Степенные и показательные функции[1]

А.А. Никитин, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, М.Г. Пащенко

Аксиоматический подход в построении математических теорий, элементы которого начали зарождаться много тысячелетий назад, в настоящее время общепризнан, и является мощным инструментом в изучении наиболее общих свойств многочисленных структур. Непротиворечивая система аксиом и правила вывода всегда гарантируют однозначность выводов относительно свойств математических объектов и не допускают двусмысленности в истолковании окончательных результатов, чего и следует добиваться. Присущие аксиоматическому подходу особенности применяются во многих ситуациях. В частности, формулируя некоторое определение, мы тем самым стремимся, в определенном смысле аксиоматически, установить конкретное соответствие между указываемыми в определении свойствами и обладающими этими свойствами объектами. В частности, элементы аксиоматического подхода имеют отношение к заданию числовых функций или, в общем виде, к заданию отображений одного множества в другое.

Понятие отображения или функциональной зависимости является одним из всеобъемлющих понятий математики и имеет одну существенную особенность. Суть в том, что задание отображения предполагает одновременное задание его области определения, области значений и правила, по которому однозначно находятся образы элементов из области определения. На уровне школьного математического образования в основном ограничиваются числовыми функциональными зависимостями, точнее, функциями от одной действительной переменной величины. При этом область значений чаще всего в неявном виде предполагается как множество R действительных чисел. Однако область определения числовой функции требует особого задания. Последнее обстоятельство в школьном математическом образовании часто теряется. Почему так происходит, объяснить несложно. Дело в том, что изучение числовых функций ведется на протяжении длительного промежутка времени, и начальные примеры чаще всего относятся к функциям, значения которых вычисляются по формулам, заданным в виде некоторого выражения от переменной величины. В связи с этим значения функции считают определенными тогда, когда «выражение имеет смысл». Это создает иллюзию, что при задании функции требуется только вычислять ее значения. Тем самым термин «область определения функции» подменяют совершенно другим, который точно следует называть как «естественная область определения функции», то есть множество всех значений независимой переменной, при каждом из которых по указанному выражению можно вычислить значение этого выражения. В определенной степени в таком подходе нет ничего плохого, но при этом целесообразно сформулировать и принять общее соглашение о том, что если числовая функция задается с помощью формулы, и при этом явно ее область определения не указывается, то под ее областью определения понимают множество всех чисел, при которых по этой формуле можно вычислить соответственное значение. Таким образом, чаще всего областью определения числовой функции считается ее естественная область определения этой функции, за исключением тех случаев, когда область определения указывается непосредственно в явном виде. Такое часто необходимо, например, на этапе изучения обратных функций. В случаях, когда рассматриваемая функция не удовлетворя-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (грант № 07-06-00764а)

ет условию обратимости, чаще всего строят ассоциированную с ней функцию за счет изменения области определения основной функции. Это приходится наблюдать, когда рассматриваются функции $f(x)=x^2$, $f(x)=\sin x$, и т.д. с целью построения на их основе обратных функций.

До определенного момента принимать за область определения числовой функции ее естественную область определения – это вполне нормальный подход, при котором можно ставить и решать множество содержательных задач. Однако с определенного момента требуется существенно изменять такое отношение к числовым функциям, считая задание области определения функции важнейшим элементом задания всей функции. По объективным причинам в школьном курсе математики одним из таких моментов является переход к обобщению степенных функций на случай функций с произвольным действительным показателем и введение показательных и логарифмических функций.

Традиционно степенные функции вида $f(x)=x^n$ при заданном целом положительном значении n считают определенными на всей числовой прямой, так как при каждом значении переменной по формуле можно вычислить соответствующее значение функции. При заданном целом отрицательном значении n ситуация частично изменяется, и такую функцию считают определенной на множестве $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$, то есть на своей естественной области определения.

Дальнейшее продвижение в задании степенных функций связано с достаточно длинным промежуточным этапом, когда вводится понятие корня. Напомним, что здесь приходится решать целый ряд проблем. Прежде всего, при натуральном значении n корень n-й степени из числа x определяется как число, n-я степень которого равна x. Такое определение приводит к тому, что имеется существенное различие между корнями четной и нечетной степени. При нечетных n корень n-й степени однозначно определен при каждом действительном x. Это позволяет при каждом $x\in R$ обозначить значком $\sqrt[3]{x}$ единственное действительное число, куб которого равен x, и аналогично при других нечетных значениях n.

