Министерство образования и науки РФ
Новосибирский государственный университет
Специализированный учебно-научный центр

В. В. Воронин

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Отношения отрезков и площадей

Новосибирск
2016

УДК 53 (075)

В 75

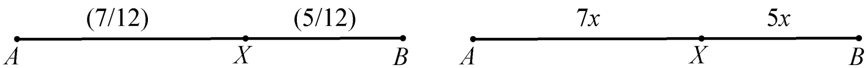
Воронин В. В. Метод. пособие: Отношения отрезков и площадей. Новосибирск: НГУ, 2016. 40 с.

Задачи, в которых требуется найти отношения каких-то отрезков или каких-то площадей, встречаются в геометрии довольно часто. Иногда это самостоятельная задача, иногда умение проделывать это является хорошей «дебютной идеей» при решении более сложной задачи. Понятно, что если речь идет об отношении, то оно не зависит от размеров фигур – ведь при подобном сжатии-расширении чертежа все длины автоматически умножаются на коэффициент подобия, площади – на его квадрат, а, следовательно, отношения длин или отношения площадей остаются прежними.

Но во многих таких задачах эти отношения не зависят и от формы фигур! Например, от соотношения сторон или от углов треугольника. И тогда искусственно вводить в задачу недостающие длины и углы, а потом вести с ними длинные расчеты – значит, делать решение явно не оптимальным, искусственно усложнять его. Математики по этому поводу выражаются так: некие отношения «инвариантны относительно аффинного преобразования плоскости». То есть не меняются при так называемых линейных преобразованиях и при движениях.

Иной раз в задаче даже присутствует информация о форме фигуры, то есть о длинах и углах. И все равно – расчет каких-то площадей выгоднее вести не непосредственно, а выясняя, какая доля площади исходной фигуры приходится на тот или иной ее кусок.

Для удобства и краткости давайте договоримся о рабочих терминах и обозначениях. Если формулировка задачи начинается с задания какой-то «материнской фигуры», внутри которой или вокруг которой делаются все следующие построения, то ее площадь всегда будем называть S_0. Когда какие-то точки или отрезки будут располагаться на некотором объемлющем отрезке или на его продолжениях, то этот основной отрезок будем именовать «хозяином». И позицию точки на своем хозяине удобнее всего описывать одним из следующих двух способов.



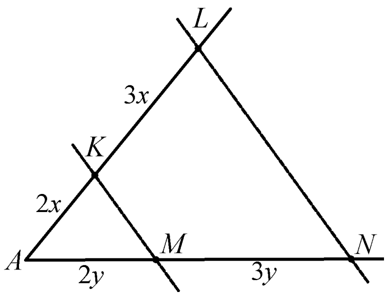
Либо будем писать, какую долю хозяина составляет каждый кусок, либо помечаем, что на одном куске находится 7 каких-то «долек», а на другом 5.

Кстати, если задано какое-либо из соотношений, например, дано, что $AX : XB = 7 : 5$, другое отношение (например, $AX : AB$) находится без всяких уравнений. В уме, с помощью простой арифметики. Смотрим, что AX – это 7 долек, а весь хозяин – 12 долек, стало быть, AX от хозяина составил $7/12$.

Будем использовать два взгляда, два подхода к решению таких задач (или – два с половиной подхода, так как первый подход имеет два варианта). Они в каком-то смысле плавно переходят друг в друга. Вопрос лишь – с чего начать? С отрезков или с площадей.

I. Подход номер один. Фалес

С этим славным греческим именем будем связывать следующую группу фактов. Если стороны угла пересекаются парой параллельных прямых, то, как известно, отношение отрезков, высекаемых на одной стороне угла, совпадает с отношением соответствующих отрезков на другой стороне. Можно даже сказать, что отношение отрезков «проектируется» с одной прямой на другую. (Да это и есть – проектирование; только не под прямым углом, как часто имеют в виду по умолчанию, а проектирование параллельно заданному направлению).

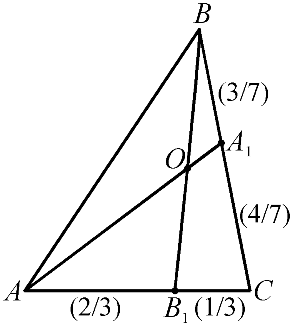


Итак, если прямые KM и LN параллельны, и отрезки на верхней стороне угла (AK и KL) относятся как $2:3$, то и на нижней стороне угла отношение (уже для отрезков AM и MN) будет таким же. Более того, мы же знаем еще и про подобие треугольников AKM и ALN, из чего можем заключить, что и отрезки параллельных прямых KM и LN тоже относятся известным нам образом, как $2:5$. (Поскольку таков коэффициент подобия, равный $AK:AL$).

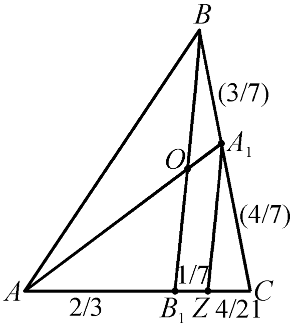
Строго говоря, теорема Фалеса говорит лишь о том, что если отрезки на верхней стороне *равны*, то и на нижней тоже *равны*. Все дальнейшее – уже обобщения и следствия исходной теоремы Фалеса. Но давайте все же для краткости отбросим эти оговорки и будем кодовым словом «Фалес» называть всю эту совокупность фактов.

И что замечательно – такой простой ключик, оказывается, отмыкает огромное множество задач планиметрии. Да еще и стереометрию прихватывает! Итак, начнем стрелять отрезками.

Задача 1. *В треугольнике ABC точка A_1 лежит на стороне BC, точка B_1 на стороне AC, причем $BA_1 : A_1C = 3:4$; $AB_1 : B_1C = 2:1$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найти, в каком отношении точка O делит отрезок AA_1.*



Решение. Сразу предостерегу на всякий случай от популярной ошибки. Кое-кто начинает искать подобные треугольники сразу на исходной картинке. Тем более, треугольник *ABC* мог случайно быть нарисован так, что, например, треугольники AOB_1 и BOA_1 похожи на подобные. Не верьте. Для треугольника произвольной формы этого не будет – а мы и вовсе ничего знаем сейчас о форме нашего треугольника. «Фалеса» еще надо организовать. А сделать это очень просто. Здесь достаточно положить где-нибудь своими руками всего лишь один дополнительный отрезок – и он решит все проблемы. Куда его положить? Попробовать можно разные варианты. В данной задаче, например, это удобнее сделать: из точки A_1 параллельно BB_1.

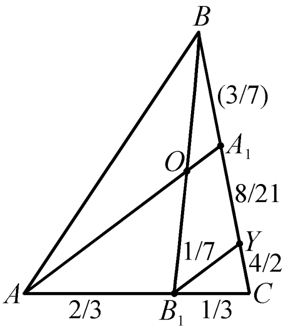


Тогда получим новую картинку. И «Фалесов» на ней целых два! На усах, выходящих из *C* – и на усах, выходящих из *A*. Сначала посмотрим на угол *C*. Отношение $(3/7):(4/7)$ с верхней стороны проектируется на нижнюю; значит, если CB_1 составлял 1/3 от своего хозяина, то теперь его части – составляют $(1/3)\times(3/7)$ и $(1/3)\times(4/7)$, т. е. $1/7$ и $4/21$. Взглянув теперь на угол A_1AC, спроектируем наоборот: с нижней стороны на верхнюю. То есть искомое отношение $AO:OA_1$ равно $(2/3):(1/7) = 14:3$.

Ответ. $14:3$.

А, кстати, посмотрим, решилась бы задача, если бы мы пристроили вспомогательный отрезок по-другому. Не из A_1, а из точки B_1.

Второе решение. Провели отрезок B_1Y, параллельный AA_1. Сначала посмотрим на подобные треугольники CYB_1 и CA_1A с общей вершиной C. Тогда наш отрезок B_1Y подобен AA_1 с коэффициентом 1/3, т. е. $B_1Y = 1/3\,AA_1$. А теперь, глядя из вершины B, тоже видим подобные треугольники, и отрезок OA_1 подобен B_1Y с коэффициентом



$$\frac{3/7}{3/7+8/21}=\frac{9/21}{9/21+8/21}=\frac{9}{17}.$$

Итого $OA_1 = \frac{9}{17}\cdot\frac{1}{3}\cdot AA_1 = \frac{3}{17}AA_1$.

Это согласуется с ранее полученным ответом, так как весь отрезок AA_1 тогда составляет 17 долей, из них 3 приходится на OA_1, а значит, 14 долей составляет AO.

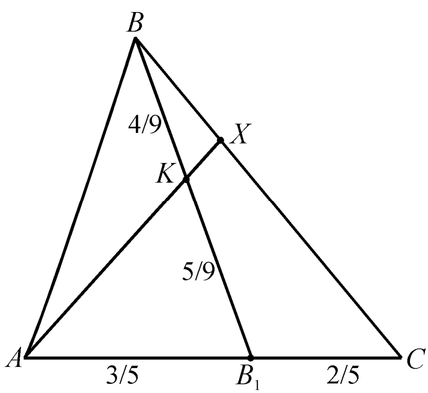
Все-таки проще здесь оказался первый вариант решения. Но, как видите, если не угадали с отрезком, то и второй вариант к чему-то приведет.

