Вопросы дидактики профильного обучения математике. О действительных числах[1]

УДК 372.851:511.11

Марковичев Александр Сергеевич
Новосибирский государственный университет
Россия, Новосибирск, ул. Вяземская, д. 2, кв. 196, телефон: +7-963-949-94-23
markalex@ngs.ru

При профильном обучении математике для успешного изучения начал анализа элементарных функций возникает необходимость в теоретическом осмыслении понятия действительного числа. Рассматриваются различные способы введения действительного числа, обоснована и приведена краткая схема введения действительных чисел как бесконечных десятичных дробей, связанная с процедурой измерения. В §2 изложен один из возможных вариантов установления свойств арифметических операций с помощью пределов. В §3 содержится материал, который представляется полезным изучать факультативно с более подготовленными учащимися. Рассматривается небольшая теория измерения длин отрезков прямой и доказывается теорема Фалеса и свойства операции умножения векторов на числа.

Статья отражает опыт изложения темы «Действительные числа» в Специализированном учебно-научном центре НГУ.

Ключевые слова: Дидактика математики, профильное обучение, действительное число, бесконечная десятичная дробь, арифметические операции, операции над векторами, теорема Фалеса.

Настоящая статья открывает серию работ, посвященную рассмотрению вопросов дидактики профильного обучения математике в средней школе.

Автор надеется, что в ней получит отражение опыт работы Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета.

§ 1. Определение действительного числа.

Восприятие действительных чисел часто вызывает затруднения у многих школьников, и обычно считается весьма удовлетворительным, если ученик знает – что действительное число записывается в виде бесконечной десятичной дроби, что бесконечные десятичные дроби бывают двух видов – периодические, которые получаются при представлении рациональных чисел с помощью алгоритма «деления уголком», и непериодические, которые тем самым представляют иррациональные числа. Впервые же иррациональные числа появляются в виде формальных выражений вроде $\sqrt{2}$, про которое доказывается, что оно не может быть рациональным числом (что нет рационального числа, квадрат которого равен 2). Некоторые школьники слышали, что геометрически этот факт означает несоизмеримость стороны и диагонали квадрата. К сожалению, необходимость во введении новых чисел остается для большинства школьников совершенно непонятной. Мы считаем, что отчасти, это происходит и потому, что вопрос об отношении отрезков и о приближенном нахождении квадратных корней изучается врозь – на уроках геометрии и на уроках алгебры. К счастью, ныне в школьном преподавании в связи с построением числовой прямой, укоренилась мысль о важности измерении величин, что и является объединяющей идеей при решении как геометрической, так и алгебраической задачи.

При профильном обучении математике возникает необходимость в теоретическом осмыслении понятия действительного числа, его необходимости и применимости, тем более,

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант №08-06-00161а

что это нужно для успешного изучения начал анализа элементарных функций.

Уже в конце 19 века при подведении логического фундамента под математический анализ возникло несколько подходов к построению теории действительных чисел. Теория Дедекинда определяет действительное число как *сечение* в множестве рациональных чисел, теория Кантора – как *класс эквивалентных фундаментальных последовательностей*, сильно упрощенная теория Вейерштрасса – как *бесконечную десятичную дробь*. Способ введения действительных чисел в этих теориях можно назвать *конструктивным*. Конечным итогом этих теорий является построение некоторого множества элементов (действительных чисел) с определенными на нем арифметическими операциями (сложением и умножением) и отношением порядка, обладающими «хорошими» свойствами и содержащими в качестве подмножества часть, соответствующую рациональным числам. Все построенные числовые области оказываются при этом изоморфными.

При всех построениях области действительных чисел аксиоматически задавалось множество натуральных чисел, а далее эта числовая область расширялась, чтобы удовлетворять новым требованиям (возможности обращать операцию сложения, операцию умножения, непрерывности), причем каждый раз строилась модель, обладающая свойствами минимальности. Само множество действительных чисел уже не подлежит дальнейшему расширению на основе предъявляемых условий с сохранением свойства минимальности.

Поэтому к заданию множества действительных чисел можно перейти аксиоматически, задав его как упорядоченное непрерывное поле, содержащее поле рациональных чисел в качестве подполя. Но при аксиоматическом подходе все равно требуется ответить на вопрос о существовании модели.

Однако изложение любой теории с достаточной степенью подробности явно не соответствует ни потребностям школьников, ни их возможностям.

Какие же представления о действительном числе, какие фрагменты теории действительного числа дадут учащимся профильных классов достаточный фундамент для усвоения начал анализа?

Нам кажется, что для расширения системы рациональных чисел более простыми выглядят геометрические мотивировки и геометрический подход к построению действительных чисел, что почти сразу влечет выбор в качестве модели множество бесконечных десятичных дробей.

Мы уже привыкли к тому, что для того, чтобы *измерять* прямолинейные отрезки, нам требуется прежде всего выбрать какой-то отрезок e за *единицу* измерения и далее, для удобства сравнения, построить шкалу, образом которой является мерная линейка. Другими словами, от фиксированной точки O прямой в обе стороны откладывается неограниченное количество раз единичный отрезок. Получается «числовая прямая», на которой отложены целые числа. Для повышения точности измерения от единичного отрезка переходят к новому, более мелкому масштабному отрезку (тем более, что деление любого отрезка на произвольное число одинаковых частей не представляет никакого труда). В качестве более мелкого отрезка возьмем отрезок $e_1 = \frac{1}{10}e$. Далее перейдем к еще меньшему масштабному отрезку $e_2 = \frac{1}{10}e_1 = \frac{1}{100}e$, и т.д. На прямой откладываются точки, которые сопоставляются конечным десятичным дробям ранга 1 (с одним знаком после запятой), ранга 2 (с двумя знаками после запятой), и т.д.

Таким образом, если A – произвольная точка прямой, точки O и E определяют единичный отрезок, то в силу аксиомы Архимеда-Евдокса найдется такое целое число α_0, что

$$OA_0 = \alpha_0 \cdot OE \le OA < (\alpha_0 + 1)OE = OA'_0$$

И точка A принадлежит отрезку $A_0A'_0$, возможно совпадая с его левым концом. (Следуя обычаям считают, что точка E «расположена правее» точки O и точка A лежит «правее» точки O, если она лежит на той же полупрямой, где лежит точка E, и A лежит «левее» точки O, если она лежит на другой полупрямой, тем более, что точку E всегда изображают правее точки O, гораздо реже – выше точке). Для любого $n \in \mathbb{N}$ точка A окажется лежащей между двумя соседними десятичными точками ранга n, скажем A_n и A'_n. Тем самым найдется такая конечная десятичная дробь $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, что

$$OA_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \cdot OE \le OA < \left(\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)\cdot OE = OA'_n$$

Точка A лежит на отрезке $A_nA'_n = e_n$, возможно совпадая с его левым концом. (Здесь мы для удобства записываем $\alpha_0 + 0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ в виде $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ и в случае отрицательного числа α_0). Если на каком-то этапе точка A совпала с точкой A_n, то $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \ldots = 0$.

Таким образом, всякой точке A прямой однозначно соответствует бесконечная десятичная дробь $a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, причем бесконечное число знаков дроби a отлично от 9 (другими словами, не может оказаться так, что начиная с некоторого места все a_i равны 9). Причина того, что при определении по точке бесконечной десятичной дроби не встретятся дроби, содержащие «хвост» из девяток, кроется именно в том, что точка A лежит на отрезке $A_nA'_n$, возможно совпадая с левым концом этого отрезка.

Это построение, конечно предполагает, что ранее школьники уже научились «откладывать» на числовой прямой (т. е. на прямой с выбранным началом O и концом единичного отрезка E) рациональные числа и обнаружили, что точка, соответствующая концу диагонали единичного квадрата, не соответствует никакой рациональной точке.

Школьники знают, что с каждым рациональным числом связано его десятичное представление, получаемое делением «уголком». Уместно объяснить, как подобное деление связано с процессом десятичного измерения, хотя бы на примере $\frac{1}{7} = 0,142857142\ldots$.

$$0,1 < \frac{1}{7} < 0,2;$$

$$0,14 < \frac{1}{7} < 0,15;$$

$$0,142 < \frac{1}{7} < 0,143 \text{ и т. д.}$$

Теперь уже можно объявить бесконечную десятичную дробь $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, в которой бесконечное число знаков отлично от 9, *действительным числом.*

Определение. *Действительное число есть бесконечная десятичная дробь* $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, *в которой бесконечное число знаков отлично от 9.*

Множество действительных чисел принято обозначать $\mathbb{R}$.