Совсем другое наблюдается при четных значениях показателя n. Например, при $n=2$ имеем корень второй степени, то есть корень квадратный, который определен только при неотрицательных x, причем, при положительных x существует два значения, удовлетворяющих определению квадратного корня. Выход из этой ситуации реализуется по принципам аксиоматики: по определению вводится еще одно понятие арифметического квадратного корня из неотрицательного числа. В соответствии с этим, при $x\geq 0$ через $\sqrt{x}$ обозначают неотрицательное число, квадрат которого равен x.

Поясним, почему следует считать такое решение аксиоматическим, принятым в соответствии с формальными договоренностями. В принципе, на этапе выбора одного из двух значений квадратного корня из положительного числа имеется возможность выбирать в качестве приоритетного отрицательное значение корня, вместо положительного, и именно его называть «квадратный корень» и обозначать некоторым особым значком. В таком случае также возникает вполне содержательная теория «квадратных корней», которую можно строить по схемам, аналогичным принятым, но с некоторыми принципиальными отличиями. Например, в этом случае «квадратный корень» из произведения трех положительных чисел равен произведению «квадратных корней» из каждого из них, но «квадратный корень» из произведения двух положительных чисел уже не равен произведению «квадратных корней» из каждого из них.

Аналогично понятию арифметического квадратного корня вводится понятие арифметического корня при других четных значениях n, которое также обозначается с помощью знака радикала.

Особо отметим, что понятие корня определяется только при натуральных значениях степени, поэтому всякие записи типа $\sqrt[x]{x}$ определены только при натуральных x. Более того, считать корни первой степени из числа определенными, или не считать, также зависит от договоренностей, то есть также относится к аксиоматике. Особой разницы между этими двумя подходами нет, хотя записи вида $\sqrt[1]{3}$ очень непривычны, и в литературе, если и встречаются, то крайне редко.

Одновременно с изучением корней рассматриваются также функции вида $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, и т.д. Ориентируясь на их естественные области определения, выявляется существенное различие между корнями четной и нечетной степени. А именно, при нечетных значениях n естественной областью определения функции $f(x)=\sqrt[n]{x}$ является вся числовая прямая, но при четных значениях n такая функция определена только на множестве $\left[0;\infty\right)$. В результате на этом этапе выявляются некоторые принципиальные различия между похожими по записи функциями.

Освоившись с понятием корня, делают очередной шаг на пути обобщения степенных функций. Прежде чем это сделать, важно понять, чего мы хотим иметь для выражений вида x^{α}, где α является не целым рациональным числом. И вполне естественным является требование, чтобы для них выполнялись свойства степеней, какие имеют место для степеней с целыми показателями. Отсюда следует, что целесообразно иметь свойство $(x^{\frac{1}{n}})^n=x^1=x$, а поэтому значение $x^{\frac{1}{n}}$ для числа x должно соответствовать определению корня n-й степени из числа x. Далее, определение $x^{\frac{m}{n}}$ должно соответствовать равенству $x^{\frac{m}{n}}=(x^{\frac{1}{n}})^m$. Наконец, пусть, например, $\alpha=\dfrac{1}{3}$. Но тогда имеет место и равенство $\alpha=\dfrac{2}{6}$. Поэтому одновременно желательно иметь равенства $x^{\alpha}=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ и $x^{\alpha}=x^{\frac{2}{6}}=(x^{\frac{1}{6}})^2$. Отсюда следует, что из соображений целесообразности число $x^{\frac{1}{3}}$ следует рассматривать только при неотрицательных x, несмотря на то, что значение $\sqrt[3]{x}$ можно определять как при неотрицательных, так и при отрицательных x. Наконец, определение $x^{\frac{-m}{n}}$ при натуральных n и m должно соответствовать равенству $x^{\frac{-m}{n}}=(x^{\frac{m}{n}})^{-1}$, а это означает, что при $x=0$ правая часть в данном случае не определена. С учетом приведенных обстоятельств выражение $x^{\frac{m}{n}}$ следует определять как $(\sqrt[n]{x})^m$ только при неотрицательных x, когда n и m натуральные числа, и только при положительных x, когда n натуральное и m целое отрицательное число. При определении функций вида $f(x)=x^{\alpha}$, где α является рациональным числом, следует сразу универсально задавать их область определения, в соответствии с общим подходом к числовым функциям. Исходя из вышесказанного, область определения функций вида $f(x)=x^{\alpha}$ при положительных α целесообразно задавать аксиоматически в виде множества $[0; \infty)$, при отрицательных α – в виде множества $(0; \infty)$. Естественно, что при таком подходе функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ и $g(x)=x^{\frac{1}{3}}$ следует считать разными функциями из-за различия их областей определения. Однако это нисколько не мешает использовать естественное равенство $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, справедливое на пересечении их областей определения, то есть на множестве $[0; \infty)$. Аналогично разными следует считать функции $f(x)=\sqrt[5]{x}$ и $g(x)=x^{\frac{1}{5}}$, и т.д. В этом, конечно имеется некоторое неудобство, но преимущества от намеченного подхода значительно превосходят недостатки. Такой подход позволяет оставить в стороне многие вопросы, служащие объектом постоянных дискуссий, которые иногда ведутся вокруг понятия степени числа, степенных и показательных функций.