Позже приведу еще и третье решение этой задачи. Через площади.

Итак, если в этой задаче где-то заданы два отношения, то все остальные отношения присутствующих на картинке отрезков – просчитываются!

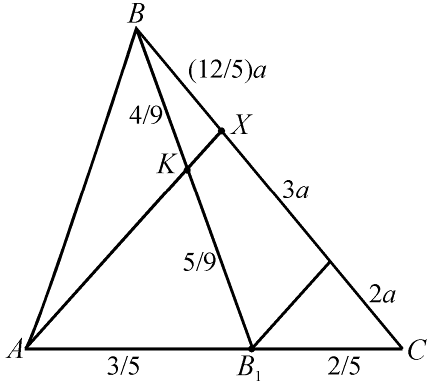
Изменим задачу. Пусть заданы отношения в других местах.

Задача 2. *В треугольнике* ABC *на стороне* AC *задана точка* B_1, *делящая ее в отношении* $3:2$, *считая от* A. *На отрезке* BB_1 *задана точка* K, *делящая этот отрезок в отношении* $4:5$, *считая от* B. *Найти, в каком отношении прямая* AK *делит сторону* BC.



Итак, если мы обозначим пересечение AK и BC буквой X, то надо найти, например, чему равно $BX : XC$.

Здесь на картинках сразу подписано, какую часть своего хозяина составляет каждый отрезок. Так удобнее всего.



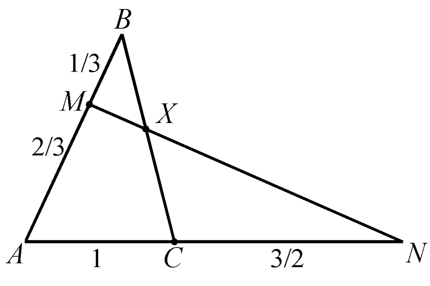
Для решения достаточно провести из точки B_1 отрезок, параллельный *AX.* Даже придумывать обозначения не хочется. Потому что на стороне *BC* сразу ясен весь расклад. Если смотреть на стороны угла *C*, то с нижней стороны отношение $3:2$ проектируется на *BC.* Обозначим тогда отрезки $2a$ и $3a$. А теперь, глядя на угол с вершиной *B*, раз на отрезке BB_1 верхний кусок составляет $4/5$ от нижнего, то и на *BC* верхний кусок составляет $4/5$ от $3a$, т. е. $(12/5)a$. Следовательно,

$$BX : XC = \frac{(12/5)a}{3a + 2a} = 12 : 25.$$

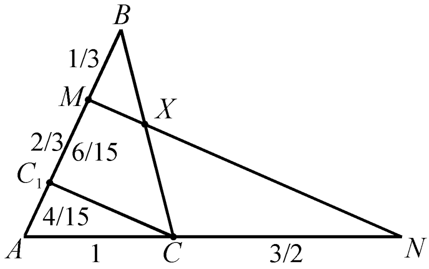
Ответ: $12 : 25$**, считая от *B*.**

В подобных задачах безразлично, находятся точки на сторонах треугольников или на их продолжениях. Можно условно считать, что «стороной» треугольника является, например, вся прямая *AC*, а не только отрезок *AC*.

Задача 3. *Точка M делит сторону AB треугольника ABC в отношении* $2:1$, *считая от A. Точка N лежит на продолжении стороны AC за точку C, причем* $AC : CN = 2 : 3$. *Найти, в каком отношении отрезок MN делит сторону BC.*



Сначала представим данные задачи в более удобном для работы виде. Подпишем, что отрезки AM и MB составляют соответственно $2/3$ и $1/3$ от своего хозяина AB. А, взяв на другой прямой в качестве хозяина сторону AC, напишем, что CN составляет $3/2$ от него. Точку пересечения BC и MN, позицию которой и надо выяснить, обозначим буквой X.



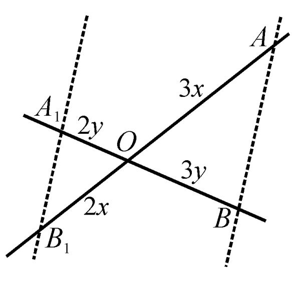
Здесь можно провести вспомогательный отрезок либо через M параллельно AC, либо через C параллельно MN. Давайте выберем второй вариант. Сначала посмотрим «Фалеса» на сторонах угла A. Отрезок AN с нижней стороны проектируется на отрезок AM верхней стороны. Значит, AM, составлявший $2/3$ своего хозяина разобьется на отрезки, составляющие от него $2/5$ и $3/5$. То есть составляющие $4/15$ и $6/15$ от хозяина AB. Теперь достаточно посмотреть на стороны угла B и сказать, что $BX : XC = 1/3 : 6/15 = 5 : 6$.

Ответ. $5:6$**, считая от *B*.**

Как и в предыдущих задачах, здесь можно было бы задать в любых двух местах позиции каких-то точек на своих отрезках. Например, задать отношения $AM : MB$ и $MX : XN$ и попросить найти отношения $AC : CN$ или $BX : XC$. И опять для решения подобных задач хватило бы одного вспомогательного отрезка.

II. Подход номер полтора. Фалес в виде бантика

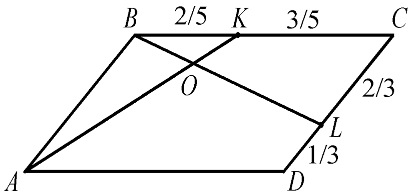
А если параллельные прямые пересекают стороны угла по разные стороны от вершины угла O? То есть в точке О не начинаются два луча, а встречаются две прямые. Тогда по разные стороны от O возникают два подобных треугольника, к которым также относятся все утверждения «Фалеса». Для краткости будем называть эту пару треугольников *бантиком*, кото-



рый завязался в точке O.

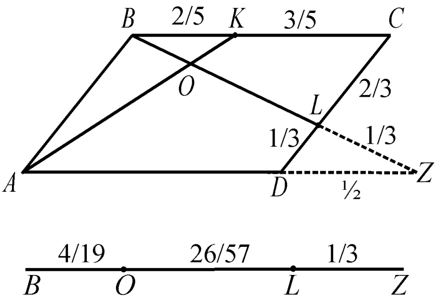
Можно и предыдущие задачи решать, строя вспомогательную прямую, параллельную какой-то из сторон и организуя бантики. Но особенно пригождается этот подход в тех случаях, когда в задаче с самого начала уже присутствуют параллельные прямые. То есть в параллелограммах или трапециях.

Задача 4. *В параллелограмме ABCD точка K делит сторону BC в отношении* $2:3$, *считая от B, а точка L делит сторону CD в отношении* $2:1$, *считая от C. Найти, в каком отношении отрезок AK делит отрезок BL.*



Решение. Обозначим точку пересечения заданных отрезков через O и отметим доли, на которые делятся стороны BC и CD заданными на них точками K и L. И здесь никаких «новых» отрезков проводить не надо. Дайте лишь отрезку BL долететь до нижней прямой и воткнуться в нее! Он сам сделает всю работу.

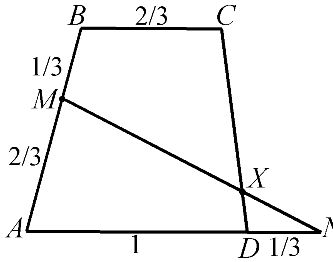
Теперь сразу завязались два бантика: в точке L и в точке O. В каждой из них встречаются вершинами по два подобных треугольника: один сверху и один снизу. Сначала посмотрим, что коэффициент подобия на бантике в точке L нам задан и равен $1/2$. Тогда пометим, что отрезок DZ составляет $1/2$ от своего хозяина AD, а для отрезка LZ в качестве хозяина выберем весь длинный отрезок BZ. От которого он составит $1/3$. Теперь посмотрим на бантик в точке O. Коэффициент подобия верхнего треугольника к нижнему мы увидим, исходя из соотношения горизонтальных сторон: это $2/5:3/2=4/15$. Стало быть, на отрезке BZ всего 19 кусков, из которых 4 приходится на BO.



Давайте выложим отдельно, как показано внизу на том же рисунке, отрезок BZ. От этого хозяина крайние отрезки составляют $4/19$ и $1/3$, значит, средний отрезок OL составит $2/3-4/19=26/57$. Итого, искомое отношение $BO:OL=4/19:26/57=6/13$.

Ответ: $BO : OL = 6 : 13$ **.**

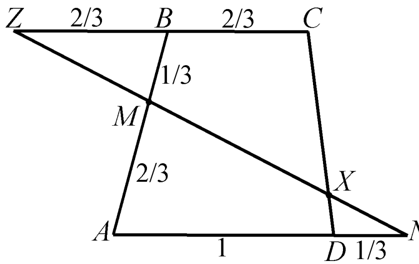
Можно убедиться, что примерно так же решается задача, если продолжить не отрезок *BL*, а отрезок *AK*. Естественно, до пересечения с прямой *CD*. И тогда тоже завяжутся два бантика: в точке *K* (с известным коэффициентом $2:3$) и в точке O .