Чтобы оправдать это определение необходимо:

1) включить некоторым образом в множество $\mathbb{R}$ все множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел;

2) определить на $\mathbb{R}$ порядок и арифметические операции, обладающие теми же свой-

ствами, что и порядок и операции в $\mathbb{Q}$ (иначе неестественно называть элементы из $\mathbb{R}$ числами);

3) установить взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами.

Как уже показано учащимся, первое требование выполнено. Каждому рациональному числу сопоставлена бесконечная десятичная дробь – его десятичное представление, причем эта дробь является периодической. Обратно, всякая периодическая десятичная дробь (тем более, конечная) является десятичным представлением некоторого рационального числа.

Третьему требованию мы частично удовлетворили, а именно, каждой точке прямой поставили в соответствие некоторое действительное число. Обратно, пусть $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$. Сопоставим этому числу некоторую точку *A* прямой.

Определение. *n-м десятичным приближением с недостатком числа a будем называть число* $a_{(n)} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$*; n -м десятичным приближением с избытком числа a – число*

$$a'_{(n)} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n}.$$

Заметим, что мы, вообще говоря, не можем использовать запись $a'_{(n)} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_n + 1)$, так как цифра α_n может оказаться девяткой и единица перейдет в следующий разряд, например, если $a_{(5)} = 4{,}56799$, то $a'_{(5)} = 4{,}56800 = 4{,}568$.

Числа $a_{(n)}$ и $a'_{(n)}$ являются рациональными, и поэтому однозначно определяют на прямой точки A_n и A'_n: $OA_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \cdot OE$, $OA'_n = \left(\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10}\right) \cdot OE$, причем $A_nA'_n = OE_n = \frac{1}{10^n} \cdot OE$. Тем самым мы получили последовательность вложенных друг в друга отрезков

(*) $$A_1A'_1 \supseteq A_2A'_2 \supseteq A_3A'_3 \supseteq \ldots \supseteq A_nA'_n \supseteq \ldots$$

Укажем еще одно из основных свойств прямой, принимаемых в качестве аксиомы, и необходимых для того, чтобы вся прямая (в отличие от множества лежащих на прямой рациональных точек) не была «дырявой».

Аксиома Кантора. *Всякая совокупность вложенных друг в друга отрезков прямой имеет общую точку.*

В силу аксиомы Кантора построенная нами последовательность (*) вложенных друг в друга отрезков $A_nA'_n$ имеет общую точку, обозначим ее *A*. Однако точка *A* является *единственной* точкой, принадлежащей всем отрезкам $A_nA'_n$. Допустим, что есть другая точка *B*, тоже принадлежащая всем отрезкам $A_nA'_n$. В силу аксиомы Архимеда-Евдокса, если отрезок *AB* последовательно отложить достаточно большое число раз, скажем *m*, то $m \cdot AB > OE$. Отсюда $10^m \cdot AB > OE$, $AB > \frac{1}{10^m} OE = OE_m = A_mA'_m$, что противоречит предположению о принадлежности точек *A* и *B* любому отрезку $A_nA'_n$.

Таким образом, всякому действительному числу мы сопоставили однозначно определяемую точку прямой. Другими словами, мы построили отображение из $\mathbb{R}$ в множество Π точек прямой, назовем его ψ. Процесс десятичного измерения, изложенный в начале параграфа, каждой точке прямой сопоставляет некоторое действительное число; обозначим полученное отображение φ.

Что же произойдет, если мы возьмем некоторое действительное число $a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, построим по нему с помощью системы вложенных промежутков точку $A = \psi(a)$, а потом по этой точке выпишем действительное число $\varphi(\psi(a))$?

$$OA_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \cdot OE \le OA < \left(\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)\cdot OE = OA'_n,$$

но

$$OA_n = OA_{n-1} + \alpha_n \cdot OE_n,\ OA'_n = OA_{n-1} + (\alpha_n + 1)OE_n,\ OA = OA_{n-1} + A_{n-1}A,$$

поэтому

$$\alpha_n \cdot OE_n \le A_{n-1}A < (\alpha_n + 1)OE_n,$$

а последнее соотношение получается при сопоставлении точке действительного числа. Получилось, что $\varphi(\psi(a)) = a$.

$$OA_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \cdot OE \le OA < \left(\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)\cdot OE = OA'_n$$

В свою очередь, легко видеть, что при построении по точке *A* действительного числа $a = \varphi(A)$, получалась последовательность вложенных друг в друга отрезков $A_nA'_n$, где A_n – рациональная точка, определяемая *n*-м десятичным приближением с недостатком числа *a*, A'_n – рациональная точка, определяемая *n*-м десятичным приближением с избытком этого числа *a*, $A_nA'_n = OE_n$, и единственная общая точка этих отрезков – точка *A*. Таким образом,

$$\psi(\varphi(A)) = A.$$

Отображения φ и ψ являются взаимно обратными: $\varphi = \psi^{-1}$, $\psi = \varphi^{-1}$ и, что особенно важно, взаимно однозначными.

Нами доказана

Теорема. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством* $\mathbb{R}$ *действительных чисел и множеством точек прямой.*

Порядок на множестве действительных чисел можно определить двумя эквивалентными способами: 1) положим $a < b$, если найдется такое натуральное число n_0, что $a_{(n_0)} \underset{\mathbb{Q}}{<} b_{(n_0)}$; 2) $a < b$, если существует такое натуральное *n*, что $a < a'_{(n)} < b_{(n)} \le b$. Первый способ можно назвать *лексикографическим,* второй утверждает существование «десятичной распорки» между точками, изображающими соответствующие числа, и показывает что точка, соответствующая меньшему числу на числовой прямой, лежит левее точки, соответствующей большему числу.

Утверждение о непрерывности множества действительных чисел может иметь различные формы: 1) теорема Кантора – всякая совокупность вложенных друг в друга *числовых отрезков* имеет общую точку; 2) теорема о существовании числа, разделяющего два множества $X < Y$ – пусть *X* и *Y* два таких непустых множества действительных чисел, что любое число из *X* меньше любого числа из *Y*, тогда найдется разделяющее эти множества действительное число *c*, то есть $\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad (x \le c \le y)$; 3) теорема Дедекинда – пусть множество $\mathbb{R}$ действительных чисел разбито на два таких непустых множества X и Y, что $X < Y$, тогда множества X и Y разделяет единственное число.

Теорема о разделяющей точке (а точнее, ее доказательство) сразу гарантирует существование граней у непустых ограниченных числовых множеств.

Суммой $a+b$ двух действительных чисел a и b называется число, разделяющее множества $\{a_{(n)}+b_{(n)}, n\in\mathbb{N}\}$ и $\{a'_{(n)}+b'_{(n)}, n\in\mathbb{N}\}$.

Видно, что сумма действительных чисел определяется естественно – с помощью приближений слагаемых, и какая-то из теорем непрерывности нужна, чтобы установить существование и единственность числа, имеющего вычисленные приближения. Однако, для того, чтобы показать совпадение введенной операции сложения действительных чисел с операцией сложения, уже имеющейся в множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, вложенном в множество $\mathbb{R}$, полезно доказать, что $a+b$ – единственное число, определяющее множества X_a+X_b и Y_a+Y_b, где

$$X_a=\{r\in\mathbb{Q}\,|\,r<a\},\quad Y_a=\{r\in\mathbb{Q}\,|\,a<r\},$$
$$X_b=\{s\in\mathbb{Q}\,|\,s<b\},\quad Y_b=\{s\in\mathbb{Q}\,|\,b<s\}.$$

Наличие подобного утверждения (которое можно принять и в качестве *определения* сложения действительных чисел) позволяет легче установить свойства сложения. Аналогично определяем умножение – вначале положительных чисел, а затем распространяем эту операцию по хорошо знакомому учащимся «правилу знаков»: $a\cdot b =| a|\cdot|b|\cdot\operatorname{sgn}a\cdot\operatorname{sgn}b$.

