условию.

Вывод: *для любых различных действительных чисел* a *и* b *либо* $a>b$*, либо* $b>a$ т. е. любые два действительных числа можно сравнить между собой.

2. *Если* $a<b$*,* $b<c$*, то* $a<c$.

Предложение 1. $a_{(n)}\le a_{(n+1)}$, $a'_{(n)}\ge a'_{(n+1)}$.

Первое неравенство очевидно. Предположим, что $a'_{(n)}<a'_{(n+1)}$, т. е. $a_{(n)}+10^{-n}<a_{(n+1)}+10^{-n-1}\Leftrightarrow a_{(n)}+9\cdot10^{-n-1}<a_{(n+1)}=a_{(n)}+\alpha_n\cdot10^{-n-1}$ – явное противоречие.

Нетрудно доказать, что $a_{(n)}-10^{-n}<a_{(n+1)}-10^{-n-1}$.

Предложение 2. *Для любого натурального числа* n *справедливо неравенство* $a_{(n)}<a'_{(n)}$.

Пусть $a=\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$. Если $a_{(n)}$ не оканчивается девяткой, то $a'_{(n)}=\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_n+1)$, то есть на n-м месте десятичного разложения стоит цифра α_n+1. Если же $a_{(n)}=\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k9\ldots9$, где $\alpha_k\ne9$, то $a'_{(n)}=\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_k+1)0\ldots0$. В обоих случаях непосредственно из определения получаем требуемое неравенство.

Следующее предложение является уточнением предыдущего.

Предложение 3. *Для любого натурального* n *справедливо неравенство* $a_{(n)}\le a<a'_{(n)}$.

Предположим, найдется такое *k*, что $a_k>a$. Для любого *n*, большего некоторого $n_0(a_{(k)})_{(n)}\underset{\mathbb{Q}}{>}a_{(n)}$, в частности при $n>k$

$$(a_{(k)})_{(n)}=a_{(k)}=\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k00\ldots0\underset{\mathbb{Q}}{>}\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n=a_{(n)}$$

чего быть не может. Первое неравенство установлено.

Доказательство второго неравенства:

$$a_{(n)}\underset{\mathbb{Q}}{<}a'_{(n)}\Leftrightarrow(a_{(n)})_{(n)}\underset{\mathbb{Q}}{<}(a'_{(n)})_{(n)}\Leftrightarrow a_{(n)}\underset{\mathbb{Q}}{<}(a'_{(n)})_{(n)}\Rightarrow a<a'_{(n)}.$$

Лемма 1. *Если* $a<b$*, то существует такое натуральное* k*, что для всех* $n>k$

$$a<a'_{(n)}<b_{(n)}\le b.$$

Ввиду предложения 3 остается доказать только среднее неравенство. Пусть $a=\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, $b=\beta_0,\beta_1,\beta_2\ldots\beta_n\ldots$. Даже если длинные начальные куски десятичной записи чисел *a* и *b* совпадают, все-таки на каком-то месте соответствующая цифра в *a* меньше цифры, стоящей на том же месте в записи *b:*

$$\exists n_0\quad \alpha_0=\beta_0,\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2,\ldots,\alpha_{n_0-1}=\beta_{n_0-1},\text{ но }\alpha_{n_0}<\beta_{n_0}.$$

Поскольку запись *a* не содержит «хвоста», состоящего из одних девяток, найдется натуральное число *k* такое, что $a_k\ne9$. Можно считать, что $k>n_0$.

Рассмотрим $a'_{(k)} = \alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_0}\ldots(\alpha_k+1)$ меньшее числа $\beta_{(k)} = \alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_0-1}\beta_{n_0}\ldots\beta_k$, так как $\alpha_{n_0} < \beta_{n_0}$. Итак,

$$a < a'_{(k)} < b_{(k)} \le b .$$

Окончательно утверждение леммы получается благодаря предложениям 1 и 3.

Без затруднений проводится доказательство для случая, когда $\alpha_0 < \beta_0$.

Утверждение леммы можно немного усилить.