Рассмотрим задачу с трапецией.

Задача 5. *Дана трапеция, в которой отношение оснований* $BC : AD = 2 : 3$*. Точка M лежит на стороне AB, –* $AM : MB = 2 : 1$*. Точка N лежит на продолжении AD,* $AM : MB = 2 : 1$*. Точка N лежит на продолжении AD за точку D,* $DN : AD = 1 : 3$*. Найти отношение, в котором отрезок MN делит сторону CD.*

На приведенном рисунке хозяином на горизонтали взято основание *AD*, тогда $DN = 1/3$, $BC = 2/3$. На боковой стороне отрезки *AM* и MB составляют соответственно $2/3$ и $1/3$ от хозяина *AB*.



Продолжим отрезок *MN*, до пересечения с прямой *BC* в точке *Z*. Через *X* обозначим точку на стороне *CD*, позицию которой и надо определить.

В точке *M* завязался бантик с коэффициентом $BM : MA = 1/2$. Поэтому отрезок *BZ* равен половине *AN*, т. е. 2/3. Теперь обратимся к бантику, завязанному в точке *X*. Коэффициент подобия (верхний треугольник к нижнему) узнаем из соотношения горизонтальных сторон $CZ : DN = 4/3 : 1/3 = 4 : 1$. Значит, и $CX : XD = 4 : 1$.

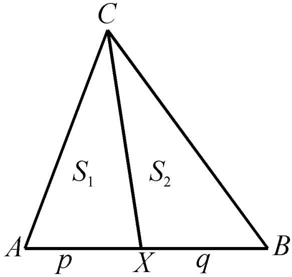
Ответ: $4:1$**, считая от *C*.**

III. Второй подход. Метод площадей

Следующие три простенькие леммы связывают друг с другом отношения длин отрезков и отношения площадей. И в итоге позволяют одни вопросы сводить к другим. Как в ту, так и в другую сторону.

Лемма 1. *Если точка X делит сторону AB треугольника ABC в отношении p:q, то отрезок CX делит треугольник на части, отношение площадей которых также равно* $p:q$, *т. е.*

$$S_1 : S_2 = S_{ACX} : S_{BCX} = p : q .$$

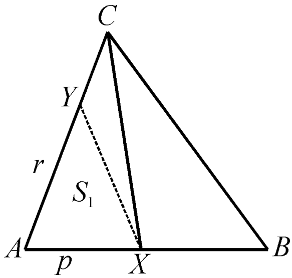


Или: если площадь исходного треугольника равна S_0, а p и q – доли основания AB, которые составляют отрезки AX и BX, то $S_1 = pS_0 : S_2 = qS_0$.

Доказательство очевидно: у треугольников ACX и BCX высота, опущенная из вершины C, одна и та же, поэтому отношение площадей равно отношению оснований.

Лемма 2. *Если на сторонах AB и AC треугольника ABC расположены точки X и Y так, что отсекаемые отрезки составляют p-ю и r-ю долю соответствующих сторон, то площадь отрезаемого треугольника AXY составляет (pr)-ю долю площади ABC*

$$S_{AXY} = prS_0 .$$



Для доказательства достаточно сначала рассмотреть треугольник ACX, площадь которого, согласно предыдущей лемме, есть pS_0, а затем применить эту же лемму к треугольнику ACX, взяв X за вершину, тогда от площади pS_0 отрежется r-я часть.

Можно доказать и по-другому:

$$S_0 = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A ; \; S_1 = \frac{1}{2}\left(p \cdot AB\right)\cdot\left(q \cdot AC\right)\cdot \sin A ,$$

и, разделив второе на первое, получим: $S_1 : S_0 = pr$.

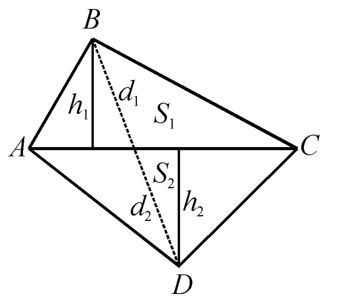
Замечание. *Это правило «произведения отношений» относится только к отрезаемому треугольнику, но не относится, например, к четырехугольнику* $XYCB$. *Его площадь не получается из* S_0 *умно-*

жением на отношения $(CY/AC)(BX/AB)$. *Площадь его, однако, можно легко посчитать, просто отняв* S_1 *от* S_0.

Лемма 3. *Если четырехугольник ABCD разрезан диагональю AC на два треугольника: ABC площадью* S_1 *и ADC площадью* S_2, *то эти площади относятся друг к другу так же, как куски второй диагонали* d_1 *и* d_2, *содержащиеся внутри этих треугольников*:

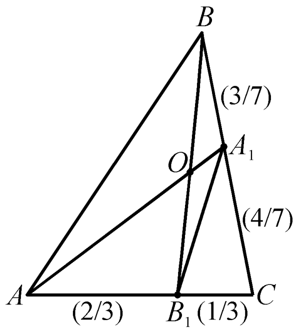
$$S_1 : S_2 = d_1 : d_2 .$$

Для доказательства достаточно заметить, что у верхнего и нижнего треугольника за основание можно взять один и тот же отрезок *AC*. Но тогда их площади относятся как их высоты h_1 и h_2. А эти высоты относятся как d_1 к d_2, что следует из подобия прямоугольных треугольников, где высоты являются катетами, а d_1 и d_2 гипотенузами.



Теперь приведем другое решение рассмотренной прежде **Задачи 1** – на сей раз методом площадей.

Вместо организации фалесовской картинки сделаем четырехугольник AB_1A_1B, соединив точки A_1 и B_1. Нам нужно найти $AO:OA_1$, но по лемме 3 это отношение равно $S_{BB_1A} : S_{BB_1A_1}$. Площадь первого равна ($2/3$) S_0 (по Лемме 1), а площадь второго по той же лемме равна ($3/7$) площади BB_1C, которая есть ($1/3$) S_0. Итого,

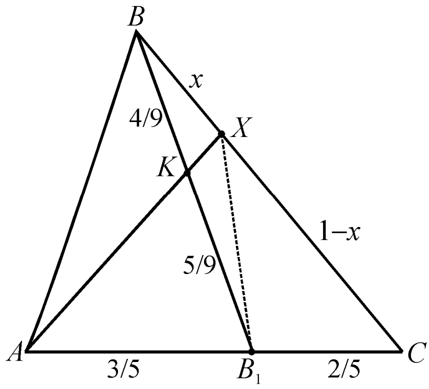


$$AO : OA_1 = \frac{2/3}{1/3 \cdot 3/7} = 14 : 3 ,$$

что совпадает с прежним ответом.

Продемонстрируем метод и на **Задаче 2.**

Обозначим через x долю стороны BC, которую составляет отрезок BX, тогда доля XC составляет $(1-x)$. Согласно Лемме 3, отношение площадей «верхней» и «нижней» половины четырехугольника $ABXB_1$ равно $4/5$.



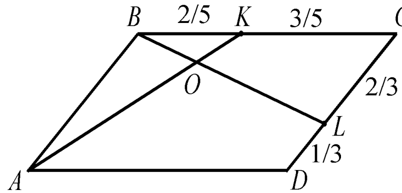
Но это же отношение можно выразить через x. Площадь верхнего треугольника AXB равна xS_0, а площадь нижнего AXB_1 есть $3/5$ от $(1-x)S_0$. Имеем уравнение:

$$\frac{S_{AXB}}{S_{AXB_1}}=\frac{x}{3/5(1-x)}=\frac{4}{5}, \text{ откуда } \frac{BX}{XC}=\frac{x}{1-x}=\frac{12}{25}.$$

Что опять совпадает с результатом, полученным первым методом.

Теперь «продолжим» **Задачу 4.**

Задача 4′. *В параллелограмме $ABCD$ точка K делит сторону BC в отношении $2:3$, считая от B, а точка L делит сторону CD в отношении $2:1$, считая от C. Определить, какую часть площади параллелограмма S_0 составляет каждый из получившихся кусков.*



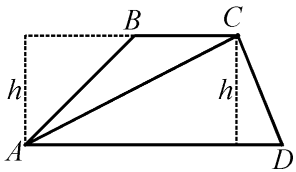
Как уже было выяснено ранее, $BO:OL=6:13$, т. е. BL состоит всего из 19 долей, 6 из которых составляют BO, или $BO=\frac{6}{19}BL$.

Сначала посмотрим на треугольник BLC, который составляет $2/3$ треугольника BDC, являющегося половиной параллелограмма. Итак, $S_{BLC}=\frac{1}{3}S_0$. А треугольник BOK отрезан от него, как это делалось в Лемме3 с коэффициентами на сторонах, равными $2/5$ и $6/19$, т. е. $S_{BOK} = \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{1}{3} S_0 = \frac{4}{95} S_0$.