Дальнейшее обобщение понятия x^{α} при $x>0$ на случай произвольного действительного показателя требует более глубоко знакомства с математическим анализом, чем предусмотрено в школьном курсе математики. По этой причине в школьном курсе обобщение понятия степени в полном объеме и с необходимыми обоснованиями не рассматривается, а только поясняется на основе наглядного восприятия предельного перехода. Обобщение степени числа далее служит основой для введения и изучения показательных функций, определяемых на всей числовой прямой, значения которых вычисляются по правилу $f(x)=a^x$, где $a>0$ и $a\neq 1$.

В принципе, можно рассматривать также всюду определенную функцию вида $f(x)=1^x$, но это все равно, что рассматривать постоянную функцию, принимающую всюду значение 1.

Попытки вводить по аналогии функцию $f(x)=0^x$ в принципе возможны, но это упирается в непростую проблему, как относиться к выражению вида 0^0. По этим причинам такую функцию обычно не затрагивают.

Обобщение понятия степени числа позволяет рассматривать выражения вида $f(x)^{g(x)}$. В связи с этим возникает проблема, как понимать область определения такого выражения. В этом направлении существует два подхода.

Первый подход основан на понятии естественной области определения функции, значения которой вычисляются по указанной формуле. Однако именно при таком подходе возникают крупные проблемы, допускающие неоднозначное истолкование некоторых задач, и т.д. Например, тогда при нахождении естественной области определения функции $f(x)=x^{4x}$ следует рассматривать не только положительные, но и отрицательные значения переменной. Если при этом ориентироваться только на целые отрицательные показатели степени, то итогом работы будет множество $\left\{x=-\frac{m}{4},\ m\in N\right\}\cup(0;\infty)$. Вряд ли кто изначально готов представлять область определения данной функции в такой неочевидной форме. Если понятие дробной степени числа интерпретировать в виде $x^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{x})^m$, то в этом случае ситуация еще более усложнятся, как будет показано в дальнейшем.

Второй подход к заданию области определения функций вида $h(x)=f(x)^{g(x)}$ аксиоматический. В этом случае по определению считаем одним из требований для области определения указанных функций выполнение условия $f(x)>0$.

Авторы считают, что для школьного математического образования наиболее целесообразным является указанный аксиоматический подход к заданию области определения функций вида $h(x) = f(x)^{g(x)}$ Прежде всего, это гораздо проще, чем разбираться с естественными областями определения таких сложных выражений. Далее, при таком подходе имеет смысл тождественное равенство $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$, которое имеет важное значение для математического анализа, например, при вычислении производных и исследовании функций данного вида. Наконец, такой аксиоматический подход позволяет раз и навсегда оставить в стороне многие спорные вопросы, которые часто возникают вокруг понятия степени числа.

Очень часто при общении с учителями математики возникают вопросы, относящиеся к решению уравнений и неравенств, содержащих переменные величины в основаниях и показателях степеней. Особые дискуссии развертываются, например, относительно решения уравнений вида $x^{2x} = 1$. В самом деле, подставляя в левую часть этого уравнения значения $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, получаем верные числовые равенства $1^2 = 1$ и $(-1)^{-2} = 1$. В результате вполне естественно возникает вопрос, как в этом случае относиться к числу $x_2 = -1$, считать его корнем рассматриваемого уравнения, или нет.