Лемма 2. *Если* $a < b$, *то существует такое натуральное k, что для всех* $n \ge k$

$$a < a_{(n)} + 10^{-n} < b_{(n)} - 10^{-n} < b .$$

Так же как и в предыдущей лемме доказательства требует только среднее неравенство. В силу леммы 1 для достаточно больших номеров *n*

$$a_{(n)} + 10^{-n} \le b_{(n)} - 10^{-n},$$

ввиду предложения I

$$a_{(n+1)} + 10^{-n-1} \le b_{(n+1)} - 10^{-n} < b_{(n+1)} - 10^{-n-1}.$$

Более того, ясно, что если неравенство леммы I выполнено для некоторого номера *n*, то неравенство леммы 2 заведомо выполняется для всех номеров, начиная с $(n+1)$-го.

Порядок в $\mathbb{R}$ должен быть согласован с порядком в множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Так как в $\mathbb{R}$ рациональные числа изображаются своими десятичными разложениями, то нужно доказать такое утверждение:

Теорема 1. *Пусть* r_1 è $r_2 \in \mathbb{Q}$. $r_1 \underset{\mathbb{Q}}{<} r_2 \Leftrightarrow D(r_1) < D(r_2)$.

Доказательство. Предположим, что $D(r_1) < D(r_2)$ и $D(r_1) = \alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, $D(r_2) = \beta_{0,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$. По лемме I для некоторого *n* верно $\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + 10^{-n} < \beta_{0,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$.

Однако в силу определения десятичного разложения рационального числа

$$r_1 \underset{\mathbb{Q}}{<} \alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + 10^{-n}; \quad \beta_{0,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_n \underset{\mathbb{Q}}{\le} r_2$$

и $r_1 \underset{\mathbb{Q}}{<} r_2$. Таким образом, $D(r_1) < D(r_2) \Rightarrow r_1 \underset{\mathbb{Q}}{<} r_2$.

Обратно, предположим, что $r_1 \underset{\mathbb{Q}}{<} r_2$, но $D(r_1) > D(r_2)$.

(Равенство $D(r_1) = D(r_2)$ выполняется в том и только в том случае, когда $r_1 = r_2$. По только что доказанному $D(r_1) > D(r_2) \Rightarrow r_1 \underset{\mathbb{Q}}{>} r_2$ в противоречии с предположением.

Таким образом, $r_1 \underset{\mathbb{Q}}{<} r_2 \Rightarrow D(r_1) < D(r_2)$.

Теорема 2. *Пусть X и Y – два непустых множества действительных чисел, таких, что любое число из X меньше любого числа из Y. Найдется разделяющее эти множества действительное число c, то есть* $\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad (x \le c \le y)$.

Доказательство. Ввиду уже установленного взаимнооднозначного соответствия между множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел и множеством точек прямой мы будем постоянно пользоваться геометрическим языком, говоря не о числах, а о точках числовой прямой, вместо «больше» говоря «правее», соответственно вместо «меньше» – «левее» и т. д. Поэтому о взаимном расположении множеств *X* и *Y* можно сказать «*X* лежит левее *Y*» и обозначить это $X < Y$. Теорема утверждает существование точки *c*, разделяющей множества *X* и *Y*, то есть

$$X \le c \le Y .$$

Возьмем произвольные $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Целое число $[x_0]$ либо само лежит в *X*, либо правее его есть числа из *X*. Последовательно откладывая вправо от этого числа единичный отрезок OE, доберемся до целого числа $[y_0]+1$. Множество *X* заведомо лежит левее его $X < y_0 < [y_0]+1$. Точка $[y_0]$ совсем не обязательно лежит правее *X*.

Поэтому в процессе откладывания отрезка OE появится такое целое число α_0, что либо число α_0 само из *X*, либо правее α_0 есть еще точки из *X*, но следующее за ним целое число α_0+1 этим свойством уже не обладает, то есть все множество *X* лежит левее α_0+1.

Разделив отрезок $[\alpha_0;\alpha_0+1]$ на десять равных частей, найдем такое число α_1, $0 \le \alpha_1 \le 9$, что число α_0,α_1 либо само лежит в *X*, либо правее его есть точки *X*, но $X < \alpha_0,\alpha_1 + \frac{1}{10}$. Деление на десять равных частей отрезка $\left[\alpha_0,\alpha_1;\alpha_0,\alpha_1+\frac{1}{10}\right]$ даст нам такое число $\alpha_2, 0 \le \alpha_2 \le 9$, что либо $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2$ само лежит в *X*, либо правее его есть точки из *X*, но $X < \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{100}$ и т. д. Таким образом определяется бесконечная десятичная дробь.