Площадь четырехугольника *OKCL* теперь можно получить вычитанием: $S_{OKCL} = \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{95} \right) S_0 = \frac{83}{285} S_0$. Площадь треугольника *AOB* можно получить, вычтя найденную уже площадь *BOK* из треугольника *ABK*, который есть $2/5$ от половинки параллелограмма. Значит, $S_{AOB} = \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{95} \right) S_0 = \frac{3}{19} S_0$. Ну, а площадь оставшейся части можно получить, вычитая из всего параллелограмма, например, треугольники *AOB* и *BLC*: $S_{AOLD} = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{19} \right) S_0 = \frac{29}{57} S_0$.

Между прочим, теперь можно, уже исходя из просчитанных нами площадей, за один ход найти и отношение отрезков $AO : OK$, которое равно (по Лемме 1) отношению площадей треугольников *AOB* и *BOK*:

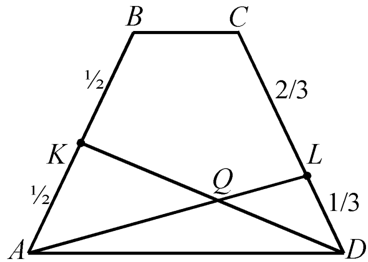
$$AO : OK = \frac{S_{AOB}}{S_{BOK}} = \frac{3}{19} : \frac{4}{95} = \frac{15}{4}.$$



Отметим такой полезный факт. Если параллелограмм разрезается диагональю на две равные по площади половины, то в трапеции отношение площадей двух кусков равно отношению оснований, к которым эти куски примыкают. Действительно, верхний и нижний треугольники, на которые разрезает трапеция диагональ АС, имеют одинаковую высоту (если за основания треугольников считать основания трапеции), значит, отношение площадей S_{ACB}/S_{ACD} и равно отношению оснований BC/AD.

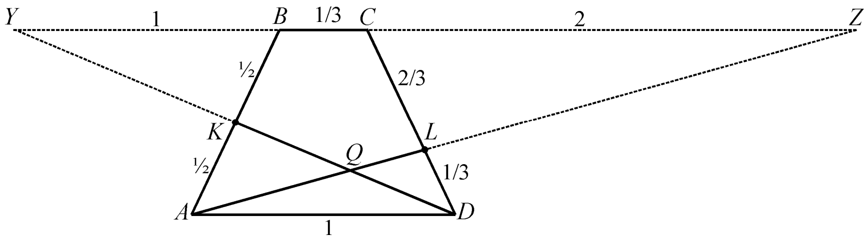
Используем это замечание еще в одном примере на вычисление площадей.

Задача 6. *Площадь трапеции ABCD равна 64; основание AD втрое больше основания BC. Точка K – середина стороны AB, точка L лежит на стороне CD; $CL = 2LD$. Отрезки AL и DK пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника ADQ.*



Будем рассматривать искомый треугольник *ADQ* как часть треугольника *ADL*. Тогда достаточно найти S_{ADL} и, по Лемме 1, беря за вершину точку *D*, умножить эту площадь на отношение AQ/AL. Диагональ *AC* разрезает площадь трапеции, согласно замечанию, в отношении $3:1$, значит $S_{ACD} = \frac{3}{4}S_0$, а треугольник *ADL* (по Лемме 1, вершина – *A*) составляет от него $1/3$. Итак, $S_{ADL} = \frac{1}{4}S_0 = 16$.

Для отыскания AQ/AL воспользуемся наличием параллельных прямых и организуем бантики, продолжив *DK* и *AL* до пересечения с прямой *BC* в точках *Y* и *Z*. Теперь бантики завязались сразу в трех точках: *K*, *L* и *Q*. Если взять «горизонтального» хозяина *AD* за 1, то по условию задачи $BC = 1/3$.



В бантике с вершиной *K* коэффициент подобия равен 1 ($AK/KB = 1$), поэтому $BY = AD = 1$. В бантике с вершиной L коэффициент подобия 2, поэтому $CZ = 2$. Определим позиции точек *Q* и *L* на всем большом отрезке *AZ*. Поскольку на бантике с вершиной *L* коэффициент подобия 2, то $LZ = 2AL$, т. е. $AL = \frac{1}{3}AZ$. А на бантике с вершиной Q коэффициент подобия $\frac{YZ}{AD}=\frac{1+1/3+2}{1}=\frac{10}{3}=\frac{AQ}{QZ}$. То есть на отрезке AZ всего 13 долей, из которых 3 лежат на AQ, т. е. $AQ=\frac{3}{13}AZ$. Значит, $\frac{AQ}{AL}=\frac{3}{13}:\frac{1}{3}=\frac{9}{13}$. Итак, находим искомую площадь:

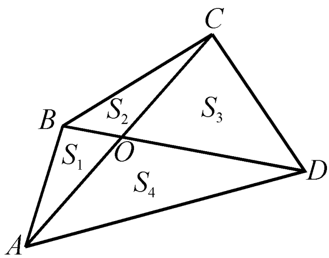
$$S_{ADQ}=S_{ADL}\cdot\frac{AQ}{AL}=16\cdot\frac{9}{13}=\frac{144}{13}.$$

Ответ: $S_{ADQ}=\frac{144}{13}$.

IV. Несколько теорем

Остановимся теперь еще на некоторых общих утверждениях, не привязанных к частным задачам. Которые, следовательно, можно назвать и теоремами.

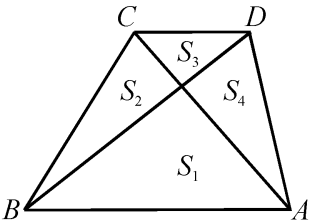
Теорема 1. *Если произвольный четырехугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника и через* S_1, S_2, S_3, S_4 *обозначены их площади (по кругу), то* $S_1\cdot S_3=S_2\cdot S_4$.



Доказательство почти очевидно. Применяя Лемму 1 к треугольнику ABC (с вершиной B), получаем, что $\frac{AO}{OC}=\frac{S_1}{S_2}$. Но применив ту же лемму к треугольнику ADC, точно так же получим, что то же отношение отрезков равно и S_4/S_3. Из равенства $S_1/S_2=S_4/S_3$ и следует утверждение теоремы.

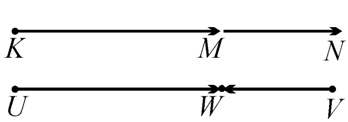
Теорема 2. *Если произвольная трапеция разбивается диагоналями на четыре треугольника и* S_1, S_3 *– площади треугольников, примыкающих к основаниям, то площадь каждого из треугольников, примыкающих к боковым сторонам, равна среднему геометрическому* $\sqrt{S_1S_3}$.

Поскольку по предыдущей теореме $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$, то достаточно показать, что S_2 и S_4 равны друг другу. А это верно потому, что эти площади получаются из площадей треугольников ACD и ABD вычитанием одного и того же S_1. Треугольники же ACD и ADB имеют общее основание AB, причём высоты, опущенные на него из точек C и D равны друг другу в силу параллельности оснований.



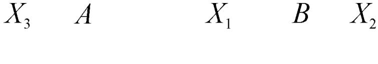
Чтобы сформулировать следующие две теоремы в наиболее общем виде, введем теперь понятие отношения направленных отрезков, лежащих на одной прямой. То есть, отношения коллинеарных векторов. А именно: отношение коллинеарных векторов равно отношению их длин со знаком «плюс», если векторы одинаково направлены и со знаком «минус» – если направлены противоположно.

Например, здесь $\dfrac{\overrightarrow{KM}}{\overrightarrow{MN}} > 0$, а $\dfrac{\overrightarrow{UW}}{\overrightarrow{VW}} < 0$.



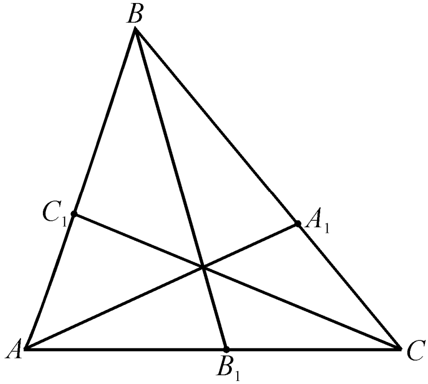
Заметим, что если взять в качестве хозяина направленный отрезок (вектор) $\overrightarrow{AB}$, и отношение $\dfrac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{AB}} = \alpha$, то когда точка X лежит внутри отрезка AB, ($X = X_1$), эта величина $\alpha \in (0;1)$. Если точка X лежит на продолжении отрезка за точку B (т. е. $X = X_2$), то $\alpha > 1$, а если на продолжении отрезка за точку A (т. е. когда $X = X_3$), то $\alpha < 0$. То есть при выбранном хозяине $\overrightarrow{AB}$ любому действительному числу α от ($-\infty$) до ($+\infty$) отвечает одна и только точка X прямой AB.

Теперь, пользуясь этим определением, сформулируем две теоремы, которые оказываются почему-то очень похожими друг на друга. Хотя в одной из них «три прямые лежат на одной точке», а в другой, наоборот, «три точки лежат на одной прямой». За этим скрываются отношения двойственности, проявляющиеся при «полярном преобразовании плоскости» – но таких тонкостей мы здесь касаться не будем.