Свойства арифметических операций вряд ли целесообразно доказывать в полном объеме даже в физико-математической школе. Отметим только, что при введении действительных чисел с помощью дедекиндовых сечений или при наличии теорем, сводящих сложение и умножение чисел a и b к нахождению чисел, разделяющих соответствующие множества сумм или произведений рациональных чисел, больших или меньших a и b, доказательство свойств операций осуществляется проще, чем при рассмотрении десятичных приближений.

Один из возможных вариантов установления свойств арифметических операций с помощью пределов изложен в §2 настоящей статьи.

В §3 содержится материал, который представляется полезным изучать факультативно с более подготовленными учащимися. Здесь рассматривается небольшая теория измерения длин отрезков прямой и доказывается теорема Фалеса и свойства операции умножения векторов на числа.

§ 2. Определение операций над действительными числами с помощью пределов

Будем называть окрестностью точки a любой промежуток $(c;d)$, включающий a. Окрестность точки a обозначим $O(a)$. Легко понять, что если $a \neq b$, то всегда можно найти окрестность $O(a)$, не содержащую точку b, более того, существуют не пересекающиеся окрестности $O(a)$ и $O(b)$.

Определение. *Последовательность* (a_n) *сходится к числу a, если в любой окрестности O(a) точки a лежат почти все члены последовательности.*

Слова «почти все» здесь означают – «все, кроме конечного числа».

Теорема о единственности предела может быть доказана так. Предположим, что $a_n\to a,\ \ a_n\to b,\ \ a\neq b$. Возьмем непересекающиеся между собой окрестности $O(a)$ точки a и $O(b)$ точки b. Так как в $O(a)$ лежат почти все члены последовательности (a_n), то вне $O(a)$ может быть только конечное число членов последовательности. Но это противоречит тому, что в окрестности $O(b)$ должны лежать почти все члены последовательности (и, во всяком случае, бесконечное число их).

Теорема о переходе к пределу в неравенстве доказывается очень похоже: несмотря на то, что для всех $n \in \mathbb{N}$ $a_n \le b_n$, предположим, что $\lim a_n = a > b = \lim b_n$. Взяв непересекающиеся окрестности $O(a)$ и $O(b)$ получим, что любое число из $O(b)$ меньше любого числа из $O(a)$, откуда для почти всех n должно выполняться неравенство $b_n < a_n$, вопреки условию теоремы.

Те же рассуждения доказывают, что если $a_n \to a$, $b_n \to b$, причем $a > b$, то для почти всех n выполнено неравенство $a_n > b_n$.

Легко доказать *теорему о зажимающих последовательностях*. Взяв произвольную окрестность $O(a)$ точки a, обнаружим, что по определению предела почти все члены b_n лежат в $O(a)$ и почти все члены c_n лежат в $O(a)$. Но тогда для почти всех n члены обеих последовательностей b_n и c_n одновременно лежат в $O(a)$, и для этих n в силу неравенства $b_n \le a_n \le c_n$ члены a_n тоже принадлежат $O(a)$. А это означает сходимость последовательности (a_n) к числу a.

Не составляет никакого труда доказательство *ограниченности сходящейся последовательности*. Взяв любую окрестность $O(a)$ предела a последовательности (a_n) обнаружим, что вне ее лежит только конечное число членов последовательности $a_1, a_2, \dots, a_k$. А теперь возьмем окрестности $O(a_i)$ каждой из точек a_i, $i = 1, 2, \dots, k$, содержащие точку a. Объединение $(k+1)$-й окрестности $\left(\bigcup_i Q(a_i)\right)\bigcup Q(a)$ является промежутком, содержащим все члены последовательности (a_n), вследствие чего последовательность ограничена.

Доказательство *теоремы о сходимости ограниченной монотонной последовательности*, по существу, не использует операций над действительными числами. Приведем доказательство для убывающей ограниченной снизу последовательности. Пусть a – верхняя грань множества $\{C\}$ нижних границ последовательности, равная нижней грани множества значений последовательности (a_n). Взяв некоторую окрестность $(c; d)$ точки a, найдем, что d заведомо не является нижней границей, и для подходящего N выполнено неравенство $a_N < d$. Ввиду монотонности (a_n) для всех $n > N$ выполняется неравенство $a_n \le a_N$, и $a \le a_n < d$, и $a_n \to a$. Для возрастающей ограниченной сверху последовательности доказательство проводится аналогично,

Теперь можно доказать *теорему Кантора о вложенных друг в друга отрезках*, правда, в ослабленном варианте. Пусть I_n – отрезки $[a_n; b_n]$ с концами в рациональных точках a_n и b_n, причем для всех $n \in \mathbb{N}$ $I_{n+1} \in \mathrm{I}_n$. (Нестрого) возрастающая последовательность левых концов отрезков (a_n) ограничена сверху, например, числом b_1; (нестрого) убывающая последовательность правых концов отрезков (b_n) ограничена снизу, например, числом a_1. Пусть $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$; как следует из теоремы о переходе в неравенство, $a_n < b_n \Rightarrow a \le b$.

Кроме того, $a_n \le a$. В самом деле, если для некоторого k выполняется неравенство $a_k > a$, то для всех $n > k$ справедливы неравенства $a_n \ge a_k > a$ и, переходя к пределу по n, получаем $a \ge a_k > a$, что невозможно; аналогично устанавливается справедливость для всех n

неравенства $b \le b_n$. Поэтому отрезок [*a; b*] лежит в любом из отрезков I_n, и все отрезки имеют общую точку.

Если $b_n - a_n \to 0$, то точка, общая для всех отрезков I_n единственна. Действительно, $b_n - a_n \to 0 \Rightarrow$ для любого *k*, начиная с некоторого номера *n*, $b_n - a_n < 10^{-k}$.

Но если $\lim a_n = a < b = \lim b_n$, то найдется *k*, для которого

$$a \le a_{(k)} + 10^{-k} < b_{(k)} \le b,$$

тем более, для всех *n*

$$a_n < a_{(k)} + 10^{-k} < b_{(k)} \le b_n,$$

откуда для всех *n* выполняется неравенство $b_n - a_n > 10^{-k}$, что невозможно.

Перейдем к *определению операций сложения и умножения* действительных чисел. Убедимся вначале, что последовательность десятичных приближений с недостатком $a_{(n)}$ числа *a* сходится к *a*:

$$\lim a_{(n)} = a,$$

а последовательность десятичных приближений с избытком $a'_{(n)}$ числа *a* тоже сходится к *a*:

$$\lim a'_{(n)} = a,$$

Так как для десятичных приближений числа *a* справедливы неравенства $a_{(n)} \le a_{(n+1)} \le a < a'_{(n+1)} < a'_{(n)}$, имеется последовательность вложенных друг в друга отрезков $I_n = [a_{(n)}; a'_{(n)}]$, содержащих точку *a*. Поскольку $a'_{(n)} - a_{(n)} = 10^{-n} \to 0$, точка *a* является единственной общей точкой этих отрезков, следовательно $a_{(n)} \to a$, $a'_{(n)} \to a$.

Определим сумму *a* + *b* действительных чисел *a* и *b*. Очевидно, что суммы *n*-х десятичных приближений с недостатком чисел *a* и *b* образуют неубывающую и ограниченную сверху, например, числом $a_{(0)} + b_{(0)} + 2$, последовательность.

Следовательно, последовательность $(a_{(n)} + b_{(n)})$ сходится; положим по определению

$$a + b \overset{def}{=} \lim(a_{(n)} + b_{(n)}).$$

Докажем, что $a + b$ является также общим пределом последовательностей $(a_{(n)} + b_{(n)} - 2 \cdot 10^{-n})$ и $(a_{(n)} + 10^{-n} + b_{(n)} + 10^{-n})$. Обе последовательности монотонны, первая – возрастающая (возможно, нестрого), вторая – убывающая. Ясно, что обе они ограничены. Поэтому последовательности сходятся, одна к числу *c*, другая к d. Поскольку разность между *n*-ми членами наших последовательностей, равная $4 \cdot 10^{-n}$, стремится к 0, то $c = d$. Но между данными последовательностями заключена последовательность $(a_{(n)} + b_{(n)})$, по определению сходящаяся к *a* + *b*. Следовательно, и данные последовательности сходятся к *a* + *b*.