$$\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots.$$

i) Если эта бесконечная дробь является действительным числом *a* (т. е. бесконечно много α_i отлично от 9), то

$$x \le a.$$

В самом деле, если найдется такое $x \in X$, что $a < x$, то по лемме I для некоторого *n*,

$$\alpha'_{(n)} = \alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + \frac{1}{10^n} < x,$$

но это противоречит самому построению дроби *a* – правее числа $\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + \frac{1}{10^n}$ нет точек из *X*.

ii) К сожалению, иногда получающаяся бесконечная десятичная дробь может иметь «хвост», состоящий из девяток. Так будет, например, для множества $X = \{0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ \ldots;0,99\ldots9;\ \ldots\}$. Но эту трудность легко обойти. Если получена десятичная дробь $\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 999\ldots$, $\alpha_k \ne 9$ то возьмем число

$$a = \alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_k+1).$$

И в этом случае $X \le a = \alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k + \frac{1}{10^k}$ по самому построению дроби $\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 99\ldots$.

Более того, *a* – <u>наименьшее из чисел, для которых</u> $X \le a$. Действительно, если некоторое число $\alpha < a$, то

i) по лемме 1 найдется номер *n*, для которого $d < a_{(n)} = \alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, но число $\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ по построению либо входит в *X*, либо правее его найдется точка из *X*;

ii) по лемме 2 найдется номер *n*, для которого

$$d < a - \frac{1}{10^n} = \alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 99\ldots9,$$

но число $\alpha_{0,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 99\ldots 9$ участвует в построении бесконечной десятичной дроби и участвует и либо входит в *X*, либо правее его найдется точка из *X*.

Из этих же рассуждений вытекает, что $a \le Y$. В самом деле, если бы нашелся $y < a$, то либо $y \in X$, либо $y < x \in X$. И то и другое противоречат условию теоремы.

Теорема нами уже доказана – искомой разделяющей точкой оказалось *a*. Однако, было бы полезно указать еще такое число *b*, которое так же «подпирало бы» множество *Y* слева, как *a* подпирает *X* справа, т. е. наибольшее из чисел со свойством $b \le Y$.

Для этого возвратимся к началу доказательства теоремы. Множество *Y* заведомо лежит правее числа $[x_0]$; $[x_0] \le x_0 < Y$; с другой стороны, левее числа $[y_0]+1$ есть числа из *Y*, например число y_0. Поэтому между $[x_0]$ и $[y_0]+1$ найдутся такие целые числа β_0 и β_0+1, что $\beta_0 \le y$, а левее β_0+1 есть точка из *Y*[1]. Делим отрезок $[\beta_0;\beta_0+1]$ на десять равных частей и пробегая последовательно по числам: $\beta_0,0$; $\beta_0,1$; $\beta_0,2$; …; $\beta_0,9$; β_0+1 находим такое β_1, что $\beta_0,\beta_1 \le Y$, а левее $\beta_0,\beta_1+\frac{1}{10}$ есть, по крайней мере, одна точка из *Y* и т. д. Если $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1}$ известны, то β_n определяется из условия: $\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n \le Y$, а левее $\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n+\frac{1}{10^n}$ лежат точки из *Y*. Тем самым построена бесконечная десятичная дробь $\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$. Допустим, что начиная с некоторого разряда все знаки этой бесконечной десятичной дроби оказались девятками, и дробь имеет вид $\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_k 99\ldots$ $(\beta_k \ne 9)$. Существует точка $y \in Y$, лежащая левее числа $\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots(\beta_k+1)$, следовательно, по лемме 2 для подходящего *k*

$$y < \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots(\beta_k+1)-\frac{1}{10^n} = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_k 99\ldots 9 \le Y +++$$

(второе неравенство имеет место непосредственно по определению нашей десятичной дроби), и $y < Y$. Полученное противоречие показывает, что дробь $\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ не содержит «хвоста» из девяток и является действительным числом; обозначим его b.

Если бы нашлось такое число $y \in X$, что $y < b$, то по лемме I для некоторого n

$$y < b_{(n)} = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n,$$

но левее $\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ не должно быть точек из *Y*. Таким образом, $b \le Y$.

Почему же b – наибольшее число, удовлетворяющее этому свойству? Если $d > b$, то для подходящего номера n выполняется неравенство $b'_{(n)} = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n+\frac{1}{10^n} < d$, но левее $\beta'_{(n)}$ есть, по крайней мере, одна точка из *Y*: $y < d$.