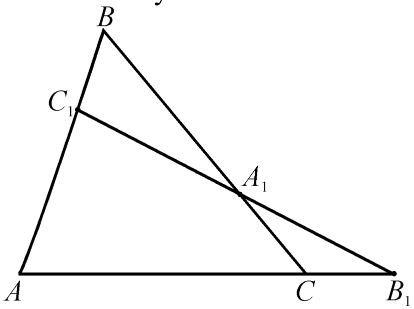


Теорема 3 (Чевы). *Пусть на прямых AB, BC и CA лежат соотвественно точки* A_1, B_1 и C_1. *Прямые* AA_1, BB_1, CC_1 *пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}=1.$$



Заметим, что точки, участвующие в отношениях, берутся «по кругу» в ту или другую сторону. И утверждение справедливо не только когда точки A_1, B_1 и C_1 лежат не только на сторонах треугольника ABC, как это нарисовано здесь, но и на продолжениях сторон. Например, точка пересечения может спуститься «вниз» по лучу BB_1 (за точку B_1), тогда и точки A_1, C_1 спустятся «вниз» по лучам BA и BC. Тогда из трех отношений третье останется положительным, а первые два станут отрицательными, и приведенный в теореме критерий по прежнему будет действовать.



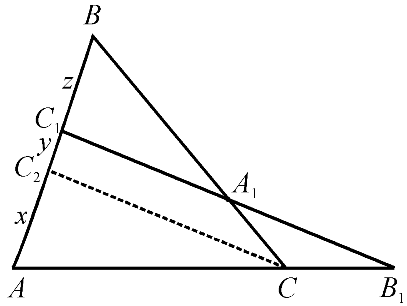
Теорема 4 (Менелая). *Пусть на прямых AB, BC и CA лежат соотвественно точки* A_1, B_1 и C_1. *Эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}=-1.$$

Как мы видим, произведение трех отношений – точно то же, что и в предыдущей теореме. Сменился лишь знак единицы в правой части. Например, для приведенного чертежа первые два отношения положительны, а третье отрицательно, так как сейчас точка B_1 лежит на продолжении стороны, а две другие – на самих сторонах. Но могли бы, например, и все три лежать на продолжениях, критерий будет действовать.

Будем называть формулы, присутствующие в формулировках этих теорем, критерием Чевы и критерием Менелая.

Теперь докажем каждую из теорем. Причём начнём с теоремы 4 (Менелая).

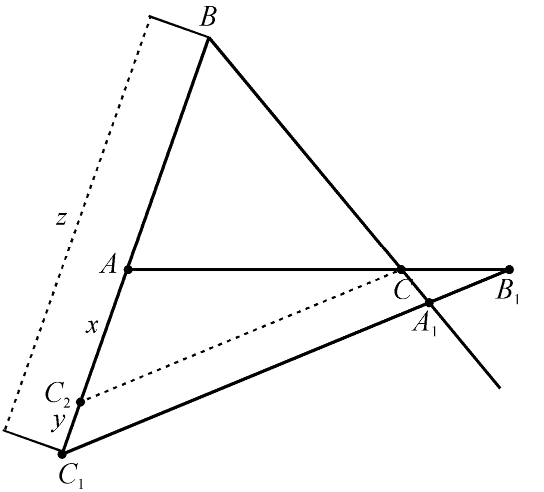


Доказательство теоремы 4. Докажем сначала в одну сторону: пусть три точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. Спроектируем (параллельно) всю картинку, скажем, на прямую *AB,* Для чего проведём отрезок CC_2, параллельный прямой B_1C_1. Обозначим получившиеся на прямой *AB* отрезки через *x, y, z*, как показано на рисунке. Можно считать их направленными (приняв за положительное направление $\overrightarrow{AB}$). Тогда участвующие в критерии Менелая отношения отрезков могут быть (по Фалесу) заменены на отношения отрезков, лежащих на прямой AB соответственно, а именно:

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = \frac{x+y}{z} \cdot \frac{(-z)}{(-y)} \cdot \frac{y}{-(x+y)} = -1 .$$

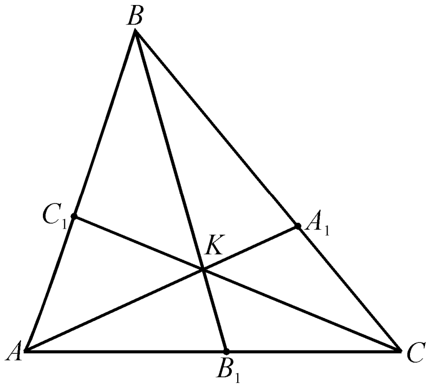
Заметим, что если точки расположены по-другому (например, все на продолжениях сторон треугольника, как показано на следующем рисунке), то считая направленные отрезки *x* и *y* мы получим те же соотношения.

Докажем в другую сторону. Пусть для точек A_1, B_1, C_1 выполнен критерий Менелая. Тогда проведём прямую A_1B_1 и предположим, что на она встретится с прямой в другой точке C'. Но тогда из уже доказанного следует, что для точки C'. Выполнено такое же соотношение Менелая. А, следовательно, $\dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \dfrac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}$ (причём, с учётом знака). Из чего следует, что точки C' и C_1 совпадают.



Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Опять сначала докажем в одну сторону: пусть отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке, которую назовём K. Применим теорему Менелая сначала к треугольнику ABB_1 и тройке лежащих на одной прямой точек K, C, C_1:



$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{CA}} = -1.$$

А затем применим теорему Менелая к треугольнику CB_1B и лежащей на одной прямой тройке точек A, K, A_1:

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1K}}{\overrightarrow{KB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = -1.$$

Перемножив между собой эти два равенства и сократив повторяющиеся величины, получим, что выполняется критерий Чевы.

В обратную сторону доказательство основано на такой же идее, что и в предыдущей теореме. Пусть критерий Чевы для тройки точек A_1, B_1, C_1 выполнен. Если обозначить через K пересечение двух прямых (например, AA_1 и BB_1), а через C' – пересечение прямой CK с прямой AB, то, как и в теореме Менелая, получим, что $\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}$, а значит, C_1 и C' одна и та же точка.

Сделаем еще одну оговорку, применимую к обеим теоремам. А что, если, например, в последнем рассуждении точка X отсутствует? Но это будет означать, что прямая A_1C_1 параллельна AC. Это может быть, когда $\alpha = 1 - \beta$. Но тогда в критерии Менелая произведение первых двух отношений равно 1, а значит, отношение $\overrightarrow{AB_1} : \overrightarrow{B_1C} = -1$. Но участвующие в этом отношении отрезки друг другу по длине равны быть не могут! Такое отношение достигается в пределе, когда точка B_1 уходит на бесконечность.

Если считать, что на каждой прямой имеется некая «бесконечная точка» для которой $\frac{\overrightarrow{\infty C}}{\overrightarrow{\infty A}} = 1$ и $\frac{\overrightarrow{C\infty}}{\overrightarrow{\infty A}} = -1$, то обе теоремы верны и для этих бесконечных точек. Надо под этим понимать, что все соотношения выполнены в пределе, когда одна из точек стремится по своей прямой к бесконечной. Под «пересечением прямых в бесконечной точке» тогда понимается, что они параллельны.

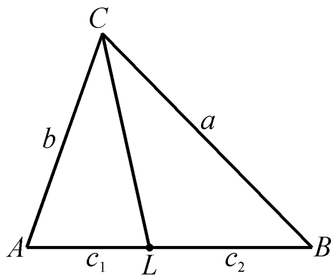
Это вопрос вкуса – но многие задачи на деление отрезков можно решать, обращаясь вместо теоремы Фалеса напрямую к теореме Менелая. Например, для решения Задачи 1 можно сразу применить теорему Менелая к треугольнику AA_1C. В Задаче 2 – к треугольнику AXC. А Задача 3 сразу решается применением теоремы Менелая к исходному треугольнику ABC.

V. Вспомним о биссектрисе

Коснемся еще одного момента. Информация об отношениях отрезков может присутствовать в условии задачи скрытым образом, а именно: если в условии упоминается биссектриса. В школьных учебниках в виде теоремы или в виде опорной задачи это свойство упоминается. Напомним:

Теорема 5. *Отрезки, на которые биссектриса делит сторону треугольника, относятся друг так же, как прилегающие к ним две другие стороны треугольника.*

На приведенном рисунке это означает, что $c_1/c_2 = b/a$.



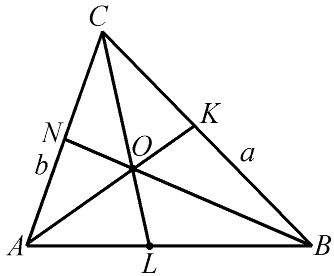
Доказательство. Этот простенький факт имеет множество доказательств. Укажем, что есть и доказательство методом площадей.