Ответ на этот вопрос в значительной степени относится к правильному пониманию понятия уравнения, и какой смысл содержит в себе задание: «Решить уравнение». Для этого нужно рассмотреть данный вопрос с общематематических позиций. Прежде всего, запись самого уравнения – это предикат, зависящий от переменной величины, значения которой принадлежат указанному множеству – области задания предиката. Соответственно, при подстановке в этот предикат конкретного значения переменной возникает высказывание в виде равенства, которое может быть либо истинным, либо ложным. Отсюда следует, что задача на решение уравнения означает нахождение множества всех значений переменной из области задания данного предиката, при которых значение предиката истинно. Иногда в этом случае говорят, что нужно найти область истинности предиката. Когда область истинности предиката, представляющего уравнение, пустое множество, чаще всего говорят, что уравнение не имеет решений. Понятно, что представлять в школьном курсе математики такой подход к уравнению и трудно, и, вообще говоря, вредно, потому что до осознанного восприятия формальных подходов учащихся нужно в течение длительного времени готовить к этому на основе доступных и наглядных моделей. По отношению к уравнениям такое моделирование должно отражать два принципиальных момента.

Первый момент. Задание уравнения всегда предполагает и задание того множества (в явной или неявной форме), среди которых ищутся решения уравнения. Например, если мы формулируем задачу: «Решить уравнение $x^2 + 1 = 0$», то без указания того множества, в котором ищутся решения, задача становится некорректной. В самом деле, если требуется найти решения из множества действительных чисел, то таких решений нет, а если из множества комплексных чисел, – то получаются два корня.

Второй момент. Можно всегда подставить в уравнение вместо переменной любое конкретное значение. Однако возникающая при этом запись в виде числового равенства может быть либо истинной, либо ложной, то есть по объективным причинам приходится говорить об истинности, либо ложности формулируемого утверждения.

Частично в школьном курсе математике идеология учета множества чисел, среди которых ищется решение уравнения, отражена, потому что изучается такое понятие как область определения уравнения (более точно – область определения обеих частей уравнения). Современные школьники в основном хорошо представляют, что нарушение условий области определения – это серьезная логическая ошибка. Таким образом, учащиеся в течение нескольких лет привыкают к тому, что нужно учитывать область определения. Отсюда следует, что одним из важных этапов решения уравнения $x^{2x}=1$ является указание области определения его левой части. После этого можно выполнять некоторые преобразования, и т.д.

В соответствии с изложенной выше идеологией при указанном аксиоматическом подходе мы обязаны изначально накладывать условие $x>0$ на область определения левой части уравнения, а поэтому указанное ранее число $x_2=-1$ корнем данного уравнения не является, как не входящее в область определения.

Приведенное в последнем абзаце рассуждение можно считать чисто аксиоматическим подходом. Дело в том, что здесь обнаруживается крупное расхождение с распространенным подходом к определению корня уравнения. А именно, корнем уравнения называют число, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство. В этом определении все хорошо, за исключением одного принципиального момента, о котором говорилось выше: число должно быть из указанного множества. В частности, нужно учитывать область определения.

В итоге, при решении уравнения $x^{2x}=1$ объективно возникает вопрос относительно области определения, который в данном случае, как показано выше, также требует особого внимания.

Рассмотрим теперь, к чему может приводить отход от идеологии аксиоматического задания области определения выражения вида $f(x)^{g(x)}$. Начнем с того, что если число $x_2=-1$ считать корнем уравнения $x^{2x}=1$, то аналогично следует поступать и в других задачах на решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестные в основаниях и показателях степеней. К чему это может приводить, продемонстрируем на примере неравенства $x^{2x^2-5x+2}>1$, который ранее был приведен в статье [1].

Известно, что при общепринятом подходе к решению неравенств такого вида обычно сразу полагают, что $x>0$. С учетом такого условия один из способов решения неравенства основан на преобразовании неравенства к виду $x^{2x^2-5x+2}>x^0$ и переборе случаев.

I. Пусть $x>1$. Тогда $2x^2-5x+2>0$. Решая это квадратное неравенство, получаем множество $(-\infty;\frac{1}{2})\bigcup(2;\infty)$. Выбирая из этого множества $x>1$, находим одну часть множества корней – промежуток $(2;\infty)$.