Теорема 1. *Если* (x_n), (y_n) *– рациональные последовательности, сходящиеся соответственно к числам* a *и* b *, то последовательность* $(x_n + y_n)$ *сходится к* a + b.

Доказательство. Поскольку $a_{(n)} + b_{(n)} - 2 \cdot 10^{-n} \to a + b$ и $a_{(n)} + b_{(n)} + 2 \cdot 10^{-n} \to a + b$, какую бы окрестность $O(a+b)$ точки $a + b$ ни взять, в нее, для подходящего *k*, попадут числа $a_{(k)} + b_{(k)} - 2 \cdot 10^{-k}$ и $a_{(k)} + b_{(k)} + 2 \cdot 10^{-k}$. Но если x_n сходится к *a*, то для почти всех *n* выполняются неравенства $a_{(k)} - 10^{-k} < x_n < a_{(k)} + 10^{-k}$; аналогично, так как $y_n \to b$, для почти всех *n* выполняются неравенства $b_{(k)} - 10^{-k} < y_n < b_{(k)} + 10^{-k}$. Следовательно, для почти всех *n*, $a_{(k)} + b_{(k)} - 2 \cdot 10^{-k} < x_n + y_n < a_{(k)} + b_{(k)} + 2 \cdot 10^{-k}$ и $x_n + y_n$ попадает в заранее выбранную окрестность $O(a + b)$. Теорема 1 доказана.

Эта теорема, в частности, показывает, что определенное нами сложение действительных чисел для рационального случая совпадает о уже имеющимся в $\mathbb{Q}$ сложением – в качестве рациональной последовательности, сходящейся к рациональному числу, удобнее всего взять постоянную последовательность.

Используя теорему 1, легко вывести следующие основные свойства сложения.

$$(i)\ a + b = b + a.$$

Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$, $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$. По теореме 1

$$x_n + y_n \to a + b,\ y_n + x_n \to a + b.$$

но последовательности $(x_n + y_n)$ и $(y_n + x_n)$ совпадают вследствие коммутативности сложения рациональных чисел.

$$(\mathrm{ii})\ (a + b) + c = a + (b + c).$$

Если $x_n \to a,\ y_n \to b,\ z_n \to c$, $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{Q}$, то последовательность $((x_n + y_n) + z_n)$ сходится к $(a + b) + c$, равная ей последовательность $(x_n + (y_n + z_n))$ имеет предел $a + (b + c)$.

$$(iii)\ \textit{для любого}\ a \in \mathbb{R}\ \ a + 0 = a.$$

Достаточно применить теорему к рациональной последовательности (x_n), сходящейся к a, и к постоянной последовательности (0).

(*iv*) *для каждого* $a \in \mathbb{R}$ *найдется такое действительное число* $(-a)$*, что*

$$a + (-a) = 0.$$

Рациональная последовательность $(-a_{(n)})$ является невозрастающей, ограниченной снизу числом $-a_{(0)} - 1$, поэтому она сходится. Обозначим через $(-a)$ ее предел. Вследствие теоремы 1

$$0 = a_{(n)} + (-a_{(n)}) \to a + (-a),$$

и по теореме о единственности предела $a + (-a) = 0$.

Докажем, что

$$a < b \Rightarrow -a > -b$$

Вставим между a и b рациональные числа α и β. Взяв рациональные последовательности $(a_{(n)})$ и $(b_{(n)})$ обнаружим, что для почти всех *n* выполняются неравенства $a_{(n)} < \alpha < \beta < b_{(n)}$, поэтому $-a_{(n)} > -\alpha > -\beta > -b_{(n)}$; переходя к пределу, получим, что $-a \geq -\alpha > -\beta \geq -b$ и требуемое неравенство установлено.

Если (x_n) – произвольная последовательность, сходящаяся к a, то $-x_n \to -a$. Пусть $(c; d)$ – окрестность $O(-a)$ числа $-a$. Отрезок $(-d; -c)$ является окрестностью $O(a)$ числа a; начиная с некоторого номера $x_n \in O(a) \Rightarrow -x_n \in O(-a)$.

Как обычно, *определяется разность:*

$$a - b \overset{def}{=} a + (-b).$$

Если (x_n) – рациональная последовательность, сходящаяся к a, (y_n) – рациональная последовательность, сходящаяся к b, то $-y_n \to -b$, и по теореме 1, $x_n - y_n \to a - b$.

Установим теперь, что *если* $a < b$ *, то* $a + c < b + c$.

Возьмем рациональные последовательности $x_n \to a$, $y_n \to b$, $z_n \to c$, для почти всех n выполняется неравенство $x_n < y_n$; но переход к пределу в неравенстве $x_n + z_n < y_n + z_n$ дает только нестрогое неравенство $a + c \le b + c$. Для получения строгого неравенства достаточно заметить, что $a + c = b + c \Rightarrow a = (a + c) + (-c) = (b + c) + (-c) = b$.

После того, как введена операция сложения действительных чисел, обладающая привычными свойствами, рассуждения о пределах тоже можно приблизить к привычным.

Ясно, что если $\lim x_n = a$, т. е. для любого отрезка $(c;d)$, содержащего число a, почти все члены последовательности лежат в этом отрезке, то, в частности, для любого $\varepsilon < 0$ почти все члены последовательности (x_n) лежат в отрезке $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ $\Leftrightarrow$ $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Справедливо и обратное:

Если для любого $\varepsilon > 0$ *для почти всех n выполнены неравенства* $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$*, то* $\lim x_n = a$.

Действительно, взяв произвольный отрезок $(c;d)$, содержащий число a, и обозначив через ε наименьшее из положительных чисел $a - c$ и $\alpha - a$, получим, что для почти всех n

$$x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon) \subseteq (c;d).$$

Приведем усиленный вариант теоремы 1.

Теорема 1⁺. *Пусть* (x_n), (y_n) *– последовательности действительных чисел,* $x_n \to a$, $y_n \to b$. *Тогда* $(x_n + y_n)$ *сходится к числу* $a + b$.

Можно воспользоваться доказательством, использующим лемму о сумме бесконечно малых последовательностей, можно привести непосредственное доказательство.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные действительные числа ε' и ε'', что $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$. Для почти всех n выполняются неравенства

$$a - \varepsilon' < x_n < a + \varepsilon';\ b - \varepsilon'' < y_n < b + \varepsilon''.$$

Сложив их, используя уже доказанную монотонность сложения, получим, что для почти всех n

$$(a + b) - \varepsilon < x_n + y_n < (a + b) + \varepsilon.$$

Следствие. *Если последовательности* (x_n), (y_n) *действительных чисел сходятся к числам a и b, то*

$$x_n - y_n \to a - b.$$

Перейдем к произведению действительных чисел. Если пытаться определить произведение ab чисел a и b как $\lim a_{(n)} b_{(n)}$, то мы столкнемся с такой трудностью – хотя последовательности $(a_{(n)})$ и $(b_{(n)})$ монотонны, последовательность $(a_{(n)} b_{(n)})$ вообще говоря, не является монотонной, в случае, когда a и b – числа разных знаков.

Определим вначале произведение рационального числа r и действительного числа a:

$$ra \overset{def}{=} \lim r a_{(n)}.$$

Последовательность $(r a_{(n)})$ монотонна и ограничена (при положительном r) последовательность $(ra_{(n)})$ *(*нестрого) возрастающая, ограничена сверху числом $r(a_{(0)}+1)$*;* при отрицательном r последовательность будет (нестрого) убывающей и ограниченной снизу числом $r(a_{(0)}+1)$, поэтому предел $\lim ra_{(n)}$ существует.

Совершенно аналогично определим *ar:*

$$ar \overset{def}{=} \lim a_{(n)}r\ .$$

В силу коммутативности умножения рациональных чисел последовательности $(a_{(n)}r)$ и $(ra_{(n)})$ совпадают, и $ar = ra$.

Лемма 1. *Пусть* $(x_{(n)})$ *– рациональная последовательность, сходящаяся к а. Тогда* $ra = \lim rx_n$.

Доказательство. Докажем вначале, что если (α_n) – рациональная бесконечно малая последовательность, то $r\alpha_n \to 0$.