По Лемме 1, $\frac{S_{ACL}}{S_{BCL}} = \frac{c_1}{c_2}$. В то же время, обозначив длину биссектрисы через *l*, можно пощади тех же треугольников выразить и по-другому:

$$\frac{S_{ACL}}{S_{BCL}} = \frac{\frac{1}{2} bl \sin\frac{C}{2}}{\frac{1}{2} al \sin\frac{C}{2}} = \frac{b}{a}.$$

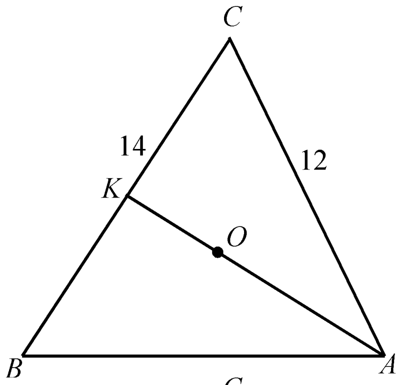
Из чего и следует искомое утверждение.

Отметим ещё, что на пересечении биссектрис находится центр вписанной окружности. А тогда, зная, например, стороны треугольника, мы не только знаем, на какие части концы биссектрис *K*, *N*, *L* делят стороны (тем самым, знаем отрезки *AN*, *NC*, *CK*, *KB*, *BL*, *LA)*, но и положение центра описанной окружности *O* на каждой из биссектрис. Потому что, например, отрезок *CO*, являясь частью биссектрисы *CL*, является биссектрисой и в каждом из треугольников *ACK* и *BCN*. То есть по свойству биссектрисы в каждом из них имеем:

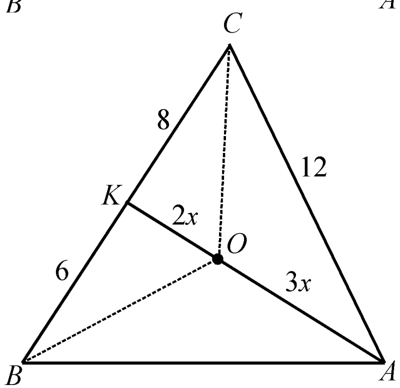


$$\frac{AO}{OK} = \frac{AC}{CK} \text{ и } \frac{BO}{ON} = \frac{CN}{BC}.$$

Опираясь на эти простые соображения, легко решить задачу такого сорта.



Задача 7. *В треугольнике ABC проведена биссектриса AK, которую центр O вписанной окружности делит в отношении* $AO:OK = 3:2$. *Найти сторону AB, если известно, что* $AC = 12$ *и* $BC = 14$.

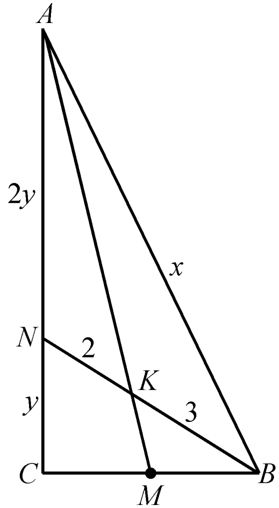


Решение. Проведем отрезки *CO* и *BO*, которые будут биссектрисами соответственно в нижнем и верхнем треугольниках. Тогда, зная отношение отрезков на биссектрисе *AK*, мы знаем, что такое же отношение *CK* : *CA*. То есть, $CK = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$. А оставшаяся часть стороны, отрезок $KB = 6$. Но теперь рассмотрим нижний треугольник *ABK*, в котором биссектриса *BO* делит сторону *AK* в отношении $3:2$, а поэтому $AB = \frac{3}{2} BK = 9$.

Ответ: $AB = 9$.

Как уже упоминалось в начале, приемы, позволяющие находить отношения отрезков, могут приводить не целиком к решению задачи, а относиться лишь к какому-то этапу решения. А далее нужно будет применять и другие соотношения, учитывающие величины отрезков, углов, связывающие их формулы (например, теоремы синусов или косинусов) и тому подобные. Для примера рассмотрим:

Задача 8. *В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB медиана AM пересекает биссектрису BN в точке K. Найти стороны треугольника ABC, если известно, что* $BK = 3$, $KN = 2$.



Решение. Сначала используем заданные данные отношения отрезков на *CB* (где $BM : MC = 1:1$) и на *BN*, чтобы определить позицию *N*. Применив, например, теорему Менелая для треугольника *BCN* и точек *A*, *N*, *K*, запишем: $\frac{CA}{AN}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1} = 1$ (без минуса, ибо берем по модулю), находим, что $CA = \frac{3}{2}AN$. То есть *AN* вдвое больше *NC*, пусть они будут равны y и $2y$. Но тогда, обращаясь к свойству биссектрисы *BN*, заключаем, что так относятся и катет *BC* к гипотенузе *AC*. Если гипотенузу возьмем за *x*, то $BC = x/2$, а значит по Пифагору второй катет $3y = \sqrt{3}/2$. (То есть треугольник классический, $30° - 60° - 90°$, хотя это здесь и не важно). Форма известна, осталось определить масштаб. Для этого нам известна длина $BN = 5$. Пишем теорему Пифагора для треугольника *BNC*:

$$BC^2 + CN^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}x^2 = 25.$$

Откуда $x = 5\sqrt{3}$, а другие стороны $5\sqrt{3}/2$ и $15/2$.

Ответ: $AB = 5\sqrt{3}$; $BC = 5\sqrt{3}/2$; $AC = 15/2$.

Задачи

(1). Дан треугольник *ABC*. На продолжении стороны *AC* за точку *C* взята точка *N* так, что $CN = 2AC$; точка *K* – середина стороны *AB*. В каком отношении прямая *KN* делит сторону *BC*?

(2). Дан треугольник ABC; CP – биссектриса угла C; точка Q лежит на BC, причем $PQ \parallel AC$. Найдите PQ, если $BC = 6$ и $AC = 4$.

(3). Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла C и пересекающая продолжение стороны AC в точке D. Пусть E – середина отрезка BD. Определить, в каком отношении прямая AE делит площадь треугольника ABC, если известно, что $AC = b$, $BC = a$.

(4). В треугольнике ABC стороны $AB = 5$ и $AC = 3$; AK – биссектриса угла A. Из точки K проведена прямая, параллельная AB, до пересечения с AC в точке E. Найдите AE.

(5). В равнобедренном треугольнике ABC, где $AB = BC$, на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 3$. В каком отношении прямая AD делит высоту BH треугольника ABC, считая от вершины B ?

(6). На стороне AB треугольника ABC взята точка P, а на стороне BC – точки M и N так, что $AB = 3AP$, $CM = BN$, $MN = 2BN$. Пусть O – точка пересечения прямых AN и KM. Найдите отношения $AO : ON$ и $PO : OM$.

(7.1). Точки M и L расположены на сторонах AB и BC треугольника ABC, причем $BM : MA = 1 : 4$, $BL : LC = 4 : 3$. Отрезок BK – медиана треугольника. Отрезок ML пересекает BK в точке O. Найдите отношение $BO : OK$.

(7.2). Точка A_1 лежит на стороне BC, а точка B_1 на стороне AC треугольника ABC. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O, причём $AO : OA_1 = 4 : 1$, $BO : OB_1 = 3 : 4$. Найти отношения, в которых точки A_1 и B_1 делят стороны, на которых лежат.

(7.3). Точка K лежит на продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C. Точка E лежит на отрезке BK и делит его в отношении $2 : 1$, считая от B. Отрезок AE пересекает сторону BC в точке D, причём $AD : DE = 5 : 1$. Найти отношения $BD : DC$ и $KC : CA$.

(7.4). Точка M лежит на продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C, а точка N – на продолжении стороны AB за точку B. Отрезки BM и CN своей точкой пересечения делятся в отношениях $3:5$ и $7:2$ соответственно, считая от точек B и C. Найти отношения $CM : AC$ и $BN : AB$.

(8). Точки M и N расположены на сторонах AB и BC треугольника ABC, причем $BM : MA = 4:5$. Прямая MN пересекает прямую AC в точке K и известно, что $MN : NK = 3:5$. В каком отношении точка N делит сторону BC ?

(9). В треугольнике ABC на стороне AB лежит точка U, на стороне BC – точки V и W. Известно, что $3AU = AB$; $BW : WC = 1:3$ и $UV \parallel AC$. Отрезки AW и UV пересекаются в точке O. Найти отношения $AO : OW$ и $UO : OV$.

(10). В треугольнике ABC проведена биссектриса BF, которую центр O вписанной окружности делит в отношении $BO : OF = 2$. Найдите сторону AB, если $AC = 9$, $BC = 7$.

(11). В треугольнике ABC точка K расположена на стороне AC так, что $AK : KC = 5:2$. Точка L расположена на продолжении стороны AB за точку B так, что $BL = AB/2$. В каком отношении сторона BC делит отрезок KL ?

(12). В треугольнике ABC точка K лежит на стороне AC, а точка M на стороне BC расположена так, что $BM : MC = 1:2$. Прямая, проходящая через точку M параллельно стороне AB, пересекает отрезок BK в точке O, причем $BO : OK = 7:3$. Найдите отношение, в котором точка K делит сторону AC.

(13). Высота BH ромба $ABCD$, опущенная на сторону AD, пересекает диагональ AC в точке P. Найдите AP, если известно, что $BL = 8$, $AH : HD = 2:3$.