В качестве упражнения легко доказать, что 1) $x \le b$; 2) *всякое число c, разделяющее множества X иY, удовлетворяет неравенствам* $a \le c \le b$.

Определение. *Множество A называется <u>ограниченным сверху</u>, если найдется число* $c \ge A$, *число c в свою очередь называется <u>верхней границей</u> множества A. Множество B называется <u>ограниченным снизу</u>, если найдется число* $c \le B$; *c тогда называется <u>нижней границей</u> множества B. Наименьшая из верхних границ множества A (если, конечно, она*

[1] β_0 может совпасть с $[x_0]$, либо β_0+1 может совпасть с $[y_0]+1$.

существует) называется <u>*верхней гранью*</u> *множества A и обозначается* $\sup A$ *(supremum A). Наибольшая из нижних границ множества Вназывается* <u>*нижней гранью*</u> *Ви обозначается* $\inf B$ *(infimum B).*

Понятия верхней и нижней грани являются обобщениями понятий наибольшего и наименьшего элементов конечного числового множества.

Следствие 1. *Всякое непустое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань. Всякое непустое ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань.*

Числовым промежутком (или отрезком) $[x; y]$ называется множество чисел C, заключенных между x и y: $x \le c \le y$.

Следствие 2. *Всякая последовательность вложенных друг в друга числовых отрезков имеет общий элемент. (Другими словами, если есть последовательность отрезков* $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \ldots$, *то* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \ne \varnothing$.

Доказательство. Если $L_n = [x_n; y_n]$, то обозначив через X множество левых концов, через Y – множество правых концов отрезков, обнаруживаем, что любой элемент из X меньше любого элемента из Y: если $x_k \in X$, $y_l \in Y$, то взяв $m = \max[k, l]$ получаем $x_k \le x_m \le y_m \le y_l$. Число, разделяющее множества X и Y, очевидно принадлежит каждому из отрезков I_n.

Утверждение, высказанное нами как следствие 2 теоремы о разделяющей точке, принято называть теоремой Кантора о вложенных промежутках.

Определение. *Последовательность* (x_n) *рациональных чисел называется фундаментальной, если для любого рационального числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число M, что для всех номеров m и n, больших M, справедливо неравенство* $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Лемма 3. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Взяв в качестве $\varepsilon > 0$ число 1, получим такой номер m, что для всех $n > m$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < 1$, или $x_m - 1 < x_n < x_m + 1$. Взяв окрестность $O(x_m) = (x_m - 1; x_m + 1)$ числа x_m, обнаружим, что вне ее может лежать только конечное число членов последовательности x_1, x_2, …, x_{m-1}. А теперь возьмем окрестности $O(x_i)$ каждой из точек x_i, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, содержащие точку x_i. Объединение m окрестностей $\left(\bigcup\limits_i O(x_i)\right)\bigcup O(x_m)$ является промежутком, содержащим все члены последовательности (x_n), вследствие чего последовательность ограничена.

Теорема 3. *Всякая фундаментальная последовательность рациональных чисел сходится.*

Доказательство. Взяв в качестве $\varepsilon > 0$ число $\frac{1}{2}$, получим такой номер m_1, что для всех $n > m_1$ выполняется неравенство $|x_{m_1} - x_n| < \frac{1}{2}$, или

$$x_{m_1} - \frac{1}{2} < x_n < x_{m_1} + \frac{1}{2}.$$

Обозначив $x_{m_1} - \frac{1}{2}$ через a_1, $x_{m_1} + \frac{1}{2}$ через b_1, возьмем ту половину промежутка $[a_1; b_1]$, где лежит бесконечное число членов последовательности (x_n) (если обе половины промежутка содержат бесконечное число, то для определенности, например, левую половину), обозначив ее через $[a_2; b_2]$.

Пусть m_2' – такой номер, что для всех m и n, больших m_2', выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \frac{1}{4}$, а m_2 – такой номер, больший m_1 и m_2', что x_{m_2} лежит на $[a_2; b_2]$. Тогда для всех n, больших m_2, выполняется неравенство $|x_{m_2} - x_n| < \frac{1}{4}$.

Обозначив через $[a_3; b_3]$ ту половину промежутка $[a_2; b_2]$, где лежит бесконечное число членов последовательности (x_n), найдем такой номер m_3', что для всех m и n, больших m_3', выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \frac{1}{8}$, а затем m_3 – такой номер, больший m_2 и m_3', что x_{m_3} лежит на промежутке $[a_3; b_3]$, и тем более для всех n, больших m_3, выполняется неравенство $|x_{m_3} - x_n| < \frac{1}{8}$.