Какую бы окрестность нуля $(c;d)$ мы ни взяли, найдется лежащая в ней окрестность нуля $(s;t)$ с рациональными концами, $c<s<0<t<d$, $s,t\in Q$ почти все члены последовательности (α_n) попадут в окрестность нуля $\left(\frac{s}{t};\frac{t}{r}\right)$, но для тех же *n* $r\alpha_n \in(\ s;\ t)\ \subseteq\ (c;\ d\ )$.

Легко доказать, что если (r_n) – ограниченная последовательность, (α_n) – произвольно бесконечно малая последовательность, то $r_n\alpha_n \to 0$.

Поскольку $a_{(n)} \to a$, по следствию из теоремы о пределе суммы

$$x_n - a_{(n)} \to a - a = 0\ .$$

$$r(a' - a'') = \lim r(x_n' - x_n'') = \lim(rx'_n - x_n'') = \lim(rx_n' - rx_n'') = \lim rx_n' - \lim rx_n'' = ra' - ra''$$

Справедливы такие неравенства:

(v) *если* $r' > r''$, $a>0$, *то* $ra > 0$;

(vi) *если* $r>0$, $a' > a''$, *то* $ra' > ra''$.

Установим вначале следующее неравенство:

если $r>0$, $a>0$, *то* $ra>0$.

Вставим между числами *a* и 0 какое-то рациональнее число α: $a>\alpha>0$. Если $x_n \to a$, то можно считать, что $x_n > \alpha$. Но тогда $rx_n > r\alpha > 0$, переходя к пределу в левом неравенстве, получаем $ra > r\alpha > 0$.

Если $r' > r'' > 0$, то для $a>0$ ввиду (2)

$$r'a - r''a = (r' - r'')a > 0 \Leftrightarrow r'a > r''a,$$

и (v) доказано. Аналогично доказывается неравенство (vi): если $r>0$, то ввиду (iv)

$$ra' - ra'' = r(a' - a'') > 0 \Leftrightarrow ra' > ra''.$$

Легко доказать, что $|ra| = |r||a|$.

Теперь мы можем *определить произведение* действительных чисел:

$$ab \overset{def}{=} \lim a_{(n)}b\ .$$

Произведение рационального числа $a_{(n)}$ на действительное число b определено, последовательность $(a_{(n)}b)$ вследствие свойства (v) монотонна и ограничена; следовательно, существует предел этой последовательности, и произведение *ab* определено.

Лемма 2. *Пусть* (x_n) *– рациональная последовательность, сходящаяся к действительному числу a, b – произвольное действительное число. Тогда* $x_n b \to ab$.

Доказательство. Вначале заметим, что если рациональная последовательность (α_n) сходится к 0, то $\alpha_n b \to 0$.

Взяв рациональное число $B > |b|$, вследствие (vi) получим

$$0 \le |\alpha_n b| = |\alpha_n||b| < |\alpha_n| \cdot B.$$

Если $d_n \to 0$, то $|d_n| \to 0$. При доказательстве леммы 1 было установлено, что $d_n B \to 0$, и по теореме о зажимающих последовательностях $|d_n b| \to 0$, откуда и

$$d_n b \to 0$$

Как уже отмечалось при доказательстве леммы 1, $x_n - a_{(n)} \to 0$, поэтому $(x_n - a_{(n)})b \to 0$

$$x_n b = (x_n - a_{(n)})b + a_{(n)} b$$

и по теореме 1^+

$$\lim x_n b = \lim a_{(n)} b = ab$$

Из леммы 2 сразу следует *дистрибутивность* умножения относительно сложения:

$$(a' + a'')b = \lim(x_n' + x_n'')b \overset{(1)}{=} \lim(x_n' b + x_n'' b) \overset{T1^+}{=} \lim x_n' b + \lim x_n'' b = a'b + a''b,$$

где (x_n') и (x_n'') – рациональные последовательности, сходящиеся к a' и a''.

$$a(b' + b'') = \lim x_n(b' + b'') \overset{(3)}{=} \lim(x_n b' + x_n b'') \overset{T1^+}{=} \lim x_n b' + \lim x_n b'' = ab' + ab'',$$

где (x_n) – рациональная последовательность, сходящаяся к a.

Легко показать, что

если $a > 0$, $b > 0$, *то* $ab > 0$.

Пусть α, β – такие рациональные числа, для которых $a > \alpha > 0$, $b > \beta > 0$, рациональная последовательность (x_n) сходится к a. Можем считать, $x_n > \alpha$. Вследствие (v) и (vi) поэтому $r(x_n - a_{(n)}) \to 0$. Однако

$$rx_n = r(a_{(n)} + x_n - a_{(n)}) = ra_{(n)} + r(x_n - a_{(n)}),$$

$\lim rx_n$ существует и равен $\lim ra_{(n)} = ra$.

Лемма доказана.

Прежде всего она показывает, что если число a само рациональное, то определенное нами произведение ra совпадает с уже имеющимся в поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Пользуясь леммой 1, установим теперь некоторые свойства умножения действительного числа на рациональное.

(1) $(r' + r'')a = r'a + r''a$

(2) $(r' - r'')a = r'a - r''a$.

Если (x_n) – рациональная последовательность, сходящаяся к a, то

$$(r' + r'')a = \lim(r' + r'')x_n = \lim(r' x_n + r'' x_n) = \lim r' x_n + \lim r'' x_n = r'a + r''a;$$

$$(r' - r'')a = \lim(r' - r'')x_n = \lim(r' x_n - r'' x_n) = \lim r' x_n - \lim r'' x_n = r'a - r''a.$$

Столь же просто доказываются равенства

(3) $r(a' + a'') = ra' + ra''$

(4) $r(a'-a'') = ra' - ra''$

Пусть рациональная последовательность (x_n') сходится к a, рациональная последовательность (x_n'') сходится к a'', $x_n' + x_n'' \to a' + a''$, поэтому

$$r(a'+a'') = \lim r(x_n' + x_n'') = \lim(rx_n' + rx_n'') = \lim rx_n' + \lim rx_n'' = ra' + ra'';$$

$$x_n b > x_n\beta > \alpha\beta > 0.$$

Переходя к пределу в этих неравенствах и применяя лемму 2, заключаем, что

$$ab \geq \alpha\beta \geq \alpha\beta > 0.$$

Теперь легко доказать, что если $a' > a''$, $b > 0$, то $a'b > a''b$; если $a > 0$, $b' > b''$, то $ab' > ab''$.

Несложно также установить, что $|ab| = |a|\,|b|$.

Следующая лемма является обобщением нескольких ранее встречавшихся утверждений.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha_n \to 0$, (b_n) *– ограниченная последовательность. Тогда* $(\alpha_n b_n)$ *– бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Взяв рациональные $B > |b|$, получим

$$0 \leq |\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n||\beta_n| < |\alpha_n| \cdot B.$$

Какую бы окрестность нуля $(c;\, d)$ мы ни взяли, почти все члены последовательности $(|\alpha_n|)$ попадут в окрестность нуля $\left(\frac{1}{B}c; \frac{1}{B}d\right)$,

$$\frac{c}{B} < |\alpha_n| < \frac{\alpha}{B} \Leftrightarrow c < |\alpha_n| \cdot B < d,$$

и для тех же n имеем $|\alpha_n| \cdot B \in (c; d)$, то есть $|\alpha_n| \cdot B \to 0$.

По теореме о зажимающих последовательностях $|\alpha_n\beta_n| \to 0$, а вместе с ней и $\alpha_n\beta_n \to 0$.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* (x_n) *и* (y_n) *– произвольные последовательности, сходящиеся соответственно к числам a и b. Тогда* $ab = \lim x_n y_n$.

Доказательство. $x_n y_n - ab = x_n y_n - a y_n + a y_n - ab = (x_n - a) y_n + a(y_n - b)$.

По следствию о пределе разности последовательности $(x_n - a)$ и $(y_n - b)$ – бесконечно малые, а так как сходящаяся последовательность ограничена, применение леммы 3 дает:

$$(x_n - a) y_n \to 0, \quad a(y_n - b) \to 0,$$

откуда ввиду теоремы 1^+ $\lim(x_n y_n - ab)$ и $\lim x_n y_n = ab + \lim(x_n y_n - ab) = ab$.