(14). В треугольнике ABC на стороне AC взяты точки M и N так, что $AM < AN$. Прямые BM и BN делят медиану AD на три части, длины которых относятся как $4:2:3$, считая от точки *A*.. Известно, что $MN = 3$. Найдите *AC*.

(15). В треугольнике *ABC* высота *BH* и медиана *CE* пересекаются в точке *O*. Известно, что расстояние $BO = 4$; $OH = 1$; $CE = 5$. Найдите сторону *AB*.

(16). В треугольнике *ABC* известно, что $AB = 12$, $BC = 8$, $AC = 15$. В каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису угла *A*?

(17). Точки *M* и *N* расположены на стороне *BC* треугольника *ABC*, а точка *K* – на стороне *AC*, причем $BM : MN : NC = 1:1:2$ и $CK : AK = 1:4$. Известно, что площадь треугольника *ABC* равна 1. Найдите площадь четырехугольника *AMNK*.

(18.1). На стороне *AB* треугольника *ABC* взята точка *K*, а на стороне *BC* – точка *L* так, что $CL : LB = 5$. Площади многоугольников *BKL* и *AKLC* относятся как $5:37$. Найти $AK : KB$.

(18.2). Точка *E* расположена на стороне *AC* треугольника *ABC*. Отрезок *BE* пересекает медиану *AD* в точке *O*. Площадь треугольника *AOB* относится к площади четырёхугольника *EODC* как $5:27$. Найти отношение $AE : EC$.

(18.3). Точки *S* и *T* лежат соответственно на сторонах *AC* и *BC* треугольника *ABC*, причём точка *S* делит сторону в отношении $1:4$, считая от точки *A*. Отрезки *AT* и *BS* пересекаются в точке *P* и площадь треугольника *ABP* составляет 1/7 площади *ABC*. В каком отношении точка *T* делит сторону *BC*?

(18.4). Точка *L* лежит на стороне *AC* треугольника *ABC*, и $AL : LC = 1:2$; точка *K* лежит на стороне *BC*. Отрезки *AK* и *BL* пересекаются в точке *O*, и площадь треугольника *BOK* составляет четверть площади треугольника *ABC*. Определить, в каком отношении точка *L* делит сторону *BC*.

(19). В треугольнике ABC через основание P высоты BP параллельно стороне BC проведена прямая, пересекающая AB в точке Q. Найти $AQ:QB$, если площади треугольников BPQ и ABC относятся как $2:9$.

(20). В треугольнике ABC на стороне AC взята точка N, а на стороне BC – точка M. Отрезки AM и BN пересекаются в точке P. Найти площадь треугольника CMN, если площади треугольников APN, APB и BPM равны соответственно 1, 6 и 4.

(21.1). В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M так, что $AM:MB=3:2$, а на стороне AC взята точка N так, что $AN:NC=2:3$. Пусть O – точка пересечения прямых BN и CM. Найти площадь треугольника ABC, если дано, что площадь треугольника AOB равна 4.

(21.2). В треугольнике ABC, площадь которого равна 41, на стороне AB взята точка K так, что $AK:KB=3:4$, а на стороне BC – точка L так, что $BL:LC=2:5$. Точка P пересечения прямых AL и CK отстоит от прямой AB на расстоянии 1. Найти длину стороны AB.

(21.3). В треугольнике ABC, на стороне AB взята точка K так, что $AL=6$; $KB=8$, а на стороне AC взята точка L, делящая эту сторону в отношении $AL:LC=3:2$. Точка O пересечения прямых BL и CK отстоит от прямой AC на расстоянии 3. Вычислить синус угла BAC.

(22.1). Точки M и N на стороне AB треугольника ABC выбраны так, что: $AM:MN:NB=2:1:1$. Точка K на продолжении стороны BC этого треугольника за точку B выбрана так, что $BK:BC=1:2$. Прямые CM и CN пересекают прямую AK в точках S и P соответственно. Найти отношение площади четырёхугольника $MNPS$ к площади треугольника ABC.

(22.2). Точки M и N на стороне AB треугольника ABC выбраны так, что: $AM:MN:NB=3:2:1$. Точка R на продолжении стороны BC этого треугольника за точку B выбрана так, что $BR=BC$. Точка L лежит на стороне BC, и делит её в отношении $1:2$, считая от B.

Прямые CM и LN пересекают прямую AR в точках T и S соответственно. Найти отношение площади четырёхугольника $MNST$ к площади треугольника ABC.

(23). На продолжениях медиан AK, BL, и CM треугольника ABC взяты точки P, Q и R так, что $KP = AK/2$; $LQ = BL/2$; $MR = CM/2$. Найти площадь треугольника PQR, если площадь треугольника ABC равна 1.

(24). Дан треугольник ABC, площадь которого равна 1. На медианах AK, BL и CN взяты соответственно точки P, Q, R так, что $AP:PK = 1$; $BQ:QL = 1/2$ и $CR:RN = 5/4$. Найти площадь треугольника PQR.

(25). В треугольнике ABC угол B прямой, $AB = 5$, $BC = 4$. Точка D лежит на стороне AC, M и N – точки пересечения медиан, соответственно, в треугольниках ABD и DBC. Найдите площадь треугольника BMN.

(26). В треугольнике ABC проведены медиана BD и биссектриса CL, которые пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через вершину A и точку P, пересекает сторону BC в точке K. Найти длины отрезков CK и KB, если известно, что $BC = 3$, $AC = 5$.

(27.1). В прямоугольном треугольнике ABC точка M делит гипотенузу AC в отношении $1:3$, считая от вершины A. Известно, что отрезок BM пересекает биссектрису AN в точке K так, что $AK = 3$, $KN = 1$. Найти стороны треугольника ABC.

(27.2). В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB точка N делит катет AC в отношении $2:1$, считая от вершины A. Известно, что отрезок BN пересекает биссектрису AM в точке K так, что $AK = 9$, $KM = 4$. Найти стороны треугольника ABC.

(28). В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника $KCDL$ равна 5.

(29). В равнобедренном треугольнике ABC через вершины основания B и C и середину высоты проведены прямые CD и BE. Определить площадь треугольника CED, если площадь треугольника ABC равна 27.

(30). В треугольнике ABC, $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 12$. Биссектрисы AK и BL пересекаются в точке P. Найдите PK.

(31). В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = 15$, $AC = 12$) вписан параллелограмм $ANPS$ так, что угол A у них общий, а вершина P лежит на стороне BC. Найти отношение площади параллелограмма к площади треугольника, если $AN : NP = 5 : 8$.

(32). На сторонах AD и DC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $AN : ND = 2 : 3$, $DM : MC = 3 : 4$. Отрезки BM и CN пересекаются в точке O. Найдите отношение $OM : OB$.

(33). В параллелограмме $ABCD$ точки E И F лежат соответственно на сторонах AB и BC, M - точка пересечения прямых AF и DE, причем $AE = 2BE$, $BF = 2CF$. Найдите отношение $AM : MF$.

(34). В параллелограмме $ABCD$ площади S вершины A, B, C, D соединены с серединами сторон CD, AD, AB и BC соответственно. Найти площадь четырехугольника, образованного этими прямыми.

(35.1). Каждая вершина параллелограмма площади S соединена с серединами противоположных ей сторон. Найти площадь восьмиугольника, образованного этими прямыми.

(35.2). На каждой стороне параллелограмма $ABCD$ расположены по две точки, которые делят эту сторону на три равных отрезка. На стороне AB точки D' и C'', $AD' = D'C'' = C''B$. На стороне BC – точки A' и D'', $BA' = A'D'' = D''C$. На стороне CD – точки B' и A'', $CB' = B'A'' = A''D$. И на стороне DA точки C' и B'', $DC' = C'B'' = B''A$. Определить, какую часть площади исходного параллелограмма $ABCD$ занимает восьмиугольник, образованный прямыми AA', AA'', BB, BB'', CC', CC'', DD', DD''.

(35.3). Точка M – середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Точка L лежит на стороне AD. В каком отношении точка L делит сторону AD, если известно, что площадь четырёхугольника, образованного прямыми AM, MD, CL, LB составляет $23/110$ от площади параллелограмма $ABCD$?

(35.4). Точки M и N лежат на стороне BC параллелограмма $ABCD$; $BM = MN = NC$. Точка K лежит на стороне AD. В каком отношении точка K должна делить сторону AD, чтобы прямая CK делила площадь четырёхугольника $AMND$ в отношении $36:49$?

(36). В параллелограмме $ABCD$ точки E и F лежат соответственно на сторонах AB и BC, M – точка пересечения прямых AF и PE, причем $AE = 2BE$, $BF = 3CF$. Найдите отношение $AM : MF$.

(37). На сторонах AB, BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K, M и L таким образом, что $AK : KB = 2:1$, $BM : MC = 1:1$, $AL : LD = 1:3$. Найдите отношение площадей треугольников KBL и BML.

(38). Точка T лежит на стороне AB, а точка S – на стороне BC параллелограмма $ABCD$, $BT = BA/3$; $BS = BC/3$. Отрезок AS пересекает отрезки TD и TC в точках M и N соответственно, отрезки SD и TC пересекаются в точке K. Найти отношение площади четырёхугольника $MNKD$ к площади исходного параллелограмма.