Неограниченно продолжая подобную процедуру, на k-м шаге найдем номер $m_k > m_{k-1}$, что x_{m_k} лежит на промежутке $[a_k; b_k]$, и для всех n, больших m_k, выполняется неравенство $|x_{m_k} - x_n| < \frac{1}{2^k}$. Отметим, что длина промежутка $[a_k; b_k]$ равна $\frac{1}{2^{k-1}}$, а его концы – рациональны.

Нами получена последовательность вложенных друг в друга промежутков $[a_k; b_k]$, по теореме Кантора имеющая общее для всех промежутков число c. Рассмотрим последовательность x_{m_1}, x_{m_2}, ..., x_{m_k},..., причем для каждого k соответствующий член этой последовательности $x_{m_k} \in [a_k; b_k]$.

Так как длина промежутка $[a_k; b_k]$ равна $\frac{1}{2^{k-1}}$, взяв любую окрестность $O(c)$ числа c, мы можем найти промежуток $[a_k; b_k]$, лежащий в этой окрестности вместе с промежутком $\left[a_k - \frac{1}{2^k}; b_k + \frac{1}{2^k}\right]$. Но для любого $n > m_k$ выполняются неравенства $x_{m_k} - \frac{1}{2^k} < x_n < x_{m_k} + \frac{1}{2^k}$, и в окрестность $O(c)$ вместе с x_{m_k} входит x_n.

Теорема 4. *Всякая сходящаяся последовательность рациональных чисел является фундаментальной.*

Легко понять, что для доказательства этой теоремы достаточно взять окрестность вида $[c_{(k)} - 10^{-k}; c_{(k)} + 10^{-k}]$ числа c, являющегося пределом данной последовательности, и понять, что для почти всех номеров расстояние между рациональными членами последовательности окажется меньше $2 \cdot 10^{-k}$.

Теорема 5. *Сумма и произведение двух фундаментальных последовательностей рациональных чисел являются фундаментальными последовательностями.*

Доказательство. Вследствие фундаментальности последовательностей (x_n) и (y_n) для любого рационального $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа M_1 и M_2, что для всех номеров m и n, больших M_1, справедливо неравенство $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, а для всех номеров m и n, больших M_2, справедливо неравенство $|y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для всех номеров m и n, больших $M = \max(M_1, M_2)$, выполнено неравенство $|(x_m + y_n) - (x_n + y_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Для доказательства второго утверждения теоремы заметим, что поскольку фундаментальная последовательность является ограниченной, найдутся такие числа X и Y, что $|x_n| < X$, $|y_n| < Y$, и для достаточно больших номеров будут выполняться неравенства $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2Y}$, $|y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2X}$, вследствие чего

$$|x_m y_m - x_n y_n| = |x_m y_m - x_n y_m + x_n y_m - x_n y_n| \leq |x_m - x_n| \cdot |y_m| + |x_n| \cdot |y_m - y_n| < \varepsilon.$$

Заметим еще, что рациональные последовательности (x_n) и (y_n) имеют общий предел тогда и только тогда, когда $\lim(x_n - y_n) = 0$.

Теперь без особенных проблем можно определить сумму действительных чисел a и b. Взяв рациональные последовательности $(a_{(n)})$ и $(b_{(n)})$ десятичных приближений, очевидно сходящиеся к a и b соответственно, суммой $a + b$ назовем предел фундаментальной последовательности $(a_{(n)} + b_{(n)})$. Аналогично, произведением $a \cdot b$ назовем предел фундаментальной последовательности $(a_{(n)} b_{(n)})$. В силу предыдущего замечания вместо последовательностей $(a_{(n)})$ и $(b_{(n)})$ можно брать любые рациональные последовательности, сходящиеся к a и b соответственно. Для такого определения операций доказательство обычных свойств является стандартным упражнением.

On the didactics of specialized teaching Mathematics. Real numbers

Markovichev Aleksander Sergeyevich
Novosibirsk State University
Russia, Novosibirsk

Переведено с помощью http://www.translate.ru

The present article continues the work of the author placed in the previous issue of the magazine. Other possible variant of an establishment of properties of arithmetic operations over real numbers with use of fundamental sequences is resulted.

Keywords: The real number, fundamental sequence, arithmetic operations.