Используя теорему 2, легко вывести следующие основные свойства умножения действительных чисел.

(*i*) $ab = ba$

Пусть $x_n \to a, y_n \to b$, $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$. По теореме 2 $x_n y_n \to ab$, $y_n x_n \to ba$, но ввиду коммутативности умножения рациональных чисел последовательности $(x_n y_n)$ и $(y_n x_n)$ совпадают.

(*ii*) $(ab)c = a(bc)$.

Если $x_n \to a, y_n \to b$, $z_n \to c$, $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{Q}$ то последовательность $((x_n y_n) z_n)$ сходится к $(ab)c$, равная ей последовательность $(x_n(y_n z_n))$ сходится к $a(bc)$.

(iii) для любых $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 1 = a$.

Достаточно применить теорему 2 к рациональной последовательности (x_n) сходящейся к a, и к постоянной последовательности (1).

(iv) для каждого $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, найдется такое действительное число $\frac{1}{a}$, что $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Как уже отмечалось, $a_{(n)} \to a$. Если $a \neq 0$, и для почти всех n десятичное приближение $a_{(n)} \neq 0$, и для этих n определено число $\frac{1}{a_{(n)}}$. Эта невозрастающая последовательность ограничена снизу числом $\frac{1}{a_{(k)} + 10^{-k}}$, где $a_{(k)} + 10^{-k}$ – некоторое десятичное приближение числа a с избытком, имеющее тот же знак, что и число a. Таким образом, последовательность $\left(\frac{1}{a_{(n)}}\right)$ сходится, обозначим ее предел $\frac{1}{a}$. Вследствие теоремы 2, $1 = a_{(n)} \cdot \frac{1}{a_{(n)}} \to a \cdot \frac{1}{a}$, и по теореме о единственности предела $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

§ 3. Длина отрезка на прямой

Мы предполагаем в дальнейшем известным, как помощью процесса десятичного измерения с фиксированным масштабным отрезком OE строится взаимно однозначное отображение $\varphi : \Pi \to \mathbb{R}$, сопоставляющее каждой точке прямой Π действительное число. Установим связь биекции φ с операциями сложения и умножения действительных чисел.

Пусть точка C является концом направленного отрезка $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\varphi(A) = a$, $\varphi(B) = b$. Тогда

$$\varphi(C) = \varphi(A) + \varphi(B) = a + b.$$

В самом деле, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдутся точки A_n и A'_n, определяемые, соответственно, рациональным числом $a_{(n)}$ – n-м десятичным приближением с недостатком числа $a = \varphi(A)$, и рациональным числом $a'_{(n)}$ – n-м десятичным приближением с избытком того же числа a. Рациональная точка A_n лежит не правее точки A, рациональная точка A'_n лежит правее точки A:

$$\overrightarrow{OA_n} = a_{(n)} \cdot \overrightarrow{OE} \leq \overrightarrow{OA} < a'_{(n)} \cdot \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA'_{(n)}}$$ [1]

Точно также найдутся такие рациональные точки B_n и B'_n, что

$$\overrightarrow{OB_n} = b_{(n)} \cdot \overrightarrow{OE} \leq \overrightarrow{OB} < b'_{(n)} \cdot \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB'_n}.$$

Конец C_n направленного отрезка $\overrightarrow{OC_n} = \overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OB_n}$ лежит не правее конца отрезка $\overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OB}$ (рис. 1), а он, в свою очередь, лежит не правее конца отрезка $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ – точки C; аналогично, конец C'_n отрезка $\overrightarrow{OC'_n} = \overrightarrow{OA'_n} + \overrightarrow{OB'_n}$ лежит правее точки C:

$$\overrightarrow{OC_n} = \overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OB_n} \leq \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC'_n} = \overrightarrow{OA'_n} + \overrightarrow{OB'_n}.$$

[1] Неравенство $OX < OY$ означает, что точка X лежит левее точки Y.

Рис. 1.

Поскольку $a_{(n)}$, $a'_{(n)}$, $b_{(n)}$, $b'_{(n)}$ – рациональные числа, выполняются равенства

$$a_{(n)} \cdot \overrightarrow{OE} + b_{(n)} \cdot \overrightarrow{OE} = \left(a_{(n)} + b_{(n)}\right) \cdot \overrightarrow{OE},$$

$$a'_{(n)} \cdot \overrightarrow{OE} + b'_{(n)} \cdot \overrightarrow{OE} = \left(a'_{(n)} + b'_{(n)}\right) \cdot \overrightarrow{OE}.$$

Так как $\overrightarrow{OC_n} \le \overrightarrow{OC} < \overrightarrow{OC'_n}$,

$a_{(n)} + b_{(n)} = \varphi(A_n) + \varphi(B_n) = \varphi(C_n) \le \varphi(C'_n) = \varphi(A'_n) + \varphi(B'_n) = a'_{(n)} + b'_{(n)}$. Но между числами $a_{(n)} + b_{(n)}$ и $a'_{(n)} + b'_{(n)}$ лежит единственное число $a + b$. Следовательно,

$$\varphi(C) = a + b.$$

Теорема 1. *Зафиксируем на прямой точку O и отрезок $\overline{e} = \overrightarrow{OE}$. Существует и притом единственная биекция φ_e множества точек прямой Π на множество действительных чисел $\mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам*

1) $\varphi_e(E) = 1$;

2) $\varphi_e(C) = \varphi_e(A) + \varphi_e(B)$, где $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$;

3) если $\overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OB}$, то $\varphi_e(A) < \varphi_e(B)$.

Свойство 2) назовем *аддитивностью*, свойство 3) – *монотонностью*.

Доказательство. Существование такой биекции установлено – ее дает нам процесс десятичного измерения с масштабным отрезком $\overrightarrow{OE} = \overline{e}$.

Допустим, что наряду с указанной биекцией φ существует еще одна биекция θ, удовлетворяющая свойствами 1) – 3). Так как $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO}$, то $\theta(A) = \theta(A) + \theta(O)$, и $\theta(O) = O$. Кроме того, если точка B симметрична точке A относительно O, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OO}$ и $\theta(B) = -\theta(A)$. Поэтому и для целого положительного числа m

$$\overrightarrow{OA} = m \cdot \overrightarrow{OE} \Rightarrow \theta(A) = m,$$

и для целого отрицательного числа m

$$\overrightarrow{OA} = m \cdot \overrightarrow{OE} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = |m| \cdot \overrightarrow{OE} \Rightarrow \theta(B) = |m| \Rightarrow \theta(A) = m.$$

Если же $\overrightarrow{OA} = \frac{m}{n} \cdot \overrightarrow{OE}$, т.е. $n \cdot \overrightarrow{OA} = m \cdot \overrightarrow{OE}$, то $n\theta(A) = m$ и

$$\theta(A) = \frac{m}{n}.$$

С помощью процесса десятичного измерения с масштабным отрезком $\overrightarrow{OE}$ для любой точки A найдем рациональные точки A_n и A'_n для которых

$$a_{(n)} \cdot \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA_n} \le \overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OA_n} = a'_{(n)} \cdot \overrightarrow{OE}, \quad n = 0, 1, 2\ldots,$$

где $a = \varphi(A)$. Отсюда вследствие монотонности функции θ

$a_{(n)} \le \theta(A) < a'_{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots$, и поэтому

$$\theta(A)=a=\varphi(A).$$

Единственность доказана.

Понятно, что в качестве масштабного отрезка может быть взят другой отрезок $\overline{f}=\overrightarrow{OF}$. Биекция φ_f, удовлетворяющая условиям теоремы 1 (свойство 1) теоремы, конечно, принимает вид: $\varphi_f(F)=1$), очень просто связана с биекцией φ_e. Рассмотрим функцию

$$\eta : A \to \frac{\varphi_e(A)}{\varphi_e(F)}.$$

Как и φ_f, η – биекция, определенная на множестве Π. Кроме того, η удовлетворяет свойствам: 1) $\eta(F)=1$, 2) аддитивности, 3) монотонности[1]

Следовательно, $\eta=\varphi_f$ и

$$\varphi_f(A)=\frac{\varphi_e(A)}{\varphi_e(F)}.$$

Как еще одно следствие из теоремы 1, выведем теорему Фалеса.

Теорема 2. *Пусть заданы прямые l, l' и пересекающая их прямая m. На прямых l и l' выбраны соответственно отрезки $\overline{e}=\overrightarrow{OE}$, и $\overline{e}'=\overrightarrow{O'E'}$ так, что прямые OO' и EE' параллельны прямой m. Тогда для точек $A\in l$ и $A'\in l'$, таких, что $AA' \parallel m$* выполняется равенство

$$\varphi_e(A)=\varphi_{e'}(A').$$

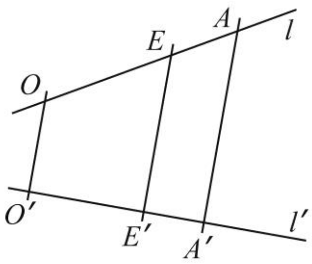

Рис. 2.

Другими словами, при проектировании прямой l на прямую l' вдоль прямой m сохраняется отношение отрезков (рис. 2).

Доказательство. Возьмем функцию $\theta : A' \mapsto \varphi_e(A)$. Согласно определению этой функции

$$\theta(E')=\varphi_e(E)=1.$$

Далее, если на прямой l взяты такие точки A, B и C, что $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, то $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$, где A', B', C' – точки прямой l', для которых прямые AA', BB', CC' параллельны прямой m.

$$\theta(C')=\varphi_e(C)=\varphi_e(A)+\varphi_e(B)=\theta(A')+\theta(B').$$

Третье свойство функции θ – монотонность – очевидно.

Условия теоремы 1 выполнены, и функция θ совпадает с функцией $\varphi_{e'}$:

$$\varphi_{e'}(A')=\varphi_e(A).$$

Теперь мы достаточно подготовлены для того, чтобы доказать свойства (*i*), (*ii*) и (*iv*) умножения вектора на число, о которых говорилось в § 1 главы 2.

Напомним, что вектор $a\overline{e}$ – результат умножения вектора $\overline{e}$ на число a – изображается таким направленным отрезком $\overrightarrow{OA}$, конец которого получается в результате откладыва-

[1] Заметим, что если точка F лежит по другую сторону от точки O, чем точка E, то при переходе от отрезка $\overrightarrow{OE}$ к отрезку $\overrightarrow{OF}$ неравенство $\overrightarrow{OA}<\overrightarrow{OB}$ (понимаемое наглядно « A левее B ») заменяется на неравенство $\overrightarrow{OB}<\overrightarrow{OA}$ («лево» заменяется на «право»).

ния отрезка $\overrightarrow{OE}$ «a раз» от точки O, точнее говоря, $\varphi_e\left(A\right)=a$ и

$$\overrightarrow{OA}=\varphi_e\left(A\right)\cdot\overline{e}\ .$$

Пусть $a\cdot\overline{e}=\overrightarrow{OA},\ b\cdot\overline{e}=\overrightarrow{OB}$. Тогда для конца C направленного отрезка $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ в силу аддитивности биекции φ_e справедливо равенство

$$\varphi_e\left(C\right)=\varphi_e\left(A\right)+\varphi_e\left(B\right)=a+b$$

и поэтому

$$(a+b)\overline{e}=a\cdot\overline{e}+b\cdot\overline{e}\ .$$

Свойство (i) доказано.

Для доказательства свойства (ii) достаточно понять, что вектор $a(b\overline{e})=a\overline{f}$ изображается таким направленным отрезком $\overrightarrow{OC}$, для которого $\varphi_f\left(C\right)=a$.

Но $\varphi_f\left(C\right)=\dfrac{\varphi_e\left(C\right)}{\varphi_e\left(B\right)}$. Поэтому $\varphi_e\left(C\right)=\varphi_f\left(C\right)\cdot\varphi_e\left(B\right)=a\cdot b$

и

$$\overrightarrow{OC}=(ab)\cdot\overline{e}\ .$$

Итак,

$$(ab)\cdot\overline{e}=a(b\cdot\overline{e})\ .$$

Свойство (iv) доказывается с использованием теоремы Фалеса. Если векторы $\overline{f}$ и $\overline{g}$ не параллельны, то от точки O отложим направленные отрезки $\overrightarrow{OF}$ и $\overrightarrow{OG}$, изображающие векторы $\overline{f}$ и $\overline{g}$. Пусть $\overrightarrow{OH}=\overline{f}+\overline{g}$, т.е. направленный отрезок $\overrightarrow{FH}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{OG}$. Взяв $\overrightarrow{OH'}=a\cdot\overrightarrow{OH}$, проведем параллельно прямой FH через точку H' прямую $F'H'$ (рис. 3). Согласно теореме Фалеса находим, что $\overrightarrow{OF'}=a\cdot\overrightarrow{OF}$. Аналогично, проведя параллельно прямой GH через H' прямую $G'H'$, находим, что $\overrightarrow{OH'}=a\cdot\overrightarrow{OH}$. Однако $\overrightarrow{OH'}=\overrightarrow{OF'}\cdot\overrightarrow{OG'}$ т.е. $a\cdot\overrightarrow{OH}=a\cdot\overrightarrow{OF}+a\cdot\overrightarrow{OG}$, поэтому

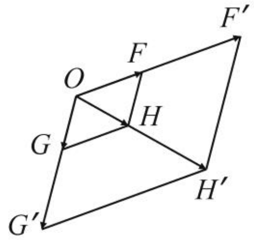

Рис. 3.

$$a(\overline{f}+\overline{g})=a\overline{f}+a\overline{g}\ .$$

Если векторы $\overline{f}$ и $\overline{g}$ параллельны, изобразим их параллельными направленными отрезками $\overrightarrow{OF}$ и $\overrightarrow{OG}$, пропорциональными одному и тому же отрезку $\overrightarrow{OE}$:

$$\overrightarrow{OF}=\varphi_e(F)\cdot\overrightarrow{OE}\ ,\ \overrightarrow{OG}=\varphi_e(G)\cdot\overrightarrow{OE}$$

$$\overline{f}+\overline{g}=\varphi_e(F)\cdot\overrightarrow{OE}+\varphi_e(G)\cdot\overrightarrow{OE}\overset{(i)}{=}\left(\varphi_e(F)+\varphi_e(G)\right)\cdot\overrightarrow{OE}\ .$$

Ввиду этого

$$a\left(\overline{f}+\overline{g}\right)\overset{(ii)}{=}a\left(\varphi_e(F)+\varphi_e(G)\right)\cdot\overrightarrow{OE}=\left(a\varphi_e(F)+a\varphi_e(G)\right)\cdot\overrightarrow{OE}\overset{(i)}{=}$$

$$=a\varphi_e(F)\cdot\overrightarrow{OE}+\varphi_e(G)\cdot\overrightarrow{OE}\overset{(ii)}{=}a\cdot\overrightarrow{OF}+a\cdot\overrightarrow{OG}=a\overline{f}+a\overline{g}\ .$$

Свойство (iv) доказано полностью.

Длину числового отрезка $[a;b]$ определим равенством $b-a$. Для определения длины отрезка AB естественно поступить так: выбрав некоторый масштабный отрезок $e=OE$ и сопоставив тем самым конечным точкам A и B отрезка AB числа $\varphi_e(A)$ и $\varphi_e(B)$, положить

$$\lambda_e(AB) = \varphi_e(B) - \varphi_e(A),$$

если точка B лежит правее точки A, и

$$\lambda_e(AB) = \varphi_e(A) - \varphi_e(B),$$

если точка A лежит правее точки B.

Хотя отрезок AB – не направленный, удобно считать, что A – левый конец, B – правый конец этого отрезка.

Длина отрезка обладает следующими свойствами:

1) каждому отрезку соответствует в качестве длины положительное число;

2) равным отрезкам соответствуют равные длины (т.е. длина отрезка не зависит от его положения);

3) если отрезок AB разбит точкой C на два отрезка AC и CB, то длина всего отрезка равна сумме длин составляющих его отрезков

$$\lambda_e(AB) = \lambda_e(AC) + \lambda_e(CB);$$

4) определен отрезок e, имеющий длину l:

$$\lambda_e(e) = 1.$$

Свойство 1) длины вытекает из монотонности биекции φ_e – если B правее A, то $\varphi_e(B) > \varphi_e(A)$ и $\lambda_e(AB) > 0$.