II. Пусть $x=1$. Тогда при подстановке в неравенство получаем $1^{-1}>1$, что неверно. Следовательно, $x=1$ не является корнем заданного неравенства.

III. Пусть $0<x<1$. Тогда $2x^2-5x+2<0$. Множество корней этого квадратного неравенства – промежуток $(\frac{1}{2};2)$. Выбирая из этого множества $0<x<1$, находим еще одну часть множества корней – промежуток $(\frac{1}{2};1)$.

Окончательно получается следующий ответ: $(\frac{1}{2};1)\bigcup(2;\infty)$.

Посмотрим, к чему приводит попытка перехода на понимание области определения левой части неравенства как множества всех значений переменной, при которых левая часть «имеет смысл». Тогда, помимо положительных значений переменной, нужно перебрать и отрицательные значения x.

Сначала рассмотрим такие отрицательные значения x, для которых число $m = 2x^2 - 5x + 2$ является целым. Чтобы найти соответствующие каждому целому числу m отрицательные x, достаточно решить уравнение $2x^2 - 5x + 2 = m$. Ясно, что при $m \le 2$ отрицательных корней нет, а при $m > 2$ имеется один отрицательный корень $x_m = \dfrac{5 - \sqrt{9 + 8m}}{4}$. Далее, если число m нечетно, то x_m^m отрицательное число, а поэтому не может быть больше 1. Когда число m четно, то $x_m^m = |x_m|^m$. Так как при этом число m положительно, то неравенство $|x_m|^m > 1$ выполняется при условии $|x_m| > 1$, что при отрицательных x_m соответствует условию $x_m < -1$. Решая неравенство $\dfrac{5 - \sqrt{9 + 8m}}{4} < -1$, получаем $m > 9$. Таким образом, вычисляя числа $x_m = \dfrac{5 - \sqrt{9 + 8m}}{4}$ при $m = 10$, 12, 14, и т.д., каждый раз получаем, что $x_m^m > 1$. Например, $x_{10} = \dfrac{5 - \sqrt{89}}{4}$ отрицательно, но $x_{10}^{10} > 1$.

В результате имеем, что если при решении рассматриваемого неравенства допускать отрицательные значения основания степени при целых четных показателях, то к найденному ранее ответу следует добавлять, вообще говоря, «странные» указанные корни x_m.

Ситуация становится еще более неожиданной, если степень числа x с рациональным показателем $\frac{p}{q}$ интерпретировать в виде $(\sqrt[q]{x})^p$, предполагая, что дробь $\frac{p}{q}$ несократима, имеет положительный знаменатель, и что корень нечетной степени существует при любых действительных значениях x. В этом случае, аналогично предыдущему, для каждого числа $r = \frac{p}{q}$ можно составить и решить уравнение $2x^2 - 5x + 2 = r$. Тогда если $r = \dfrac{2a}{2b+1}$, где a и b – натуральные числа, и $r > 9$, то число $x_r = \dfrac{5 - \sqrt{9 + 8r}}{4}$ отрицательно, по модулю больше 1, и поэтому $x_r^{2a} > 1$, откуда следует, что $\sqrt[2b+1]{x_r^{2a}} > 1$. Таким образом, если допускать указанное выше истолкование степени с рациональным показателем, то к найденному перед этим множеству корней неравенства $x^{2x^2 - 5x + 2} > 1$ следует добавлять также числа x_r указанного вида. Множество $F = \left\{ \dfrac{5 - \sqrt{9 + 8r}}{4}; r = \dfrac{2a}{2b+1}, a, b \in N, r > 9 \right\}$ является всюду плотным подмножеством промежутка $(-\infty; -1)$, и при этом дополнение $(-\infty; -1) \setminus F$ также всюду плотно на промежутке $(-\infty; -1)$.

Этот пример наглядно демонстрирует, что отход от приведенных ранее требований к аксиоматическому заданию области определения выражений вида $f(x)^{g(x)}$ может приводить к совершенно неожиданным эффектам. Более того, если в таких случаях допускать возможность отрицательности основания степени, то тогда следует считать, что многие из неравенств мы никогда верно не решали. Такое обстоятельство, как говорится, признавать очень и очень неприятно. Чтобы исключить подобное, следует четко придерживаться тех соглашений (определений), которые в школьном курсе математики относительно радикалов, степенных и показательных функций должны приводить к однозначному истолкованию, соответствующему приведенному в данной статье.

В начальной и средней школе на протяжении многих лет формируется понятие числа: сначала натуральные числа, затем целые и рациональные числа, и после этого вещественные или действительные числа. Как только становится известным понятие действительного числа, при записи уравнений, неравенств, систем уравнений или неравенств всегда неявно предполагается, что решения этих задач следует искать в области действительных чисел. Однако для практических задач довольно часто требуются не все действительные корни уравнений или неравенств, а только те, которые принадлежат нужной числовой области, например, области натуральных чисел. Таким образом, иногда естественно возникают задачи на нахождение корней уравнений или неравенств в заданной числовой области. Нетрудно понять, что, рассматривая одно и то же уравнение в разных числовых областях, можно получить разные множества корней. При этом могут возникать также совершенно неожиданные эффекты.

В качестве примера вернемся к рассмотренному ранее уравнению $x^{2x}=1$. Рассматривая это уравнение в области R действительных чисел с учетом принятых условий относительно области определения выражения x^{2x} приходим к тому, что множество корней этого уравнения состоит из одного числа $x_1=1$. Если же это уравнение рассматривать в меньшей области Z целых чисел и поставить задачу найти все целые x, удовлетворяющие уравнению $x^{2x}=1$, то уже два числа $x_1=1$ и $x_2=-1$ следует считать его корнями. Таким образом, для одного и того же уравнения $x^{2x}=1$ ищем корни сначала на множестве R, а затем на части множества R, и в итоге на части множества R получаем больше корней, чем на всем множестве R.

Здесь попутно хочется обратить внимание на то, что функции $f(x)=x^{2x}$ и $g(x)=(x^2)^x$ являются различными, так как имеют разные области определения: первая их них определена на множестве $\left(0;\infty\right)$, а другая – на множестве $\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;\infty\right)$. В результате, например, переход от уравнения $x^{2x}=1$ к уравнению $(x^2)^x=1$ является ошибочным, поскольку соответствующее свойство показательной функции справедливо только при положительном значении основания.

Рассмотренный в статье аксиоматический подход к заданию областей определения функций позволяет снять многие проблемы, аналогичные указанным выше, которые в принципе могут возникать при решении уравнений, содержащих неизвестные в основаниях и показателях степеней. В практике вступительных экзаменов иногда возникают уравнения, подобные уравнению $(\sin x)^{\cos x}=1$. В этом случае, в соответствии с аксиоматическим подходом, выражение $(\sin x)^{\cos x}$ следует считать определенным при $\sin x>0$. С учетом этого условия и равенства $1=(\sin x)^0$ далее для верного решения уравнения можно рассмотреть два случая.

I. $\sin x=1$. В этом случае значение $\cos x$ может быть любым. В итоге получаем корни $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где k произвольное целое число.

II. $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$. Эта система имеет те же корни, которые найдены в первом случае.

В результате перебора получаем тот ответ, который и следует считать ответом на поставленную задачу.

Дополнительные рассуждения типа того, что при подстановке в уравнение значений $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ получается верное равенство $(-1)^0 = 1$, следует считать не имеющими отношения к данной задаче, потому что $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$, не принадлежат области определения функции $\varphi(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

Подведем некоторые итоги. Прежде всего, решение математических задач всегда основывается на аксиоматически принятых положениях и следствиях из них, то есть на тех определениях, формулах и теоремах, которые составляют содержание курса математики. Далее, запись уравнения, неравенства или системы уравнений или неравенств всегда предполагает задание той числовой области, в которой следует искать корни. Если числовая область явно не указана, то со старших классов школы всегда неявно предполагается, что корни ищутся в области действительных чисел. Другое отношение к числовой области для корней возможно только в том случае, когда эта область явно указана в формулировке условия задачи. Например, имеет право на существование задача со следующей экзотической формулировкой.

Задача. Найти все решения неравенства $x^{2x^2-5x+2} > 1$ в области положительных действительных чисел и отрицательных целых чисел.

Ответ к этой задаче нетрудно отыскать, опираясь на материалы данной статьи.

Литература

1. Марковичев А.С., Михеев Ю.В., Пащенко М.Г. О степенях, содержащих переменную в основании и показателе. // Вестник НГУ, серия «Педагогика». Т. 6. Вып. 1. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2005.