(39). В ромбе $ABCD$ со стороной a угол при вершине A равен $\pi/3$. Точки E и F являются серединами сторон AB и CD соответственно. Точка K лежит на стороне BC, отрезки AK и EF пересекаются в точке M. Найти длину отрезка MK, если известно, что площадь четырёхугольника $MKCF$ составляет 3/8 площади параллелограмма $ABCD$.

(40). На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 1, взяты точки: P – на AB, Q – на BC, S – на CD, T – на AD. При этом $AP : PB = 1:2$; $BQ : QC = 1$; $CS : SD = 1:8$; $DT : TA = 5$. Найти площадь шестиугольника $PBQSDT$.

(41). A, B, C, D – последовательные вершины параллелограмма. Точки E, F, P, H лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD; $AE = AB/3$; $BE = BC/3$, а точки P и H делят пополам стороны, которых они лежат. Найти отношение площадей четырёхугольников $EFPH$ и $ABCD$.

(42.1). На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны соответственно точки M и N. Прямые BN и AM пересекаются в точке K, при этом $KN = 3BK$, $DN = 2CN$. Найти отношение $BM : MC$.

(42.2). Точки M и N выбраны соответственно на основании BC и боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Прямые AM и BN пересекаются в точке K, причем $AK = 3KM$, $KN = 2BK$. Найти отношение $CN : ND$.

(42.3). Основания BC и AD трапеции $ABCD$ таковы, что $AD = 3BC$. На сторонах AB и CD выбраны соответственно точки M и N так, что $BM = 2AM$ и прямая MN делит площадь трапеции пополам. Найти отношение $CN : ND$.

(42.4). На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M и N. Прямые AM и BN пересекаются в точке K, причем $BK = 2KN$, $AK = 3KM$. Найти отношение $BM : MC$.

(43). Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найти площадь четырехугольника $OMCD$.

(44). В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B перпендикулярна боковой стороне AD и пересекает ее в точке E. В каком отношении прямая BE делит площадь трапеции, если известно, что $AE = 2DE$?

(45.1). Внутри ромба $ABCD$ со стороной a и углом BAD в 60° выбрана точка P так, что площади треугольников ADP, ABP, BCP и CDP пропорциональны числам 1, 2, 5 и 4 соответственно. Найти расстояние от точки P до вершины A.

(45.2). Вне равностороннего треугольника ABC со стороной a выбрана точка P так, что отрезок AP пересекает сторону BC, а площади треугольников ABP, ACP и BCP пропорциональны числам 4, 5 и 3 соответственно. Найти длину отрезка AP.

(45.3). Вне ромба $ABCD$ со стороной a и углом BAD в 60° выбрана точка K так, что отрезки AK и DK пересекают сторону BC, а площади треугольников ABK, BCK, CDK и ADK пропорциональны числам 5, 1, 3 и 7 соответственно. Найти длину отрезка AK.

(45.4). Внутри равностороннего треугольника ABC со стороной a выбрана точка K так, что площади треугольников ABK, ACK и BCK пропорциональны числам 1, 3 и 5 соответственно. Найти длину отрезка AK.

(46). В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AD = 4$ и $AB = 3$ проведен отрезок MN, соединяющий точку M стороны BC с точкой N стороны CD. Точки M и N выбраны так, что $BM : MC = 1 : 3$, $CN : NE = 2 : 1$. Известно, что точка E пересечения диагонали AC с отрезком MN удовлетворяет условию $ME : EN = 5 : 4$. Найти диагонали параллелограмма.

(47.1). Площадь трапеции $ABCD$ равна 30; основание AD вдвое больше основания BC. Точка P – середина стороны AB, точка R лежит на стороне CD; $RD = 2RC$. Отрезки AR и DP пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника APQ.

(47.2). Площадь трапеции $ABCD$ равна 64; основание AD втрое больше основания BC. Точка K – середина стороны AB, точка L лежит на стороне CD; $CL = 2LD$. Отрезки AL и DK пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника ADQ.

(48.1). Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно, отрезки AN и FM пересекаются в точке P. Найти длину отрезка NP.

(48.2). Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно, отрезки AN и EM пересекаются в точке P. Найти длину отрезка NP.

(48.3). Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Точки M и N – середины сторон BC и DE соответственно, отрезки AM и BN пересекаются в точке P. Найти длину отрезка NP.

(48.4).. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно, отрезки AN и EM пересекаются в точке P. Найти длину отрезка NP.

(49.1). В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC – стороне AE, причем $AB:DE=8:5$, $BC:AE=2:3$. Найти площадь треугольника ACD, если площадь четырехугольника $BCDE$ равна 21.

(49.2). В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC – стороне AE, причем $AB:DE=7:2$, $BC:AE=3:4$. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$, если площадь треугольника ACD равна 22.

(49.3). В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC – стороне AE, причем $AB:DE=9:4$, $BC:AE=1:4$. Найти площадь треугольника ACD, если площадь пятиугольника $ABCDE$ равна 57.

(49.4). В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC – стороне AE, причем $AB:DE=7:5$, $BC:AE=3:5$. Найти площадь четырехугольника $BCDE$, если площадь треугольника ACD равна 20.

(50). В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $CD=2AB$. На сторонах AP и BC выбраны точки P и Q соответственно так, что $DP:PA=2$, $BQ:QC=3:4$. Найдите отношение площадей четырехугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

(51). В ромбе $ABCD$ высоты BP и BQ пересекают диагональ AC в точках M и N (M между A и N), $AM = 7$, $MN = 3$. Найдите PQ.

(52). Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ равна 48, а площадь треугольника AOB, где O – точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найдите отношение оснований $AD : BC$.

(53). Точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и BC квадрата $ABCD$, причем $AM : MB = 3 : 2$, $BN : NC = 4 : 3$. Найти отношение $MO : OD$, где O – точка пересечения отрезков MD и AN.

Ответы

(1). $3:2$ от B.

(2). 2,4.

(3). $(a+b):b$.

(4). $15/8$.

(5). $2:3$.

(6). $3:4$ и $1:6$.

(7.1). $1:5$.

(7.2). $BA_1 : A_1C = 2:5$;
$AB_1 : B_1C = 8:7$.

(7.3).
$BD : DC = 13:5$;
$KC : CA = 3:10$.

(7.4).
$CM : AC = 29:27$;
$BN : AB = 29:16$.

(8). $47:25$ от B.

(9). $4:5$ и $1:5$.

(10). 11.

(11). $4:7$ от K.

(12). $10:11$ от A.

(13). $\frac{2}{7}\sqrt{113}$.

(14). 14.

(15). $2\sqrt{219}/5$.

(16). $27:8$ от A.

(17). $13/20$.

(18.1). $2:5$.

(18.2). $1:9$.

(18.3). $BT : TC = 1:4$.

(18.4). $1:1$.

(19). $1:2$ или $2:1$.

(20). $35/44$.

(21.1). 14.

(21.2). 12.

(21.3). $13/14$.

(22.1). $3:20$.

(22.2). $8:27$.

(23). $25/16$.

(24). $1/12$.

(25). $20/9$.

(26). $CK = 15/8$;
$BK = 9/8$.

(27.1). $AB = 3$;
$AC = 24$;
$BC = 9\sqrt{7}$.

(27.2). $AB = 78$;
$AC = 39/4$;
$BC = 17\sqrt{7}/4$.

(28). 15.

(29). 6.

(30). $2\sqrt{2}$.

(31). $4:9$.

(32). $12:35$.

(33). $5:6$.

(34). $S/5$.

(35.1). $S/6$.

(35.2). $1/3$.

(35.3). $1:7$.

(35.4). $1:4$ от A.

(36). $4:5$.

(37). $1:6$.

(38). $9/44$.

(39). $a\sqrt{13}/6$.

(40). $17/18$.

(41). $37/72$.

(42.1). $3:8$.

(42.2). $3:1$.

(42.3). $4:3$.

(42.4). $5:4$.

(43). $5/12$.

(44). $7:8$.

(45.1). $a\sqrt{7}/6$.

(45.2). $a\sqrt{61}/9$

(45.3). $a\sqrt{61}/8$.

(45.4). $a\sqrt{13}/9$.

(46). $AC=\sqrt{33}$; $BD=\sqrt{17}$.

(47.1). $10/3$.

(47.2). $144/13$.

(48.1). $7\sqrt{13}/26$.

(48.2). $9\sqrt{13}/26$.

(48.3). $9\sqrt{13}/22$.

(48.4). $7\sqrt{7}/22$.

(49.1). 14.

(49.2). 51.

(49.3). 32.

(49.4). 31.

(50). $19:44$.

(51). $51/10$.

(52). 3.

(53). $12:35$.

Методическое пособие

Воронин Владислав Владимирович

Отношения отрезков и площадей

Верстка Т. В. Иванова
Графические работы А. Г. Иванов

Подписано в печать 26.05.2016	Формат 60x84 1/16
Заказ	Усл. печ. л. 2,3
	Уч. изд. л. 2,9
	Тираж 100 экз.

Специализированный учебно-научный центр НГУ,
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК