МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

В. В. Воронин, Т. А. Воронина

ЗАДАЧИ
по
МАТЕМАТИКЕ

для практических занятий
в физико-математической школе

Новосибирск
2016

УДК 514.11
ББК 22.1я7
В75

Рецензент:

Михеев Юрий Викторович,
доцент, канд. пед. наук

Научный редактор:

Никитин Александр Александрович,
академик РАО, профессор, д-р физ.-мат. наук

В75 **Воронин, В. В.**
Задачи по математике для практических занятий в физико-математической школе / В. В. Воронин, Т. А. Воронина; Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск: РИЦ НГУ, 2016. — 424 с.

ISBN 978-5-4437-0457-9

Задачник предназначен для использования преподавателями и учащимися физико-математических школ. В нем представлена задачная база для отработки на практических занятиях навыков решения задач по основным разделам, затрагиваемым в последние два или три года профильного математического школьного обучения. Причем имеются в виду лишь те навыки и приемы, которые можно отнести к рутинным для профильной школы. Задачи каждой главы относительно упорядочены по типу постановки задач или по используемым ключевым приемам; в конце главы содержатся ответы. В каждом разделе содержатся задачи как простые, для первоначального знакомства с темой, так и повышенной сложности. Задачник составлен на основе опыта преподавания в Новосибирской физико-математической школе (СУНЦ НГУ).

ISBN 978-5-4437-0457-9

УДК 514.11
ББК 22.1я7
В75

© Новосибирский государственный университет, 2016
© СУНЦ НГУ, 2016
© Воронин В. В., Воронина Т. А., 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Умение решать задачи — такое же практическое искусство, как умение плавать или бегать на лыжах. Ему можно научиться только путём подражания или упражнения.

Д. Пойа

Предисловие

Данная книга представляет из себя подборку задач для отработки на профильном уровне умений и навыков решения задач по основным разделам продвинутой школьной математики. Составление такой подборки основано на многолетнем личном опыте преподавания в Новосибирской физико-математической школе. Хотелось бы, чтобы такая подборка давала "необходимый и достаточный"набор задач для одно- двух- и трехгодичного цикла обучения. Как для преподавателя, так и для ученика, способного и желающего самостоятельно работать над достижением достойного личного уровня в предмете.

Авторы осознают, что такие благие намерения в полной мере невыполнимы . Критерия – насколько "необходима"именно эта, а не другая задача – не существует. В итоге авторы руководствуются лишь своим субъективным мнением, и не более того. С другой стороны, из необъятного моря полезных и поучительных задач заведомо приходится делать лишь весьма и весьма ограниченную выборку. И любой опытный преподаватель всегда сможет назвать еще десять, сто, тысячу задач, которые он (с полным основанием) в такую выборку включил бы – и наша выборка всегда останется "недостаточной". Как и любая другая.

В результате данная книга содержит около 3600 задач – если считать по номерам. Что, по-видимому, с избытком исчерпывает тот ресурс времени, который может быть потрачен на их решение, даже в течение трехлетнего цикла. На самом деле задач еще больше – около 4300, так как многие задачи даны в нескольких "параллельных"вариантах; чаще в двух, но иногда даже в трех-четырех. Что отмечено буквами a,b,c,d при номере задачи.

Это сделано сознательно: на основание личного практического опыта авторы считают полезным иметь под рукой иметь такие параллельные задачи. Если одна из них разобрана на занятии, другая, подобная ей, может быть дана на дом. В решении содержалась ошибка – после разбора ошибки можно для закрепления понимания решить задачу параллельную. В разные варианты контрольной работы можно включить по одной из таких задач. При повторении материала – дать снова задачу, подобную той, что решалась ранее. И так далее.

Отметим отдельно: в данном задачнике не ставится цели охвата всех возможные тем в углубленном изучении математики. То, что может изучаться в кружках, факультативах, дополнительные разделы математической теории и основанные на них методы решения новых классов задач – этого здесь нет; и не предполагалось. Равно как нет и задач для подготовки к олимпиадам.

Более того: ориентируясь на двух-трехлетний курс Новосибирской физматшколы, авторы заведомо оставляли за рамками некоторые темы, не укладывающиеся в эти временные ограничения. Например, геометрические задачи на доказательство и на построение, которые в полном курсе планиметрии быть должны. Здесь их нет.

Этот задачник – для отработки рутинной техники решения тех задач, которые следует отнести к стандартным для физико-математических школ и классов.

Задачи относительно упорядочены по разделам и подразделам, в соответствие с типом постановки задач или используемым ключевым приемам решения. Подразделы начинаются с задач относительно примитивных, с которых стоит начинать работу по этой теме. Имеются подразделы, посвященные отработке приема, на который авторы считают нужным обратить особое внимание. Но цель однозначной классификации всех задач не преследовалась. Задачи могут решаться разными способами, в решении могут комбинироваться сразу несколько ключевых приемов. И вообще, самостоятельное узнавание ранее изученных конструкций и выбор между тем или иным путем решения – это тоже часть общей математической культуры. Ученик должен быть готов брать инициативу на себя.

Задачи несколько повышенной сложности в техническом плане или несущие в себе некую тонкость, отсутствующую в соседних задачах, помечены апострофом ('). Задачи, которые существенно сложнее прочих из этого раздела – звездочкой (*), а изредка даже двумя звездочками. Как многое другое, и эти пометки можно считать лишь нашей субъективной оценкой, не более.

Большинство задач содержит указание на источник, откуда они взяты – учебник, задачник или название вуза, который давал задачу на экзамене. Расшифровка этих кратких обозначений источников приведена в конце книги. При этом – назван лишь источник, откуда задачу взяли авторы; многие задачи цитируются в разных книгах, и вопрос о первоисточнике данной задачи не ставится. Указание факультета вуза также условно: задача могла даваться на разных факультетах, и тогда нами называется лишь какой-нибудь один из них.

Ответы к задачам приводятся в конце каждого из разделов. Иногда там же приведено самое краткое указание к решению.

Цель математической строгости состоит в том, чтобы санкционировать и узаконить завоевания интуиции.

Ж. Адамар

Глава 1

Метод математической индукции

1.1. Делимость

Доказать для любого натурального n:

1.1 [Прасолов]. $3^{2n+1} + 2^{n+2} \vdots 7$.

1.2 [Прасолов]. $2^{5n+1} + 5^{n+2} \vdots 27$.

1.3 [Прасолов]. $4^{2n} - 3^{2n} - 7 \vdots 84$.

1.4 [Прасолов]. $3^{3n+3} - 26n - 27 \vdots 169$.

1.5 [Прасолов]. $5^n + 2 \cdot 3^n - 3 \vdots 8$.

1.6 [Прасолов]. $7^n - 3 \cdot 5^n + 3 \cdot 3^n - 1 \vdots 16$.

1.7 [Прасолов]. $2^{3n+3} - 7n + 41 \vdots 49$.

1.8 [Прасолов]. $5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n} \vdots 41$.

1.9 [Прасолов]. $5^{2n+1} + 9 \cdot 2^{n+1} \vdots 23$.

1.10 [Прасолов]. $5^{2n} - 3^n \cdot 2^{2n} \vdots 13$.

1.11 [Прасолов]. $7^n + 3^n - 2 \vdots 8$.

1.12 [Кудр.]. $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1} \vdots 19$.

1.13 [Кудр.]. $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1} \vdots 11$.

1.14′ [Моденов]. Доказать, что если n чётное натуральное число, то $20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$.

1.15′ [Прасолов]. Доказать, что при любых натуральных n и k число $(k+1)^{2n+1} + k^{n+2}$ делится на $k^2 + k + 1$.

1.2. Суммирование

1.16 [Кудр.]**.** Доказать: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$.

1.17 [Кудр.]**.** Доказать: $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

1.18 [Кудр.]**.** Доказать: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

1.19 [Кудр.]**.** Доказать: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

1.20 [Кудр.]**.** Доказать: $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots (n-1)n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

1.21 [Моденов]**.** Доказать:
$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

1.22 [Моденов]**.** Доказать:
$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.

1.23. Доказать: $1 - \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x(x-2)}{2!} - \dots + (-1)^n \dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} =$
$= (-1)^n \dfrac{(x-1)\dots(x-n)}{n!}$.

1.24. Доказать: $\sum\limits_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1}\dfrac{1}{j} = \sum\limits_{j=n+1}^{2n} \dfrac{1}{j}$.

1.25. Доказать: $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{j^2}{(2j-1)(2j+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

1.26. Доказать: $\sum\limits_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2) = \dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

1.27. Доказать: $\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}j = \dfrac{1+(-1)^{n+1}(2n+1)}{4}$.

1.28′ [Кудр.]**.** Доказать:
$\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{8} + \dots + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$.

1.3. Неравенства

1.30 [Кудр.]**.** Доказать, что при каждом натуральном n справедливо неравенство Бернулли: $(1+a)^n \geqslant 1+na$, если $a > -1$.

1.31 [Прасолов]**.** Доказать неравенство: $\dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ при $n > 1$.

1.32 [Кудр.]**.** Доказать, что при каждом натуральном n справедливо неравенство: $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$.

1.33 [Кудр.]**.** Доказать, что при каждом натуральном $n > 1$ справедливо неравенство: $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$.

1.34 [Кудр.]**.** Доказать, что при каждом натуральном $n > 1$ справедливо неравенство: $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

1.35′ [Прасолов]**.** Доказать неравенства: $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1$.

1.36′ [Прасолов]**.** Доказать неравенства: $\dfrac{5}{6} \leqslant \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{3n} \leqslant \dfrac{4}{3}$.

1.4. Рекуррентные соотношения

1.37. Пусть $x_1 = 3$, а при $n \geqslant 2$ выполняется соотношение $x_n = 2x_{n-1} - 1$. Доказать, что $x_n = 2^n + 1$.

1.38. Пусть $x_1 = 1$, а при $n \geqslant 2$ выполняется соотношение $x_n = 3x_{n-1} + 2$. Доказать, что $x_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$.

1.39. Пусть $x_1 = 2$, а при $n \geqslant 2$ выполняется соотношение $x_n = 4x_{n-1} - 3$. Доказать, что $x_n = 4^{n-1} + 1$.

1.40. Пусть $x_1 = 3$, а при $n \geqslant 2$ выполняется соотношение $x_n = 3x_{n-1} - 4$. Доказать, что $x_n = 3^{n-1} + 2$.

1.41. Пусть $x_1 = 5$, а при $n \geqslant 2$ выполняется соотношение $x_n = 2x_{n-1} + 4$. Доказать, что $x_n = 9 \cdot 2^{n-1} - 4$.

1.42 [Моденов]**.** Члены последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ все отличны от нуля и удовлетворяют соотношению $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$. Доказать, что $a_n = a_1 q^{n-1}$, где $q = \dfrac{a_2}{a_1}$.

1.43 [Моденов]**.** Члены последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяют соотношению $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$. Доказать, что $a_n = a_1 + d(n-1)$, где $d = a_2 - a_1$.

1.44 [Моденов]**.** Дана последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, $\ldots$. В которой первые два числа равны 1, а каждое следующее равно сумме двух, непосредственно ему предшествующих (последовательность Фибоначчи). Доказать, что $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big]$.

1.45 [Моденов]**.** Доказать, что любую сумму, бóльшую 7 динаров, можно выплатить без сдачи, имея монеты по 3 и по 5 динаров.

1.46 [Моденов]**.** Доказать, что если на плоскости проведено n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, то они рассекают плоскость на $1 + n(n+1)/2$ частей.

1.47 [Моденов]**.** Доказать, что если на плоскости проведено любое число произвольным образом расположенных прямых, то $t - l + p = 1$, где t – число точек пересечения этих прямых, l – число кусков, на которые эти прямые делятся точками пересечения, а p – число кусков, на которые плоскость делится этими прямыми.

1.48 [Моденов]**.** Доказать, что для любого выпуклого многогранника имеет место соотношение: $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2$, где В – число его вершин, Р – число рёбер, Г – число граней. (Теорема Эйлера).

Дело обстоит так: существуют числа, благодаря которым гармония звуков пленяет слух, эти же числа преисполняют и глаза, и дух чудесным.

Архимед

Глава 2

Делимость

2.1. Разложение на множители

Доказать для каждого натурального n:

2.1 [ШЧЯ]. $n^3 - n \vdots 3$.

2.2 [ШЧЯ]. $n^5 - n \vdots 5$.

2.3 [ШЧЯ]. $n^7 - n \vdots 7$.

2.4 [ШЧЯ]. $n^5 - 5n^3 + 4n \vdots 120$.

2.5 [Вавилов-1]. $2n^3 - 3n^2 + n \vdots 6$.

2.6 [Вавилов-1]. $9n^5 - 5n^3 - 4n \vdots 120$.

2.7 [Вавилов-1]. $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n \vdots 24$.

2.8 [Вавилов-1]. $n^6 - n^2 \vdots 60$.

2.9 [Вавилов-1]. $n^5 - 125n^3 + 4n \vdots 120$.

2.10 [Вавилов-1]. $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n \vdots 8$.

2.11 [Вавилов-1]. $n^5 - n \vdots 10$.

2.12 [Вавилов-1]. $n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 62n \vdots 24$.

2.13 [Вавилов-1]. $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n \vdots 10$.

2.14 [ШЧЯ]. $3^{6n} - 2^{6n} \vdots 35$.

2.15 [Вавилов-1]. $3^{n+3} + 5^{n+3} + 3^{n+1} + 5^{n+2} \vdots 60$.

Доказать:

2.16 [Вавилов-1]. $19^{19} + 69^{19} \vdots 44$.

2.17 [Вавилов-1]. $2^{55} + 1 \vdots 33$.

2.18 [Вавилов-1]. $54^3 - 24^3 \vdots 1080$.

2.19 [Вавилов-1]. $2^{55} + 1 \vdots 33$.

2.20' [Вавилов-1]. $11^{100} - 1 \vdots 100$.

2.21*. $(1^{2001} + 2^{2001} + \ldots + 30^{2001}) \vdots 31$.

Доказать, что следующие числа являются составными:

2.22 [Вавилов-1]. $2222^{5555} + 5555^{2222}$.

2.23 [Вавилов-1]. $222^{555} + 555^{222}$.

2.24 [Вавилов-1]. $2^{50} - 1$.

2.25 [Вавилов-1]. $13^{25} + 17^{89} + 2^{71}$.

2.26 [Вавилов-1]. $2^{3^{1979}} + 1$.

2.27 [Вавилов-1]. $2^{3^{1979}} - 1$.

2.28*. $4 \cdot 10^{400} + 1$.

2.29. [Вавилов-1]. Доказать, что при любом нечетном натуральном n верно: $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 \vdots 512$.

2.30a* [ШЧЯ]. Доказать, что $n^2 + 3n + 5$ ни при каком целом n не делится на 121.

2.30b*. Доказать, что $n^2 + 5n - 10$ ни при каком целом n не делится на 169.

2.2. Индукция

2.31 [Вавилов-1]. Доказать: $11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$.

2.32 [Вавилов-1]. Доказать: $5^{n+3} + 11^{3n+1} \vdots 17$.

2.33 [Вавилов-1]. Доказать: $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1} \vdots 17$.

2.34 [Вавилов-1]. Доказать: $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n \vdots 19$.

2.35 [Вавилов-1]. Доказать: $5^{2n+1} + 3^{n+2}2^{n-1} \vdots 19$.

2.36 [Вавилов-1]. Доказать: $5^{2+n} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$.

2.37 [Вавилов-1]. Доказать: $5^{n+3}2^n - 125 \vdots 45$.

2.38 [Вавилов-1]. Доказать: $2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14 \vdots 27$.

2.39. Доказать: $4^n + 15n - 1 \vdots 9$.

2.40 [Вавилов-1]. Доказать, что при любом натуральном $n > 1$ число $2^{2^n} + 1$ оканчивается цифрой 7.

2.41. Доказать, что $2^{3^n} + 1 \vdots 3^{n+1}$.

2.42* [ШЧЯ]. Доказать, что число, составленное из 3^n одинаковых цифр, делится на 3^n (например, число, записываемое 27 семерками, делится на 27).

2.3. Арифметика остатков

2.43 [ШЧЯ]. Доказать: $n^{11} - n \vdots 11$.

2.44 [ШЧЯ]. Доказать: $n^{13} - n \vdots 13$.

2.45 [Вавилов-1]. Доказать: $8^7 - 2^{18} \vdots 14$.

2.46 [Вавилов-1]. Доказать: $36^{81} + 10 \cdot 3^{81} \vdots 11$.

2.47 [Вавилов-1]. Доказать: $5 \cdot 2^{298} + 3^{399} \vdots 19$.

2.48* [Вавилов-1]. Доказать: $3^{105} + 4^{105}$ делится на 181 и на 49.

2.49 [Вавилов-1]. Доказать: при любом целом m число $m(m^2 + 5) \vdots 6$.

2.50 [Вавилов-1]. Доказать: при любом целом m число $m(m + 1) \times \times (2m + 1) \vdots 6$.

2.51 [Вавилов-1]. Доказать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не является квадратом целого числа.

2.52 [Вавилов-1]. Доказать, что в прямоугольном треугольнике, длины сторон которого выражаются целыми числами, по крайней мере одно из чисел, выражающих длины катетов, делится на 3.

2.53 [Вавилов-1]. Доказать, что в прямоугольном треугольнике, длины сторон которого выражаются целыми числами, хотя бы одно из этих чисел делится на 5.

2.54 [Вавилов-1]. Доказать: $50^n - 5^n(2^n + 1) + 1 \vdots 36$.

2.55 [Вавилов-1]. Доказать: $42^{4n} - 21^{4n} + 8(n + 11) + 37n + 2 \vdots 45$.

2.56 [Вавилов-1]. Доказать, что все числа вида $2^{4^n} - 5$ оканчиваются цифрой 1.

2.57 [Вавилов-1]. Доказать, что простое число p ($p \geqslant 5$) при делении на 6 дает остаток 1 или 5.

2.58 [Вавилов-1]. Доказать, что квадрат простого числа p ($p \geqslant 5$) при делении на 24 дает остаток 1.

2.59 [ШЧЯ]. Доказать, что если три простых числа, больших числа 3, образуют арифметическую прогрессию, то разность прогрессии делится на 6.

2.60 [Вавилов-1]. Натуральное число $n > 1$ не делится нацело ни на 2, ни на 3. Доказать, что число $n^2 - 1$ делится на 24.

2.61 [Вавилов-1]. Найти все натуральные p, для которых числа $p + 1$, $p + 2$ и $p + 4$ простые.

2.62 [Вавилов-1]. Найти все пары простых чисел p и q, удовлетворяющие условию $p^2 - 2q^2 = 1$.

2.63 [Вавилов-1]. Найти все простые p, для которых число $2p^2+1$ также простое.

2.64 [Вавилов-1]. Найти все простые p, для которых числа $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ также простые.

2.65 [Вавилов-1]. Найти все простые p, для которых числа $p + 10$ и $p + 14$ также простые.

2.66 [Вавилов-1]. Доказать, что не существует простого числа p, для которого числа $p + 5$ и $p + 10$ простые.

2.67 [Вавилов-1]. Доказать, что не существует простого числа p, для которого числа $p + 2$ и $p + 5$ простые.

2.68 [Вавилов-1]. Числа p и $8p^2 + 1$ простые. Доказать, что число $8p^2 + 2p + 1$ простое.

2.69 [Вавилов-1]. Натуральные числа m и n таковы, что m^2+n^2 делится на 21. Доказать, что $m^2 + n^2$ делится на 441.

2.70 [Вавилов-1]. Доказать: $2^{60} + 7^{30} \vdots 13$.

2.71 [Вавилов-1]. Доказать: $(3299^5 + 6)^{18} - 1 \vdots 112$.

2.72 [Вавилов-1]. Доказать: $20^{15}-1 \,\vdots\, (11\cdot 31\cdot 61)$.

2.73 [Вавилов-1]. Доказать: $(2222^{5555}+5555^{2222}) \,\vdots\, 7$.

2.74 [Вавилов-1]. Найти остаток от деления на 3 числа $N=(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)\ldots(1000^2+1)$.

2.75 [Вавилов-1]. Найти остаток от деления на 7 числа $10^{10}+10^{10^2}+\ldots+10^{10^{10}}$.

2.76. Какой цифрой оканчивается число $1!+2!+3!+\ldots 2015!$?

2.77. Найти две последние цифры чисел 7^{1998} и 3^{1998}.

2.78. Найти две последние цифры числа 2^{2016}.

2.79 [ШЧЯ]. Найти две последние цифры числа $\left(\ldots\left(((7)^7)^7\right)^7\ldots\right)^7$, если возведение в степень 7 повторяется 1000 раз.

2.80 [ШЧЯ]. Доказать, что сумма одинаковых четных степеней трех последовательных целых чисел не может равняться четной степени целого числа.

2.81* [ШЧЯ]. Доказать, что если обе стороны прямоугольника и его диагональ выражаются целыми числами, то площадь прямоугольника делится на 12.

2.4. Позиционная запись

2.82 [Вавилов-1]. Доказать: $\overline{ab}+\overline{ba} \,\vdots\, 11$.

2.83 [Вавилов-1]. Доказать: $\overline{abc}-\overline{cba} \,\vdots\, 99$.

2.84 [Вавилов-1]. Доказать: $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ делится на 3 и на 37.

2.85 [Вавилов-1]. Доказать: число 11 111 111 является составным.

2.86 [Вавилов-1]. Доказать: число 123 123 123 123 является составным.

2.87 [Вавилов-1]. Доказать: число $\underbrace{4444\ldots444}_{1985}1$ является составным.

2.88 [Вавилов-1]. Доказать: число $\underbrace{2222\ldots222}_{1986}3$ является составным.

2.89 [Вавилов-1]. Делится ли число $\underbrace{1111\ldots111}_{81}$ на 81?

2.90 [Вавилов-1]. Делится ли число $\underbrace{7777\ldots777}_{27}$:

а) на 189; б) на 333; в) на 777; г) на 567 ?

2.91 [Вавилов-1]. Доказать равенство

$$\sqrt{\underbrace{111\ldots111}_{2n}-\underbrace{222\ldots222}_{n}}=\underbrace{33\ldots33}_{n}.$$

2.92 [Вавилов-1]. Доказать, что число $\underbrace{44\ldots444}_{n}\underbrace{888\ldots888}_{(n-1)}9$ является полным квадратом.

2.93 [Вавилов-1]. Доказать, что все числа вида 10 001, 100 010 001, 1 000 100 010 001,... – составные.

2.94 [Чуваков]. Доказать: $\Big(\underbrace{33\ldots3}_{n+1}\Big)^2=\underbrace{11\ldots1}_{n}0\underbrace{88\ldots8}_{n}9.$

2.95 [Чуваков]. Доказать: $\Big(\underbrace{33\ldots3}_{n}4\Big)^2=\underbrace{11\ldots1}_{n+1}0\underbrace{55\ldots5}_{n}6.$

2.96 [Чуваков]. Доказать, что число $\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n}$ – составное.

2.97 [Чуваков]. Доказать, что все числа $10017,\ 100117,\ 1001117,\ldots$ делятся на 53.

2.98 [Чуваков]. Доказать, что число $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{1980}-11\cdot\underbrace{44\ldots4}_{990}+9}$ – целое.

2.99 [Чуваков]. Доказать, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

2.100 [ШЧЯ]. Дописать к цифрам 523... еще три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, на 8 и на 9.

2.101 [Вавилов-1]. Найти все пятизначные числа вида $\overline{64X5Y}$, делящиеся на 36.

2.102 [Вавилов-1]. Найти все пятизначные числа вида $\overline{71X1Y}$, делящиеся на 45.

2.103 [МИФИ, 1976]. Произведение двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 2430. Найдите это число.

2.104 [Говоров]. Если неизвестное двузначное число разделить на число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то в частном получится 4, а в остатке 3. Если же искомое число разделить на сумму его цифр, то в частном будет 8, а в остатке 7. Найдите это число.

2.105 [Говоров]. Рассматривается дробь, знаменатель которой меньше квадрата числителя на единицу. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет меньше, чем $1/3$, если же из числителя и из знаменателя вычесть по 3, то дробь останется положительной, но будет меньше $1/10$. Найдите дробь.

2.106. Существует ли такое целое число, которое при зачеркивании первой цифры уменьшается а) в 57 раз; б) в 58 раз.

2.107 [Чуваков]**.** Одно из двух двузначных чисел в 2 раза больше другого. Найдите все пары таких чисел, если цифры меньшего из них равны сумме и разности цифр большего.

2.108 [Чуваков]**.** Найдите все натуральные числа, первая цифра которых 6, а при зачеркивании этой цифры число уменьшается в 25 раз.

2.109 [Чуваков]**.** Найдите шестизначное число, которое уменьшается в 6 раз, если три его первые цифры, не меняя порядка, переставить в конец числа.

2.110 [Чуваков]**.** Найдите пятизначное число, произведение которого с числом 9 есть пятизначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

2.111 [Чуваков). Найдите наименьшее натуральное число, первая цифра которого 1, а ее перестановка в конец числа приводит к увеличению числа в 3 раза.

2.112' [Чуваков]**. .** Найдите все пары двузначных чисел $(x; y)$ такие, что x простое меньше 20, а число $\overline{xy} + \overline{yx}$ является полным квадратом.

2.113 [Чуваков]**.** Найдите произведение двух трехзначных чисел, если оно втрое меньше шестизначного числа, полученного приписыванием одного из этих чисел вслед за другим.

2.114 [Чуваков]**.** Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть, чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа, равного b/a.

2.115 [ШЧЯ]**.** Квадрат целого числа оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами. Какими?

2.116 [ШЧЯ]**.** Найти трехзначное число, всякая натуральная степень которого оканчивается тремя цифрами, составляющими первоначальное число.

2.117. [Чуваков]**.** Найдите все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что после зачеркивания первой цифры их десятичной записи снова получатся число, являющееся степенью двойки.

2.118* [Чуваков]**.** Найдите все пары пятизначных чисел $(x; y)$ такие, что число $\overline{xy}$, полученное приписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x, делится на xy.

2.119 [Чуваков]. Известно, что числа $\overline{ab71}$ и $\overline{b71a}$ делятся на простое трехзначное число p. Найти p, a, b.

2.120* [Чуваков]. Найдите все пары натуральных чисел a и b, такие, что если к десятичной записи числа a^2 приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения $a \cdot b$ в 3 раза.

2.121** [Чуваков]. Найдите все пары натуральных чисел a и B, такие, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b^2, то получится число, большее произведения $a \cdot b$ ровно в 7 раз.

2.5. НОД, НОК

2.122 [Чуваков]. Найдите все пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 78, а наибольший общий делитель равен 13.

2.123 [Вавилов-1]. Найти все пары натуральных чисел n и m, удовлетворяющие системе: $mn = 420; \quad \text{НОД}(m, n) = 20$.

2.124 [Галкин]. Найдите все пары натуральных чисел, произведение которых равно 8400, а наибольший общий делитель 20.

2.125 [Галкин]. Найдите все пары натуральных чисел, сумма которых равно 288, а наибольший общий делитель 36.

2.126 [Галкин]. Среди первых 2000 натуральных чисел найдите три различных числа, наибольший общий делитель которых является наибольшим из всех возможных.

2.127 [Галкин]. Найдите наибольший общий делитель чисел 111 111 и 111 111 111.

2.128 [Галкин]. Найдите наибольший общий делитель всех девятизначных чисел, в записи которых каждая из цифр 1,2,3,...,9 встречается по одному разу.

2.129 [Галкин]. Найдите наибольший общий делитель всех шестизначных чисел, в записи которых каждая из цифр 1,2,3,4,5,6 встречается по одному разу.

2.130 [Галкин]. Найдите все возможные значения наибольшего общего делителя чисел $8a + 3$ и $5a + 2$, где a натуральное число.

2.131 [Галкин]. Найдите все пары натуральных чисел, отношение которых равно $\frac{5}{7}$, а наименьшее общее кратное равно 140.

2.132 [Галкин]. Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{21}{25}$ и $\frac{14}{15}$ получаются натуральные числа.

2.133 [Галкин]**.** Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{35}{66}$, $\frac{28}{165}$ и $\frac{25}{231}$ получаются натуральные числа.

2.134 [Галкин]**.** Найдите наибольшую дробь, при делении на которую каждой из дробей $\frac{154}{195}$, $\frac{358}{156}$ и $\frac{231}{130}$ получаются натуральные числа.

2.135 [Галкин]**.** Найдите все тройки попарно различных натуральных чисел такие, что их наибольший общий делитель равен 30, а наименьшее общее кратное – 180.

2.6. Элементы алгоритма Евклида

2.136 [ШЧЯ]**.** Найти четырехзначное число, которое при делении на 131 дает в остатке 112, а при делении на 132 дает в остатке 98.

2.137 [Чуваков]**.** Установить, является ли дробь $\dfrac{19043}{20413}$ сократимой, и если является, то сократите ее.

2.138 [Чуваков]**.** Найдите все значения n, при которых дробь $\dfrac{3n^3-8n^2+14n-8}{3n-5}$ сократима.

2.139 [Чуваков]**.** Найдите все значения n, при которых дробь $\dfrac{5n^3+2n^2-4n+28}{5n+7}$ сократима.

2.140 [Чуваков]**.** Найдите все значения n, при которых дробь $\dfrac{7n^2+11n-+4}{6n^2+5n}$ сократима.

2.141 [Чуваков]**.** Известно, что дробь $\dfrac{m}{n}$ несократима, а дробь $\dfrac{5m-3n}{2m+5n}$ сократима. На какое число ее можно сократить?

2.142 [Галкин]**.** Докажите, что дробь $\dfrac{6n-1}{7n-1}$ несократима ни при каких натуральных n.

2.143 [Галкин]**.** Найти наибольший общий делитель чисел $2^{1995}-1$ и $2^{1998}-1$.

2.144 [Галкин]**.** Докажите, что дробь $\dfrac{2n-3}{n^2-3n+2}$ несократима ни при каких натуральных $n \geqslant 3$.

2.145 [Галкин]**.** Натуральные числа a и b взаимно просты. Найдите все значения наибольшего общего делителя чисел $a+b$ и ab.

2.146 [Галкин]**.** Натуральные числа m и n взаимно просты. Найдите все значения наибольшего общего делителя чисел $m+n$ и m^2-mn+n^2.

2.147*. [Галкин]. Чему равен наибольший общий делитель всех чисел вида $7^{n+2} + 8^{2n+1}$; $(n \in N)$?

2.148 [Галкин]. При каком наименьшем натуральном n каждая из дробей $\dfrac{5}{n+6}$; $\dfrac{6}{n+7}$; $\dfrac{7}{n+8}$; $\ldots$ $\dfrac{23}{n+24}$ несократима?

2.149 [Галкин]. Сумма десяти натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

2.150 [Галкин]. Натуральное число при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7 дает в остатке соответственно 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Найдите: (а) наименьшее такое число; (б) общий вид таких чисел.

2.151 [Галкин]. Найдите трехзначное число, если оно при делении на 7, 11 и 13 дает соответственно остатки 5, 9 и 11.

2.152 [Галкин]. Натуральное число при делении на 4, 5, 6 дает в остатке соответственно 3, 4, и 5, а на 7 делится без остатка. Найдите: (а) наименьшее такое число; (б) общий вид таких чисел.

2.153* [ШЧЯ]. Доказать, что каждые два числа последовательности $2+1,\ 2^2+1,\ 2^4+1,\ 2^8+1,\ 2^{16}+1,\ \ldots, 2^{2^n}+1$ являются взаимно простыми.

2.154* [Чуваков]. Найдите несократимую дробь, равную дроби

$$\frac{p}{q} = \frac{1234567\overbrace{88\ldots8}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{99\ldots9}_{1999}7654321}.$$

2.7. Уравнения в целых числах

Решить в целых числах:

2.155 [Вавилов-1]. $x + y = xy$.

2.156 [Вавилов-1]. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.

2.157 [Вавилов-1]. $x^2 + 23 = y^2$.

2.158 [Вавилов-1]. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{xy} = 1$.

2.159 [Чуваков]. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{9}$, где $x > y$.

2.160 [Вавилов-1]. $3^x - y^3 = 1$.

2.161' [Шар-10]. $x^3 + 7y = y^3 + 7x$.

2.162 [Шар-10]. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.

2.163 [Шар-10]. $y^2 = 5x^2 + 6$.

2.164 [Шар-10]. $y^2 + 1 = 2^x$.

2.165 [Чуваков]. $1 + 2^x = y^2$.

2.166 [Шар-10]. $x^2 + 1 = 3y$.

2.167 [Шар-10]. $x^3 - xy^2 + x - y = 102$.

2.168 [Шар-10]. $x^2 + 5y^2 = 20z + 2$.

2.169 [Шар-10]. $x^2 + 9y^2 = 3z + 2$.

2.170 [Шар-10]. $x^2y = 9999x + y$.

2.171* [Чуваков]. $x! + y! = 10z + 13$.

2.172* [Чуваков]. $x! + y! = 10z + 17$.

Решить в натуральных числах:

2.173 [Чуваков]. $xy = 13(x + y)$.

2.174 [Чуваков]. $xy = 17(x + y)$.

2.175 [Чуваков]. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{25}$, где $x > y$.

2.176 [ШЧЯ]. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

2.177 [ШЧЯ]. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{14}$.

2.178’ [Шар-10]. $2^x - 15 = y^2$.

2.179’ [Шар-10]. $2^m - 3^n = 1$.

2.180’ [Шар-10]. $3^n - 2^m = 1$.

2.181* [Чуваков]. $3^m + 7 = 2^n$.

2.182* [Чуваков]. $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

2.183* [Чуваков]. $y^2 = 16 + z^x$, где z – простое.

2.184 [Чуваков]. $3^n + 8 = x^2$.

2.185* [Чуваков]. $n^5 + n^4 = 7^m - 1$.

2.186* [Чуваков]. $a^b + 127 = \overline{ab}$.

2.187* [Чуваков]. $a^b + 320 = \overline{ab9}$.

2.188 [Чуваков]. $13 + 5n + n! = k^2$.

2.189 [Чуваков]. $x! + y! = (x + y)!$.

2.190* [Чуваков]. $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$.

2.191* [Чуваков]. $n! + 4n - 9 = k^2$.

2.192* [Чуваков]. $12 \cdot n! + 11^n + 2 = k^2$.

2.193* [Чуваков]. $k! = 5 \cdot m! + 12 \cdot n!$.

2.194* [Чуваков]. $k! = 2 \cdot m! - 7 \cdot n!$.

2.195 [Вавилов-1]. Пусть целые числа x, y удовлетворяют условию: $x^2 - 4y^2 = 4xy$. Доказать, что $x = y = 0$.

2.196' [ШЧЯ]. Доказать, что равенство $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ для целых x, y, z возможно только если $x = y = z = 0$.

2.197* [Чуваков]. Решить в простых числах: $p^6 - q^2 = 0,5(p - q)^2$.

2.198 [Чуваков]. Решить в натуральных числах:

$$\sqrt{x - \frac{1}{5}} + \sqrt{y - \frac{1}{5}} = \sqrt{5}.$$

2.199 [Чуваков]. Решить в натуральных числах:

$$2^n + 2^{2n} + 2^{3n} + \ldots + 2^{k \cdot n} = 2006.$$

2.200 [Чуваков]. Решить в натуральных числах:

$$3^n + 3^{2n} + 3^{3n} + \ldots + 3^{k \cdot n} = 2007.$$

2.201 [Чуваков]. Решить в натуральных числах: $1! + 2! + 3! + \ldots n! = k^2$.

2.202* [ШЧЯ]. Найдите все пары натуральных чисел k и n таких, что $k < n$ и $k^n = n^k$.

2.8. Делимость – разное

2.203 [ШЧЯ]. Доказать, что из пяти последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно, взаимно простое с каждым из остальных.

2.204* [ШЧЯ]. Доказать, что из шестнадцати последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно, взаимно простое с каждым из остальных.

2.205. Из числа 1998 вычли сумму его цифр. С получившимся числом проделали то же самое, и так далее, пока не получится однозначное число. Определить это число.

2.206. Каждое натуральное число от 1 до 50000 заменяют числом, равным сумме его цифр, с получившимися числами проделывают ту же операцию, и так поступают до тех пор, пока все числа не станут однозначными. Сколько раз среди этих однозначных чисел встретится каждое из целых чисел от 1 до 9 ?

2.207 [ШЧЯ]**.** Какие остатки может давать сотая степень целого числа при делении на 125 ?

2.208. Первый член последовательности равен 1, а каждый следующий, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему числу суммы его цифр. Может ли в этой последовательности встретиться число 1998 ?

2.209* [ШЧЯ]**.** Доказать, что если все коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ – целые нечетные числа, то корни уравнения не могут быть рациональны.

2.210 [ШЧЯ]**.** Найти все четырехзначные числа, являющиеся полными квадратами и записываемые четырьмя четными цифрами.

2.211 [ШЧЯ]**.** Найти все четырехзначные числа, являющиеся полными квадратами и записываемые четырьмя нечетными цифрами.

2.212 [НГУ, МФ, 2000]**.** При каких целых значениях x функция $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 16}{x - 1}$ принимает наименьшее целое значение?

2.213 [МГУ, геогр, 1998]**.** Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $3x = 5y^2 + 4y - 1$, и докажите, что для каждой такой пары сумма $x^3 + y^3$ является нечетным числом.

2.214. Доказать, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 1998.

2.215. Из $2n$ чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ произвольно выбрали $(n + 1)$ число. Доказать, что среди выбранных чисел обязательно найдутся хотя бы два, из которых одно делится на другое.

2.216 [ШЧЯ]**.** Доказать, что из любых 52 чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 100.

2.217 [ШЧЯ]**.** Доказать, что из любых 100 целых чисел можно выбрать несколько (или, может быть, одно), сумма которых делится на 100.

2.218 [Чуваков]**.** Решить в натуральных числах уравнение $[n \cdot \lg 2] + [n \cdot \lg 5] = 2010$, где $[x]$ – целая часть числа x.

2.219. Дано: $56a = 65b$. Доказать, что $(a + b)$ – составное число.

2.220 [Чуваков]**.** Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

2.221 [Чуваков]**.** Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая 1 и само это число).

2.222 [Чуваков]. Найдите все натуральные числа, последняя цифра которых равна 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителя (включая 1 и само это число).

2.223 [Чуваков]. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 5600 и имеют ровно 105 различных натуральных делителя (включая 1 и само это число).

2.224 [Чуваков]. Натуральное число имеет ровно 9 натуральных делителей (включая 1 и само число), сумма которых равна 1767. Найдите это число.

2.225 [Галкин]. При делении чисел 1108, 1453, 1844 и 2281 на натуральное число a, не равное 1, получается один и тот же остаток. Найдите все значения a.

2.226 [Галкин]. Натуральное число n таково, что если разделить на него любое нечетное натуральное число, а потом куб этого числа, то получатся одинаковые остатки. Найти все возможные значения n.

2.227 [Галкин]. Число 2001^{2001} разбили на три натуральных слагаемых. Какой остаток может дать сумма кубов этих трех слагаемых при делении на 6 ?

2.228 [Чуваков]. При каком наименьшем натуральном n число 2009! не делится на n^n ?

2.229 [Чуваков]. Найти наибольшее натуральное n, для которого каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, \ldots, n$ является делителем числа 2013!

2.230 [Чуваков]. Найти наибольшее натуральное n, для которого число 2009! делится на каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, \ldots, n$.

2.231. Сколько нулей на конце числа 2016! ?

2.232. При каком наименьшем натуральном n число $n!$ оканчивается ровно на 299 нулей?

2.233. Может ли сумма $30! + 40!$ быть представлена в виде n^k, где n, k натуральные и $k > 1$?

2.234 [Галкин]. Решите в целых числах x, y, z систему уравнений: $\{6x - 5y + 2z = 1; \quad 8x + 3y - 6z = 7\}$.

2.235. Найти наименьшую тройку последовательных натуральных чисел, из которых меньшее делится на 9, среднее на 25, большее на 49.

2.236. [Галкин]. Первое целое число больше второго на 4, а число, обратное первому, более чем на $\frac{5}{4}$ превосходит число, обратное второму. Найти все такие пары чисел.

2.237* [Чуваков]. Все правильные несократимые дроби с двузначными числами в числителе и знаменателе упорядочили по возрастанию Между какими последовательными дробями оказалось число $\frac{5}{8}$?

2.238* [Чуваков]**.** Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$ найдите такую, знаменатель которой минимален.

2.239* [Чуваков]**.** Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на 1. Чему может быть равно такое произведение?

2.9. Ответы

[2.21] $k^3+(31-k)^3 \vdots 31$. **[2.28]** $4k^4+1=(2k^2+1)^2-(2k)^2$. **[2.61]** $p=1$. **[2.62]** $p=3; q=2$. **[2.63]** $p=3$. **[2.64]** $p=5$. **[2.65]** $p=3$. **[2.74]** 2. **[2.75]** 5. **[2.76]** 3. **[2.77]** 49, 89. **[2.78]** 36. **[2.79]** 07. **[2.89]** Да. **[2.90]** Да, да, да, нет. **[2.100]** 523152 и 523656. **[2.101]** 64152 и 64656. **[2.102]** 71010, 71415, 71910. **[2.103]** 45 и 54. **[2.104]** 71. **[2.105]** 4/15. **[2.106]** Да; нет. **[2.107]** 34; 17. **[2.108]** $625\cdot 10^k$. **[2.109]** 857142. **[2.110]** 10989. **[2.111]** 142857. **[2.112]** $(11;90)$, $(13;88)$, $(17;84)$, $(19;82)$. **[2.113]** 55778. **[2.114]** $a=2$; $b=5$. **[2.115]** Нулями. **[2.116]** 625; 376. **[2.117]** 32; 64. **[2.118]** $x=16667$; $y=33334$. **[2.119]** $p=101$; $a=7$; $b=1$. **[2.120]** $a=1$; $b=5\cdot 10^{k-1}$ или $a=2$; $b=8\cdot 10^{k-1}$; $k\in N$. **[2.121]** $a=1$; $b=2$. **[2.122]** $(13;78)$, $(26;39)$. **[2.123]** Нет решения. **[2.124]** $(420;20)$, $(140;60)$. **[2.125]** $(252;36)$, $180;108)$. **[2.126]** $666, 1332, 1998$. **[2.127]** 111. **[2.128]** 9. **[2.129]** 3. **[2.130]** 1. **[2.131]** $(20;28)$. **[2.132]** 42/5. **[2.133]** 700/33. **[2.134]** 77/780. **[2.135]** $(30;60;90)$ и $(60;90;180)$. **[2.136]** 1946. **[2.137]** на 137; 139/149. **[2.138]** $n=8t+4$. **[2.139]** $n=11t+3$. **[2.140]** $n=2t$; $n=11t+1$. **[2.141]** на 31. **[2.143]** 7. **[2.145]** 1. **[2.146]** 1 или 3. **[2.147]** 57. **[2.148]** 28. **[2.149]** 91; девять чисел равны 91, а одно 182. **[2.150]** 419; $420t-1$. **[2.151]** 999. **[2.152]** 119; $120t-1$. **[2.154]** $\frac{10^8-1}{10^9-1}=\frac{11111111}{111111111}$. **[2.155]** $(0;0)$; $(2;2)$. **[2.156]** $(1;2)$; $(5;2)$; $(-1;-2)$; $(-5;-2)$. **[2.157]** $(\pm 11;\pm 12)$–все комбинации. **[2.158]** $(2;3)$; $(3;2)$. **[2.159]** $(32;12)$; $(90;10)$; $(8;-72)$; $(6;-18)$. **[2.160]** $(0;0)$; $(2;2)$.

[2.161] $(x;y)=(t;t)$, t любое; $(\pm1:\pm2)$, $(\pm1;\mp3)$, $(\pm2;\mp3)$ и в обратном порядке. . **[2.162]** $(\pm1;\pm2)$, $(\pm5;\pm2)$. **[2.163]** Нет реш. **[2.164]** $(0;0)$, $(1;\pm1)$. **[2.165]** $(3;3)$, $(3;-3)$. **[2.166]** Нет решения. **[2.167]** $(x^2+1)(x-y)=102$; $(0;-102)$, $(1;-50)$, $(-1;-52)$, $(4;-2)$, $(-4;-10)$. **[2.168]** Нет решения. **[2.169]** Нет решения. **[2.170]** $(\pm2;\pm6666)$, $(\pm10;\pm990)$, $(\pm100;\pm100)$. **[2.171]** $(1;2;-1)$, $(2;1;-1)$. **[2.172]** $(1;3;-1)$, $(3;1;-1)$. **[2.173]** $(182;14)$; $(26;26)$. **[2.174]** $(306;18)$; $(34;34)$. **[2.175]** $(150;30)$; $(650;26)$. **[2.176]** $(2;4;4)$; $(2;3;6)$; $(3;3;3)$. **[2.177]** $(15;210)$; $(16;112)$; $(18;63)$; $(21;42)$; $(28;28)$ и в обратном порядке. **[2.178]** $(4;1)$, $(6;7)$. **[2.179]** $m=2$; $n=1$. **[2.180]** $n=2$; $m=3$. **[2.181]** $n=4$; $m=2$. **[2.182]** $(n=5;m=2)$; $(n=7;m=4)$. **[2.183]** $(7;12;2)$, $(2;5;3)$. **[2.184]** $n=0$; $x=3$. **[2.185]** $(2;2)$. **[2.186]** $(a=1;b=28)$, $(a=14;b=1)$. **[2.187]** $(a=3;b=2)$, $(a=97);b=2)$. **[2.188]** $n=2;k=5$. **[2.189]** $(1;1)$. **[2.190]** $(k;n;m)=(1;2;3)$, $(2;1;3)$, $(3;3;4)$. **[2.191]** $(n;k)=(2;1)$, $(3;3)$. **[2.192]** $n=1$; $k=5$. **[2.193]** $(k=17;n=m=16)$, $(k=7;m=6;n=5)$. **[2.194]** $(k=n=3;m=4)$, $(k=m=7;n=6)$. **[2.197]** $(3;23)$. **[2.198]** $(1;2)$, $(2;1)$. **[2.199]** $n=0$; $k=2006$. **[2.200]** $n=0$; $k=2007$. **[2.201]** $n=k=3$. **[2.202]** $k=2;n=4$. **[2.205]** 9. **[2.206]** От 1 до 5 – по 5556 раз; от 6 до 9 – 5555 раз. **[2.207]** 0 или 1. **[2.208]** Нет. **[2.210]** $68^2=4624$, $78^2=6084$, $80^2=6400$, $92^2=8464$. **[2.211]** Нет решения. **[2.212]** -13; 2. **[2.213]** $(x;y)=(15k^2-6k;3k-1)$. **[2.218]** 2011. **[2.220]** 987654321. **[2.221]** $2^13^27^6$; $3^12^27^6$; $2^17^23^6$; $3^12^27^6$; $7^13^22^6$; $7^12^23^6$. **[2.222]** 2500; 400. **[2.223]** $2^65^47^2$; $2^65^27^4$. **[2.224]** 1225. **[2.225]** 23. **[2.226]** 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24. **[2.227]** 3. **[2.228]** 47. **[2.229]** 46. **[2.230]** 46. **[2.231]** 502. **[2.232]** 1205. **[2.233]** Нет. **[2.234]** $x=12N-1$; $y=26N-3$; $z=29N-4$, $N\in Z$. **[2.235]** 7299; 7300; 7301. **[2.236]** $(1;-3)$; $(3;-1)$. **[2.237]** $\frac{58}{93}$; $\frac{62}{99}$. **[2.238]** $\frac{19}{7}$. **[2.239]** 6; 42; 1806.

Функции, как и живые существа, характеризуются своими особенностями.

П. Монтель

Глава 3

Графика

3.1. Алгебраические функции

Изобразить эскизы графиков функций.

3.1. $y = |x+2| + |x-2| - 2|x|$.

3.2. $y = |x^2+x| + |x^2-x|$.

3.3. $y = ||x-2| - 2|$.

3.4. $y = ||3x-5| - 2|$.

3.5. $y = (2x+3)/(3x-2)$.

3.6. $y = |2x+3|/(3x-2)$.

3.7. $y = (2x+3)/|3x-2|$.

3.8. $y = |(2x+3)/(3x-2)|$.

3.9. $y = (2|x|+3)/(3|x|-2)$.

3.10. $y = (2|x|+3)/(3x-2)$.

3.11. $y = (2x+3)/(3|x|-2)$.

3.12. $y = |(2|x|+3)/(3x-2)|$.

3.13. $y = \dfrac{1}{|x-1|} + \dfrac{1}{|x+1|}$.

3.14. $y = \dfrac{x}{|x-1|} + \dfrac{x}{|x+1|}$.

3.15. $y = 1/(x^2+x-6)$.

3.16. $y = 1/(x^2+x+6)$.

3.17. $y = 1/(x^2+1)$.

3.18. $y = x/(x^2+1)$.

3.19. $y = 1/(x^2 - 1)$.

3.20. $y = x/(x^2 - 1)$.

3.21. $y = (x + 2)/(x^2 + 3x - 4)$.

3.22. $y = (x^2 + 3x - 4)/(x + 2)$.

3.23. $y = (x - 2)/(x^2 + 2x - 8)$.

3.24. $y = |x - 3|/(x^2 - 2x - 3)$.

3.25. $y = |x^2 + x - 2|/(x + 1)$.

3.26. $y = (x - 3)/|x^2 - 2x - 8|$.

3.27. $y = x^3/(x^3 + 1)$.

3.28. $y = (x^3 - 3x + 2)/(x^2 - 3x + 2)$.

3.29. $y = (|x| + 1)(x - 3)x^2$.

3.30. $y = \sqrt{x^2(x - 1)^2(x - 2)}$.

3.31. $y = \sqrt[3]{x^6(2 + x)^4(1 - x)}$.

3.32. $y = \sqrt[5]{2x^2(x - 3)^3(x^2 - 2x)^4}$.

3.33. $y = \sqrt[3]{(8x - 1)/(x + 2)}$.

3.34. $y = ((2x + 5)/(2x - 1))^3$.

3.35. $y = \sqrt{x/(x - 2)}$.

3.36. $y = \sqrt{x/(x^2 - 1)}$.

3.2. Целая и дробная часть

Через $[t]$ обозначается целая часть числа $[t]$, т.е. наибольшее целое, не превосходящее t; через $\{t\}$ – дробная часть t, т.е. $\{t\} = t - [t]$.

3.37. $y = [x]$.

3.38. $y = 2[x/2]$.

3.39. $y = [2x]/2$.

3.40. $y = -[-x]$.

3.41. $y = [x + 0.5] - 0.5$.

3.42. $y = [x - 0.5] + 0.5$.

3.43. $y = \{x\}$.

3.44. $y = -\{-x\}$.

3.45. $y = [x^2]$.

3.46. $y = \{x^2\}$.

3.47. $y = [1/x]$.

3.48. $y = \{1/x\}$.

3.49. $y = [x]/x$.

3.50. $y = x/[x]$.

3.51. $y = \{x\}/x$.

3.52. $y = x/\{x\}$.

3.53. $y = \sqrt{[x]}$.

3.54. $y = [\sqrt{x}\,]$.

3.55. $y = \sin([x])$.

3.56. $y = [\sin x]$.

3.3. Суперпозиции элементарных функций

3.57. $y = 1/|2^x - 1|$.

3.58. $y = \log_{1/2}|x^2 - x|$.

3.59. $y = 1/(\log_2(x-3) - 1)$.

3.60. $y = \log_{\sqrt{\pi}}(|x|/(x+2))$.

3.61. $y = \log_2(|x+2|x/(2-x))$.

3.62. $y = \log_3(x^3/(1-x^2))$.

3.63. $y = \log_5|1 - 2^{-x}|$.

3.64. $y = \log_2|(2^x+1)/(2^x-1)|$.

3.65. $y = 2^{\frac{x}{x-1}}$.

3.66. $y = 2^{\frac{1}{x^2-4}}$.

3.67. $y = \log_3((x+2)/(3x-1))$.

3.68. $y = \sqrt[3]{\log_2((2x+1)/(x-2))}$.

3.69. $y = x/(2^{(x-1)/(x+1)} - 1)$.

3.70. $y = 3^{\sin x + \cos x}$.

3.71. $y = 1/\sin x$.

3.72. $y = \sin(1/x)$.

3.73. $y = x \sin(1/x)$.

3.74. $y = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$.

3.75. $y = \arcsin(1/x)$.

3.76. $y = \arccos(1/x)$.

3.77. $y = \operatorname{arctg}(1/x)$.

3.78. $y = \operatorname{arcctg}(1/x)$.

3.79. $y = \sin(\sqrt{x})$.

3.80. $y = \sqrt{\sin x}$.

3.81. $y = \cos(\sin x)$.

3.82. $y = \sin(\cos x)$.

3.83. $y = \sin(\arcsin x)$.

3.84. $y = \arcsin(\sin x)$.

3.85. $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

3.86. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\, x)$.

3.87. $y = \sin(\arccos x)$.

3.88. $y = \arccos(\sin x)$.

3.89. $y = \operatorname{arctg} \lg x$.

3.90. $y = \operatorname{arcctg} \lg \dfrac{x+1}{x-1}$.

3.91. $y = \log_x(2x-1)$.

3.92. $y = \log_x(2x+1)$.

3.4. Множества на координатной плоскости

Изобразить на координатной плоскости множество таких точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют заданным соотношениям.

3.93. $|x| + |y| \leqslant 1$.

3.94. $|x+2| + |y-2| \geqslant 4$.

3.95. $|x+1| \leqslant |y|$.

3.96. $x + y + |y - x| = 4$.

3.97. $|x+y| = |y| + y$.

3.98. $|y-1| = x^2 - 4x + 3$.

3.99. $|y| = |x|/x - x^2$.

3.100. $y/|x| + 1 = |xy| + y|y|$.

3.101. $||x + y| - 2| = 2x - y$.

3.102. $|x + y| = |y| + y$.

3.103. $|x^2 - x| < |y^2 - y|$.

3.104. $\big||x| + ||y| - 3| - 3\big| = 1$.

3.105. $x|x| + y|y| = x - y$.

3.106. $|y - \sin x| = y + \sin x$.

3.107. $x^2 + y^2 \leqslant 2|x| + 2|y|$.

3.108. $\max(x, y) = \min(|x|, |y|)$.

3.109. $\max(x + 1, y - 2) \geqslant 2$.

3.110*. $\max(|x|, y + 1) = \min(x^2, 2x + y)$.

3.111. $x - 1 = \sqrt{3 + 2x - y^2}$.

3.112. $|x^2 + y^2 - 2| \leqslant 2(x + y)$.

3.113. $x^2 + y^2 - 2|x| - 2|y| \leqslant 2$.

3.114. $x^2 + y^2 \leqslant 2(|x| - |y|)$.

3.115. $y^2(y - 1)(y + 1) = x^2(x - 1)(x + 1)$.

3.116. $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 \leqslant 4$.

3.117. $\sin(\pi(|x| + |y|)) \cdot \sqrt{16 - x^2 - y^2} = 0$.

3.118. $\sin(x^2) \leqslant 0$.

3.119. $\sin(x + y) \geqslant 0$.

3.120. $\sin x \geqslant \sin y$.

3.121. $\mathrm{tg}\ x \leqslant \mathrm{tg}\ y$.

3.122. $\cos(|x| + |y|) \geqslant 0$.

3.123. $\cos(x + y) \leqslant \cos(x - y)$.

3.124. $\log_{\cos x}(|y| - 2) \geqslant 0$.

3.125. $\log_x(\log_y x) > 0$.

3.126. $\log_{|x|-0.5}(x^2 + y^2) \leqslant \log_{|x|-0.5} 4$.

3.127. $\begin{cases} |x + 2y| = 2 \\ |y| \leqslant 1 \\ 2x - y \geqslant 0 \end{cases}$

3.128. $\begin{cases} y^2 \leqslant 1 \\ x - \sqrt{1-y^2} \geqslant 0 \\ x + |y| - 4 \leqslant 0 \end{cases}$

3.129. $\begin{cases} \log_{1/3}(x+y-1) \geqslant \log_{1/3} y \\ \sqrt{y-x-1} \leqslant \sqrt{2-x} \end{cases}$

3.130. $\begin{cases} |x+y| + |x-y| \leqslant 4 \\ |x| \leqslant 1 \\ y \geqslant \sqrt{x^2-2x+1} \end{cases}$

3.131. $\begin{cases} |x| + |y| < 3 \\ \log_2(2y - x^2 + 4) > \log_2(y+1) \end{cases}$

3.132. $\begin{cases} |x - |y|| \geqslant 1 \\ |x| + |y| \leqslant 2 \end{cases}$

Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости условиями:

3.133. $\begin{cases} |x+y| + |x-y| \geqslant 2 \\ |x+y| \leqslant 2\sqrt{2} \\ |x-y| \leqslant 2\sqrt{2} \end{cases}$

3.134. $\begin{cases} y \leqslant 4 - |x| \\ y \geqslant 1/2 + |x| \end{cases}$

3.135. $\begin{cases} y \leqslant 5 + 2|x| \\ y \geqslant 3 + 4|x| \end{cases}$

3.136. $\begin{cases} ||x-y| - |x-1|| = y - 2x + 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 4 \end{cases}$

3.137. $|x+1| + |2y - x - 1| \leqslant 6.$

Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию, и среди точек этого множества найти все точки, у которых координата y принимает наименьшее значение:

3.138 [Потапов]**.** $y = 2\left|1 + \dfrac{1}{x}\right| + \dfrac{2}{x} - |y+4|.$

3.139 [Потапов]**.** $\left|y + \dfrac{1}{x}\right| + \left|\dfrac{1}{x}\right| = 1 - \dfrac{2}{x}.$

Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию, и среди точек этого множества найти все точки, у которых координата y принимает наибольшее значение:

3.140 [Потапов]**.** $y = 4 - \left|y - \dfrac{6}{x}\right| - 2\left|\dfrac{3}{x} - 1\right|.$

3.141 [Потапов]**.** $2y + \left|y - \dfrac{3}{x}\right| = 4 - \left|\dfrac{3}{x} - 1\right|.$

3.5. Ответы

[3.133] 12. **[3.134]** 6. **[3.135]** 2. **[3.136]** $\pi/2$. **[3.137]** 36. **[3.138]** $y = -3$ при $-1 \leqslant x < 0$. **[3.139]** $y = -1$ при $x < 0$. **[3.140]** $y = 3$ при $2 \leqslant x \leqslant 3$. **[3.141]** $y = 5/3$ при $9/5 \leqslant x \leqslant 3$.

В математике следует помнить не формулы,
а процессы мышления.

В.П. Ермаков

Глава 4
Модули

4.1. Уравнения

4.1 [Вавилов-2]**.** $(x+2)^2 = 2|x+2| + 3$.

4.2 [Вавилов-2]**.** $x^2 - 6x + |x-4| + 8 = 0$.

4.3 [Трен]**.** $|x+3| + |2x-1| = 8$.

4.4 [Трен]**.** $|x-3| + 2|x+1| = 4$.

4.5 [Трен]**.** $|5-x| + |x-1| = 10$.

4.6 [Трен]**.** $|4-x| + |x-2| = 2$.

4.7 [Вавилов-2]**.** $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$.

4.8 [Трен]**.** $|x^2-1| + x = 5$.

4.9 [Трен]**.** $|x-2| - |5+x| = 3$.

4.10 [Трен]**.** $|x^2+x| + 3x - 5 = 0$.

4.11 [Трен]**.** $|5-2x| + |x+3| = 2 - 3x$.

4.12 [Трен]**.** $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = 1$.

4.13 [Вавилов-2]**.** $|x^2-9| + |x-2| = 5$.

4.14 [Трен]**.** $|x^2+4x+2| = \dfrac{5x+16}{3}$.

4.15 [Трен]**.** $|x-6| = |x^2-5x+9|$.

4.16 [Вавилов-2]**.** $(1+|x|)^4 = 2(1+x^4)$.

4.17 [Трен]**.** $|x+2| = \dfrac{2}{3-x}$.

4.18 [Вавилов-2]**.** $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} = 1$.

4.19 [МГУ, геол, 1998]**.** $\big||4-x^2| - x^2\big| = 1$.

4.20 [МГУ, псих,1998]. $|4x - |x-2| + 3| = 16.$

4.21 [Трен]. $\dfrac{5}{3 - |x-1|} = |x| + 2.$

4.22 [Вавилов-2]. $\dfrac{3}{|x+3| - 1} = |x+3|.$

4.23 [Вавилов-2]. $\dfrac{4}{|x+1| - 2} = |x+1|.$

4.24 [Вавилов-2]. $|4x - 1| = \dfrac{1}{3x-1}.$

4.25' [МГУ, хим, 2001]. $|x-1| + |x+1| + |x-2| + |x+2| + \ldots + |x-100| + |x+100| = 200x.$

4.26 [Плеханов]. Найти сумму целых решений уравнения

$$\frac{7 - |x+3| - |4-x|}{|6x - x^2 - 8|} = 0.$$

4.27 [Вавилов-2]. $4\sqrt{x+1} = |2x-1| + 3.$

4.28** [МГУ, псих, 2002].

$$|x^3 + 7x^2 - 11x - 6| + |x^3 - 12x^2 - 5x + 3| = 18x^2 - 2x - 13.$$

4.2. Неравенства

4.29a [НГУ, ФФ, 1990]. $|x^2 + 2x - 24| > 6x + 8.$

4.29b [НГУ, ФФ, 1990]. $|x^2 - 6x - 12| + 2x > 5.$

4.30a [НГУ, ФФ, 1999]. $|x^2 - 7x + 10| < 3 - x.$

4.30b [НГУ, ФФ, 1999]. $|x^2 - 2x - 3| > 2x - 2.$

4.31 [МГУ, био, 2002]. $|x-2| > 2x + 1.$

4.32 [Вавилов-2]. $\dfrac{|x+3| + x}{x+2} > 1.$

4.33 [Вавилов-2]. $\dfrac{|x+2| - x}{x} < 2.$

4.34 [Вавилов-2]. $\left|\dfrac{x+4}{x+2}\right| \leqslant 1.$

4.35 [Вавилов-2]. $\left|\dfrac{x-3}{x-5}\right| \geqslant 1.$

4.36 [Вавилов-2]. $\dfrac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0.$

4.37 [Вавилов-2]. $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geqslant 1.$

4.38 [Вавилов-2]. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geqslant 2.$

4.39 [МГУ, геогр, 2002]. $|x-2| > \dfrac{1}{x-2}.$

4.40 [Вавилов-2]. $|3x^2-7x-6| < |x^2+x|.$

4.41 [Вавилов-2]. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqslant 1.$

4.42 [Вавилов-2]. $\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right| \leqslant 4.$

4.43 [МГУ, экон, 2001]. $|x^2-8x+15| \leqslant |15-x^2|.$

4.44 [МГУ, геол, 2002]. $\dfrac{x|x|+1}{x-2}+1 \geqslant x.$

4.45 [МГУ, Соц, 2001]. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{|x|} \leqslant 2.$

4.46’ [Вавилов-2]. $\dfrac{4}{|x+1|-2} \geqslant |x-1|.$

4.47’ [Вавилов-2]. $\left|\dfrac{3|x|+2}{|x|-1}\right| < 3.$

4.48’ [Вавилов-2]. $\left|\dfrac{2-3|x|}{|x|+1}\right| > 1.$

4.49’ [Вавилов-2]. $-|y|+x-\sqrt{x^2+y^2-1} \geqslant 1.$

4.50’ [Вавилов-2]. $||x|-1| < 1-x.$

4.51’ [Вавилов-2]. $\left|1-\dfrac{|x|}{1+|x|}\right| \geqslant \dfrac{1}{2}.$

4.52’ [Вавилов-2]. $||x^2-3x+2|-1| > x-2.$

4.53’ [Вавилов-2]. $||x-1|-5| \leqslant 2.$

4.54’ [Вавилов-2]. $|x^2-|x|| < 1/4.$

4.55’ [Вавилов-2]. $\dfrac{|x^2-2x|-1-2x}{x^2-2+|x^2+3x|} \geqslant 0.$

4.56’ [МГУ, МФ, 2000]. $\dfrac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \dfrac{|x-3|+|x-2|}{x-4}.$

4.57’ [МГУ, ВМК, 2000]. $||x^2-8x+2|-x^2| \geqslant 2x+2.$

4.58' [МГУ, ВМК, 2000]. $\dfrac{|4x-2|-9}{x-2} \leqslant 1.$

4.59' [МГУ, ФФ, 1999]. $\left|2-\dfrac{1}{x-4}\right| < 3.$

4.60' [МГУ, соц, 1999]. $\dfrac{4|2-x|}{4-|x|} - |x-2| \leqslant 0.$

4.61 [МГУ, ВМК, 1998]. $2x > \dfrac{5x+3}{|x+2|}.$

4.62 [МГУ, био, 1998]. $|x^2+x-2| + |x+4| \leqslant x^2+2x+6.$

4.63 [МГУ, почв, 1998]. $\dfrac{1}{|x+1|-1} \geqslant \dfrac{2}{|x+1|-2}.$

4.64 [МГУ, фил, 1998]. $\dfrac{x^2+4x+3}{|x+1|} \leqslant 0.$

4.65' [МГУ, АзАфр, 1998]. $\dfrac{3|x|-11}{x-3} > \dfrac{3x+14}{6-x}.$

4.66' [МАИ]. $\dfrac{x^2+|x|-2}{|x|-1} \geqslant \dfrac{16}{x^2-2|x|+4}.$

4.3. Системы

4.67 [Вавилов-2]. $\begin{cases} x^2+2|x+3|-10 < 0 \\ \dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 1 \end{cases}$

4.68 [Вавилов-2]. $\begin{cases} \dfrac{2}{|x-2|} > \left|\dfrac{-3}{2x-1}\right| \\ |x^2-x| \leqslant x \end{cases}$

4.69 [МГУ, хим, 2002]. $\begin{cases} |x|+|y-1| \leqslant 1 \\ |x-2|+|y-1| \leqslant 1 \end{cases}$

4.70 [Вавилов-2]. $\begin{cases} 3u-v=1 \\ |u-2v|=2 \end{cases}$

4.71 [Вавилов-2]. $\begin{cases} 2u+v=7 \\ |u-v|=2 \end{cases}$

4.72 [Вавилов-2]. $\begin{cases} y+x-1=0 \\ |y|-x-1=0 \end{cases}$

4.73 [Вавилов-2]. $\begin{cases} |x-1|+y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

4.74 [Вавилов-2]. $\begin{cases} |x|+2|y|=3 \\ 5y+7x=2 \end{cases}$

4.75 [Вавилов-2]. $\begin{cases} y-2|x|+3=0 \\ |y|+x-3=0 \end{cases}$

4.76 [Вавилов-2]. $\begin{cases} |xy-4|-8-y^2 \\ xy=2+x^2 \end{cases}$

4.77 [Вавилов-2]. $\begin{cases} y^2-|xy|+2=0 \\ 8-x^2=(x+2y)^2 \end{cases}$

4.78 [Вавилов-2]. $\begin{cases} |x+3|+|x-2|=5 \\ 818-135x \leqslant 137x^2 \end{cases}$

4.79 [МГУ, МФ, 1999]. Найдите все x, при которых хотя бы одно из двух выражений $|x-3|\,(|x-5|-|x-3|)-6x$ и $|x|\,(|x|-|x-8|)+24$ неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

4.4. Ответы

[4.1] -5; 1. **[4.2]** 3; 4. **[4.3]** $-10/3$; 2. **[4.4]** -1. **[4.5]** -2; 8. **[4.6]** $[2;4]$. **[4.7]** -6; 2. **[4.8]** -3; 2. **[4.9]** -3. **[4.10]** -5; 1. **[4.11]** $[-\infty;-3]$. **[4.12]** 0. **[4.13]** -3; 2; $(-1+\sqrt{65})/2$. **[4.14]** -2; 1. **[4.15]** 1; 3. **[4.16]** $1+\sqrt{3}\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}$. **[4.17]** $(1-\sqrt{33})/2$; $(1\pm\sqrt{17})/2$. **[4.18]** $-2/3$; $1/2$; 2. **[4.19]** $\pm\sqrt{3/2}$; $\pm\sqrt{5/2}$. **[4.20]** $-17/5$; $11/3$. **[4.21]** 3; $-2+\sqrt{5}$. **[4.22]** $(13-\sqrt{5})/2$; $(-7-\sqrt{13})/2$. **[4.23]** $-2-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$. **[4.24]** $7/12$. **[4.25]** $[100;+\infty)$. **[4.26]** -2. **[4.27]** 0; 3. **[4.28]** -2; слева использовать то, что $|a|+|b|\geqslant a-b$ **[4.29a]** $(-\infty;-4+4\sqrt{2})\cup(8;\infty)$. **[4.29b]** $(-\infty;-2-\sqrt{21})\cup(4-\sqrt{23};\infty)$. **[4.30a]** $(3-\sqrt{2};\ 4-\sqrt{3})$. **[4.30b]** $(-\infty;\ \sqrt{5})\cup(2+\sqrt{5};\ \infty)$. **[4.31]** $(-\infty;1/3)$. **[4.32]** $(-5;\ -2)\cup(-1;\ +\infty)$. **[4.33]** $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$.

[4.34] $(-\infty;-3]$. **[4.35]** $[4;5))\cup(5;+\infty)$. **[4.36]** $(-5;\ -2)\cup(2;\ 3)\cup(3;\ 5)$. **[4.37]** $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0]$. **[4.38]** $(3/2;2]$. **[4.39]** $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$. **[4.40]** $\big((3-\sqrt{33})/4;2-\sqrt{7}\big)\cup\big((3+\sqrt{33})/4;2+\sqrt{7}\big)$. **[4.41]** $[0;8/5]\cup[5/2;+\infty)$. **[4.42]** $(-\infty;-9/2]\cup[-7/6;+\infty)$. **[4.43]** $[0;15/4]\cup[4;+\infty)$. **[4.44]** $(-\infty;1/3]\cup(2;+\infty)$. **[4.45]** $(-\infty;-1)\cup\big[1/\sqrt{2};\infty\big)$. **[4.46]** $\big[-2-\sqrt{8};-3\big)\cup(1;3]$. **[4.47]** $(-1/6;1/6)$. **[4.48]** $(-\infty;\ -3/2)\cup(-1/4;\ 1/4)\cup(3/2;\ +\infty)$. **[4.49]** $(x;y)=(1;0)$. **[4.50]** $(-\infty;0)$. **[4.51]** $[-1;1]$. **[4.52]** $(-\infty;1+\sqrt{2})\cup(3;+\infty)$. **[4.53]** $[-6;-2]\cup[4;8]$. **[4.54]** $\big((-1-\sqrt{2})/2;-1/2\big)\cup(-1/2;1/2)\cup\big(1/2;(1+\sqrt{2})/2\big)$. **[4.55]** $(-\infty;-2/3)\cup\big[2-\sqrt{5};1/2\big)\cup\big[2+\sqrt{5};+\infty\big)$. **[4.56]** $(3;4)\cup(4;7)$. **[4.57]** $(-\infty;0]\cup[1;2]\cup[5;+\infty)$. **[4.58]** $(-\infty;-1]\cup(2;3]$. **[4.59]** $(-\infty;3)\cup(21/5;+\infty)$. **[4.60]** $(-\infty;-4)\cup\{0\}\cup\{2\}\cup(4;+\infty)$. **[4.61]** $\big(-(9+\sqrt{57})/4;-2\big)\cup(-2;-1)\cup(3/2;+\infty)$. **[4.62]** $[-6;-1]\cup[0;+\infty)$. **[4.63]** $(-3;-2)\cup\{-1\}\cup(0;1)$. **[4.64]** $[-3;1)$. **[4.65]** $(-2;2)\cup(2;3)\cup(6;+\infty)$. **[4.66]** $[-2;-1]\cup(-1;1)\cup(1;2]$. **[4.67]** $\big(1-\sqrt{17};-2/3\big]\cup\big[1/2;\sqrt{5}-1\big)$. **[4.68]** $(8/7;2]$. **[4.69]** $(x;y)=(1;1)$. **[4.70]** $(0;-1)$; $(4/5;7/5)$. **[4.71]** $(3;1)$; $(5/3;11/3)$. **[4.72]** $(0;1)$. **[4.73]** $(0;-1)$. **[4.74]** $(1;-1)$; $(-11/19;23/19)$. **[4.75]** $(2;1)$; $(0;-3)$; $(-6;9)$. **[4.76]** $\big(\sqrt{2};2\sqrt{2}\big)$; $\big(-\sqrt{2};-2\sqrt{2}\big)$. **[4.77]** $\big(2\sqrt{2};-\sqrt{2}\big)$; $\big(-2\sqrt{2};\sqrt{2}\big)$. **[4.78]** $x=2$; $x\in[-3;-409/137]$. **[4.79]** $[3;5]$.

Крайне рекомендуется каждое занятие по этому разделу начинать с молебна в виде коллективного произнесения двух кратких псалмов:
(1). **В квадрат возводи только "плюс-плюс"!**
(2). **Умножая-деля: учти знак, учти ноль!**

Глава 5

Радикалы

5.1. Уравнения

5.1 [МГУ, соц, 2002]**.** $\sqrt{3x+10}=x+2.$

5.2 [МГУ, хим, 1997]**.** $\sqrt{3x^2-25x+51}=7-2x.$

5.3 [МГУ, почв, 1997]**.** $x=\sqrt{8x+9}.$

5.4 [Вавилов-2]**.** $3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7.$

5.5 [Вавилов-2]**.** $\sqrt{x+15}+\sqrt{x-1}=8.$

5.6 [Вавилов-2]**.** $\sqrt{x^2-3x+7}=3x+(x-3)^2-22.$

5.7 [Потапов]**.** $2x^2+3|x|+\sqrt{2x^2+3|x|+9}=33.$

5.8 [МФТИ, 2001]**.** $\sqrt{2x^2-8x+25}-\sqrt{x^2-4x+13}=2.$

5.9 [Потапов]**.** $x\sqrt{36x+1261}=18x^2-17x.$

5.10a [НГУ, ФФ, 1992]**.** $\left|-\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\right|=\sqrt{x}+1.$

5.10b [НГУ, ФФ, 1992]**.** $|2x+5|=\sqrt{x+3}+1.$

5.11a [НГУ, ест, 2004]**.** $\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}+\sqrt{x-3}=0.$

5.11b [НГУ, ест, 2004]**.** $\sqrt{x+5}-\sqrt{8-2x}+\sqrt{x-1}=0$

5.12 [Плеханов]**.** $4\sqrt{x+1}-|\,2x-1\,|=3.$

5.13 [МГУ, псих, 2001]**.** $\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x}=\sqrt{15}.$

5.14 [МГУ, ФФ, 1999]**.** $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x+1}=x+4.$

5.15 [МГУ, ФФ, 1999]**.** $\sqrt{\dfrac{4}{x-2}+1}=\dfrac{1}{x-2}.$

5.16 [МГУ, ФФ, 2002]. $4+\sqrt{x+9}=|x+5|$.

5.17 [Вавилов-2]. $3\sqrt{2x+1}-4\sqrt{x}-\sqrt{34x-135}=0$.

5.18 [Вавилов-2]. $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}=0$.

5.19 [Вавилов-2]. $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$.

5.20 [Вавилов-2]. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4}$.

5.21 [Вавилов-2]. $\sqrt{x-9}+\sqrt{x}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$.

5.22a [НГУ, МФ, 1998]. $2+\dfrac{\sqrt{x^2+7x+2}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{3\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2+7x+2}}$.

5.22b [НГУ, МФ, 1998]. $1+\dfrac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+7x-6}}=\dfrac{\sqrt{x^2+7x-6}}{\sqrt{x+1}}$.

5.23a’ [НГУ, МФ, 1997]. $\dfrac{\sqrt{128(\sqrt{x}-1)^7}}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{2x-2}$.

5.23b’ [НГУ, МФ, 1997]. $\dfrac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{(\sqrt{x}-1)^9}}=\sqrt{32x-32}$.

5.24* [МГУ, хим, 2001]. $\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{4x-x^2-3}=3+\sqrt{2x-x^2}$.

5.25 [Потапов]. $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x+1)^2-8x}$.

5.26* [Вавилов-2]. $(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}-28=0$.

5.27a* [НГУ, МФ, 1995]. $x-1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{6}{x+1}$.

5.27b* [НГУ, МФ, 1995]. $x+\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}=\dfrac{2}{x+3}$.

5.27c* [НГУ, МФ, 1995]. $x+1-3\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}=\dfrac{4}{x+2}$.

5.27d* [НГУ, МФ, 1995]. $x-5\sqrt{\dfrac{x}{x+5}}=\dfrac{6}{x+5}$.

5.28a* [Потапов]. $x=(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt{2x+6}-3)$.

5.28b* [Потапов]. $x=(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+x^2-x-7)$.

5.28c* [Потапов]. $x=(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{10+x}-4)$.

5.28d* [Потапов]. $(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+2x+5)=x$.

5.29** [Вавилов-2]. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}$.

5.30** [Потапов]. $|2x - \sqrt{1-4x^2}| = \sqrt{2}(8x^2 - 1)$.

5.31** [Потапов]. $|x + \sqrt{1-x^2}| = \sqrt{2}(2x^2 - 1)$.

5.32** [МГУ, МФ, 2001]. $3x - 2|x-2| = 3\sqrt{3x+18} - 2|\sqrt{3x+18} - 2|$.

5.33* [Вавилов-2].

$$\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}.$$

5.2. Под радикалом полный квадрат

5.34a' [НГУ, ест, 1988]. $\sqrt{x+1-2\sqrt{x}} = 2 - \sqrt{x+1+2\sqrt{x}}$.

5.34b' [НГУ, ест, 1988]. $\sqrt{4-x+4\sqrt{-x}} = 4 - \sqrt{4-x-4\sqrt{-x}}$.

5.34c' [НГУ, ест, 1988]. $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$.

5.35* [Вавилов-2]. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.

5.36* [Вавилов-2]. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} > \dfrac{3}{2}$.

5.37a* [Потапов]. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \leqslant 2$.

5.37b* [Потапов]. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

5.38a** [Потапов]. $\sqrt{\dfrac{1-4x\sqrt{1-4x^2}}{2}} = 1 - 8x^2$.

5.38b** [Потапов]. $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.

5.3. Неравенства

5.39 [Вавилов-2]. $\sqrt{2x+14} > x+3$.

5.40 [Вавилов-2]. $\sqrt{2x-1} < x$.

5.41 [Вавилов-2]. $\sqrt{x^2+4x+4} < x+6$.

5.42 [Вавилов-2]. $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$.

5.43 [Вавилов-2]. $\sqrt{x^2-2x} > 4-x$.

5.44 [Вавилов-2]. $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$.

5.45 [Вавилов-2]. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1$.

5.46 [Вавилов-2]. $x+1 > \sqrt{2+x}$.

5.47 [Квант]. $\sqrt{2x+1} \geqslant \sqrt{1-x^2-x}$.

5.48' [Квант]. $\sqrt{2x+1} \geqslant 2x^2-x-1$.

5.49 [Вавилов-2]. $x+4 < \sqrt{-x^2-8x-12}$.

5.50 [Вавилов-2]. $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$.

5.51 [Вавилов-2]. $\sqrt{7x-13} - \sqrt{3x-19} > \sqrt{5x-27}$.

5.52 [Вавилов-2]. $\sqrt{x-6} - \sqrt{10-x} \geqslant 1$.

5.53a [НГУ, ест, 2006]. $y - \sqrt{|y-2|-1} < 4$.

5.53b [НГУ, ест, 2006]. $y - \sqrt{|y+1|-2} < 2$.

5.54a [НГУ, МФ, 2005]. $\sqrt{|x^2-6x+5|-4} \geqslant \sqrt{2}(1-x)$.

5.54b [НГУ, МФ, 2005]. $\sqrt{|x^2+2x-2|-3} \geqslant \sqrt{3}(x-1)$.

5.55a [НГУ, ест, 2002]. $\sqrt{x^2-x-6}+3 > \sqrt{x+2}+3\sqrt{x-3}$.

5.55b [НГУ, ест, 2002]. $\sqrt{x^2+x-6}+3 > \sqrt{x+3}+3\sqrt{x-2}$.

5.56a [НГУ, МФ, 2003]. $|6\sqrt{2x-6}-8| \geqslant 2x-5$.

5.56b [НГУ, МФ, 2003]. $|16\sqrt{x-4}-25| \geqslant 2x-1$.

5.56c [НГУ, МФ, 2003]. $|6\sqrt{4-2x}-8| \geqslant 5-2x$.

5.56d [НГУ, МФ, 2003]. $|16\sqrt{2-x}-25| \geqslant 11-2x$.

5.57 [МГУ, МФ, 1998]. $3 \cdot \sqrt{|x+1|-3} \geqslant \sqrt{x^2-2x-3}$.

5.58a [НГУ, ест, 2000]. $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2x-5} \leqslant \sqrt{x-2}$.

5.58b [НГУ, ест, 2000]. $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-7} \leqslant \sqrt{x-3}$.

5.59a [НГУ, ест, 1996]. $3\sqrt{x^2-60x+500}+5x \geqslant 70$.

5.59b [НГУ, ест, 1996]. $\sqrt{3x^2-18x+15}+8 \geqslant 2x$.

5.60a [НГУ, 1997]. $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}-2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2x-11}-2}$.

5.60b [НГУ, 1997]. $\dfrac{1}{\sqrt{4-2x}-1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{5-3x}-1}$.

5.61a [НГУ, МФ, 1999]. $x^2 - \sqrt{x^2-2x} < 2x+12$.

5.61b [НГУ, МФ, 1999]. $2\sqrt{x^2+x} - x > x^2-8$.

5.62 [Вавилов-2]. $\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1$.

5.63 [Вавилов-2]. $\sqrt{5x^2+10x+1} \geqslant 7-x^2-2x$.

5.64' [Вавилов-2]. $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3$.

5.65 [Вавилов-2]. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}<\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$.

5.66 [Вавилов-2]. $\sqrt{x^2-6x+8}-\sqrt{x^2-7x+10}<1$.

5.67 [НГУ, ест, 1975]. $\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{x^2-2x-3}<1$.

5.68a' [НГУ, МФ, 1975]. $\sqrt{3x+\sqrt{9-x^2}}<\sqrt{3x+3}$.

5.68b' [НГУ, МФ, 1975]. $\sqrt{2x+\sqrt{16-x^2}}<\sqrt{2x+4}$.

5.69 [Вавилов-2]. $\dfrac{6x}{x-2}-\sqrt{\dfrac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>0$.

5.70 [Вавилов-2]. $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}}>x-2$.

5.71a [Вавилов-2]. $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}\leqslant\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

5.71b [Вавилов-2]. $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geqslant\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.

5.72 [МГУ, псих, 1999]. $\dfrac{5x-3}{\sqrt{7x-4}}<1$.

5.73 [МГУ, АзАфр, 1999]. $\dfrac{\sqrt{x^2-5}-3}{|x+4|-7}\geqslant 1$.

5.74a [НГУ, ест, 1990]. $\dfrac{\sqrt{3x+22}}{x+4}<1$.

5.74b [НГУ, ест, 1990]. $\dfrac{\sqrt{2x-5}}{x-4}<1$.

5.75 [Потапов]. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$.

5.76 [МГУ, геофиз, 1972]. $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}>\dfrac{1}{x-2}$.

5.77a [НГУ, ест, 1981]. $\dfrac{2}{x}+3\leqslant\sqrt{41-\dfrac{16}{x}}$.

5.77b [НГУ, ест, 1981]. $1-\dfrac{2}{x}\leqslant\sqrt{25-\dfrac{24}{x}}$.

5.78 [МФТИ, 2001]. $\dfrac{1}{2-\sqrt{x^2-3x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$.

5.79 [МФТИ, 2001]. $\sqrt{x^2+4x+3}<1+\sqrt{x^2-2x+2}$.

5.80 [МИЭМ, 2001]. $\dfrac{\sqrt{x+6}}{2x-3}<1$.

5.81a [НГУ, МФ, 2002]. $\dfrac{7x-9}{\sqrt{x^2-2}-1} \leqslant 9.$

5.81b [НГУ, МФ, 2002]. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-2}-1} \leqslant 3.$

5.82 [МГУ, ФФ, 2001]. $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} > \dfrac{1}{x-2}.$

5.83 [МГУ, ФФ, 2002]. $\dfrac{\sqrt{2-x}}{3-2x} < 1.$

5.84 [Вавилов-2]. $\dfrac{1-\sqrt{21-4x-x^2}}{x+1} \geqslant 0.$

5.85 [Вавилов-2]. $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3.$

5.86 [Квант]. $\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x+6} < 1.$

5.87' [Вавилов-2]. $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leqslant x^2-9.$

5.88a' [НГУ, ест, 1996]. $\dfrac{\sqrt{(2x+2)(x^2-3x+2)}}{x-2} \geqslant 2x-2.$

5.88b' [НГУ, ест, 1996]. $\dfrac{\sqrt{(7-x)(x^2-4x+3)}}{x-1} \leqslant x-3.$

5.89a [НГУ, ест, 2002]. $\dfrac{4\sqrt{x}-5}{\sqrt{x-1}-1} \leqslant 5.$

5.89b [НГУ, ест, 2002]. $\dfrac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x-1}-1} \leqslant 5.$

5.90a' [Вавилов-2]. $\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}.$

5.90b' [Вавилов-2]. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0.$

5.91a* [Вавилов-2]. $\dfrac{3(4x^2-9)}{\sqrt{3x^2-3}} \leqslant 2x+3.$

5.91b* [Вавилов-2]. $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}} \leqslant 3x-2.$

5.91c* [Вавилов-2]. $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}} \leqslant 3x+2.$

5.92* [Вавилов-2]. $\sqrt{9-\dfrac{9}{x}} < x - \sqrt{x-\dfrac{9}{x}}.$

5.93* [Вавилов-2]. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}} > \dfrac{2}{\sqrt{x}}.$

5.94* [Вавилов-2]. $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}>\dfrac{2}{x}$.

5.95* [Вавилов-2]. $\sqrt{5+x}-\sqrt{-x-3}<1+\sqrt{(x+5)(-x-3)}$.

5.96* [Вавилов-2]. $\dfrac{x-1}{2}>\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{4}}$.

5.97a* [Вавилов-2].

$$\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}.$$

5.97b* [Вавилов-2]. $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2+6x-7}>\sqrt{4x^2-2x-2}$.

5.97c* [Вавилов-2].

$$\sqrt{x^2-12x+35}+\sqrt{x^2-2x-15}>\sqrt{4x^2-34x+70}.$$

5.98a' [Потапов]. $x+13+6|4-\sqrt{6-x}|>0$.

5.98b' [Потапов]. $x-9<7|4-\sqrt{x+9}|$.

5.99' [Потапов]. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+x}>3$.

5.100' [Потапов]. $\sqrt{8-x^2}-\sqrt{25-x^2}\geqslant x$.

5.101* [Квант]. $\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\dfrac{x+1}{4}<\sqrt{2x-1+\dfrac{(x+1)^2}{8}}$.

5.102a* [Квант]. $\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+3}<2x-1$.

5.102b* [Квант]. $\sqrt{3x}-\sqrt{1+x}<1-2x$.

5.102c* [Квант]. $\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x}>\dfrac{2x^2-x-1}{2}$.

5.103* [МГУ, экон, 1998]. $\sqrt{x+8(3-\sqrt{8+x})}<\dfrac{x+16}{2\sqrt{8+x}-10}$.

5.104' [МГУ, АзАфр, 2002]. $x\sqrt{2-x}\leqslant x^2-x-2-\sqrt{2-x}$.

5.105* [Плеханов]. $\dfrac{x^2(x+6)+9(2x+3)}{|6x+19|}\leqslant\sqrt{6x+19}+1$.

5.106** [Вавилов-2]. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{35}{12}$.

5.107** [Вавилов-2]. $\sqrt{2x-1}>\sqrt{2x+15}-\dfrac{10}{\sqrt{2x}-1}$.

5.108* [Потапов]. $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}}<\sqrt{2x+1}-1$.

5.4. Радикалы высших степеней

5.109 [МГУ, почв, 2002]. Пусть $a = \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{50}$. Докажите, что число $a^3 - 30a$ целое и найдите его.

5.110 [Вавилов-2]. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 1$.

5.111 [Вавилов-2]. $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$.

5.112a [НГУ, ест, 1995]. $\sqrt[3]{10-x} - \sqrt[3]{3-x} = 1$.

5.112b [НГУ, ест, 1995]. $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-53} = 2$.

5.113 [МГУ, соц, 2001]. $\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{2-6x}{x}} = 1$.

5.114' [МГУ, МФ, 2002]. $\sqrt[3]{2x - x\sqrt{x} - 1} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{1-2x} \leqslant 0$.

5.115' [Вавилов-2]. $\sqrt[4]{15+x} - \sqrt[4]{2-x} > 1$.

5.116 [Потапов]. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$.

5.117 [Потапов]. $\sqrt[3]{(8-x)^2} + \sqrt[3]{(x+27)^2} = \sqrt[3]{(8-x)(x+27)}$.

5.118 [Потапов]. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$.

5.119 [Потапов]. $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$.

5.120 [Плеханов]. $\sqrt[3]{50+x} - \sqrt[3]{x-22} = 6$.

5.121 [Вавилов-2]. $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1$.

5.5. С исследованием функций

5.122* [МГУ, хим, 1989].

$$(2x+1)\left(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}\right) + 3x\left(2 + \sqrt{9x^2+3}\right) = 0.$$

5.123' [Квант]. $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt{x-3} > \sqrt{2 - \sqrt[4]{x}}$.

5.124' [Квант]. $\sqrt{x + \sqrt{x^3} + \sqrt{x^5}} - \sqrt{3} < \sqrt{x} - 1$.

5.125 [Квант]. $x^{15} + 3\sqrt[4]{x-1} \geqslant 1$.

5.126 [Квант]. $\sqrt{3-x^2} + \sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{x^2-1}$.

5.127 [Квант]. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} + x > 3$.

5.6. Пустое множество решений

5.128 [Вавилов-2]. $2\sqrt{1-x^2}=x-2$.

5.129 [Вавилов-2]. $\sqrt{17+5\sqrt{4x^2-16}}+x^2\sqrt{7-x}=3$.

5.130 [Вавилов-2]. $(x+1)(5-x)(\sqrt{x-8}+2)=4$.

5.131 [Вавилов-2]. $\sqrt{27+5\sqrt{x}}+\sqrt{x^3-4x^2-7}=3$.

5.132 [Вавилов-2]. $\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2+4}=\dfrac{x+5}{\sqrt{(x+11)(x+4)}}$.

5.133. [Вавилов-2]. $\sqrt{1+2(x-3)^2}+\sqrt{5-4x+x^2}<3/2$.

5.134 [Вавилов-2]. $\sqrt{1+|x|}-\sqrt{7+x^2}>\sqrt{x^3-4x^2+5x-7}$.

5.135. $\sqrt{\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{\sqrt{x+1}+2}<\sqrt{2\sqrt{x+1}+3}$.

5.136. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4-x^2+1}<2\sqrt[4]{x^6+1}$.

5.137. $(x-5)\sqrt{-x-7}>\dfrac{(x^2+17)\sqrt{x^2-25}}{x^2+4}$.

5.138. $\sqrt{4-3(x+5)^2}+\sqrt{9-\dfrac{5}{x^2}}>1+\sqrt{16+7(x+2)^2}$.

5.139. $\sqrt{5-x^2-1/x^2}>\sqrt{2+\sqrt{x}+1/\sqrt{x}}$.

5.140. $\sqrt{x^2+4\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2-\sqrt{x^2+1}}<\dfrac{|x+1|-\sqrt{x^2+2x+5}}{|x|+x^2+8}$.

5.141. $\sqrt{4+\sqrt{2x^2+5}}>\sqrt{5+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4+x^2}}$.

5.142'. $\sqrt[3]{x^2-2}=\sqrt{2-x^3}$.

5.7. Системы

5.143 [Плеханов]. $\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6.\end{cases}$

5.144 [Вавилов-2]. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+5}{2x-1}}>2,\\ \dfrac{4-3x}{\sqrt{40-3x}}<\sqrt{3}.\end{cases}$

5.145 [Вавилов-2]. $\begin{cases}\sqrt{4x-x^2}<4-x,\\ \sqrt{x+2}>\sqrt{8-x^2}.\end{cases}$

5.146 [Вавилов-2]. $\begin{cases} \sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x, \\ \sqrt{2x+1} < \dfrac{2(x+2)}{2-x}. \end{cases}$

5.147 [МГУ, ФФ, 1998]. $\begin{cases} x+|x+y-1|=0, \\ y-3+\sqrt{x-y+6}=0. \end{cases}$

5.148 [Ларин, 2013].