Докажем свойство 2). Пусть AB и CD – два равных между собой отрезка. Это означает, что S – середина отрезка AD совпадает с серединой отрезка BC (A и C – левые концы исходных отрезков). S – середина $AD \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right)$; таким образом, $\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$, и, вследствие аддитивности функции φ_e

$$2\varphi_e(S) = \varphi_e(A) + \varphi_e(D).$$

Аналогично,

$$2\varphi_e(S) = \varphi_e(B) + \varphi_e(C).$$

Отсюда

$$\varphi_e(B) - \varphi_e(A) = \varphi_e(D) - \varphi_e(C)$$

и свойство 2), которое называют инвариантностью (неизменностью) длины отрезка относительно движения, доказано.

Если точка C лежит между точками A и B, причем A – левый конец, B – правый конец отрезка AB, то

$$\lambda_e(AB) = \varphi_e(B) - \varphi_e(A) = \varphi_e(B) - \varphi_e(C) + \varphi_e(C) - \varphi_e(A) = \lambda_e(BC) + \lambda_e(CA).$$

Свойство 3), конечно, называется аддитивностью – при сложении отрезков складывают их длины.

Теорема 3. *Существует только одна функция, определенная на множестве отрезков прямой* Π *и удовлетворяющая свойствам 1) – 4).*

Доказательство. Предположим, что помимо функции λ_e свойствам I) – 3) удовлетворяет некоторая функция μ.

Пусть x – некоторое положительное число. Взяв направленный отрезок $\overrightarrow{OX} = x \cdot \overrightarrow{OE}$, обнаружим, что длина λ_e отрезка OX равна x:

$$\lambda_e(OX) = x.$$

Сопоставив положительному числу x число $\mu(OX)$, получим функцию $f : x \mapsto \mu(OX)$, определенную на множестве $\mathbb{R}^+$ всех положительных действительных чисел и обладающую свойствами:

(i) f – возрастающая функция;

(ii) $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

В самом деле, пусть $x < y$; взяв отрезки OX и OY, длина λ_e которых равна x и y, получим, что $OX < OY$, откуда $\mu(OX) < \mu(OY) = \mu(OX) + \mu(XY)$. Следовательно, f – возрастающая функция. Кроме того, взяв отрезок $OZ = OX + OY$, найдем, что

$$\begin{array}{ccccc} \mu(OZ) & = & \mu(OX) & + & \mu(OY) \\ \| & & \| & & \| \\ f(x) & = & f(x) & + & f(y) \end{array}$$

Но $z = \lambda_e(OZ) = \lambda_e(OX) + \lambda_e(OY) = x + y$, и тем самым,

$$f(x+y) = f(x) + f(y);$$

аддитивность функции f доказана.

Установим теперь, что всякая функция f, удовлетворяющая условиям i) и ii), т.е. возрастающая и аддитивная, обязательно задается формулой

$$f(x) = ax,$$

где a – некоторое положительное действительное число.

Прежде всего, пусть x является целым положительным числом, $x = n$. Ввиду аддитивности f

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{ раз}}) = nf(1)$$

(более аккуратное доказательство – очевидное упражнение на метод математической индукции). Совершенно аналогично,

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m\text{ раз}}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right).$$

Взяв, в частности, $m = n$, найдем, что

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1).$$

Таким образом,

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Если x – произвольное положительное действительное число, то вследствие монотонности функции f

$$x_{(n)} \cdot f(1) = f\left(x_{(n)}\right) \le f(x) < f\left(x'_{(n)}\right) = x'_{(n)} \cdot f(1),$$

где $x_{(n)}$ и $x'_{(n)}$ – n-е десятичные приближения числа x. Следовательно,

$$f(x) = x \cdot f(1). \qquad (*)$$

По определению функции f

$$f(1) = \mu(OE) \qquad (**)$$

Допустим, что в дополнение к условиям 1) – 2) функция μ удовлетворяет еще и свойству 4). Тогда $f(1) = 1$, $f(x) = x$, и для всякого отрезка OX

$$\mu(OX) = \lambda_e(OX).$$

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 3 легко извлечь более общее утверждение, связывающее длины отрезка в разных «системах измерения» – при выборе различит отрезков OE и OF качестве масштабных.

Пусть $\lambda(OE) = 1$, $\mu(OF) = 1$. Ввиду формул (*) и (**)

$$\mu(OX) = x \cdot \mu(OE).$$

Отсюда, заменив x на равное ему число $\lambda(OX)$, находим

$$\lambda(OX) = \frac{\mu(OX)}{\mu(OE)}.$$

Точно также

$$\mu(OX) = \frac{\lambda(OX)}{\lambda(OE)}.$$

В качестве упражнения легко установить следующие свойства:

1. Пусть функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является аддитивной и убывающей. Верно ли, что тогда $g(x) = ax$, где a – отрицательное действительное число.

2. Доказать, что

1) $\lambda(OF) \cdot \mu(OE) = 1$;

2) $\mu(OX) = \mu(OE) \cdot \lambda(OX)$.

3. Пусть $\overrightarrow{OF} = a \cdot \overrightarrow{OE}$, a – положительное действительное число. Как связаны между собой длина λ с масштабным отрезком OE и длина μ с масштабным отрезком OF? Что изменится, если a – отрицательное действительное число?

Литература.

1. Г. М. Фихтенгольц, Иррациональные числа в средней школе, «Математическое просвещение», вып.2, М., ГИТТЛ, 1957, с.133-148.
2. А. А. Ляпунов, Действительные числа (преподавание в высшей технической школе с большой программой математики), «Математическое просвещение», вып.2, М., ГИТТЛ, 1957, с.149-156.
3. А.Я. Дубовицкий, Аксиоматическое построение действительных чисел (преподавание в педагогическом институте), «Математическое просвещение», вып.2, М., ГИТТЛ, 1957, с.157-168.
4. А. Н. Колмогоров, К обоснованию теории вещественных чисел, «Математическое просвещение», вып.2, М., ГИТТЛ, 1957, с.169-171.
5. Г. Н. Яковлев, Числовые последовательности и непрерывные функции. Пособие для учителей, М., Просвещение, 1978.
6. Г. Фройденталь, Математика как педагогическая задача, М., «Просвещение», 1982 (часть 1), 1983

(часть 2).

7. И. В. Проскуряков, Понятие множества, группы, кольца и поля. Теоретические основы арифметики. Энциклопедия элементарной математики, Т. 1, ГИТТЛ, М., 1951. с. 7–252.

8. Э. Энгелер, Метаматематика элементарной математики. М., Мир. 1987.

9. А. Лебег, Об измерении величин. М., Учпедгиз, 1960.

10. А. А. Никитин, Ю.В. Михеев, Математика: теория и практика, Часть 1. От конечных множеств до комплексных чисел. Новосибирск, изд-во ИДМИ, 2001.

11. В. М. Алексеев, О преподавании элементов математического анализа в девятых классах школы-интерната № 18 при МГУ, сб. Математический анализ и алгебра. М., Просвещение, 1967, с. 48–175.

12. С. Феферман, Числовые системы. Основания алгебры и анализа. М., Наука,1971.

On the didactics of specialized teaching Mathematics. Real numbers

Markovichev Aleksander Sergeyevich
Novosibirsk State University
Russia, Novosibirsk

While teaching Mathematics at specialized educational institution, theoretical comprehension of concept of a real number appears to be essential for successful study of basic analysis of elementary functions. The article focuses on various methods for introducing the real number. The author suggests a brief scheme of presenting real numbers as infinite decimal fractions. In the second paragraph, one of the variants of establishing properties of arithmetical operations by means of limits is represented. The third paragraph offers additional material considered to be used as optional with high-skilled students. Besides, the minor theory of measuring line segments is examined and the Thales' theorem and properties of vector-number multiplication are proved.

The article reflects experience of introducing the theme "Real numbers" in the Specialized Educational Scientific Center at Novosibirsk State University.

Keywords: Mathematics didactics, specialized teaching, real number, infinite decimal fractions, arithmetical operations, operations with vectors, Thales' theorem.