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\ldots+\sqrt{(x-2012)^2}-1007\cdot 503 > \\ \qquad\qquad > \dfrac{1}{2}\cdot 1005\cdot 1006, \\ \sqrt{2x+12} \leqslant |x+5|. \end{cases}$$

5.8. Ответы

[5.1] 2. **[5.2]** $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$. **[5.3]** 9. **[5.4]** 6. **[5.5]** 10. **[5.6]** -3; 6. **[5.7]** -3; 3. **[5.8]** 6; -2. **[5.9]** 0; 3. **[5.10a]** $14+4\sqrt{10}$. **[5.10b]** -3; $\dfrac{\sqrt{17}-15}{8}$. **[5.11a]** 3. **[5.11b]** 1. **[5.12]** 0; 3. **[5.13]** $3\pm 5\sqrt{3}/2$. **[5.14]** $\dfrac{3+\sqrt{65}}{2}$. **[5.15]** $\sqrt{5}$. **[5.16]** -9; $\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}$. **[5.17]** 4. **[5.18]** 1. **[5.19]** 2. **[5.20]** $-\dfrac{4}{3}$. **[5.21]** 25. **[5.22a]** 0. **[5.22b]** 2. **[5.23a]** 1; $\dfrac{57+9\sqrt{33}}{32}$. **[5.23b]** $\dfrac{21+5\sqrt{17}}{8}$. **[5.24]** 2; экстремальный случай. **[5.25]** -2. **[5.26]** $1-\sqrt{53}$; $1+2\sqrt{5}$. **[5.27a]** $\sqrt{5}$; $-\sqrt{10}$. **[5.27b]** -4; $\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$. **[5.27c]** $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{-3+\sqrt{65}}{2}$. **[5.27d]** 4; $\dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}$. **[5.28a]** 5. **[5.28b]** 3. **[5.28c]** -1. **[5.28d]** нет решения. **[5.29]** $\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{4}{5}$; $-\dfrac{5+\sqrt{73}}{14}$; триг. замена. **[5.30]** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$; здесь $8x^2-1=(2x)^2-(\sqrt{1-4x^2})^2$. **[5.31]** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; подобна предыдущей. **[5.32]** 6; переписать в виде $f(x) = f(\sqrt{3x+18})$. **[5.33]** -2. **[5.34a]** $[0;1]$. **[5.34b]** $[-4;0]$. **[5.34c]** $[4;8]$. **[5.35]** 15. **[5.36]** $[1;+\infty)$. **[5.37a]** $[1;2]$. **[5.37b]** $[5;10]$. **[5.38a]** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$. **[5.38b]** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **[5.39]** $[-7;1)$. **[5.40]** $[1/2;1)\cup(1;+\infty)$.

[5.41] $(-4;+\infty)$. **[5.42]** $[5/2;3)$. **[5.43]** $(8/3;+\infty)$. **[5.44]** $(-\infty;-2]\cup[5;74/13)$. **[5.45]** $(3/4;2)$. **[5.46]** $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};+\infty\right)$. **[5.47]** $\left[0;\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$. **[5.48]** $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$. **[5.49]** $\left[-6;-4+\sqrt{2}\right)$. **[5.50]** $(1;+\infty)$. **[5.51]** $\left[\dfrac{19}{3};9\right)$. **[5.52]** $\left[8+\dfrac{\sqrt{7}}{2};10\right)$. **[5.53a]** $(-\infty;1]\cup\left[3;\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}\right)$. **[5.53b]** $(-\infty;-3]\cup\left[1;\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. **[5.54a]** $\{-1\}\cup\{3\}\cup\left[3+\sqrt{8};+\infty\right)$. **[5.54b]** $\left(-\infty;-1-\sqrt{6}\right]\cup\{-1\}\cup\{2\}$. **[5.55a]** $[3;4)\cup(7;+\infty)$.

[5.55b] $[2;3)\cup(6;+\infty)$. **[5.56a]** $\left\{\dfrac{15}{2}\right\}\cup\left[3;\dfrac{7}{2}\right]$. **[5.56b]** $[4;5]\cup\{20\}$. **[5.56c]** $\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}\cup\left[\dfrac{3}{2};2\right]$. **[5.56d]** $\{-14\}\cup[1;2]$. **[5.57]** $\left[3;\dfrac{11+\sqrt{61}}{2}\right]$. **[5.58a]** $[2;5/2)\cup\left[\dfrac{21+\sqrt{73}}{8};\infty\right)$. **[5.58b]** $[3;7/2)\cup\left[\dfrac{29+\sqrt{105}}{8};\infty\right)$. **[5.59a]** $\{5\}\cup[50;\infty)$. **[5.59b]** $(-\infty;1]\cup\{7\}$. **[5.60a]** $\left[\dfrac{11}{2};7\right)\cup\left(\dfrac{15}{2};8\right]$. **[5.60b]** $\left[1;\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{3}\right]$. **[5.61a]** $\left(1-\sqrt{17};0\right]\cup\left[2;1+\sqrt{17}\right)$. **[5.61b]** $\left(\dfrac{-1-\sqrt{65}}{2};-1\right]\cup\left[0;\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}\right)$. **[5.62]** $(-\infty;-2]\cup[-1;0)\cup\left(0;\dfrac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$. **[5.63]** $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **[5.64]** $[0;5]$. **[5.65]** $(1;+\infty)$. **[5.66]** $(-\infty;2]\cup\left(\dfrac{11+\sqrt{28}}{3};+\infty\right)$. **[5.67]** $(-\infty;-1]\cup\left(\dfrac{4+2\sqrt{13}}{3};+\infty\right)$. **[5.68a]** $\left[-\dfrac{3}{\sqrt{10}};0\right)\cup(0;3]$. **[5.68b]** $\left[-\dfrac{4}{\sqrt{5}};0\right)\cup(0;4]$ **[5.69]** $(2;8)$. **[5.70]** $(-\infty;-2]\cup(0;+\infty)$. **[5.71a]** $[-4;1]\cup\{2\}$. **[5.71b]** $[-2;-1]\cup\{3\}$. **[5.72]** $\left(\dfrac{4}{7};\dfrac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$. **[5.73]** $(-\infty;-11)\cup\left[\sqrt{5};3\right)$. **[5.74a]** $\left[-\dfrac{22}{3};-4\right)\cup(1;+\infty)$. **[5.74b]** $\left[\dfrac{5}{2};4\right)\cup(7;+\infty)$.

[5.75] $\left(1;\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$. **[5.76]** $(-\infty;2)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};3\right)$. **[5.77a]** $(-\infty;0)\cup[1;\infty)$. **[5.77b]** $(-\infty;-1/6]\cup[24/25;\infty)$. **[5.78]** $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(4;+\infty)$. **[5.79]** $(-\infty;-3]\cup\left[-1;\dfrac{\sqrt{17}-1}{8}\right)$. **[5.80]** $[-6;3/2)\cup(3;\infty)$. **[5.81a]** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left[\sqrt{2};\sqrt{3}\right)\cup[9/4;+\infty)$. **[5.81b]** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left[\sqrt{2};3/2\right]\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. **[5.82]** $(-\infty;2)\cup\left((3+\sqrt{5})/2;3\right)$. **[5.83]** $(-\infty;1)\cup(3/2;2]$. **[5.84]** $\left[-2-2\sqrt{6};-1)\right)\cup\left[-2+2\sqrt{6};3\right]$. **[5.85]** $[-1/2;0)\cup(0;1/2]$. **[5.86]** $(-\infty;-6)\cup(-61/12;-5]\cup[5;+\infty)$. **[5.87]** $(-\infty;-5/6]\cup[3;+\infty)$. **[5.88a]** $[-1;1/2]\cup\{1\}\cup(2;3]$. **[5.88b]** $[-1;1)\cup\{3\}\cup[4;7]$. **[5.89a]** $[1;2)\cup[25/9;+\infty)$. **[5.89b]** $[1;25/16]\cup(2;+\infty)$. **[5.90a]** $\left((-3-\sqrt{5})/2;1\right]$. **[5.90b]** $\left((-5+\sqrt{13})/2;1\right]$. **[5.91a]** $[-3/2;-1)\cup(1;2]$. **[5.91b]** $\left[-1/2;-1/\sqrt{5}\right)\cup\left(1/\sqrt{5};2/3\right]$. **[5.91c]** $\left[-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}};\dfrac{5}{2}\right]$. **[5.92]** $\left[3;\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{37}}{2};+\infty\right)$. **[5.93]** $(1/2;1)$. **[5.94]** $\left(\sqrt[3]{10}/2;+\infty\right)$. **[5.95]** $\left[-5;2\sqrt{\sqrt{5}-2}-4\right)$. **[5.96]** $\left(2;4\sqrt{3}/3\right]$. **[5.97a]** $x>17/3$. **[5.97b]** $x>11/3$. **[5.97c]** $x>23/3$. **[5.98a]** $(-19;6]$. **[5.98b]** $[-9;16)$. **[5.99]** $[-5;-1]\cup[0;5]$. **[5.100]** Нет решения. **[5.101]** $\left[1/2;7-2\sqrt{10}\right)\cup\left(7-2\sqrt{10};7+2\sqrt{10}\right)\cup\left(7+2\sqrt{10};+\infty\right)$. **[5.102a]** $\left[-1/5;(4-\sqrt{19})/2\right)\cup(1/2;+\infty)$; умножить на сопряженное. **[5.102b]** $[0;1/2)$. **[5.102c]** Нет решения. **[5.103]** $(17;248)$; замена $t=\sqrt{x+8}$. **[5.104]** $(-\infty;-1]\cup\{2\}$. **[5.105]** $(-19/6;5]$. **[5.106]** $(-4/5;-3/5)\cup\left(0;(\sqrt{73}+5)/14\right)$; триг. замена или замена $t=x-\sqrt{1-x^2}$. **[5.107]** $(1/2;+\infty)$. **[5.108]** $(0;45/8)$; справа умножить-разделить на $\sqrt{2x+1}+1$. **[5.109]** 70. **[5.110]** 1. **[5.111]** $\pm\sqrt{5}/2$. **[5.112a]** 11; 2. **[5.112b]** -72; 80. **[5.113]** -1; $2/7$; замена $t=\sqrt[3]{2/x-6}$. **[5.114]** $\{0\}\cup[1/2;1]\cup\left[(3+\sqrt{5})/2;+\infty\right)$; приводится к виду $a+b\leqslant$

$\sqrt[3]{a^3+b^3}$. **[5.115]** $(1;2]$. **[5.116]** 1. **[5.117]** Нет решения. **[5.118]** -1; 7. **[5.119]** 1; $3/2$; 2. **[5.120]** 14; -42. **[5.121]** $\pm3\sqrt{21}$. **[5.122]** $-1/5$; переписать: $f(2x+1)+f(3x)=0$, где $f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})$. **[5.123]** $[3;16]$. **[5.124]** $[0;1)$. **[5.125]** $(1;+\infty)$. **[5.126]** $\{-1\}\cup\left[1;\sqrt{3}\right]$. **[5.127]** $(2;+\infty)$. **[5.143]** $(0;1)$. **[5.144]** $(1/2;9/7)$. **[5.145]** Нет решения. **[5.146]** $(1;2)$. **[5.147]** $(-1;1)$. **[5.148]** $\left[-6;-4-\sqrt{3}\right]\cup\left[-4+\sqrt{3};1006\right)\cup(1007;+\infty)$.

Каждый косинус в душе синус, а косинусом он выглядит только из-за сдвига по фазе.

Народная мудрость

Глава 6

Тригонометрия

6.1. Тождества общие

Доказать тождество (для всех допустимых значений входящих в него углов):

6.1 [ЦыпПин]. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$

6.2 [ЦыпПин]. $\dfrac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

6.3 [ЦыпПин]. $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

6.4 [ЦыпПин]. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}3\alpha = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha.$

6.5 [ЦыпПин]. $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

6.6 [ЦыпПин]. $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2\sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}.$

6.7 [ЦыпПин]. $\sin^2 3\alpha - \sin^2 2\alpha = \sin 5\alpha\sin\alpha.$

6.8 [ЦыпПин]. $\dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = -\operatorname{tg}2\alpha.$

6.9 [ЦыпПин]. $\dfrac{1}{\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg}3\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{ctg}2\alpha.$

6.10 [ЦыпПин].

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

6.11 [ЦыпПин]. $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha.$

6.12 [ЦыпПин]. $\dfrac{\sin 3\alpha\cos^3\alpha + \cos 3\alpha\sin^3\alpha}{3} = \dfrac{\sin 4\alpha}{4}.$

6.13 [ЦыпПин]. $\dfrac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}3\alpha.$

6.14 [ЦыпПин].

$$\sin 2\alpha(1+\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha)+\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

6.15 [ЦыпПин]. $\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha.$

6.16 [ЦыпПин].

$$\cos(3\pi/2+4\alpha)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=$$
$$=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha.$$

6.17 [ЦыпПин]. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

6.18 [ЦыпПин]. $\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}-\frac{\sin x+\cos x}{\operatorname{tg}^2 x-1}=\sin x+\cos x.$

6.19 [ЦыпПин]. $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0.$

6.20 [ЦыпПин].

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=1.$$

6.21 [ЦыпПин].

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\operatorname{tg}(\alpha-3\pi/4)}-\frac{1}{4}\sin 2\alpha\left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]=-\sin^2\alpha.$$

6.22 [ЦыпПин]. $4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin(3\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}.$

6.23 [ЦыпПин]. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}=\sin\alpha.$

6.24 [ЦыпПин]. Упростить выражение для $\alpha\in[0;2\pi]$:

$$\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}.$$

6.25 [ЦыпПин]. Упростить выражение: $\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}\,\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}.$

6.26 [Шар-11]. $1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^3 x=\frac{\sqrt{2}\cos(\pi/4-x)}{\cos^3 x}.$

6.27 [Шар-11]. $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$

6.28 [Шар-11]. $\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 4\sin 3\alpha\cos^2\alpha.$

6.29 [Шар-11]. $\dfrac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \sin 2x.$

6.30 [Шар-11]. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha = 8\operatorname{ctg}8\alpha.$

6.31 [Шар-11]. $\dfrac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha.$

6.32 [Шар-11]. $\dfrac{\sqrt{2} - \sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right).$

6.33 [Шар-11]. $\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha} - 1 = \dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}.$

6.34 [Шар-11]. $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \operatorname{ctg}\dfrac{15}{2}\alpha.$

6.35 [Шар-11]. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right).$

6.2. Тождества условные

Доказать:

6.36 [Шар-11]. Если α, β, γ — углы треугольника, то

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

6.37 [Шар-11]. Если α, β, γ — углы треугольника, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$$

6.38 [Шар-11]. Если α, β, γ — углы треугольника, то

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

6.39 [Шар-11]. Если α, β, γ — углы треугольника, то

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0.$$

6.40 [ЦыпПин]. Если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

6.41. Если $\cos(\alpha+\beta)=0$, то $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$.

6.42 [ЦыпПин]**.** Если $\sin^2\beta=\sin\alpha\cos\alpha$, то $\cos 2\beta=2\cos^2(\pi/4+\alpha)$.

6.43 [ЦыпПин]**.** Если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то справедливо равенство:

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=q.$$

6.44 [ЦыпПин]**.** Если углы α и β связаны соотношением

$$\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{n}{m},\quad |n|<|m|,$$

то справедливо равенство

$$\frac{1+\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha}{m+n}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{m-n}.$$

6.45 [ЦыпПин]**.** Если $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ составляют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\beta.$$

6.46 [ЦыпПин]**.** Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

6.47 [ЦыпПин]**.** Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\sin^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

6.48 [Шар-11]**.** Если $\cos x=\cos\alpha\cos\beta$, то $\operatorname{tg}\dfrac{x+\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x-\alpha}{2}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}$.

6.49 [Шар-11]**.** Вычислите $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, если $\sin\alpha+\sin\beta=-21/65$, $\cos\alpha+\cos\beta=-27/65$, $5\pi/2<\alpha<3\pi$, $-\pi/2<\beta<0$.

6.50 [Шар-11]**.** Найдите $\cos 2\alpha$, если известно, что

$$2\operatorname{ctg}^2\alpha+7\operatorname{ctg}\alpha+3=0$$

и а) $3\pi/2<\alpha<7\pi/4$; б) $7\pi/4<\alpha<2\pi$.

6.51 [МГУ, МФ, 2002]**.** Найдите дроби

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}\quad\text{и}\quad\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma},$$

если числа α, β, γ выбраны так, что обе дроби положительны и одна из них втрое больше другой.

6.52a [НГУ, МФ, 2002]**.** Вычислить $\operatorname{tg} 2x$ в радикалах рациональных чисел, если $3\sin 2x + 3\cos 2x - 2\sin x - 2\cos x + 3 = 0$.

6.52b [НГУ, МФ, 2002]**.** Вычислить $\operatorname{tg} 2x$ в радикалах рациональных чисел, если $3 + 4\sin x + 4\cos x + 3\sin 2x + 3\cos 2x = 0$.

6.53 [Плеханов]**.** Найти $\big(3\sqrt{3}+4\big)\sin(2\alpha + \pi/6)$, если $|\cos\alpha| = 1/\sqrt{10}$ и $\pi/4 < \alpha < \pi/2$.

6.54 [Плеханов]**.** Найти $\cos(x/2)$, если $\sin x = -0{,}96$, $x \in (\pi; 3\pi/2)$.

6.55 [Плеханов]**.** Найти $\sin^4 x + \cos^4 x$, если $\sin x + \cos x = 1{,}2$.

6.56 [Плеханов]**.** Вычислить $\dfrac{\sin^4\alpha}{3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

6.57. Вычислить: $\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sin^3\alpha} - \dfrac{1}{\cos^3\alpha}\right)$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6.58 [МГУ, почв, 1998]**.** Найдите $\cos(\alpha/2)$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$ и что $\pi < \alpha < 2\pi$. Установите без помощи таблиц и калькулятора, какое из чисел больше: $|\cos(\alpha/2)|$ или $2/7$.

6.3. Тождества для конкретных углов

Доказать:

6.59 [Шар-11]**.** $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$.

6.60 [Шар-11]**.** $\operatorname{tg} 142^\circ 30' = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$.

6.61 [Шар-11]**.** $\dfrac{1}{\sin(\pi/15)} + \dfrac{1}{\sin(2\pi/15)} - \dfrac{1}{\sin(4\pi/15)} + \dfrac{1}{\sin(8\pi/15)} = 4\sqrt{3}$.

6.62 [Шар-11]**.** $\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{18} + \operatorname{tg}^2\dfrac{5\pi}{18} + \operatorname{tg}^2\dfrac{7\pi}{18} = 9$.

6.63 [Шар-11]**.** $\sin^4\dfrac{\pi}{16} + \sin^4\dfrac{3\pi}{16} + \sin^4\dfrac{5\pi}{16} + \sin^4\dfrac{7\pi}{16} = \dfrac{3}{2}$.

6.64 [Шар-11]**.** $\sin\dfrac{3\pi}{10} - \sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{1}{2}$.

6.65 [Шар-11]**.** $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$.

6.66 [Шар-11]**.** $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

6.67 [Шар-11]**.** $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9} + \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{9} + \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{9} - 8\sin\dfrac{2\pi}{9} = \sqrt{3}$.

6.68 [Шар-11]**.** $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 100^\circ + \operatorname{tg} 130^\circ + \operatorname{tg} 160^\circ = -2\sqrt{3}$.

6.69 [Шар-11]. $\cos\dfrac{\pi}{35}\cos\dfrac{2\pi}{35}\cos\dfrac{3\pi}{35}\cdots\cos\dfrac{17\pi}{35}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{17}$.

6.70 [Шар-11]. $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{11}+4\sin\dfrac{2\pi}{11}=\sqrt{11}$.

6.71 [МГУ, био, 1972]. Упростить выражение

$$\operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}(70^\circ-x)+\operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}(20^\circ-x)-\operatorname{ctg}(20^\circ-x)\operatorname{ctg}(70^\circ-x).$$

6.72 [Плеханов]. Вычислить $(1-\operatorname{ctg}^2 42^\circ)(1-\sin 6^\circ)/\cos 96^\circ$.

6.4. Сведение к алгебре

Решить уравнение:

6.73 [Шар-11]. $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$.

6.74 [Шар-11]. $\cos 2x-5\sin x-3=0$.

6.75 [Шар-11]. $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$.

6.76 [Шар-11]. $3\cos 2x+2\cos x=5$.

6.77 [Шар-11]. $1+\sin x\cos 2x=\sin x+\cos 2x$.

6.78 [Шар-11]. $5\operatorname{tg}^4 x-\dfrac{1}{\cos^4 x}=29$.

6.79 [Шар-11]. $1-\sin 2x=\cos x-\sin x$.

6.80 [Шар-11]. $\left(2\sin^4\dfrac{x}{2}-1\right)\dfrac{1}{\cos^4(x/2)}=2$.

6.81 [Шар-11]. $\dfrac{\cos^2 2x}{\cos x+\cos(\pi/4)}=\cos x-\cos\dfrac{\pi}{4}$.

6.82 [Шар-11]. $\sqrt[4]{8}\cos x-1=(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})\sqrt{\cos x}$.

6.83 [Шар-11]. $3(\cos x-\sin x)=1+\cos 2x-\sin 2x$.

6.84 [МГУ, хим, 1997]. $8\cos 2x+16\cos x+7=0$.

6.85a [НГУ, МФ, 1982]. Решить уравнение $4+2\cos^2 x=7\sin 2x$. Найти все корни, принадлежащие отрезку $[\pi/4; 3\pi/2]$.

6.85b [НГУ, МФ, 1982]. Решить уравнение $6+11\sin 2x=14\cos^2 x$. Найти все корни, принадлежащие отрезку $[-\pi/2; 3\pi/4]$.

6.86a [НГУ, МФ, 1989]. $2\operatorname{tg}(\pi/4-x)=3\operatorname{tg}2x+5$.

6.86b [НГУ, МФ, 1989]. $\operatorname{tg}(x+\pi/4)\operatorname{ctg}(\pi/4-x)=2$.

6.87a [НГУ, ест, 1980]. $\cos^2 x(1-\sin x)=1+\sin^3 x$.

6.87b [НГУ, ест, 1980]. $\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x=2(\operatorname{ctg}2x+1)\sin 2x$.

6.88 [МГУ, био, 1970]. $2\sin 3x \sin x + (3\sqrt{2} - 1)\cos 2x = 3$.

6.89a [НГУ, МФ, 2001]. Найти множество значений функции

$$f(x) = 2\cos 2x + 2\cos x + 1.$$

6.89b [НГУ, МФ, 2001]. Найти множество значений функции

$$f(x) = \cos 2x - 3\sin x - 2.$$

6.90a [НГУ, ест, 2002]. $1 + \cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$.

6.90b [НГУ, ест, 2002]. $3\sin 2x + 3\cos 2x - 2\sin x - 2\cos x + 3 = 0$.

6.91 [МИФИ]. $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$.

6.92a [НГУ, ест, 2002].

$$\sin(2x - \pi/3) - \sin(4x + \pi/3) = 2\sin(x - 2\pi/3).$$

6.92b [НГУ, ест, 2002].

$$\cos(4x + \pi/6) - \cos(2x - \pi/6) = -2\cos(x - \pi/3).$$

6.93a [НГУ, ест, 2002]. $\cos 2x + 2 = 1/\cos^2 x$.

6.93b [НГУ, ест, 2002]. $5 + 2\cos 2x = 1/\cos^2 x$.

6.94 [НГУ, МФ, 2007]. $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{2}{\sin^2 x} = 1$.

6.95a [НГУ, 1995]. $\dfrac{1}{\cos^2 x} + 4\cos 2x = 5$.

6.95b [НГУ, 1995]. $1 + 5\cos 2x = \operatorname{ctg}^2 x$.

6.96* [Шар-11]. $\operatorname{tg}\left(2x + \dfrac{5\pi}{3}\right) = 2\operatorname{ctg} 2x + \dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}\dfrac{13\pi}{6}$.

6.97* [Шар-11]. $\operatorname{ctg}\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{2\operatorname{ctg} x + 3}{\operatorname{tg}(x + \pi/6)}$.

6.98a* [НГУ, 2003]. $\operatorname{tg}(x + \pi/6) = 4\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}$.

6.98b* [НГУ, 2003]. $\operatorname{tg}(x + \pi/3) = \operatorname{ctg} x - 1/\sqrt{3}$.

6.5. Однородные

6.99 [Шар-11]. $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$.

6.100 [ЦыпПин]. $8\sin^2 x - 3\cos^2 x = 4$.

6.101 [ЦыпПин]. $4\cos^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin x+3\sin^2\dfrac{x}{2}=3.$

6.102 [ЦыпПин]. $2\sin^3 x+2\cos x\sin^2 x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0.$

6.103 [ЦыпПин].

$$\sin^6 2x+\cos^6 2x=\frac{3}{2}\left(\sin^4 2x+\cos^4 2x\right)+\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right).$$

6.104 [ЦыпПин]. $\sin^8 x+\cos^8 x=\cos^2 2x.$

6.105 [ЦыпПин]. $\cos^6 x+\sin^6 x-\cos^2 2x=1/16.$

6.106a [НГУ, МФ, 1986]. $3\sin^2 x=\cos 2x+4\sin 2x.$

6.106b [НГУ, МФ, 1986]. $2\cos 2x+5\cos^2 x=8\sin 2x-6.$

6.107a [НГУ, 2000]. $\cos x+2/\cos x=5\sin x.$

6.107b [НГУ, 2000]. $\sin x-2/\sin x=3\cos x.$

6.6. Сумма-произведение

6.108 [Шар-11]. $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0.$

6.109 [Шар-11]. $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\dfrac{1}{4}\sin 12x.$

6.110 [Шар-11]. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0.$

6.111 [Шар-11]. $\cos 3x+\sin x\sin 2x=0.$

6.112 [Шар-11]. $\cos^2 2x+\cos^2 3x=1.$

6.113 [Шар-11]. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2.$

6.114 [Шар-11]. $\cos 3x=\sin 5x.$

6.115 [Шар-11]. $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{5}\right)+\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0.$

6.116 [Шар-11]. $\sin 4x+2\sin^2 7x=1.$

6.117 [Шар-11]. $\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0.$

6.118 [Шар-11]. $\cos 3x\sin x+2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=1.$

6.119 [Шар-11]. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\sqrt{3}.$

6.120 [Шар-11]. $4\cos 3x=15\sin 2x.$

6.121 [Шар-11]. $\sqrt{2}\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0.$

6.122’ [Шар-11]. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} 4x=0.$

6.123 [Шар-11]. $\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x+\dfrac{1}{\sin x}\right)=1.$

6.124 [Шар-11]. $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = 2\operatorname{ctg} 4x$.

6.125 [Шар-11]. $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$.

6.126 [Шар-11]. $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x} + \dfrac{\sin 3x}{1 - \cos 3x} = -\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

6.127 [Шар-11]. $4\sin 2x \sin 5x \sin 7x = \sin 4x$.

6.128 [МГУ, ФФ, 1997]. $\cos 6x + 4\cos 2x = 0$.

6.129 [МГУ, био, 1997]. $\sin 2x - \sin 4x = (\cos 2x + 1)\cos 3x$.

6.130 [МГУ, геол, 1997]. $3\cos 8x = 14(\sin 2x - \cos 2x)^2 - 3$.

6.131 [Шар-11]. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} 3x + \operatorname{ctg} 4x = 0$.

6.132 [ЦыпПин]. $\operatorname{tg}(x + \alpha) + \operatorname{tg}(x - \alpha) = 2\operatorname{ctg} x$.

6.133a [НГУ, МФ, 1976]. $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \dfrac{2\cos x}{\sin 3x}$.

6.133b [НГУ, МФ, 1976]. $\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} = 8\cos 3x + \dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$.

6.133c [НГУ, МФ, 1976]. $2\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 3x$.

6.134a [НГУ, МФ, 1977]. $\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x \cdot \operatorname{tg}^2 x = 1$.

6.134b [НГУ, МФ, 1977]. $(2 + \operatorname{ctg} 3x)\operatorname{tg} x = 1$.

6.134c [НГУ, МФ, 1977]. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

6.134d [НГУ, МФ, 1977]. $\dfrac{\cos 2x + 2\sin 2x + 4\cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x$.

6.135a [НГУ, МФ, 1978]. $\dfrac{\cos x + \sqrt{2}\cos 2x + \cos 3x}{\sin x + \sqrt{2}\sin 2x + \sin 3x} = \sin 4x$.

6.135b [НГУ, МФ, 1978]. $\dfrac{\sin x \sin 5x - \cos x \cos 3x}{\cos 2x} = 2\sin^2 x$.

6.135c [НГУ, МФ, 1978]. $\dfrac{\cos x + \cos 2x - \cos 3x - \cos 4x}{\sin 4x + \sin 3x - \sin 2x - \sin x} = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

6.136a [НГУ, МФ, 1985]. $\sin 2x + \cos 6x = 1 - 2\cos^2\left(5x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

6.136b [НГУ, МФ, 1985]. $\sin 7x - \sin 2x = 2\sin^2\left(6x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$.

6.137a [НГУ, МФ, 1996]. $\cos 3x = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

6.137b [НГУ, МФ, 1996]. $\sin 3x = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

6.138a [НГУ, ест, 1975]. $3\cos x = \dfrac{1}{\cos 3x}$.

6.138b [НГУ, ест, 1975]. $\sin 6x - \cos x = \cos 3x - \sin 4x$.

6.139a [НГУ, ест, 1976]. $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 7x + \cos^2 8x$.

6.139b [НГУ, ест, 1976]. $\cos 2x + \operatorname{tg} x = 1 - \operatorname{tg} x \cos 2x$.

6.139c [НГУ, ест, 1976]. $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x$.

6.140a [НГУ, ест, 1977]. $(2 + \operatorname{ctg} 3x) \operatorname{tg} x = 1$.

6.140b [НГУ, ест, 1977]. $\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x \ \operatorname{tg}^2 x = 1$.

6.141a [НГУ, ест, 1978]. $2\sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin(2x - \pi/6)}{\sin(x - \pi/3)}$.

6.141b [НГУ, ест, 1978]. $\dfrac{\cos x - 2\sin x}{\cos x} = \cos 2x - \sin 2x$.

6.141c [НГУ, ест, 1978]. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{2} \operatorname{ctg} x + \cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

6.142a [НГУ, ест, 1982]. $\sin\left(4x + \dfrac{\pi}{4}\right) \sin 6x = \sin\left(10x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

6.142b [НГУ, ест, 1982]. $1 + 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin 8x = \sin 5x$.

6.142c [НГУ, ест, 1982]. $\cos 10x + 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin 6x$.

6.143a [НГУ, ест, 1988]. $4\sqrt{2} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \cos 2x - 2\sin^2 x = \sin 2x$.

6.143b [НГУ, ест, 1988]. $\operatorname{tg} x + 1 = 2\sin 2x$.

6.143c [НГУ, ест, 1988]. $\dfrac{\sqrt{2}\sin(x + \pi/4)}{\cos x} = \sin 2x + 2\cos^2 x$.

6.144 [МГУ, био, 1973]. $2\cos 2x - 1 = (2\cos 2x + 1) \operatorname{tg} x$.

6.145 [МГУ, почв, 1972]. $(\cos x - \sin x)\left(1 + \dfrac{1}{2}\sin 2x\right) + \sin x = 2\cos^2 x$.

6.146’ [МГУ, хим, 2001]. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \ \operatorname{tg} 2x \ \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x$.

6.147 [МГУ, био, 1999]. $8\cos 6x - 12\sin 3x = 3$.

6.148 [МГУ, АзАфр, 1999]. $\sin 9x = 6\sin 5x \cos 2x - \sin x$.

6.149 [МГУ, гео, 1998]. $5 + 1/\sin^2(3x) = 7\operatorname{ctg}(3x)$.

6.150 [МГУ, ФФ, 2002]. $\cos 8x \ \operatorname{ctg} x + 2\sin^2 4x = \operatorname{ctg} x$.

6.151 [МГУ, ФФ, 2002]. $\cos 5x - \cos 15x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} 5x$.

6.152 [МГУ, био, 2002]. $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1$.

6.153* [МГУ, псих, 2002]. $\cos 6x - 3\cos 5x + \cos 4x - 4\cos x + 5 = 0$.

6.154a [НГУ, ест, 2006]. $\operatorname{ctg} x \cdot \sin 2x = 2 + \cos(x + 13\pi/2)$.

6.154b [НГУ, ест, 2006]. $\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = 2 + \sin(x - 7\pi/2)$.

6.155’ [Шар-11]. $\dfrac{\sin^8 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^8 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{4}$.

6.156’ [Шар-11]. $\sin 3x = 8\sin^3 x$.

6.157* [Шар-11]. $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 3\operatorname{ctg} 3x + 4\operatorname{ctg} 4x = 0$.

6.158’ [Шар-11]. $\dfrac{\cos 3x}{\sin 3x - 2\sin x} = \operatorname{tg} x$.

6.159’ [Шар-11]. $\operatorname{tg}(x + \pi/8)\operatorname{ctg}(3x - \pi/8) = 5/9$.

6.160’ [Шар-11]. $\operatorname{tg}(x - \pi/6) + 8\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}(x + \pi/6) = 0$.

6.161 [Шар-11]. $\cos 2x + \sin 2x + \cos x - \sin x = 1$.

6.162’ [Шар-11]. $2\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = \sin 2x + 3\sin x$.

6.163’ [Шар-11]. $2/\sin 2x = \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 3x$.

6.164’ [Шар-11]. $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} 2x = \sin x\,(1 + \operatorname{tg} x\ \operatorname{tg}(x/2))$.

6.165’ [Шар-11]. $2\cos 3x = 3\sin x + \cos x$.

6.166* [Шар-11]. $4\operatorname{tg} 4x - 4\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x\ \operatorname{tg} 3x\ \operatorname{tg} 4x$.

6.167* [Шар-11]. $2\cos 2x(\operatorname{ctg} x - 1) = 1 + \operatorname{ctg} x$.

6.168* [Шар-11]. $\dfrac{2\cos x + 2\sin x - 1}{2\cos x - 2\sin x - 1}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3} + 2$.

6.169’ [Шар-11]. $1 + \cos^2 x + 2\cos x\cos^2 5x = \sin^2 5x$.

6.170’ [Шар-11]. $\sqrt{2}\cos(3x - \pi/4) = \cos 3x\ \operatorname{ctg} 3x\,(\operatorname{ctg} 3x + 1)$.

6.171’ [Шар-11]. $2\cos 13x + 3\cos 3x + 3\cos 5x - 8\cos x\cos^3 4x = 0$.

6.172* [Шар-11]. $5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0$.

6.173* [Шар-11]. $8\operatorname{tg} 8x + 4\operatorname{tg} 4x + 2\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 16 + \operatorname{ctg} x$.

6.174’ [Шар-11]. $4\cos x + 1 + 4\cos 3x\cos x = \cos 4x$.

6.175* [Шар-11]. $1/2 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

6.176* [Шар-11]. $\sin^3 2x + \sin^3(\pi/3 - 2x) + \sin^3(2x - 2\pi/3) = 0$.

6.177* [Шар-11]. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{5\pi}{12}\right) = 0$.

6.178* [Шар-11]. $(1 + \cos x)(1 + \cos 2x)(1 + \cos 3x) = 1/2$.

6.179* [Шар-11]. $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \dfrac{1}{8}\cos 15x$.

6.180 [МГУ, ФФ, 1997]. $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x$.

6.181’ [МГУ, ФФ, 1970].

$$\frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos^2 2x) - 1 = 2\sin 2x - 2\sin x - \sin x\sin 2x.$$

6.182’ [МГУ, ФФ, 1971]. $\cos 3x + \sin x\sin 2x = 2\cos^3 x + 2\operatorname{tg} x$.

6.183 [МГУ, ФФ, 2001]. $3\cos 3x + 2/\cos x = 3\cos x$.

6.184* [МФТИ, 2001]. $\dfrac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \dfrac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3\sin 2x \cos x$.

6.185* [МФТИ, 2001].

$$\frac{\sin 4x + \sin 3x - \sin 2x - \sin x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2}\sin x \sin(x + \pi/4)}.$$

6.186 [МГУ, ФФ, 1999]. $\cos 7x + \cos 3x + 2\sin^2 x = 1$.

6.187' [МГУ, ФФ, 1998]. $4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x = \sin 2x$.

6.188* [МГУ, хим, 1998]. $\sin x \cdot (\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 x = 2$.

6.189** [Шар-11]. $\cos x \sin 2x \cos 4x + \sin x \sin 2x \cos 4x = \sqrt{2}/8$.

6.190** [Шар-11]. $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$.

6.7. Понижение степени

6.191 [Шар-11]. $\sin^4 x + \cos^4 x = 5/8$.

6.192 [Шар-11]. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 1/2$.

6.193 [Шар-11]. $\sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x + \sin 2x = 4$.

6.194 [Шар-11]. $\cos^2(x/2) + \cos^2(3x/2) - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$.

6.195 [Шар-11]. $\sin 2x = \sin^4 x + \cos^4 x$.

6.196 [Шар-11]. $(\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 3 - \sin 4x$.

6.197 [Шар-11]. $\sin^7 x \cos^3 x - \cos^7 x \sin^3 x = \cos 2x$.

6.198 [Шар-11]. $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$.

6.199 [Шар-11]. $\sin^4 x + \sin^4(x + \pi/4) + \sin^4(x - \pi/4) = 9/8$.

6.200 [Шар-11].

$$\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x = 1.$$

6.201 [Шар-11]. $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{15}{8}\cos 2x - \dfrac{1}{2}$.

6.202 [Шар-11]. $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = \cos 2x$.

6.203 [Шар-11]. $\sin^8 x - \cos^8 x = \dfrac{1}{2}\cos^2 2x - \dfrac{1}{2}\cos 2x$.

6.204 [Шар-11]. $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + \dfrac{3}{8} = 0$.

6.205 [ЦыпПин]. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \dfrac{29}{16}\cos^4 2x$.

6.206 [ЦыпПин]. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + 1/4$.

6.207 [ЦыпПин]. $\cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^6 x$.

6.208 [МГУ, АзАфр, 1998]. $\sin^2 x + \sin^2 6x = 1$.

6.209a [НГУ, 1994]. $\sin^6 x + 2\sin^4 x + 8\cos^2 x = 2\cos^6 x + 5\cos^4 x + 3$.

6.209b [НГУ, 1994]. $\sin^6 x + 2\cos^2 x - 1 = \cos^6 x$.

6.209c [НГУ, 1994]. $1 + \cos^6 x + 2\cos^4 x = \sin^6 x + 4\cos^2 x$.

6.209d [НГУ, 1994]. $-1 + \sin^6 x + 2\cos^4 x - \cos^6 x = 2\sin^4 x$.

6.8. Вспомогательный аргумент

6.210 [Шар-11]. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$.

6.211 [Шар-11]. $\sin 3x + \sin^3 x = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x$.

6.212 [Шар-11]. $3 + 2\sin 3x \sin x = 3\cos 2x$.

6.213 [Шар-11]. $\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} - 1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\cos x$.

6.214 [Шар-11]. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x = (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 1$.

6.215 [Шар-11]. $\cos 4x + \sin^2 3x = 1$.

6.216 [Шар-11]. $2\cos x + \sqrt{5}\sin x = \cos 5x + 2\sqrt{2}\sin 5x$.

6.217 [ЦыпПин]. $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$.

6.218 [ЦыпПин]. $\sin 11x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x + \dfrac{1}{2}\cos 7x = 0$.

6.219 [ЦыпПин]. $\sin 10x + \cos 10x = \sqrt{2}\sin 15x$.

6.220 [ЦыпПин]. $4\cos^2 x = 2 + \dfrac{1}{2}\cos 2x\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 2x} + \dfrac{1}{\sin 2x}\right)$.

6.221 [ЦыпПин]. $4\sin 3x + 3\cos 3x = 5.2$.

6.222 [ЦыпПин]. $\cos x = \sqrt{3}\sin x + 2\cos 3x$.

6.223 [ЦыпПин]. $\cos 2x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$.

6.224a [НГУ, МФ, 1995]. $2\cos 3x + \cos(9\pi/2 - x) = \sqrt{3}\cos x$.

6.224b [НГУ, МФ, 1995]. $\sin x = \sqrt{2}\sin 5x + \sin(x + 5\pi/2)$.

6.224c [НГУ, МФ, 1995]. $2\sin 5x + \sqrt{3}\sin(5\pi/2 - x) = \sin x$.

6.225a [НГУ, ест, 1979]. $2\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin x - 6\cos x - 1 = 0.$

6.225b [НГУ, ест, 1979]. $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 5\cos x + 5\sqrt{3}\sin x - 6 = 0.$

6.226a [НГУ, ест, 1981]. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos 5x.$

6.226b [НГУ, ест, 1981]. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin 7x.$

6.227a [НГУ, МФ, 2001]. $3\operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x + \dfrac{\sqrt{3}}{\sin x}.$

6.227b [НГУ, МФ, 2001]. $\dfrac{\cos x - 1}{\sin x} = 3\operatorname{tg} x + \dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}.$

6.228 [Потапов]. $\sin\left(3x - \dfrac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \dfrac{7\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right).$

6.229 [МГУ, геогр, 1998]. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 + 3\cos^2(2x + \pi/6).$

6.230a [НГУ, ест, 2004]. $\dfrac{3}{\sin x} - \dfrac{2}{\cos x} = \sqrt{52}.$

6.230b [НГУ, ест, 2004]. $\dfrac{2}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{20}.$

6.231a [СУНЦ НГУ, 1998]. $\dfrac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x = \cos x + \sqrt{3}\sin x.$

6.231b [СУНЦ НГУ, 1998]. $\dfrac{1}{\sin x} = \sqrt{3}\cos x + \sin x + \operatorname{ctg} x.$

6.232' [Шар-11]. $\dfrac{3\sqrt{3}\cos 2x + 3\sin 2x}{\sqrt{3}\cos x + \sin x} = 4\cos x - \dfrac{1}{\cos x}.$

6.233' [Шар-11]. $8\cos x = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sin x}.$

6.234' [Шар-11]. $\sqrt{3}(2 - \cos x) + 4\sin 2x = \sin x.$

6.235' [Шар-11]. $\sqrt{3}(3 - 2\cos x) - 2(3\sin 2x - \sin x) = 0.$

6.236' [Шар-11]. $20\cos^2 x = 5 + \sin x + \sqrt{3}\cos x.$

6.237' [Шар-11]. $2\sin 3x + \sin x + \sqrt{3}(\cos x - \sin 2x) = \cos 2x.$

6.238' [Шар-11]. $\dfrac{1 - \sin x + \sqrt{3}\sin 2x}{2\sqrt{3}\cos x - 3} = \dfrac{1}{3} + \sin x.$

6.9. Замена $t = \sin x \pm \cos x$

6.239 [Шар-11]. $1 + \sin 2x = \cos x - \sin x$.

6.240 [Шар-11]. $\left(1 + \dfrac{1}{\sin x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\cos x}\right) = 3 + 2\sqrt{2}$.

6.241 [ЦыпПин]. $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$.

6.242 [ЦыпПин]. $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$.

6.243 [ЦыпПин]. $\sin x + \cos x - 2\sin x \cos x = 1$.

6.244 [ЦыпПин]. $\sin x + \cos x - 2\sqrt{2}\sin x \cos x = 0$.

6.245 [НГУ, ест,1977]. $1 + \operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}\sin x$.

6.246a [НГУ, ест,2005]. $6\cos^3 x + 7\sin x = 6\sin^3 x + 7\cos x$.

6.246b [НГУ, ест,2005]. $4\cos^3 x - 5\sin x = 5\cos x - 4\sin^3 x$..

6.247' [Шар-11]. $\sin^3 x + \cos^3 x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x$.

6.248a* [СУНЦ НГУ,1999]. $0.9 + 0.1\sin x - \sin^2 x + \cos^3 x = 0$.

6.248b* [СУНЦ НГУ,1999]. $1.7 - 2.7\cos x + \cos^2 x - \sin^3 x = 0$.

6.248c* [СУНЦ НГУ,1999]. $1.9 + 2.9\sin x + \sin^2 x - \cos^3 x = 0$.

6.248d* [СУНЦ НГУ,1999]. $0.85 - 0.15\cos x - \cos^2 x + \sin^3 x = 0$.

6.249a [СУНЦ НГУ,1996]. $2\sin 2x - 5\sin x - 5\cos x + 4 = 0$.

6.249b [СУНЦ НГУ,1996]. $\sin 2x - 4\sin x + 4\cos x - 3 = 0$.

6.10. Отбор корней

6.250 [Шар-11]. $\cos^2 7x + \sin^2 6x = 0$.

6.251 [Шар-11]. $\cos x(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x) = 4\sin 3x \sin 4x$.

6.252 [Шар-11]. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$.

6.253 [Шар-11]. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 5x$.

6.254* [Шар-11]. $\operatorname{tg}\left(5x - \dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1 + \operatorname{ctg}(3x - \pi/8)}{1 - \operatorname{ctg}(3x - \pi/8)}$.

6.255* [Шар-11]. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{7}x + \dfrac{\pi}{7}\right) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2}{3}x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

6.256 [Шар-11]. $\operatorname{tg} 2x + \dfrac{1}{\sin x} = \operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{\sin 5x}$.

6.257 [Шар-11]. $\dfrac{1}{\sin 2x} + \dfrac{1}{\sin 4x} + \dfrac{1}{\sin 8x} = 0$.

6.258 [Шар-11]. $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\sin 2x}=\dfrac{1}{\sin 3x}$.

6.259 [Шар-11]. $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\sin 2x}=\dfrac{1}{\sin 4x}$.

6.260 [Шар-11]. $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos 2x\sin 3x}+\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{\sin x\cos 2x}$.

6.261' [Шар-11]. $3\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}3x=3\operatorname{ctg}2x+6\operatorname{ctg}4x$.

6.262a [Шар-11]. $\dfrac{\cos 2x-\cos 4x-4\sin 3x-2\sin x+4}{2\sin x-1}=0$.

6.262b [Шар-11]. $\dfrac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x}{\sin 2x-1}=1$.

6.263 [МГУ, МФ, 1997]. $(2\sin^2 x-3\sin x+1)\cdot\sqrt{\operatorname{tg}x}=0$.

6.264a [НГУ, ФФ, 1999]. $\dfrac{2\cos 2x-1}{\sin 3x}=\dfrac{3-4\cos^2 x}{\sin x}$.

6.264b [НГУ, ФФ, 1999]. $\dfrac{1-2\cos 2x}{\sin x}=\dfrac{3-4\cos^2 x}{\sin 3x}$.

6.264c [НГУ, ФФ, 1999]. $\dfrac{1+2\cos 2x}{\cos 3x}=\dfrac{4\cos^2 x-1}{\cos x}$.

6.265a [НГУ, МФ, 1997]. $\dfrac{\sin 4x}{1-2\cos 2x}=\dfrac{\cos 4x}{\sqrt{3}-2\sin 2x}$.

6.265b [НГУ, МФ, 1997]. $\dfrac{\cos 6x}{1+2\cos 2x}=\dfrac{\sin 6x}{\sqrt{3}+2\sin 2x}$.

6.265c [НГУ, МФ, 1997]. $\dfrac{\cos 4x}{\sqrt{3}+2\cos x}=\dfrac{\sin 4x}{1+2\sin x}$.

6.266a [НГУ, ест, 1983]. $\sin 2x\cos x=\operatorname{tg}3x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos 2x\sin x$.

6.266b [НГУ, ест, 1983]. $\operatorname{ctg}2x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1=2\cos^2 x$.

6.267a [НГУ, МФ, 2000]. $\dfrac{\operatorname{ctg}5x\operatorname{ctg}4x}{\operatorname{ctg}5x-\operatorname{ctg}4x}=\dfrac{\operatorname{ctg}3x\operatorname{ctg}2x}{\operatorname{ctg}3x-\operatorname{ctg}2x}$.

6.267b [НГУ, МФ, 2000]. $\dfrac{\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x}=\dfrac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}2x}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2x}$.

6.268a [НГУ, ест, 2001]. $(2\cos 2x+7\cos x)\sqrt{2\sin x+1}=0$.

6.268b [НГУ, ест, 2001]. $(3\cos 2x+10\sin x+1)\sqrt{1-2\cos x}=0$.

6.269a [НГУ, ест, 2002]. $\dfrac{7+10\cos x}{5\cos x+3}=\dfrac{7+8\operatorname{ctg}x}{4\operatorname{ctg}x+3}$.

6.269b [НГУ, ест, 2002]. $\dfrac{9-10\cos x}{5\cos x-4}=\dfrac{9-6\operatorname{ctg}x}{3\operatorname{ctg}x-4}$.

6.270a [СУНЦ НГУ, 2002]. $\dfrac{5\cos 2x - 9\cos x}{\operatorname{ctg}(x+\pi/3)} = 2\operatorname{tg}(x+\pi/3)$.

6.270b [СУНЦ НГУ, 2002]. $\dfrac{3\cos 2x + 7\sin x}{\operatorname{tg}(x-\pi/3)} = -2\operatorname{ctg}(x-\pi/3)$.

6.271a [НГУ, МФ, 2003]. $\dfrac{\sin 4x + \sqrt{3}\cos 4x}{\sin 3x} = 2$.

6.271b [НГУ, МФ, 2003]. $\dfrac{\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x}{\cos 3x} = 2$.

6.272a [НГУ, ест, 2003]. $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} 2x$.

6.272b [НГУ, ест, 2003]. $3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$.

6.273a [НГУ, МФ, 2006]. $\dfrac{\cos(4x+5\pi/6)+\cos(2x+\pi/6)}{\sin(\pi/6-x)} = 2$.

6.273b [НГУ, МФ, 2006]. $\dfrac{\sin(4x-\pi/3)+\sin(2x+\pi/3)}{\cos(x+2\pi/3)} = -2$.

6.274a [СУНЦ НГУ, 2006]. $\dfrac{\cos 10x + \cos 6x}{\sin 5x - \sin x} = \dfrac{\sin 5x + \sin x}{\cos 10x - \cos 6x}$.

6.274b [СУНЦ НГУ, 2006]. $\dfrac{\cos 6x - \cos 4x}{\sin 3x + \sin x} = \dfrac{\sin 3x - \sin x}{\cos 6x + \cos 4x}$.

6.275a [НГУ, МФ, 2006]. $\cos 6x = \cos 7x \cdot \operatorname{tg} 7x$.

6.275b [НГУ, МФ, 2006]. $\sin 5x = \operatorname{ctg} 6x \cdot \sin 6x$.

6.276a [НГУ, МФ, 2005]. $\dfrac{\cos 3x - \cos^3 x}{\sin 3x + \sin^3 x} = \operatorname{tg} 7x$.

6.276b [НГУ, МФ, 2005]. $\dfrac{\sin 3x + \sin^3 x}{\cos 3x - \cos^3 x} = \operatorname{ctg} 7x$.

6.277a [НГУ, ест, 2006]. $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{ctg}(5\pi/2 - x)$.

6.277b [НГУ, ест, 2006]. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(3x - 7\pi/2)$.

6.278a [НГУ, МФ, 2006]. $\dfrac{\sin(2x-\pi/3)-\sin(4x+\pi/3)}{\sin(x-2\pi/3)} = 2$.

6.278b [НГУ, МФ, 2006]. $\dfrac{\cos(4x+\pi/6)-\cos(2x-\pi/6)}{\cos(x-\pi/3)} = -2$.

6.279a [НГУ, ест, 2006]. $\operatorname{ctg} x \cdot \sin 2x = 2 + \cos(x + 13\pi/2)$.

6.279b [НГУ, ест, 2006]. $\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = 2 + \sin(x - 7\pi/2)$.

6.280a [СУНЦ НГУ, 2004]. $\dfrac{1}{\sin 4x\cos 3x} = \dfrac{1}{\sin 2x\cos x} + \dfrac{1}{\cos 3x\sin 2x}$.

6.280b [СУНЦ НГУ, 2004]. $\dfrac{1}{\sin x\cos 2x} + \dfrac{1}{\sin 3x\cos 4x} = \dfrac{1}{\cos 2x\sin 3x}$.

6.281a* [НГУ, МФ, 1999]. $\dfrac{\sin(x/7)}{\cos(x/6)} = -1.$

6.281b* [НГУ, МФ, 1999]. $\dfrac{\sin(x/5)}{\cos(x/6)} = 1.$

6.281c* [НГУ, МФ, 1999]. $\dfrac{\sin(x/5)}{\cos(x/4)} = -1.$

6.282* [Шар-11]. $\dfrac{1-\sin(3x/7+11\pi/14)}{1+\sin(3x/7+11\pi/14)} = \dfrac{1-\sin(2x/3-\pi/2)}{1+\sin(2x/3-\pi/2)}.$

6.283* [Шар-11]. $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\cos x\cos 2x} = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\cos 2x\cos 3x}.$

6.284* [Шар-11]. $\dfrac{\sin 3x}{\sin x\sin 2x} - \dfrac{\sin 6x}{\sin 2x\sin 4x} + \dfrac{\sin 12x}{\sin 4x\sin 8x} = 0.$

6.11. С модулями и радикалами

6.285 [МГУ, почв,1997]. $2\sin^2 x - \dfrac{|\sin x|}{\cos x} = 0.$

6.286 [Шар-11]. $|\cos x| = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{5}\right).$

6.287 [Шар-11]. $\left|\operatorname{ctg}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right| = \dfrac{1}{\cos^2 2x} - 1.$

6.288’ [Шар-11]. $\sqrt{-\cos x} = \sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}.$

6.289’ [Шар-11]. $\sqrt{\cos x} = \sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}.$

6.290 [Шар-11]. $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0.$

6.291 [Шар-11]. $\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2}\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right).$

6.292 [Шар-11]. $\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{9}\operatorname{ctg} x = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1.$

6.293’ [Шар-11]. $\cos x - 2\sin 2x - \cos 3x = |1 - 2\sin x - \cos 2x|.$

6.294 [Шар-11]. $\sin x + \cos x = \sqrt{1+\operatorname{tg} x}.$

6.295 [Шар-11]. $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0.$

6.296 [Шар-11]. $\sqrt{1-2\sin 4x} + \sqrt{6}\cos 2x = 0.$

6.297 [Шар-11]. $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0.$

6.298 [Шар-11]. $\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x} = 1 + \cos x.$

6.299’ [Шар-11]. $\sqrt{\dfrac{1-4\cos^2 3x}{8\cos(2x-2\pi/3)}} = \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

6.300 [Шар-11]. $\sqrt{\dfrac{5}{4}-\sin^2 x+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)} = \cos x+\dfrac{1}{2}$.

6.301 [Шар-11]. $2\sin(3x+\pi/4) = \sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}$.

6.302 [Шар-11]. $(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}(x/2)}-2+\sin x = 2\cos x$.

6.303 [Шар-11]. $\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{1+\sin 2x} = 2\sqrt{\sin x+\cos x}$.

6.304 [Шар-11]. $\sqrt{\sin 3x+\cos x-\sin x} = \sqrt{\cos x-\sin 2x}$.

6.305’ [Шар-11].

$$\sqrt{\cos 3x+\sqrt{3}\sin 3x-3\cos^2 x+\cos x+13/4} = \sqrt{3}\sin x+1/2.$$

6.306’ [Шар-11]. $\sqrt{\dfrac{19}{2}-5\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}+2\sin x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}-2\cos x$.

6.307a [НГУ, МФ, 1975]. $\sqrt{\sin 3x+\sin x+1} = \sin x-\cos x$.

6.307b [НГУ, МФ, 1975]. $2\sin x = \sqrt{2+3\operatorname{tg} 2x}$.

6.307c [НГУ, МФ, 1975]. $\sqrt{\cos 2x-\cos 3x} = \sqrt{2}\sin x$.

6.308a [НГУ, МФ, 1977]. $\sqrt{1+2(\sin x+\sin 3x)} = \dfrac{1}{\sin x}$.

6.308b [НГУ, МФ, 1977]. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{ctg} x = \sqrt{1+4\sin 2x\cos x}$.

6.309a [НГУ, МФ, 1978]. $2\cos x-\sin 3x = \dfrac{\cos 3x\cos x}{|\sin x|}$.

6.309b [НГУ, МФ, 1978]. $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\sqrt{2}|\cos x|} = \sin 2x+\cos 2x$.

6.309c [НГУ, МФ, 1978]. $\cos 3x|\cos x|+\cos 2x = 0$.

6.310a [НГУ, МФ, 1979].

$$\sqrt{\sqrt{3}\cos x+\sin x-2}+\sqrt{\operatorname{ctg} 3x+\sin^2 x-\frac{1}{4}} = \sin\frac{3x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6.310b [НГУ, МФ, 1979]. $\sqrt{4\cos^2 x-2|\cos 3x|-2} = 2\sin x$.

6.310c [НГУ, МФ, 1979]. $\operatorname{tg} 3x = \dfrac{\sqrt{2-3\sin^2 x}}{\cos x}$.

6.310d [НГУ, МФ, 1979]. $\operatorname{tg} x\ \operatorname{tg} 3x = \sqrt{\operatorname{tg}^4 x-7\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 3x+8}$.

6.311a [НГУ, МФ, 1995]. $\sqrt{2\operatorname{tg}^2 x-1+\cos 2x}+\sqrt{2}\operatorname{tg}^2 x\sin 2x = 0$.

6.311b [НГУ, МФ, 1995].
$$\sqrt{1+\cos^2 x\sin^2 x-\cos^6 x-\sin^6 x}+\sin 4x=0.$$

6.312a' [НГУ, МФ, 1996]. $2\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{1+8\sin x}.$

6.312b' [НГУ, МФ, 1996]. $\sqrt{3\cos x-6\sin x}=\sqrt{10}\sin\dfrac{x}{2}.$

6.312c' [НГУ, МФ, 1996]. $2\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{11-8\sin x}.$

6.313a' [МФТИ, МФ, 1991]. $\sqrt{8\sin x+\dfrac{13}{3}}=2\cos x+2\operatorname{tg} x.$

6.313b' [МФТИ, МФ, 1991]. $\sqrt{5\operatorname{tg} x+10}=\dfrac{5}{2}\sin x+\dfrac{1}{\cos x}.$

6.313c' [МФТИ, МФ, 1991]. $\sqrt{7-4\sqrt{2}\sin x}=2\cos x-\sqrt{2}\operatorname{tg} x.$

6.313d' [МФТИ, МФ, 1991]. $\sqrt{12-6\sqrt{2}\operatorname{tg} x}=3\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{\cos x}.$

6.314 [МГУ, геогр, 1973]. $\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=2\sqrt{2+2\cos 2x}.$

6.315 [МФТИ, 2001]. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 3x=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}.$

6.316 [МГУ, геогр, 2001]. $|\cos x|-\sqrt{3}\sin(9\pi/2+x)=1.$

6.317 [МГУ, ВМК, 1999]. $\sqrt{\dfrac{1+\sin(2x-\pi/3)}{8}}=-\sin x\cos x.$

6.318 [МГУ, геол, 1999].
$$\left|\operatorname{ctg}^2 2x+8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x}-3\right|=\left|\operatorname{ctg}^2 2x-8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x}-3\right|.$$

6.319' [МГУ, МФ, 1998].
$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{\sin 2x+(\sqrt{3}+1)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+3}=0.$$

6.320 [МГУ, био, 1998]. $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\,\sin x\,(\cos x-2/3).$

6.321 [МГУ, экон, 1998]. $\operatorname{tg} x+\sqrt{3\sin x}=0.$

6.322 [МГУ, ВМК, 1998]. $|\sin^3 x|+13\cos^3 x-\cos x=0.$

6.323a' [НГУ, МФ, 2002]. $\dfrac{\sqrt{1-3\sin x}}{\cos x}=\sqrt{4-14\operatorname{tg}^2 x}.$

6.323b' [НГУ, МФ, 2002]. $\dfrac{\sqrt{4\cos x+1}}{\sin x}=\sqrt{5-19\operatorname{ctg}^2 x}.$

6.324a [НГУ, ест, 2002]. $\sqrt{2}\cos x=\sqrt{2\cos 4x-\cos 2x+1}.$

6.324b [НГУ, ест, 2002]**.** $\sqrt{2}\sin x = \sqrt{2\cos 4x + \cos 2x + 1}$.

6.325 [МГУ, ВМК, 2002]**.** Найдите $\operatorname{tg}|x|$, если известно, что
$$(5\sin x + 3\cos x + \sqrt{2})(\sqrt{11} - 3\sqrt{|\sin x|}) = 0.$$

6.326 [МГУ, почв, 2002]**.** Найдите все значения x, принадлежащие интервалу $(-\pi; \pi)$ и являющиеся решениями уравнения
$$\frac{1}{\sqrt{-2\sin x}} = \sqrt{-2\cos x}.$$

6.327 [МГУ, геол, 2002]**.** Найдите все решения уравнения
$$|\sin 2x| + \cos x = 0,$$
принадлежащие отрезку $\left[-\sqrt{3}; 8/3\right]$.

6.328 [МГУ, фил, 2002]**.**
$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) + \sqrt{3}(\cos x - \sin x)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

6.329a [НГУ, МФ, 2003]**.** $\sin x + \sqrt{14\sin 3x} = 0$.

6.329b [НГУ, МФ, 2003]**.** $2\sin x = \sqrt{15\sin 3x}$.

6.330 [МАИ]**.** $\sqrt{1 - 2\sin^2 x} = \operatorname{ctg} 2x$.

6.331 [Плеханов]**.** Решить уравнение $\cos 2x - 7\cdot|\cos x| + 4 = 0$. В ответе указать количество корней на отрезке $[-3;\ 1]$.

6.332a [НГУ, МФ, 2005]**.** $\sin x + \cos x + \sqrt{1 - \sin 2x} = 1$.

6.332b [НГУ, МФ, 2005]**.** $\sin x - \cos x = \sqrt{1 + \sin 2x} - 1$.

6.333a [НГУ, МФ, 2006]**.** $\sqrt{5 - 2\cos 2x} - \dfrac{1}{\sin x} = 0$

6.333b [НГУ, МФ, 2006]**.** $\sqrt{5 + \cos 2x} + \dfrac{1}{\cos x} = 0$.

6.334a [НГУ, МФ, 2007]**.** $(x-5)\sin x = \left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\right|$.

6.334b [НГУ, МФ, 2007]**.** $(x-4)\operatorname{tg} x = \left|\operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right|$.

6.335a [НГУ, МФ, 2007]**.** $\dfrac{|\sin x + \cos x|}{\cos 2x} = 2$.

6.335b [НГУ, МФ, 2007]**.** $\dfrac{\sin x + \cos x}{|\cos 2x|} + 3 = 0$.

6.336a [СУНЦ НГУ, 1991]**.**
$$\sqrt{-\cos 4\left(x + \frac{3\pi}{8}\right) - \cos 2x + \sin x + \cos x} = 0.$$

6.336b [СУНЦ НГУ, 1991]**.**

$$\sqrt{\frac{1}{2}+4\cos^2 2x\cdot\cos 2\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)}+\sin 3x+\cos 3x=0.$$

6.337a [СУНЦ НГУ, 1992]**.** $(x^2-6x+4)\cdot\cos\dfrac{x}{2}=\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|.$

6.337b [СУНЦ НГУ, 1992]**.** $(x^2-8x+15)\cdot\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}.$

6.338a [СУНЦ НГУ, 1993]**.** $\sqrt{\dfrac{7}{4}-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{\cos x}.$

6.338b [СУНЦ НГУ, 1993]**.** $\sqrt{7+4\sqrt{3}\operatorname{ctg}x}=\sqrt{3}\cos x+\dfrac{2}{\sin x}.$

6.338c [СУНЦ НГУ, 1993]**.** $\sqrt{2-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{tg}x}=\sin x-\dfrac{\sqrt{5}}{4\cos x}.$

6.338d [СУНЦ НГУ, 1993]**.** $\sqrt{8+2\sqrt{5}\operatorname{ctg}x}=2\cos x+\dfrac{\sqrt{5}}{2\sin x}.$

6.12. С дополнительными условиями

6.339 [Шар-11]**.** Найдите все решения уравнения $2\cos 2x-4\cos x=1$, удовлетворяющие неравенству $\sin x\geqslant 0$.

6.340 [Шар-11]**.** Найдите все решения уравнения

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x<-1/2$.

6.341 [Шар-11]**.** Найдите все решения уравнения

$$(1+\operatorname{tg}^2 x)\sin x-\operatorname{tg}^2 x+1=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg}x<0$.

6.342 [Шар-11]**.** Найдите все решения уравнения

$$\sin x\cos(\pi/7)-\cos x\sin(6\pi/7)=-1/2,$$

удовлетворяющие условию $-\pi\leqslant x\leqslant 3\pi/2$.

6.343 [Шар-11]**.** Найдите все решения уравнения

$$(1+2\cos 2x)\sin x+(1-2\cos 2x)\cos x=0,$$

удовлетворяющие неравенствам $\pi<|2x-\pi/2|\leqslant 7\pi/3$.

6.344’ [Шар-11]**.** Найдите решения уравнения

$$2+\cos\frac{3}{2}x+\sqrt{3}\sin\frac{3}{2}x=4\sin^2\frac{x}{2},$$

удовлетворяющие неравенству $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$.

6.345’ [Шар-11]**.** Найдите решения уравнения

$$\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{5}{8}\pi-\frac{3}{2}x\right),$$

удовлетворяющие неравенству $\sin(3x/2)<0$.

6.346’ [Шар-11]**.** Найдите наибольшее значение x из промежутка $[0;10/3]$, удовлетворяющее уравнению $\operatorname{tg}(x+\pi/4)=\operatorname{ctg}x-1$.

6.347 [Шар-11]**.** Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0,$$

заключенные между π и $3\pi/2$.

6.348 [ЦыпПин]**.** Найти все решения уравнения

$$1+(\sin x-\cos x)\sin\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{5}{2}x,$$

удовлетворяющие условию $\sin 6x<0$.

6.349 [ЦыпПин]**.** Найти все решения уравнения

$$5-8\cos\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)=2\sin\left(2x-\frac{7}{2}\pi\right),$$

удовлетворяющие условию $\cos x>0$.

6.350a [НГУ, МФ, 1988]**.** Найти все корни уравнения

$$\frac{\sin 2x-(4/5)\cos x+1}{\sin(x/2)}=5\cos\frac{x}{2},$$

принадлежащие отрезку $[5\pi/6;2\pi]$.

6.350b [НГУ, МФ, 1988]**.** Найти все корни уравнения

$$\frac{5\sin 2x-7\cos x-14}{\sin(x/2)}=-40\cos\frac{x}{2},$$

принадлежащие отрезку $[3\pi/4;2\pi]$.

6.351a’ [НГУ, МФ, 1990]**.** Найти наименьший положительный корень уравнения $6\sin^2 x=5-13\cos x+3\cos 2x$.

6.351b’ [НГУ, МФ, 1990]**.** Найти наименьший положительный корень уравнения $2\cos^2 x=1-7\sin x-2\cos 2x$.

6.352a [НГУ, МФ, 1993]**.** Найти $\cos 2x$, если $\sin x-\cos 2x=1$.

6.352b [НГУ, МФ, 1993]**.** Найти $\cos 2x$, если $2\cos x+2\cos 2x=1$.

6.353 [НГУ, ест, 1979]**.** Найти все решения уравнения
$$4\sin(x+\pi/8) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x,$$
принадлежащие отрезку $[0;\pi/8]$.

6.354 [МГУ, фил, 1970]**.** Найти все x, удовлетворяющие условию $\pi/2 < |3x-\pi/2| \leqslant \pi$ и являющиеся решением уравнения
$$1+\cos x+\cos 2x = \sin x+\sin 2x+\sin 3x.$$

6.355 [МГУ, геогр, 1972]**.** Найти все решения уравнения
$$\sin 2x+\cos x+2\sin x = -1,$$
удовлетворяющие условию $0 < x < 5$.

6.356a [НГУ, МФ, 2004]**.** Найти все такие решения уравнения
$$\frac{2}{\sin x}+\frac{1}{\cos x} = \sqrt{20},$$
что $\sin x-\cos x > 0$.

6.356b [НГУ, МФ, 2004]**.** Найти все такие решения уравнения
$$\frac{3}{\sin x}-\frac{2}{\cos x} = \sqrt{52},$$
что $\sin x+\cos x > 0$.

6.357a' [НГУ, МФ, 1997]**.** Найти все общие корни уравнений
$$\sin x-5\cos 2x+2 = 0 \quad \text{и} \quad 2\sin^2 x-7\sin 2x+6 = 0.$$

6.357b' [НГУ, МФ, 1997]**.** Найти все общие корни уравнений
$$5\cos 2x+2\cos x-3 = 0 \quad \text{и} \quad \sin 2x+14\cos^2 x-8 = 0.$$

6.358' [МГУ, МФ, 2000]**.** Найдите все корни уравнения
$$\cos x\sin\frac{x}{4}+\frac{9}{10}\sin x+2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{4}-\frac{9}{20} = 0,$$
принадлежащие отрезку $[-9\pi/2;-3\pi/2]$.

6.359' [МИЭМ]**.** Найдите сумму всех корней уравнения
$$2\cos 3x+8|\sin x|-7 = 0,$$
принадлежащих отрезку $[-2\pi/3;3\pi/4]$.

6.360 [МГУ, МФ, 2001]**.** Имеет ли уравнение
$$12\cos(3\pi/2+x) = |4-5\cos x|$$
хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\pi/2$?

6.361 [МГУ, АзАфр, 2001]**.** Найдите все решения уравнения
$$5\sin^2 2x + 8\cos^3 x = 8\cos x,$$
удовлетворяющие условиям $3\pi/2 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

6.362 [МГУ, псих, 2001]**.** Решите уравнение
$$\operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 6x = \frac{1}{\sin 4x}$$
при $x \in [-\pi/4; 3\pi/4]$.

6.363** [МГУ, МФ, 1997]**.** Найдите ближайший к числу $13\pi/4$ корень уравнения
$$\sin x\cos 2x + \sin x + \frac{10}{11}\sin 2x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{30}{44}.$$

6.13. Экстремальности

Решить уравнения:

6.364 [Шар-11]**.** $\cos 2x + \cos\dfrac{3x}{4} = 2.$

6.365 [Шар-11]**.** $2\cos\dfrac{x}{2} + 3\cos 3x = 5.$

6.366 [Шар-11]**.** $\cos^5\left(x + \dfrac{\pi}{7}\right) - \sin^3\left(x + \dfrac{\pi}{7}\right) = 1.$

6.367 [ЦыпПин]**.** $\cos^2 x + \cos x\cos y + \cos^2 y = 0.$

6.368 [ЦыпПин). $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2.$

6.369 [Шар-11]. **.** $5\sin^5 x - 3\cos^3 x = 5.$

6.370 [ЦыпПин]**.** $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 2.$

6.371* [ЦыпПин]**.** $\operatorname{tg} x = \dfrac{2}{\pi}\left(\left|x - \dfrac{\pi}{4}\right| - \left|x - \dfrac{3\pi}{4}\right|\right).$

6.372* [ЦыпПин]**.** $\sqrt{2 - |y|}(5\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) =$
$= \arcsin^2 x + \arccos^2 x - \dfrac{5\pi^2}{4}.$

6.373* [Квант]**.** $(\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + 1)(\sin^4 x + \cos^4 x) = \dfrac{1}{4}.$

6.374* [МГУ, АзАфр, 2001]**.**
$$\frac{3\cos x + 2\sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\sqrt{3 + 2x - 2y + 2xy - x^2 - y^2}.$$

6.375* [МГУ, ВМК, 1999]**.**
$$\operatorname{tg} 14x + 3\operatorname{ctg} 14x + \sin 6x - 2\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3} + 1}.$$

6.14. Тождества для обратных тригонометрических

Доказать:

6.376 [Шар-11]. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}+2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\pi}{4}$.

6.377 [Шар-11]. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{15}{17}\right)=\dfrac{7}{5}$.

6.378 [Шар-11]. $\arccos(\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)))=\dfrac{\pi}{4}$.

6.379 [Шар-11]. $\operatorname{tg}\left(2\arccos\dfrac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\dfrac{12}{13}\right)=-\dfrac{119}{120}$.

6.380 [Шар-11]. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$.

6.381 [Шар-11]. $\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{16}{65}=\dfrac{\pi}{2}$.

6.382 [Шар-11]. $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{k(k+1)+x^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{k}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{k+1}$,
$(x\geqslant 0,\ k>0)$.

6.383 [Шар-11].

$$\operatorname{arctg}\frac{2k}{2+k^2+k^4}=\operatorname{arctg}(1+k+k^2)-\operatorname{arctg}(1-k+k^2).$$

6.384 [МГУ, ВМК, 1999]. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$. Сравните

$$\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha-1}\,\right)\quad\text{и}\quad 19\pi/24.$$

6.15. Уравнения и неравенства для обратных тригонометрических

Решить:

6.385 [Шар-11]. $2\arcsin x\cdot\arccos x=3\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

6.386 [Шар-11]. $\arcsin x\cdot\arccos x=-1$.

6.387 [Шар-11]. $\arcsin^2 x+\arccos^2 x=\dfrac{5}{4}\pi^2$.

6.388 [Шар-11]. $\cos(2\arcsin x)=x^2+2+6x\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{3}$.

6.389 [Шар-11]. $\cos(2\arccos x)=\arcsin(\cos x)$.

6.390 [Шар-11]. $2\arcsin x=\arccos 3x$.

6.391 [Шар-11]. $\arccos\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right) = \arcsin\left(\dfrac{2}{\pi}\arcsin x\right)$.

6.392 [Шар-11]. $\arcsin(1 + |\sin x|) = \arccos\left(1 + \cos\dfrac{x}{10}\right)$.

6.393 [Шар-11]. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{\pi}{12}$.

6.394 [Шар-11]. $\arcsin x = 2\operatorname{arctg} x$.

6.395* [Шар-11]. $2\arcsin x + \arccos 2x = \dfrac{6}{7}\pi$.

6.396 [ЦыпПин]. $\arccos\dfrac{x}{2} = 2\operatorname{arctg}(x-1)$.

6.397 [ЦыпПин]. $\arccos x - \pi = \arcsin\dfrac{4x}{3}$.

6.398 [ЦыпПин]. $\operatorname{arctg}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

6.399 [ЦыпПин]. $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \dfrac{3\pi}{4}$.

6.400 [ЦыпПин]. $\arcsin x + \arccos(x-1) = \pi$.

6.401 [ЦыпПин]. $2\arccos\left(-\dfrac{x}{2}\right) = \arccos(x+3)$.

6.402 [ЦыпПин]. $2\arcsin x = \arcsin\sqrt{2}x$.

6.403 [ЦыпПин]. $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} = \operatorname{arctg} x$.

6.404 [ЦыпПин]. $\arccos x - \arcsin x = \dfrac{\pi}{6}$.

6.405 [ЦыпПин]. $\arcsin x + \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{2}$.

6.406 [ЦыпПин]. $\arcsin 2x = 3\arcsin x$.

6.407 [ЦыпПин]. $\arccos x - \arcsin x = \arccos\sqrt{3}x$.

6.408 [ЦыпПин]. $\arcsin x - \arccos x = \arcsin(3x-2)$.

6.409 [ЦыпПин]. $2\operatorname{arctg}(2x+1) = \arccos x$.

6.410 [ЦыпПин]. $\arcsin 6x + \arcsin 6\sqrt{3}x = -\dfrac{\pi}{2}$.

6.411 [ЦыпПин]. $\arccos x > \dfrac{\pi}{6}$.

6.412 [ЦыпПин]. $\operatorname{arcctg} x > 2$.

6.413 [ЦыпПин]. $\arcsin x < \arccos x$.

6.414 [ЦыпПин]. $\arccos x > \arccos x^2$.

6.415 [ЦыпПин]. $\operatorname{arctg} x > \operatorname{arcctg} x$.

6.416 [ЦыпПин]. $\arcsin x < \arcsin(1-x)$.

6.417’ [Шар-11]. $\operatorname{arctg}(x-1) = 3\operatorname{arctg}(x+1)$.

6.418a [НГУ, МФ, 2003]. $\arccos(3x^2) + 2\arcsin x = 0$.

6.418b [НГУ, МФ, 2003]. $\arccos(\frac{x^2}{2}) = 2\arccos x$.

6.419a [НГУ, ест, 1987]. $(13x^2+2x-14)\arccos x = 0$.

6.419b [НГУ, ест, 1987]. $(22x^2+2x-23)\arcsin x = 0$.

6.420’ [МГУ, экон, 1999]. $x + \dfrac{1}{6}\arccos(\cos 15x + 2\cos 4x \sin 2x) = \dfrac{\pi}{12}$.

6.421’ [МГУ, ВМК, 2002]. $2\cos(\arcsin x) - \sin\left(\dfrac{1}{2}\arccos x\right) \leqslant 0$.

6.422’ [МГУ, АзАфр, 2002]. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \arccos 2y + \arcsin 3x = \pi/4, \\ \arcsin 2y \cdot \arccos 3x = 5\pi^2/64. \end{cases}$$

Для каждого решения (x, y) определите, какое из чисел больше: $2y-3x$ или $\sqrt[4]{2}-0.5$.

6.423a’ [НГУ, МФ, 1987]. $\arcsin \dfrac{3-5\sin(x+\pi/3)-6\cos 2x}{5} = x - \dfrac{\pi}{3}$.

6.423b’ [НГУ, МФ, 1987]. $\arccos \dfrac{5+3\cos 2x - 7\sin x}{7\sqrt{2}} = x + \dfrac{\pi}{4}$.

6.423c’ [НГУ, МФ, 1987]. $\arccos \dfrac{8\cos 2x - 6\cos(x-\pi/3)+1}{6} = x + \dfrac{\pi}{3}$.

6.423d’ [НГУ, МФ, 1987]. $\arcsin \dfrac{10\cos x - 8\sin^2 x - 3}{10\sqrt{2}} = x + \dfrac{\pi}{4}$.

6.424a’ [НГУ, МФ, 1988].

$$\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\cos x\right) + \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\sin x\right) = \frac{\pi}{2}.$$

6.424b’ [НГУ, МФ, 1988]. $\arcsin(1+2\cos x) + \arccos(1+3\operatorname{tg} x) = \dfrac{\pi}{2}$.

6.424c’ [НГУ, МФ, 1988]. $\arcsin\left(\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} x\right) + \arccos\left(\dfrac{6}{\pi} + \operatorname{tg} x\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

6.424d’ [НГУ, МФ, 1988]. $\arcsin\left(1 + \dfrac{3}{2}\sin x\right) + \arccos(1+4\operatorname{ctg} x) = \dfrac{\pi}{2}$.

6.16. Полутождества для обратных тригонометрических

Решить уравнение:

6.425 [ЦыпПин]. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$.

6.426 [ЦыпПин]. $\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

6.427 [ЦыпПин]. $\arccos x = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

6.428' [ЦыпПин]. $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \arccos(2x^2-1)$.

6.429 [ЦыпПин]. $2\arccos x = \arccos(2x^2-1)$.

6.430 [ЦыпПин]. $2\operatorname{arctg} x = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

6.431 [ЦыпПин]. $2\operatorname{arctg} x = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

6.432 [ЦыпПин]. $\arccos x = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6.17. Неравенства

Решить неравенство:

6.433 [ЦыпПин]. $\sqrt{3-4\cos^2 x} > 2\sin x + 1$.

6.434 [ЦыпПин]. $\sqrt{3\sin x + 1} > 4\sin x + 1$.

6.435 [ЦыпПин]. $\dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{\sin x - 1} < 0$.

6.436 [ЦыпПин]. $5 + 2\cos 2x \leqslant 3|2\sin x - 1|$.

6.437 [ЦыпПин]. $2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$.

6.438 [ЦыпПин]. $\sin 2x > \cos x$.

6.439 [ЦыпПин]. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$.

6.440 [ЦыпПин]. $\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x > \sin 6x$.

6.441 [ЦыпПин]. $2\sin x \sin 2x \sin 3x < \sin 4x$.

6.442 [ЦыпПин]. $\sin x \sin 3x > \sin 5x \sin 7x$.

6.443 [ЦыпПин]. $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < 3/8$.

6.444 [ЦыпПин]. $\sin x \geqslant \cos 2x$.

6.445 [ЦыпПин]. $2\operatorname{tg} 2x \leqslant 3\operatorname{tg} x$.

6.446 [ЦыпПин]. $\sin x < |\cos x|$.

6.447 [МГУ, геол, 1970]. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенствам $\sin 5x + \sin x > 0,\ 0 < x < 2\pi$..

6.448 [МГУ, ВМК, 1971]. Найти все решения неравенства

$$\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x,$$

удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

6.449 [МГУ, МФ, 1971]. Найти все x из отрезка $[0; \pi]$, удовлетворяющие неравенству $\sin 2x - \cos x + \sqrt{2} \sin x > 1/\sqrt{2}$.

6.450 [МГУ, био, 1971]. $2 \cos 8x \geqslant 3 + 4 \sin 4x$.

6.451 [МГУ, экон, 1970]. $11 \sin x + \cos 2x - 6 \leqslant 0$.

6.452 [МГУ, ВМК, 1972]. $\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 \geqslant \dfrac{|\operatorname{tg} x - \sqrt{3}| + \sqrt{3}}{\operatorname{ctg} x}$.

6.453 [МГУ, хим, 1972]. $(\cos x - \cos 5x)(2 \sin x + 3 \cos x + 4) > 0$.

6.454 [МГУ, ВМК, 2000]. Найдите все решения неравенства

$$\sqrt{6 - 10 \cos x - \sin x} < \sin x - \cos x,$$

принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

6.18. Системы

Решить систему:

6.455 [Шар-11]. $\begin{cases} \sqrt{2} \sin x + \cos y = 1, \\ 2 \sin x - 3 \cos y = \sqrt{2}. \end{cases}$

6.456 [Шар-11]. $\begin{cases} \sin x \sin y = 1/4, \\ \cos x \cos y = 3/4. \end{cases}$

6.457 [Шар-11]. $\begin{cases} \sin x \sin y = 1/4, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{cases}$

6.458 [Шар-11]. $\begin{cases} \cos 2x = \operatorname{tg}(y + \pi/4), \\ \cos 2y = \operatorname{tg}(x + \pi/4). \end{cases}$

6.459 [Шар-11]. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cos y = 1/2. \end{cases}$

6.460 [Шар-11]. $\begin{cases} x \sin^2(x - \pi/6) = y \cos^2(y + \pi/6), \\ x \cos^2(x - \pi/6) = y \sin^2(y + \pi/6). \end{cases}$

6.461 [Шар-11]. $\begin{cases} \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y, \\ \cos 2y + \sqrt{3} \cos 2x = -1. \end{cases}$

6.462 [МГУ, экон, 1972]**.** Найти $\operatorname{tg} x$, если $\begin{cases} y\sin x+\cos x=2, \\ -4\sin x+2y\cos x=-y. \end{cases}$

6.463 [МГУ, ВМК, 1973]**.** $\begin{cases} 2\sin x\sin y+\cos x=0, \\ 1+\sin y\cos x=2\cos^2 y\sin x. \end{cases}$

6.464 [МГУ, геол, 1973]**.** Найти все пары значений $(x; y)$, являющиеся решениями системы $\begin{cases} \sin x+1/\cos y=2\sqrt[3]{14}, \\ \sin x/\cos y=\sqrt[3]{196}-2 \end{cases}$ и удовлетворяющие условиям: $0<x<\pi$; $-\pi/2<y<\pi/2$.

6.465 [МИЭМ]**.** $\begin{cases} \sin^2 x-\sin y=7/4, \\ \cos^2 x+\sqrt{3}\cos y=1/4. \end{cases}$

6.466 [МГУ, ВМК, 2001]**.** $\begin{cases} 3\sin x+\cos y=0, \\ 6\cos x-2\sin y=7. \end{cases}$

6.467 [МГУ, псих, 1999]**.** $\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 y=3/4, \\ \cos x\sin y=\sqrt{6}/4, \\ \cos x\geqslant 0. \end{cases}$

6.468 [МГУ, фил, 1999]**.** $\begin{cases} \cos^3(z+4y+\pi/4)+\dfrac{1}{\sin(2z+2y-\pi/4)}=0, \\ \cos(3z+\pi/4)+\dfrac{1}{\sin^3(4z-2y-\pi/4)}=0. \end{cases}$

6.469 [МГУ, ВМК, 2002]**.** $\begin{cases} \sqrt{13\cos x+98\sin y}-\sqrt{13\cos x+28\sin y}=4, \\ 2\sqrt{13\cos x+28\sin y}-\sqrt{70\sin y+8}=2. \end{cases}$

6.19. Нестандартный аргумент

Решить уравнение:

6.470a [НГУ, МФ, 2002]**.** $\sin\dfrac{x+2}{3}-\sin\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2x}{3}$.

6.470b [НГУ, МФ, 2002]**.** $\cos\dfrac{x+2}{2}+\cos\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{1}{2}\sin x$.

6.471 [МГУ, ФФ, 2001]**.** $\operatorname{tg}(x+1)\operatorname{ctg}(2x+3)=1$.

6.472 [ЦыпПин]**.** $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}\sin x\right)$.

6.473 [ЦыпПин]**.** $\operatorname{tg} x^2=\operatorname{ctg}(5x)$.

6.474 [ЦыпПин]**.** $\sin\dfrac{5}{x}=\cos 3x$.

6.475a [МГУ, геогр, 1997]**.** Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos(\pi(x^2-x+1))=\cos(\pi(x-1))$.

6.475b [МГУ, геогр, 1997]**.** Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin(\pi(x^2+x-2))=\sin(\pi(2-x))$.

6.476 [Шар-11]**.** $\sin\left(\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)=\cos\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right)$.

6.477 [Шар-11]**.** $2\sin^2 x+\sin(x^2)=1$.

6.478 [Шар-11]**.** $\sin(2x^2+x)\cos(x^2)-\sin(x^2+x)\cos(2x^2)=0$.

6.479 [Шар-11]**.**
$$\sin(3\sqrt{x}+2x)\cos(x-2\sqrt{x})-\sin 2(x+\sqrt{x})\cos(3\sqrt{x}-x)=0.$$

6.480 [Шар-11]**.** $\frac{1}{2}\cos(x^2+x)+\sin\left(x^2-\frac{\pi}{6}\right)\cos x=0$.

6.481 [Шар-11]**.** $\sin\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x^2-x)=0$.

6.482 [Шар-11]**.** $\operatorname{tg}\sqrt{x+16}=\operatorname{tg}\sqrt{x}$.

6.483 [Шар-11]**.** Найдите число корней уравнения
$$\operatorname{tg}(\pi\sqrt{x+90})=\operatorname{tg}(\pi\sqrt{x}).$$

6.484 [Шар-11]**.** $\sin\left(\pi\sqrt{x}\right)=\cos\left(\pi\sqrt{2-x}\right)$.

6.485 [Шар-11]**.** Найдите сумму корней уравнения
$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{ctg}x-\sqrt{3},$$
расположенных на отрезке $[1;10]$.

6.486 [Шар-11]**.** Найдите решения уравнения $\operatorname{tg}\pi x=\operatorname{tg}2\pi x^2$, удовлетворяющие условию $|x|<\frac{5}{4}$.

6.487 [Шар-11]**.** Найдите решения уравнения $|\sin(2x-1)|=\cos x$, удовлетворяющие условию $|x|\leqslant 2\pi$.

6.488 [Шар-11]**.** Найдите решения уравнения $\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos(2+x)}$, удовлетворяющие условию $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

6.489 [ЦыпПин]**.** $\sin(\cos x)=\cos(\sin x)$.

6.490 [ЦыпПин]**.** $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\cos x\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\sin x\right)$.

6.491 [ЦыпПин]**.** $\sin(\pi\operatorname{ctg}x)=\cos(\pi\operatorname{tg}x)$.

6.492 [ЦыпПин]**.** Найти все корни уравнения $\sin(x-2)=\sin(3x-4)$, принадлежащие промежутку $(-\pi;\pi)$.

6.493a [НГУ, ест, 1984]. $\sin 5x^2 + \sin 8x^2 = 0.$

6.493b [НГУ, ест, 1984]. $\cos 4x^2 - \cos 11x^2 = 0.$

6.494a [НГУ, МФ, 1980].

$$\cos\left(\frac{4+\sqrt{5}}{2}\sin x + 2\cos x\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{5}-4}{2}\sin x\right).$$

6.494b [НГУ, МФ, 1980].

$$\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\sin x + \frac{3}{4}\cos x\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x + \frac{1}{4}\cos x\right).$$

6.495a [НГУ, ФФ, 1992]. $1 + 2\cos\dfrac{13\pi}{x^2+3} = 4\sin\dfrac{13\pi}{2x^2+6}.$

6.495b [НГУ, ФФ, 1992]. $\cos\dfrac{17\pi}{5x^2+3} = \sqrt{3}\cos\dfrac{17\pi}{10x^2+6} + 2.$

6.495c [НГУ, ФФ, 1992]. $\cos\dfrac{13\pi}{5x^2+2} + \sqrt{2}\sin\dfrac{13\pi}{10x^2+4} + 1 = 0.$

6.495d [НГУ, ФФ, 1992]. $\cos\dfrac{11\pi}{3x^2+2} = \sqrt{2}\cos\dfrac{11\pi}{6x^2+4} + 1.$

6.496' [МГУ, экон, 1970].

$$|5-6x| - 4\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 4\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + \frac{8\,\mathrm{tg}\,(\pi x/3)}{1+\mathrm{tg}^2(\pi x/3)} = 0.$$

6.497a [НГУ, МФ, 2000]. $(3 - 5\sin x)\,\mathrm{tg}\,|x| = \sin 2x.$

6.497b [НГУ, МФ, 2000]. $(2\cos x + 1)\,\mathrm{ctg}\,x + \sin 2|x| = 0.$

6.498 [МГУ, ВМК, 2000]. $\sin x \sin|x| \geqslant -\dfrac{1}{2}.$

6.499 [МГУ, ВМК, 2001]. $\cos(\pi(x + 7\sqrt{x}))\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(4x + \sqrt{x})\right) = 1.$

6.500 [МГУ, ФФ, 2001]. $2\sin 2x\cos(5x^2) - \sin(5x^2 + 2x) = 0.$

6.501 [МГУ, геогр, 2001]. $4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \dfrac{6\pi}{x}.$

6.502 [МГУ, экон, 2001].

$$\sqrt{3}\cos\left(\pi\sqrt{x}\sqrt{\frac{6}{x} - x - 4}\right) + 3\sin\left(\pi x\sqrt{\frac{6}{x^2} - \frac{4}{x} - 1}\right) = \sqrt{12}.$$

6.503 [МГУ, менедж, 2001].

$$\sqrt{2}\sin\left(\pi\sqrt{x}\sqrt{\frac{5}{x} - x + 6}\right) + \sqrt{6}\cos\left(\pi x\sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1}\right) = \sqrt{8}.$$

6.504* [Шар-11]. $\sin(\sin x) = \cos\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

6.505* [Шар-11]. $\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{x} = \operatorname{ctg} 3x$.

6.20. Ответы

Ради краткости, в ответах опущены указания : $n \in Z$; $k \in Z$; $m \in Z$. Они подразумеваются по умолчанию, если не сказано иного.

[6.24] $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$; $\alpha \in \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$. **[6.25]** $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow 2\operatorname{tg}^3\alpha$. **[6.49]** $-\dfrac{7}{\sqrt{130}}$; $-\dfrac{9}{\sqrt{130}}$. **[6.50]** $-\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{4}{5}$. **[6.51]** 2; 2/3; $\frac{1}{t} = \frac{1}{s} - 1$. **[6.52a]** $\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$. **[6.52b]** $\pm 2\sqrt{5}$. **[6.53]** $\dfrac{11}{10}$. **[6.54]** $-\dfrac{4}{5}$. **[6.55]** 0.9032. **[6.56]** -3.2. **[6.57]** 80. **[6.58]** $-1/\sqrt{10}$; $|\cos\alpha/2|$. **[6.71]** -1. **[6.72]** 2. **[6.73]** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k$. **[6.74]** $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k$. **[6.75]** $(-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k$. **[6.76]** $2\pi k$. **[6.77]** $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$; πk. **[6.78]** $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$. **[6.79]** $\dfrac{\pi}{4} + \pi k$; $2\pi k$; $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$. **[6.80]** $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$. **[6.81]** $\pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k$; $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k$. **[6.82]** $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$. **[6.83]** $\dfrac{\pi}{4} + \pi k$. **[6.84]** $\pm\arccos\dfrac{\sqrt{5}-2}{4} + 2\pi n$. **[6.85a]** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi k$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; на отрезке $[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{2}]$ лежат $\operatorname{arctg} 3$; $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi$. **[6.85b]** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi k$; $-\operatorname{arctg} 4 + \pi k$; на отрезке $[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{4}]$ лежат $-\operatorname{arctg} 4$; $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$; $-\operatorname{arctg} 4 + \pi$. **[6.86a]** $\operatorname{arctg}\dfrac{5 \pm \sqrt{46}}{7} + \pi k$. **[6.86b]** $\operatorname{arctg}(3 \pm 2\sqrt{2}) + \pi k$. **[6.87a]** $k\pi$; $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$. **[6.87b]** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$. **[6.88]** $\pm\dfrac{\pi}{8} + n\pi$. **[6.89a]** $\left[-\dfrac{5}{4}; 5\right]$. **[6.89b]** $\left[-6; \dfrac{1}{8}\right]$. **[6.90a]** $\dfrac{\pi}{4} + n\pi$; $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$. **[6.90b]** $-\dfrac{\pi}{4} + n\pi$; $\pm\arccos\dfrac{1}{3} + 2n\pi$. **[6.91]** $(-1)^n\dfrac{\pi}{6} + n\pi$; $\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$. **[6.92a]** $\dfrac{2n\pi}{3}$; $\dfrac{2\pi}{3} + k\pi$.

[6.92b] $-\dfrac{\pi}{6}+n\pi;\quad \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}$. **[6.93a]** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$. **[6.93b]** $\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$. **[6.94]** $x=\pm\arcsin\sqrt{\sqrt{3}-1}+n\pi$. **[6.95a]** $n\pi;\ \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)+n\pi$. **[6.95b]** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2};\ \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)+k\pi$. **[6.96]** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k;\ -\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{5}+\dfrac{\pi}{2}k$. **[6.97]** $\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ -\operatorname{arctg}\dfrac{6+\sqrt{3}}{11}+\pi k$. **[6.98a]** $\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\pi k$. **[6.98b]** $\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{7}+\pi k$. **[6.99]** $\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\pi k$. **[6.100]** $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{7}{4}}+k\pi$. **[6.101]** $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \pi+2\pi k$. **[6.102]** $-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\pm\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$. **[6.103]** $\pi+2\pi k;-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$. **[6.104]** $\dfrac{\pi k}{2}$. **[6.105]** $\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}k$. **[6.106a]** $\operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)+\pi k;\ \operatorname{arctg}\left(1-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)+\pi k$. **[6.106b]** $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{4\pm\sqrt{3}}{2}\right)+\pi k$. **[6.107a]** $\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}+k\pi$. **[6.107b]** $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ -\operatorname{arctg}2+k\pi$. **[6.108]** $\dfrac{\pi}{5}k;\ \dfrac{\pi}{7}k$. **[6.109]** $\dfrac{\pi}{8}k$. **[6.110]** $\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \dfrac{2}{5}\pi k$. **[6.111]** $\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$. **[6.112]** $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi}{5}k$. **[6.113]** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k;\ \dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi}{5}k$. **[6.114]** $\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi}{4}k$. **[6.115]** $\dfrac{11}{60}\pi+\pi k;\ \dfrac{29}{240}\pi+\dfrac{\pi}{4}k$. **[6.116]** $\dfrac{\pi}{36}+\dfrac{\pi}{9}k;\ -\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{\pi}{5}k$. **[6.117]** $\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \pm\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2}{3}\pi k$. **[6.118]** $\dfrac{\pi}{3}k;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k$. **[6.119]** $2\pi k$. **[6.120]** $\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ (-1)^k\arcsin\dfrac{1}{8}+\pi k$. **[6.121]** $\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \pm\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}\pi k$. **[6.122]** $\dfrac{\pi}{5}k;\ \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}+\pi k$. **[6.123]** $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$. **[6.124]** $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.125]** $-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ \pi k$. **[6.126]** $\pi+2\pi k$. **[6.127]** $\dfrac{\pi}{2}k;\ \dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi}{12}k$. **[6.128]** $\pi(2n+1)/4$. **[6.129]** $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}n;\ (-1)^k\arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+\pi k$. **[6.130]** $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}$. **[6.131]** $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}k;\ \pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.132]** $\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \pm\dfrac{1}{2}\arccos(\sin^2\alpha)+\pi k$. **[6.133a]** $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.133b]** $\dfrac{2\pi k}{5},\ k\neq 5m$. **[6.133c]** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$. **[6.134a]** $\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ \pi k$. **[6.134b]** $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}k;\ \dfrac{\pi}{4}+\pi k$. **[6.134c]** $\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$. **[6.134d]** $\operatorname{arctg}3+\pi k$.

[6.135a] $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$. **[6.135b]** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.135c]** $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **[6.136a]** $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}k$; $(-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}k$. **[6.136b]** $\frac{\pi k}{7}$; $\pm\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}$. **[6.137a]** $k\pi$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}$. **[6.137b]** $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}$. **[6.138a]** $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{129}-3}{12}+n\pi$. **[6.138b]** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\frac{\pi}{14}+\frac{2k\pi}{7}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$. **[6.139a]** $\frac{k\pi}{6}$; $\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{9}$. **[6.139b]** $k\pi$; $\frac{\pi}{4}+k\pi$. **[6.139c]** $-\frac{\pi}{4}+n\pi$. **[6.140a]** $\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$. **[6.140b]** $k\pi$; $\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$. **[6.141a]** $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$. **[6.141b]** $\frac{\pi}{4}+k\pi$; $k\pi$. **[6.141c]** $-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\frac{\pi}{2}+k\pi$. **[6.142a]** $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6}$; $\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}$. **[6.142b]** $\frac{k\pi}{5}$; $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$. **[6.142c]** $\frac{k\pi}{10}$; $-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{6}$. **[6.143a]** $(-1)^k\arcsin\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}+k\pi$; $-\frac{\pi}{4}+k\pi$. **[6.143b]** $\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$. **[6.143c]** $\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$. **[6.144]** $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$. **[6.145]** $\frac{\pi}{2}+n\pi$. **[6.146]** $n\pi$; левая часть $=\operatorname{tg}3x$. **[6.147]** $\frac{(-1)^n}{3}\arcsin\frac{-3+\sqrt{29}}{8}+\frac{\pi n}{3}$. **[6.148]** $\frac{\pi}{5}k$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3-\sqrt{17}}{4}+\pi k$. **[6.149]** $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$; $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}6+\frac{n\pi}{3}$. **[6.150]** $\frac{k\pi}{4}$; $k\neq 4m$. **[6.151]** $\pi(2n+1)/10$; $(-1)^n\pi/15+\pi n/5$. **[6.152]** $\pi(2n+1)/10$. **[6.153]** $2\pi n$; приводится к виду $(\cos 5x-2)(2\cos x-3)=1$. **[6.154a]** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$. **[6.154b]** $\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi$. **[6.155]** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **[6.156]** πk; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.157]** $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi k$. **[6.158]** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **[6.159]** $\frac{\pi}{8}+(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **[6.160]** $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **[6.161]** $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.162]** $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k$. **[6.163]** $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7+\sqrt{52}}{3}}+\pi k$. **[6.164]** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$. **[6.165]** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}+\pi k$. **[6.166]** πk; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi k$. **[6.167]** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **[6.168]** $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k$. **[6.169]** $\pi+2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **[6.170]** $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}k$. **[6.171]** $\frac{\pi}{12}k$. **[6.172]** $\frac{\pi}{2}k$; $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k$. **[6.173]** $-\frac{\pi}{64}+\frac{\pi}{16}k$. **[6.174]** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pi+2\pi k$.

[6.175] $\frac{2}{9}\pi k$, $k \neq 9n$. **[6.176]** $\frac{\pi}{2}k$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$; $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k$. **[6.177]** $\frac{\pi}{3}+\pi k$; $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{6}(\sqrt{3}-4\pm\sqrt{43+16\sqrt{3}})\right)+\frac{\pi}{3}+\pi k$. **[6.178]** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$; $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k$. **[6.179]** $\frac{\pi}{14}k$, $k \neq 14n$; умножить обе части на $\sin x$. **[6.180]** $\pi(2k+1)/2$; $\pi(4k+1)/4$. **[6.181]** $x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi$; $x=n\pi$. **[6.182]** $(-1)^n \arcsin(1-\sqrt{2})+n\pi$. **[6.183]** $\pm\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{n\pi}{2}$. **[6.184]** $n\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **[6.185]** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\pi n$. **[6.186]** $\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$; $\pm\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5}$. **[6.187]** $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi n}{5}$. **[6.188]** $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, экстремальность. **[6.189]** $\frac{2}{9}\pi k+\frac{\pi}{4}$, $k\neq 9n$; $\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi}{7}k$. **[6.190]** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $2\pi k$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{3\pi}{4}+2\pi k$. **[6.191]** $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$. **[6.192]** $\frac{\pi}{4}+\pi k$. **[6.193]** $\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.194]** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$; $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}k$; $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k$. **[6.195]** $(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{3}-1)+\frac{\pi}{2}k$. **[6.196]** $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}k$. **[6.197]** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **[6.198]** $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi}{7}k$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **[6.199]** $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{6}-2}{2}+\frac{\pi}{2}k$. **[6.200]** $\frac{\pi}{2}k$. **[6.201]** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.202]** $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **[6.203]** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **[6.204]** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}k$. **[6.205]** $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$. **[6.206]** $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$. **[6.207]** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **[6.208]** $\frac{\pi}{10}+\frac{n\pi}{5}$; $\frac{\pi}{14}+\frac{n\pi}{7}$. **[6.209a]** $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\pm\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+k\pi$. **[6.209b]** $\frac{k\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$. **[6.209c]** $\frac{k\pi}{2}$. **[6.209d]** $k\pi$. **[6.210]** $\frac{\pi}{4}+\pi k$. **[6.211]** $\frac{\pi}{2}k$; $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **[6.212]** πk. **[6.213]** $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **[6.214]** $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{\pi}{3}+\pi k$. **[6.215]** $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$; πk. **[6.216]** $\frac{1}{6}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}+\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{3}k$; $\frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}2\sqrt{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{\pi}{2}k$. **[6.217]** $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{7}$. **[6.218]** $-\frac{\pi}{108}+\frac{\pi k}{9}$; $\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$. **[6.219]** $-\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{100}+\frac{2k\pi}{25}$. **[6.220]** $\frac{\pi}{12}+k\pi$; $\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi}{3}k$. **[6.221]** Нет решения. **[6.222]** $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$; $\frac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.223]** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$.

[6.224a] $-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$; $\frac{\pi}{12}+k\pi$. **[6.224b]** $-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{3}$. **[6.224c]** $-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}$. **[6.225a]** $\pm\arccos\frac{\sqrt{3}-\sqrt{13}}{4}-\frac{\pi}{6}+2k\pi$. **[6.225b]** $(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+n\pi$. **[6.226a]** $\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{36}+\frac{k\pi}{3}$. **[6.226b]** $-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{32}+\frac{k\pi}{4}$. **[6.227a]** $\frac{\pi}{3}+k\pi$; $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$. **[6.227b]** $-\frac{\pi}{6}+k\pi$; $-\frac{2\pi}{3}+2n\pi$. **[6.228]** $k\pi$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$. **[6.229]** $\frac{\pi}{6}+2\pi n$. **[6.230a]** $\frac{\varphi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$; $-\varphi+(2k+1)\pi$, где $\varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$. **[6.230b]** $-\frac{\varphi}{3}+\frac{(2k+1)\pi}{3}$; $\varphi+2k\pi$, где $\varphi=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$. **[6.231a]** $k\pi$; $\frac{\pi}{6}+2k\pi$. **[6.231b]** $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$. **[6.232]** $\frac{\pi}{3}+\pi k$; πk. **[6.233]** $\frac{\pi}{3}+\pi k$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$. **[6.234]** $\frac{2}{3}\pi+\pi k$; $(-1)^k\arcsin\frac{1}{4}-\frac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.235]** $\frac{\pi}{3}+\pi k$; $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.236]** $\frac{2}{3}\pi+\pi k$; $\pm\arccos\frac{1}{10}-\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **[6.237]** $\frac{5}{6}\pi+\pi k$; $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$. **[6.238]** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

[6.239] $2\pi k$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$. **[6.240]** $\frac{\pi}{4}+2\pi k$. **[6.241]** $\frac{\pi}{4}+2\pi k$. **[6.242]** $2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$. **[6.243]** $\frac{3\pi}{4}+\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi k$. **[6.244]** $\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\pi k$. **[6.245]** $\frac{\pi}{4}+\frac{2n\pi}{3}$. **[6.246a]** $\frac{\pi}{4}+k\pi$; $(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{k\pi}{2}$. **[6.246b]** $-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$. **[6.247]** $\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+2\pi k$. **[6.248a]** $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\frac{-1+\sqrt{0.2}}{\sqrt{2}}+k\pi$. **[6.248b]** $2k\pi$; $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{5.4}-1}{\sqrt{2}}+2k\pi$. **[6.248c]** $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\frac{1-\sqrt{5.8}}{\sqrt{2}}+k\pi$. **[6.248d]** $\pi+2k\pi$; $-\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1-\sqrt{0.3}}{\sqrt{2}}+2k\pi$. **[6.249a]** $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+n\pi$. **[6.249b]** $\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin(\sqrt{2}-1)+n\pi$. **[6.250]** $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **[6.251]** $(-1)^k\frac{\pi}{36}+\frac{\pi}{6}k$; $\frac{\pi}{4}n$; $n\neq 4m+2$. **[6.252]** πk. **[6.253]** $\frac{\pi}{4}k$; $k\neq 4m+2$.

[6.254] $\frac{\pi}{8}k,\ k \neq 8m+1,\ k \neq 8m+3$. **[6.255]** $-\frac{\pi}{10}+\frac{21}{5}\pi k,\ k \neq 5m+3$. **[6.256]** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k;\ \frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}n,\ n \neq 9m+4$. **[6.257]** $\frac{\pi}{7}k,\ k \neq 7m$. **[6.258]** $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}k,\ k \neq 7m+3$. **[6.259]** $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}k,\ k \neq 7m+3$. **[6.260]** $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k,\ k \neq 3n+1$. **[6.261]** $\frac{\pi}{3}k,\ k \neq 3m;\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+\pi k$. **[6.262a]** $\frac{3}{2}\pi+2\pi k$. **[6.262b]** $\frac{3}{4}\pi+2\pi k$. **[6.263]** $\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \pi n$. **[6.264a]** $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi$. **[6.264b]** $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi;\ \pm\frac{\pi}{4}+k\pi$. **[6.264c]** $\frac{\pi}{3}k$. **[6.265a]** $-\frac{\pi}{30}+\frac{n\pi}{5},\ n \neq 5m+1$. **[6.265b]** $\frac{\pi}{30}+\frac{n\pi}{5},\ n \neq 5m+4$. **[6.265c]** $\frac{\pi}{42}+\frac{2n\pi}{7},\ n \neq 7m+4$. **[6.266a]** $\frac{k\pi}{3};\ \frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$. **[6.266b]** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};\ \frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3};\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi$. **[6.267a]** $\frac{k\pi}{7};\ k \neq 7m$. **[6.267b]** $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$. **[6.268a]** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi;\ \arccos\frac{1}{4}+2k\pi$. **[6.268b]** $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi;\ \arcsin\frac{1}{3}+\pi+2n\pi$. **[6.269a]** $\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \arcsin\frac{4}{5}+2n\pi$. **[6.269b]** $\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \pi-\arccos\frac{4}{5}+2n\pi$. **[6.270a]** $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$. **[6.270b]** $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$. **[6.271a]** $\frac{2\pi}{21}+\frac{2k\pi}{7};\ k \neq 7m+2$. **[6.271b]** $-\frac{2\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5};\ k \neq 5m+3$. **[6.272a]** $k\pi;\ \frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}$. **[6.272b]** $k\pi$. **[6.273a]** $-\frac{\pi}{6}+\frac{2n\pi}{3};\ n \neq 3M-1$. **[6.273b]** $\frac{\pi}{6}+\frac{2n\pi}{3};\ n \neq 3M+1$. **[6.274a]** $\frac{k\pi}{11};\ k \neq 11N;\ \frac{(2n+1)\pi}{10};\ n \neq 2+5M$. **[6.274b]** $\frac{k\pi}{7};\ k \neq 7N;\ \frac{(2n+1)\pi}{6};\ n \neq 1+3M$. **[6.275a]** $\frac{\pi}{26}+\frac{2k\pi}{13},\ k \neq 13m+3$. **[6.275b]** $\frac{\pi}{22}+\frac{2k\pi}{11},\ k \neq 11m-3$. **[6.276a]** $\frac{n\pi}{8};\ n \neq 4k$. **[6.276b]** $\frac{n\pi}{8};\ n \neq 4k$. **[6.277a]** $\frac{k\pi}{4};\ k \neq 4n+2$. **[6.277b]** $\frac{k\pi}{4};\ k \neq 4n+2$. **[6.278a]** $\frac{2n\pi}{3};\ n \neq 3M+1$. **[6.278b]** $\frac{\pi}{6}+\frac{2n\pi}{3};\ n \neq 3M-1$. **[6.279a]** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$. **[6.279b]** $\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi$. **[6.280a]** $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$. **[6.280b]** $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$. **[6.281a]** $\frac{63+84k}{13}\pi;\ k \neq 13m+9$. **[6.281b]** $\frac{15+60k}{11}\pi;\ k \neq 11m+8$. **[6.281c]** $\frac{30+40k}{9}\pi;\ k \neq 9m+6$. **[6.282]** $\frac{15\pi}{23}+\frac{42}{23}k\pi,\ k \neq 23m-2;\ \frac{27\pi}{5}+\frac{42}{5}n\pi,\ n \neq 5m-1$.

[6.283] $\dfrac{\pi}{12}+\pi k$; $\dfrac{5\pi}{12}+\pi k$. **[6.284]** $\dfrac{\pi}{9}k,\ k\neq 9n$. **[6.285]** πk; $\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$. **[6.286]** $-\dfrac{\pi}{10}+2\pi k$; $-\dfrac{3}{5}\pi+2\pi k$. **[6.287]** $\dfrac{\pi}{2}k$; $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}k$. **[6.288]** $\pm\dfrac{2}{3}\pi+4\pi k$. **[6.289]** $(-1)^k\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$. **[6.290]** $\pi+2\pi k$; $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$. **[6.291]** $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$. **[6.292]** $-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\pi k$; $-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{6}+\pi k$. **[6.293]** πk; $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$; $-\dfrac{\pi}{3}+\pi k$. **[6.294]** $2\pi k$; $\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$; $-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$. **[6.295]** $\dfrac{5}{6}\pi+2\pi k$. **[6.296]** $\dfrac{3}{8}\pi+\pi k$; $-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}5+\dfrac{\pi}{2}+\pi k$. **[6.297]** $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$.

[6.298] $\pi+2\pi k$; $\arccos(\sqrt{5}-2)+2\pi k$. **[6.299]** πk. **[6.300]** $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$. **[6.301]** $\dfrac{\pi}{12}+2\pi k$; $\dfrac{5\pi}{12}+(2k+1)\pi$. **[6.302]** $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$. **[6.303]** $-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$; $2\pi k$. **[6.304]** $2\pi k$; $\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k$. **[6.305]** $\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$; $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$. **[6.306]** $\dfrac{5}{4}\pi+2\pi k$. **[6.307a]** $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$; $\pi+2\pi k$; $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$. **[6.307b]** $\dfrac{11}{12}\pi+2\pi k$; $\dfrac{7}{12}\pi+2\pi k$. **[6.307c]** $2\pi k$; $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$.

[6.308a] $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$; $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.308b]** $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$; $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$. **[6.309a]** $\dfrac{\pi}{8}+2\pi k$; $\dfrac{5\pi}{8}+2\pi k$; $\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k$; $-\dfrac{\pi}{12}+2\pi k$; $-\dfrac{5\pi}{12}+2\pi k$. **[6.309b]** $\dfrac{3\pi}{16}+2\pi k$; $-\dfrac{5\pi}{16}+2\pi k$; $\dfrac{15\pi}{16}+2\pi k$; $-\dfrac{9\pi}{16}+2\pi k$. **[6.309c]** $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}+2\pi k$; $\pi+2\pi k$; $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$.

[6.310a] $\dfrac{\pi}{6}+2\pi+4k\pi$. **[6.310b]** $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$; πk. **[6.310c]** $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi k$; $(-1)^k\dfrac{\pi}{10}+\pi k$; $(-1)^{k+1}\dfrac{3\pi}{10}+\pi k$. **[6.310d]** $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}$. **[6.311a]** $k\pi$; $-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$. **[6.311b]** $\dfrac{k\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$; $\dfrac{\pi}{3}+k\pi$. **[6.312a]** $\pm\dfrac{2\pi}{3}-\arccos\dfrac{3}{5}+4k\pi$. **[6.312b]** $(-1)^k\dfrac{\pi}{3}-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}+2k\pi$. **[6.312c]** $\pm\dfrac{\pi}{3}+\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+4k\pi$. **[6.313a]** $\pm\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$. **[6.313b]** $-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\pi k$; $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\pi k$. **[6.313c]** $-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$. **[6.313d]** $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\pi k$; $\pi-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}+2\pi k$. **[6.314]** $\dfrac{\pi}{2}+n\pi$.

[6.315] $\frac{\pi}{7}+\pi n$; $\frac{3\pi}{7}+\pi n$; $\frac{5\pi}{7}+\pi n$. **[6.316]** $\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+2\pi n$. **[6.317]** $\frac{23}{36}\pi+\pi k$; $\frac{35}{36}\pi+\pi k$. **[6.318]** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **[6.319]** $\pm\frac{11\pi}{12}+2n\pi$. **[6.320]** πn; $-\arccos(-1/3)+2\pi n$. **[6.321]** $n\pi$; $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{37}-1}{6}+2\pi n$. **[6.322]** $\pi\pm\operatorname{arctg}2+2\pi n$. **[6.323a]** $-\arcsin\frac{1}{3}+2k\pi$. **[6.323b]** $\arccos\frac{1}{3}+2k\pi$. **[6.324a]** $2k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$. **[6.324b]** $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$. **[6.325]** 1; $-7/23$. **[6.326]** $-11\pi/12$; $-7\pi/12$. **[6.327]** $-\pi/2$; $\pi/2$; $5\pi/6$. **[6.328]** $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$. **[6.329a]** $k\pi$; $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{7}{8}+n\pi$. **[6.329b]** $k\pi$; $(-1)^n\arcsin\frac{5}{6}+n\pi$. **[6.330]** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+n\pi$. **[6.331]** 2; ($x=\pm\frac{\pi}{3}+n\pi$; на отрезке: $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$). **[6.332a]** $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$; $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$. **[6.332b]** $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$; $\frac{\pi}{3}+2k\pi$. **[6.333a]** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$. **[6.333b]** $\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi$. **[6.334a]** $x=k\pi$; $x=4$. **[6.334b]** $x=k\pi$; $x=3$. **[6.335a]** $-\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2n\pi$; $-\frac{5\pi}{4}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2n\pi$. **[6.335b]** $-\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{3\sqrt{2}}+2n\pi$; $-\frac{5\pi}{4}+\arccos\frac{1}{3\sqrt{2}}+2n\pi$. **[6.336a]** $\frac{m\pi}{8}+2k\pi$; $m=6,7,11,12,14$; $k\in Z$. **[6.336b]** $\frac{5\pi}{12}+2k\pi$; $\frac{13\pi}{12}+2k\pi$. **[6.337a]** $\pi+2k\pi$; $3-\sqrt{6}$; 5. **[6.337b]** $2k\pi$; $4-\sqrt{2}$; 4. **[6.338a]** $\pm\arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+2k\pi$. **[6.338b]** $(-1)^k\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+k\pi$. **[6.338c]** $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$. **[6.338d]** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+2k\pi$. **[6.339]** $\frac{2}{3}\pi+2\pi k$. **[6.340]** $\pi+2\pi k$; $\pi\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **[6.341]** $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **[6.342]** $-\frac{\pi}{42}$; $-\frac{29}{42}\pi$; $\frac{55}{42}\pi$. **[6.343]** $-\frac{7}{12}\pi$; $\frac{13}{12}\pi$. **[6.344]** $\frac{8}{15}\pi+4\pi k$; $\frac{4}{3}\pi+4\pi k$; $-\frac{4}{15}\pi+4\pi k$. **[6.345]** $\frac{3}{4}\pi+\frac{4}{3}\pi k$; $-\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\pi k$; $-\frac{7\pi}{18}+\frac{4}{3}\pi k$. **[6.346]** $\frac{\pi}{2}$. **[6.347]** $\frac{21}{16}\pi$; $\frac{11}{8}\pi$. **[6.348]** $\frac{5\pi}{16}+\pi k$. **[6.349]** $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **[6.350a]** $\pi-\arcsin\frac{2}{5}$. **[6.350b]** $\pi-\arcsin\frac{7}{10}$. **[6.351a]** $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. **[6.351b]** $\pi+\arcsin\frac{1}{3}$.

[6.352a] $\dfrac{\sqrt{17}-5}{4}$. **[6.352b]** $\dfrac{3-\sqrt{13}}{4}$. **[6.353]** $\dfrac{\pi}{8}$. **[6.354]** $\dfrac{\pi}{2}$. **[6.355]** π; $\dfrac{7}{6}\pi$. **[6.356a]** $-\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}+(2n+1)\pi$; $\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}+2n\pi$. **[6.356b]** $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{13}}+2n\pi$; $-\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{13}}+(2n+1)\pi$. **[6.357a]** $\arcsin\dfrac{3}{5}+(2k+1)\pi$. **[6.357b]** $-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}+2k\pi$. **[6.358]** $-23\pi/6$; $-19\pi/6$; $-11\pi/6$; $-4\arccos(-9/10)$; приводится к виду $\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{4}+\frac{9}{10}\right)=0$. **[6.359]** 0. **[6.360]** Нет. **[6.361]** $\dfrac{3}{2}\pi$; 2π; $2\pi-\arccos\dfrac{2}{5}$. **[6.362]** $\dfrac{\pi}{8}(2n+1)$, $n=-1,\ 0,\ 1,\ 2$; $-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{10}k$, $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$. **[6.363]** $3\pi+\arccos\dfrac{10}{11}$. **[6.364]** $8\pi k$. **[6.365]** $4\pi k$. **[6.366]** $-\dfrac{\pi}{7}+2\pi k$; $\dfrac{19}{14}\pi+2\pi k$. **[6.367]** $(x;y)=\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)$. **[6.368]** Нет решения. **[6.369]** $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$. **[6.370]** πk. **[6.371]** $\dfrac{5}{4}\pi+k\pi$; $-\dfrac{\pi}{4}-n\pi$, $k,n\geqslant 0$. **[6.372]** $(x;y)=(-1;2)$; $(-1;-2)$. **[6.373]** $\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$; $\dfrac{3\pi}{4}+2n\pi$. **[6.374]** $(\pi n;\ \pi n-1)$; $n\in Z$; под радикалом $4-(x-y-1)^2$. **[6.375]** $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$; $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$. **[6.384]** $\arccos(-\sqrt{-3\cos\alpha-1})<\dfrac{19\pi}{24}$. **[6.385]** 1. **[6.386]** $-\sin\left(\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}-\pi}{4}\right)$. **[6.387]** -1. **[6.388]** $\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$. **[6.389]** $\pm\dfrac{1}{4}(\sqrt{9+4\pi}-1)$. **[6.390]** $\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}$. **[6.391]** 0; 1. **[6.392]** $10\pi+20\pi k$. **[6.393]** $\pm(\sqrt{3}+1)$. **[6.394]** -1; 0; 1. **[6.395]** Нет решения. **[6.396]** $\sqrt{2}$. **[6.397]** $-\dfrac{3}{5}$. **[6.398]** $\dfrac{1}{2}$. **[6.399]** 1. **[6.400]** 0; 1. **[6.401]** -2. **[6.402]** 0; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **[6.403]** 0; -1; 1. **[6.404]** $\dfrac{1}{2}$. **[6.405]** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **[6.406]** 0; $\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{1}{2}$. **[6.407]** 0; $\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{1}{2}$. **[6.408]** $\dfrac{1}{2}$; 1. **[6.409]** 0. **[6.410]** $-\dfrac{1}{12}$. **[6.411]** $\left[-1;\sqrt{3}/2\right)$. **[6.412]** $(-\infty;\operatorname{ctg}2)$. **[6.413]** $\left(-1;1/\sqrt{2}\right)$. **[6.414]** $[-1;0)$. **[6.415]** $(1;\infty)$. **[6.416]** $[0;1/2)$. **[6.417]** $-\sqrt{2}$. **[6.418a]** $-1/\sqrt{5}$. **[6.418b]** $\sqrt{2/3}$. **[6.419a]** 1; $\dfrac{\sqrt{183}-1}{13}$.

[6.419b] 0; $\dfrac{13\sqrt{3}-1}{22}$. **[6.420]** $\pm\dfrac{\pi}{26}$; $\dfrac{\pi}{34}$. **[6.421]** $[-1;-7/8]\cup\{1\}$. **[6.422]** $\left(-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{6};\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right)$; первое больше. **[6.423a]** $\arcsin\dfrac{3}{4}$; $\pi-\arcsin\dfrac{3}{4}$; $-\arcsin\dfrac{1}{3}$. **[6.423b]** $\dfrac{\pi}{3}$; $\arccos\dfrac{2}{3}$. **[6.423c]** $-\arccos\dfrac{7}{8}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; $\arccos\dfrac{7}{8}$. **[6.423d]** $-\dfrac{\pi}{6}$; $-\arcsin\dfrac{3}{4}$; $\arcsin\dfrac{3}{4}-\pi$. **[6.424a]** $\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k$. **[6.424b]** $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$. **[6.424c]** $-\operatorname{arctg}\dfrac{6}{\pi}+\pi k$. **[6.424d]** $-\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi k$. **[6.425]** $[0;1]$. **[6.426]** $[-1;0]$. **[6.427]** $(0;1]$. **[6.428]** $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]\cup\{-1\}$. **[6.429]** $[0;1]$. **[6.430]** $[-1;1]$. **[6.431]** $[0;\infty)$. **[6.432]** $(-1;1)$. **[6.433]** $\left(\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k;\dfrac{11\pi}{6}+2\pi k\right)$. **[6.434]** $(\pi+2\pi k;\pi+\varphi+2\pi k]\cup[2\pi k-\varphi;2\pi k)$, где $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{3}$. **[6.435]** $\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$. **[6.436]** $\left[-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k;-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\right]\cup\left\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right\}$. **[6.437]** $\left(-\dfrac{\pi}{2}+n\pi;-\operatorname{arctg}2+n\pi\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{4}+n\pi;\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)$. **[6.438]** $\left(\dfrac{\pi}{6}(12k+1);\dfrac{\pi}{6}(12k+3)\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}(4k+2);\dfrac{\pi}{2}(4k+3)\right)$. **[6.439]** $\left(\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi;\dfrac{3\pi}{4}+2n\pi\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{4}+2n\pi;\dfrac{4\pi}{3}+2n\pi\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{4}+2n\pi;\dfrac{\pi}{4}+2n\pi\right)$. **[6.440]** $\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2n\pi}{3};\dfrac{7\pi}{18}+\dfrac{2n\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2n\pi}{3};\dfrac{11\pi}{18}+\dfrac{2n\pi}{3}\right)$. **[6.441]** $\left(n\pi;\dfrac{\pi}{6}+n\pi\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi;\dfrac{5\pi}{6}+n\pi\right)$. **[6.442]** $\left(\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8};\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4};\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{8}\right)$. **[6.443]** $\left(\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{24};\dfrac{\pi}{2}(n+1)+\dfrac{\pi}{24}\right)$. **[6.444]** $\left[\dfrac{\pi}{6}+2n\pi;\dfrac{5\pi}{6}+2n\pi\right]\cup\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right\}$. **[6.445]** $\left(-\dfrac{\pi}{4}+n\pi;n\pi\right]\cup\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi;\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)$. **[6.446]** $\left(\dfrac{3\pi}{4}+2n\pi;\dfrac{9\pi}{4}+2n\pi\right)$. **[6.447]** $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{4\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{3};\dfrac{7\pi}{4}\right)$. **[6.448]** $\left[0;\dfrac{\pi}{12}\right)\cup\left(-\dfrac{7\pi}{12};-\dfrac{\pi}{2}\right]$. **[6.449]** $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{6};\pi\right]$. **[6.450]** $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{n\pi}{4}$. **[6.451]** $\left[\dfrac{\pi}{6}+2n\pi;\dfrac{5\pi}{6}+2n\pi\right]$.

[6.452] $\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi; n\pi\right) \cup \left[\frac{\pi}{3}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$. **[6.453]** $\left(2n\pi; \frac{\pi}{3}+2n\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{2\pi}{3}+2n\pi\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}+2n\pi; \frac{3\pi}{2}+2n\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}+2n\pi; 2\pi+2n\pi\right)$.
[6.454] $\left[2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+\sqrt{65}}{16}; \frac{\pi}{3}\right)$. **[6.455]** $\left((-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$.
[6.456] $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k+n); \pm\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$. **[6.457]** $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k+n); \pm\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$. **[6.458]** $(k\pi; n\pi)$; $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi; -\frac{\pi}{4}+n\pi\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$. **[6.459]** $\left(\frac{\pi}{4}+\pi(k+n); \frac{\pi}{4}+\pi(k-n)\right)$. **[6.460]** $(0;0)$; $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right)$. **[6.461]** $\left(-\frac{5\pi}{12}+\pi k; -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$. **[6.462]** $\mathrm{tg}\,x=\pm\sqrt{3}$.
[6.463] $\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi; (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+k\pi\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}+2n\pi; (-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi\right)$.
[6.464] $(a;b)$, $(a;-b)$, $(\pi-a;b)$, $(\pi-a;-b)$, где $a=\arcsin(\sqrt[3]{14}-\sqrt{2})$; $b=\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}}$. **[6.465]** $\left(\pm\frac{\pi}{3}+\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$. **[6.466]** $\left(\arccos\frac{27}{28}+2\pi m; \pi+\arcsin\frac{17}{28}+2\pi n\right)$; $\left(-\arccos\frac{27}{28}+2\pi m; -\arccos\frac{17}{28}+2\pi n\right)$.
[6.467] $\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n; (-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$; $\left(\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n; (-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$.
[6.468] $(y;z)=\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{6}k+\pi n; -\frac{\pi}{12}+\pi k\right)$. **[6.469]** $\left(\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi k; (-1)^n\arcsin\frac{4}{5}+\pi n\right)$. **[6.470a]** $\frac{3}{2}\pi+3k\pi$. **[6.470b]** $\pi+2k\pi$.
[6.471] $n\pi-2$. **[6.472]** $\frac{\pi}{2}+n\pi$. **[6.473]** $\frac{-5\pm\sqrt{25+2\pi(2k+1)}}{2}$; $k\geqslant -2$. **[6.474]** $\frac{(4m+1)\pi\pm\sqrt{(4m+1)^2\pi^2-240}}{12}$; $m\neq -1;0;1$; $\frac{-(4n+1)\pi\pm\sqrt{(4n+1)^2+240}}{12}$; n любое. **[6.475a]** $1-\sqrt{3}$.
[6.475b] $(3-\sqrt{5})/2$. **[6.476]** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pm\arcsin(2-\sqrt{3})+\pi k$.
[6.477] $\pm 1\pm\sqrt{1-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k\geqslant 0$; все комбинации знаков .
[6.478] $\pm\sqrt{\pi k}$, $k\geqslant 0$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **[6.479]** π^2k^2; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, $n\geqslant 0$.
[6.480] $\pm\sqrt{\pi k}$, $k\geqslant 0$; $\frac{\pi}{3}+\pi n$. **[6.481]** $\pm\sqrt{\pi k}$, $k\geqslant 0$; $\frac{5}{6}\pi+\pi n$.
[6.482] $\frac{(16-\pi^2)^2}{4\pi^2}$. **[6.483]** 3 корня. **[6.484]** $1+\frac{\sqrt{15}}{8}$.

[6.485] $\frac{21}{2}\pi + 3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$. **[6.486]** 0; ± 1; $\frac{1-\sqrt{17}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{33}}{4}$. **[6.487]** $\frac{\pi+2}{6}$; $\frac{2-3\pi}{6}$; $\frac{2-\pi}{2}$; $\frac{3\pi+2}{2}$; $\frac{2-\pi}{6}$; $\frac{-11\pi+2}{6}$; $\frac{9\pi+2}{6}$. **[6.488]** $\frac{5}{4}\pi-1$. **[6.489]** Нет решения. **[6.490]** $2k\pi\pm\varphi$; $\pm(\frac{\pi}{2}-\varphi)+2k\pi$, где $\varphi = \frac{1}{2}\arcsin\frac{9}{16}$. **[6.491]** $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(m+\frac{1}{4}\right)+\pi k$; $\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{4}{4n+1} + \pi k$, $n \neq -1$, $n \neq 0$. **[6.492]** $-\frac{5\pi}{4}+\frac{3}{2}$; $-\pi+1$; $-\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}$; $-\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}$; 1; $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}$. **[6.493a]** $\pm\sqrt{\frac{2\pi n}{13}}$; $\pm\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{3}}$; $n, k \geqslant 0$. **[6.493b]** $\pm\sqrt{\frac{2\pi n}{15}}$; $\pm\sqrt{\frac{2\pi k}{7}}$; $n, k \geqslant 0$. **[6.494a]** $(-1)^k\arcsin\frac{\pi}{6} - \arccos\frac{\sqrt{5}}{3} + \pi k$; $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\pi}{4\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n$. **[6.494b]** $(-1)^k\arcsin\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi k$. **[6.495a]** 0; $\pm 2\sqrt{\frac{6}{5}}$; ± 6. **[6.495b]** 0; $\pm\sqrt{\frac{6}{7}}$; $\pm\frac{6}{5}$. **[6.495c]** 0; $\pm\sqrt{\frac{12}{35}}$; $\pm\frac{4}{5}$. **[6.495d]** 0; $\pm\sqrt{\frac{4}{5}}$; $\pm\frac{4}{3}$. **[6.496]** $1/2$. **[6.497a]** $n\pi$; $(-1)^k\arcsin\frac{5-\sqrt{17}}{4} + \pi k$, $k \geqslant 0$; $(-1)^m\arcsin\frac{\sqrt{65}-5}{4} + m\pi$, $m < 0$. **[6.497b]** $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $\pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2\pi k$, $k > 0$; $\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2}$; $\pm\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2} + 2m\pi$, $m < 0$; $-\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **[6.498]** $\left[-\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$; $\left[-\frac{\pi}{4}-\pi n; \frac{\pi}{4}-\pi n\right]$; $n = 1, 2, 3, \ldots$. **[6.499]** $(4n+1)^2$; $n \geqslant 0$. **[6.500]** $\frac{1\pm\sqrt{1+5\pi n}}{5}$; $n \geqslant 0$. **[6.501]** 3. **[6.502]** $\frac{\sqrt{356}-12}{6}$; $\frac{\sqrt{164}-12}{6}$. **[6.503]** $\frac{\sqrt{503}+18}{6}$; $\frac{\sqrt{335}+18}{6}$. **[6.504]** $(-1)^n\arcsin\left(\pi(4k+1)/4+\sqrt{\pi^2(4k+1)^2/16\pm 1}\right) + \pi n$, $k \leqslant -1$; $(-1)^n\arcsin\left(\pi(4k+1)/4-\sqrt{\pi^2(4k+1)^2/16-1}\right) + \pi n$, $k \geqslant 1$; $(-1)^n\arcsin\left(\pi(4k+1)/4-\sqrt{\pi^2(4k+1)^2/16+1}\right) + \pi n$, $k \geqslant 0$. **[6.505]** $(2k+1\pm\sqrt{(2k+1)^2-192})/12$, $k \leqslant -8$ или $k \geqslant 7$, $k \neq -25$, $k \neq -10$, $k \neq 9$, $k \neq 24$. Кроме того — корни $-1/2$, $-1/6$, $1/6$, $1/2$.

Ученость сама по себе дает указания чересчур общие, если их не уточнить опытом.

Ф. Бэкон

Глава 7

Логарифмические-показательные

7.1. Тождественные преобразования

7.1 [Плеханов]. Вычислить $\dfrac{\sqrt{\log_2 48 - 4\sqrt{\log_2 3}} - 3}{\sqrt{\log_2 6 + 2\sqrt{\log_2 3}}} + 2.$

7.2 [Плеханов]. Вычислить $\log_{b/\sqrt[3]{a}}\left(\sqrt[5]{b}/\sqrt{a}\right) + 3\log_{b/\sqrt[3]{a}}\sqrt{ab}$, если $\log_{a\sqrt{b}}(a/b) = 2/5$.

7.3 [Плеханов]. Вычислить $27^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{3}} + 4\cdot 5^{\log_5^2 2} - 2^{\log_5 2}\cdot\log_2 16.$

7.4 [Плеханов]. Вычислить $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7.$

7.5 [ЦыпПин]. Упростить:

$$\frac{81^{1/\log_5 9} + 3^{3/\log_{\sqrt{6}} 3}}{409}\cdot\left((\sqrt{7})^{2/\log_{25} 7} - 125^{\log_{25} 6}\right).$$

7.6 [ЦыпПин]. Упростить:

$$a^{1+2/\log_b a}\cdot b - 2\cdot a^{\log_a b+1}b^{\log_b a+1} + ab^{1+2/\log_a b}.$$

7.7 [ЦыпПин]. Упростить:

$$\left(2^{\log_{\sqrt[4]{2}} a} - 3^{\log_{27}(a^2+1)^3} - 2a\right) : \left(7^{4\log_{49} a} - a - 1\right).$$

7.8 [ЦыпПин]. Упростить:

$$\log_2(2x^2) + \log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)} + 2\log_4^2(x^2) + 2^{-3\log_{1/2}\log_2 x}.$$

7.9 [ЦыпПин]. Упростить: $\dfrac{\log_a b + \log_a\left(b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right)}{\log_a b - \log_{ab} b}\cdot\dfrac{\log_{ab} b\cdot\log_a b}{b^{2\log_b\log_a b} - 1}.$

7.10 [ЦыпПин]**.** Упростить:

$$5^{\log_{1/5}(1/2)} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \log_{1/2} \frac{1}{10+2\sqrt{21}}.$$

7.11 [ЦыпПин]**.** Найти $\log_{30} 8$, если известно, что $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

7.12 [ЦыпПин]**.** Вычислить: $\dfrac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \dfrac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$.

7.13 [ЦыпПин]**.** Зная, что $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$, найти $\lg 56$.

7.14 [ЦыпПин]**.** Зная, что $\lg 3 = a$, $\lg 2 = b$, найти $\log_5 6$.

7.15 [ЦыпПин]**.** Известно, что $\log_3 7 = a$, $\log_7 5 = b$, $\log_5 4 = c$. Найти $\log_3 12$.

7.16 [ЦыпПин]**.** Зная, что $b = 8^{1/(1-\log_8 a)}$ и $c = 8^{1/(1-\log_8 b)}$, выразить $\log_8 a$ через $\log_8 c$.

7.17 [ЦыпПин]**.** Доказать, что если $a^2 + b^2 = 7ab$; $a > 0$; $b > 0$, то $\lg \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}(\lg a + \lg b)$.

7.18 [ЦыпПин]**.** Показать, что при условии $x > 0$, $y > 0$ из равенства $x^2 + 4y^2 = 12xy$ следует равенство $\lg(x+2y) - 2\lg 2 = (\lg x + \lg y)/2$.

7.19 [ЦыпПин]**.** Доказать, что

$$\log_{a+b} m + \log_{a-b} m = 2\log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m,$$

если известно, что $m^2 = a^2 - b^2$.

7.20 [ЦыпПин]**.** Не пользуясь калькулятором, доказать:

$$\log_3 75 < \log_2 22.$$

7.21 [ЦыпПин]**.** Не пользуясь калькулятором, доказать:

$$\log_3 70 < \log_2 20.$$

7.22 [ЦыпПин]**.** Доказать, что для любого $N > 2$ справедливо неравенство $\log_N(N+1) < \log_{N-1} N$.

7.2. Показательные уравнения

Решить:

7.23 [Вавилов-2]**.** $4^x = 8^{2x-3}$.

7.24 [Вавилов-2]**.** $5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550$.

7.25 [Вавилов-2]**.** $(0.4)^{x-1} = (6.25)^{6x-5}$.

7.26 [Вавилов-2]. $\sqrt{3^x}5^{x/2} = 225$.

7.27 [Вавилов-2]. $3^{2x-1}5^{3x+2} = (9/5)5^{2x}3^{3x}$.

7.28 [Вавилов-2]. $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

7.29 [Вавилов-2]. $5^{2x-1} = 7^{3-x}$.

7.30 [Вавилов-2]. $\sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} = \frac{\sqrt[4]{5^{3x-4}}}{\sqrt{5}}$.

7.31 [Вавилов-2]. $8^{2/x} - 2^{(3x+3)/x} + 12 = 0$.

7.32 [Вавилов-2]. $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x - 26 \cdot 81^x = 0$.

7.33 [Вавилов-2]. $3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$.

7.34 [Вавилов-2]. $3^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} = 2^{2x^2-6x+3}$.

7.35' [Вавилов-2]. $\sqrt{5-x}\left(3^{x^2-7.2x+3.9} - 9\sqrt{3}\right) = 0$.

7.36' [Вавилов-2]. $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$.

7.37 [Вавилов-2]. $3^x \cdot 8^{x/(x+1)} = 36$.

7.38 [Вавилов-2]. $x^{\sqrt[3]{x^2}} = (\sqrt{x})^x$.

7.39 [Вавилов-2]. $5^x \cdot 8^{x/(x+1)} = 100$.

7.40 [Вавилов-2]. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{8/x}} = \frac{9}{16}$.

7.41' [Вавилов-2]. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$.

7.42' [Вавилов-2]. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

7.43 [Вавилов-2]. $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}\left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$.

7.44 [Вавилов-2]. $(\sqrt{x})^{\log_{16}(9x)} = (\sqrt{9})^{1/\log_3 2}$.

7.45 [Вавилов-2]. $2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_9 4x - 0.75}}$.

7.46 [Вавилов-2]. $5^{\sqrt{(\log_3 x + \log_5 9)\log_5 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 1.8}}$.

7.47 [Вавилов-2]. $7^{\log_{25}^2(5x)-1} - x^{\log_5 7} = 0$.

7.48' [Вавилов-2]. $2^{4x} - 2^{3x+1} - 2^{2x} + 2^{x+1} + 1 = 0$.

7.49 [Вавилов-2].

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{6/x}} - \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{6/x}} - \left(\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{2/x}} - \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{2/x}}\right) = 3.$$

7.50 [Плеханов]. $75^x - 8 \cdot 5^x \cdot 3^{x+1} = 25 \cdot 3^x$.

7.51 [Плеханов]. $2^{2x-3} \cdot 5^{3x-2} = 50^{x+1}$.

7.52 [Плеханов]. Найти произведение корней уравнения $6^{x/2} \cdot 2^{-x} + 12 = 6^{(x/2)+1} + 2^{1-x}$.

7.53 [Плеханов]. $2^{(5-x)/(x-1)} + 2^{(3-x)/(x-1)} - 3 = 0$.

7.54 [МИФИ]. $3^{x-1} \cdot 2^{2x-2} = 12^{9-x}$.

7.55 [МГУ, АзАфр, 1998]. $2^{-2x^2+1} - 12 \cdot 2^{-x^2} + 5 = 0$.

7.56 [МГУ, хим, 2002]. $4^{(1/x)} - 5 \cdot 2^{2+(1/x)} + 64 = 0$.

7.57 [МГУ, псих, 2002]. $2^{2^x} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^x-1} = 3$.

7.58 [МГУ, геол, 2001]. $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{x-2} \cdot \left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \dfrac{125}{343}$.

7.59’ [Вавилов-2]. $|x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3$.

7.60’ [Вавилов-2]. $x^x + 139x^{-x} - 108x^{-2x} = 32$.

7.61’ [Вавилов-2]. $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4+\sqrt{15}})^x = (2\sqrt{2})^x$.

7.62* [Вавилов-2]. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \dfrac{101}{10(2-\sqrt{3})}$.

7.63 [МГУ, геогр, 1973]. Найти решения уравнения $3^{x^2+4x} = 1/25$, удовлетворяющие неравенству $x > -3$.

7.64a [НГУ, ест, 2003]. $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{|x-1|} = 14$.

7.64b [НГУ, ест, 2003]. $3^{x-1} + 4 \cdot 3^{|x-2|} = 21$.

7.65 [МГУ, ФФ, 2001]. $18^x - 9^{x+1} - 2^{x+2} + 36 = 0$.

7.66’ [МГУ, АзАфр, 1999]. $\lg^2(2x-3)^2 + 4^{3\log_4 \sqrt[3]{2}} \left(\dfrac{\log_4(3-2x)}{\log_4 10}\right) = 0$.

7.3. Показательные неравенства

Решить:

7.67 [Вавилов-2]. $2^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} \geqslant 3^{2x^2-6x+3}$.

7.68 [Вавилов-2]. $(\sqrt{2}+1)^{(6x-6)/(x+1)} \leqslant (\sqrt{2}-1)^{-x}$.

7.69 [Вавилов-2]. $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geqslant (\sqrt{5}-2)^{(x-1)/(x+1)}$.

7.70 [Вавилов-2]. $8 \cdot \dfrac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x.$

7.71 [Вавилов-2]. $(\sqrt{2})^{3x} + (2\sqrt{2})^x \geqslant 2 \cdot 4^x.$

7.72 [Вавилов-2]. $5^{(\log_5^2 x)/4} \geqslant 5 \cdot x^{(\log_5 x)/5}.$

7.73 [Вавилов-2]. $\sqrt{\dfrac{9}{10}} \cdot \left(\dfrac{9}{10}\right)^{x-1} > \dfrac{10^{(3/4)x-1}}{\sqrt{10}}.$

7.74 [Вавилов-2]. $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1.$

7.75a* [Вавилов-2]. $\sqrt{2^{x^2+2x-10}} \geqslant (\sqrt{33+\sqrt{128}} - 1)^x.$

7.75b* [Вавилов-2]. $(\sqrt[3]{2})^{x^2-6x-4} - (\sqrt{3+\sqrt{8}} - 1)^x \geqslant 0.$

7.76 [Вавилов-2]. $2^x + 2^{|x|} \geqslant 2\sqrt{2}.$

7.77 [МГУ, ФФ, 2001]. $\dfrac{2^x + 5x - 18}{x-2} \leqslant 5.$

7.78' [МГУ, МФ, 2001].

$$x \geqslant \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5(101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x}).$$

7.79' [МГУ, МФ, 1973]. $4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + (x^2 - x) \cdot 2^x + 2^{x+1} \cdot x\sqrt{2-x^2}.$

7.80* [МГУ, псих, 1973]. Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству $3^{\frac{5}{2}\log_3(12-3x)} - 3^{\log_2 x} > 83$

7.81 [Вавилов-2]. $x^2 \cdot 5^x - 5^{x+2} < 0.$

7.82' [Вавилов-2]. $4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6.$

7.83' [МГУ, МФ, 1999]. $3^{(x+3)^2} + \dfrac{1}{9} \leqslant 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}.$

7.84' [МГУ, экон, 1999]. $4\sqrt{\dfrac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \leqslant 14\sqrt{\dfrac{2^{x-2}}{2^x - 1}}.$

7.85' [МГУ, ФФ, 1998]. $9^x - 2^{\frac{2x+1}{2}} < 2^{\frac{2x+7}{2}} - 3^{2x-1}.$

7.86a [НГУ, МФ, 2003]. $2^{2x+1} + 2 \cdot 4^{|x+1|} \leqslant 5.$

7.86b [НГУ, МФ, 2003]. $3^{2x+1} + 3 \cdot 9^{|x+1|} \geqslant 10.$

7.87 [Плеханов]. $\sqrt{-x^2 + 4x - 3}\,\big(3^x + 3^{6-x} - 90\big) \geqslant 0.$

7.88 [Плеханов]. $\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{137}{20}} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^x + \frac{3}{5}\right) \geqslant 0.$

7.89' [МГУ, ФФ, 2002]. $15 \cdot \dfrac{4^{x-2}}{4^x - 3^x} > 1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^x.$

7.90' [МГУ, геол, 2002]. $3^{2-x} + 6\cdot(\sqrt{3})^{2-2x} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+x-2}-3}$.

7.91' [МГУ, экон, 2002]. $\left(1-\dfrac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2} \geqslant 1$.

7.92a' [НГУ, МФ, 2005]. $(5x^2+x+1)^{x^2+2x-3} \geqslant (4x^2+2x+3)^{x^2+2x-3}$.

7.92b' [НГУ, МФ, 2005]. $(3x^2+2x+3)^{x^2+x-6} \leqslant (2x^2-x+1)^{x^2+x-6}$.

7.93a [НГУ, ест, 1976]. $\left(x^2+x+1\right)^{x^2-2x-2} > \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

7.93b [НГУ, ест, 1976]. $\left(x^2+\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-2x-1/4} > \dfrac{3}{3x^2+2}$.

7.4. Логарифмы с постоянным основанием

Решить уравнение:

7.94 [МГУ, био, 1997]. $\log_3 x + \log_3(x+1) = 1$.

7.95 [Вавилов-2]. $\lg(8-10x-12x^2) = 3\lg(2x-1)$.

7.96 [Вавилов-2]. $\lg 2x = 2\lg(4x-15)$.

7.97 [Вавилов-2]. $\lg x = \dfrac{1}{2}\lg(x+1)$.

7.98 [Вавилов-2]. $\log_9(x+1) - \log_9(1-x) = \log_9(2x+3)$.

7.99 [Вавилов-2]. $\log_2(x^2+7) = 5 + \log_2 x - \dfrac{6}{\log_2(x+7/x)}$.

7.100 [Вавилов-2]. $\log_{(1-2x^2)} x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}$.

7.101 [Вавилов-2].

$$x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3} - x\log_{1/6}(5x^2-2x-3) = x^2+2x.$$

7.102 [Вавилов-2].

$$49^{2\log_4(x-2)}\cdot 7^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{12-x}} = 49^{\log_2\sqrt{(1-2/x)^3}}\cdot 7^{4\log_2 x}.$$

7.103 [МГУ, ВМК, 1970]. $|1-\log_{(1/6)} x| + 2 = |3-\log_{(1/6)} x|$.

7.104 [МГУ, экон, 1970]. $\log_2\log_2 x = \log_4\log_4 2x$.

7.105 [МГУ, почв, 1970]. $\log_8(4^{x^2-1}-1) + \dfrac{2}{3} = \log_8(2^{x^2+2}-7)$.

7.106 [МГУ, ФФ, 1998]. $\log_3(x-2)-\log_9(x^2-10x+25)=\log_3 2.$

7.107a [НГУ, ест, 2004]. $\log_3(x^2+2x-9)+\log_{1/3}(x+3)=0.$

7.107b [НГУ, ест, 2004]. $\log_2(x^2-3x+2)+\log_{1/2}(2x-2)=0.$

7.108a [НГУ, ест, 1995]. $\log_4 2x+\log_{4x} 2=\dfrac{4}{3}.$

7.108b [НГУ, ест, 1995]. $\log_2 8x-\log_{2x} 4=\dfrac{13}{3}.$

7.109a [СУНЦ НГУ, 1999]. $2\cdot(4^{\lg x}-3)=11\cdot x^{\lg 2}.$

7.109b [СУНЦ НГУ, 1999]. $5+9\cdot 3^{\lg x}=2\cdot x^{\lg 9}.$

7.110 [Вавилов-2]. $3^{\log_2 x^2+1}=3+8\cdot x^{\log_2 3}.$

7.111a [Вавилов-2]. $\lg(2^x+x-13)=x-x\lg 5.$

7.111b [Вавилов-2]. $\lg(3^x+x-17)=x\lg 30-x.$

7.112a [НГУ, ФФ, 1997]. $\dfrac{\log_4(x/25)}{\log_2(5x)}=\dfrac{\log_2(\sqrt[4]{5}\cdot x)}{\log_4(x/\sqrt{5})}.$

7.112b [НГУ, ФФ, 1997]. $\dfrac{\log_9(x/125)}{\log_3(5x)}=\dfrac{\log_3(\sqrt[4]{125}\cdot x)}{\log_9(x/5)}.$

7.113 [НГУ, ест, 1986].

$$\log_{49}(7x+28)^2+\log_7(7x-28)=\log_7(2x^2-6x-9)+2.$$

7.114 [НГУ, ест, 1988]. $\lg\dfrac{2x^2+3}{3x+1}+\lg\dfrac{3x+1}{3x+5}=0.$

7.115 [НГУ, МФ, 1986]. Числа $\log_7(6-2^x)$; $\log_{49}(3\cdot 2^{x+2}-4^x-22)$; $\log_7(3-2^x)$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти x.

7.116 [Вавилов-2]. $\dfrac{1}{4}x^{(\log_2 x)/2}=2^{(\log_2^2 x)/4}.$

7.117 [МГУ, МФ, 1971].

$$(x+4)\log_4(x+1)-(x-4)\log_2(x-1)=\frac{8}{3}\log_2(x^2-1).$$

7.118 [МГУ, МФ, 1999].

$$|\log_2(2x+7)|=\log_2(1+|x+3|)+\log_2(1-|x+3|).$$

7.119 [МГУ, ФФ, 2002]. $\dfrac{\log_2(4x-3)}{\log_3 x}=\dfrac{2}{\log_3 2}.$

7.120’ [МГУ, ФФ, 1997]**.** $\log_9(x^2/4)+\log_3(x+5)=1.$

7.121a** [Потапов]**.** $\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}(x^2+4x-2)=\log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}(x^2+4x-3).$

7.121b** [Потапов]**.** $\log_{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}(x^2+2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2+2x-3).$

7.121c** [Потапов]**.** $\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}(x^2-4x-2)=\log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}(x^2-4x-3).$

Решить неравенство:

7.122 [МГУ, геогр, 2001]**.** $\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(x^2-9)\geqslant 0.$

7.123 [Вавилов-2]**.** $\log_{1/3}\log_4(x^2-5)>0.$

7.124 [Вавилов-2]**.** $\log_{1/2}\log_6\dfrac{x^2+x}{x+4}\leqslant 0.$

7.125 [Вавилов-2]**.** $\log_{8/3}\log_{1/2}(x^2-x-6)\geqslant 0.$

7.126 [Вавилов-2]**.** $\log_{0.5}\left(\log_6\dfrac{x^2+x}{x+4}\right)<0.$

7.127 [Вавилов-2]**.** $\sqrt{\log_2\dfrac{3-2x}{1-x}}<1.$

7.128 [Вавилов-2]**.** $|\log_2(x^2+x-4)|<1.$

7.129 [МГУ, био, 1970]**.** $\log_{1/3}(x^2-6)+\log_9 x^2\geqslant 0.$

7.130 [МГУ, почв, 1971]**.** $2\log_{1/2}(x-2)-\log_{1/2}(x^2-x-2)\geqslant 1.$

7.131 [Вавилов-2]**.** $\log_3((x+2)(x+4))+\log_{1/3}(x+2)<\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7.$

7.132 [Вавилов-2]**.** $\log_{1/3}(x^2-6x+18)-2\log_{1/3}(x-4)<0.$

7.133 [Вавилов-2]**.** $\log_9^2 x\geqslant\log_3^2\sqrt{1-x/4}.$

7.134 [Вавилов-2]**.** $\dfrac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\geqslant 0.$

7.135 [Вавилов-2]**.** $\log_2\log_3\dfrac{x-1}{x+1}<\log_{1/2}\log_{1/3}\dfrac{x+1}{x-1}.$

7.136 [Вавилов-2]**.** $\dfrac{1}{\log_4(x+3)}>\dfrac{1}{\log_4\frac{x+1}{x+2}}.$

7.137 [Вавилов-2]**.** $\log_{0.7}(4-x^2)>\log_{0.7}(6|x|-3).$

7.138 [Вавилов-2]**.** $\log_4(x^2-5)<\log_4\left(\dfrac{7}{3}|x|-3\right).$

7.139 [Вавилов-2]**.** $2\log_3\log_3 x+\log_{1/3}\log_3(9\sqrt[3]{x})\geqslant 1.$

7.140 [Вавилов-2]. $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geqslant 0.$

7.141 [Вавилов-2]. $\log_3(x^2-2) < \log_3\left(\dfrac{3}{2}|x|-1\right).$

7.142 [Вавилов-2]. $\sqrt{\log_2 \dfrac{3x-1}{2-x}} < 1.$

7.143 [Вавилов-2]. $\sqrt{(1/2-x)(x-4)}\log_2 \dfrac{2x+1/5}{x+1} \leqslant 0.$

7.144 [Вавилов-2]. $(4\cdot 3^x + 3^{-x})^{3\log_3(x-1)-\log_3((x-1)(2x+1))} > 1.$

7.145 [Вавилов-2]. $\log_{1/3}(3-x^2) < \log_{1/3}(4|x|-2).$

7.146 [Вавилов-2]. $\dfrac{1}{\log_{1/2}\sqrt{x+3}} \leqslant \dfrac{1}{\log_{1/2}(x+1)}.$

7.147a [НГУ, МФ, 1987]. $\dfrac{1}{|\log_2 \frac{4}{x}|-3} > \dfrac{1}{|\log_2 \dfrac{x}{2}|-1}.$

7.147b [НГУ, МФ, 1987]. $\dfrac{1}{|\log_4(4x^2)|-1} \geqslant \dfrac{1}{|\log_2(4x)|-2}.$

7.148a [НГУ, МФ, 1990]. $\dfrac{x-1}{(x+1)\cdot\log_3\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)} \geqslant 0.$

7.148b [НГУ, МФ, 1990]. $\dfrac{x+2}{x\cdot\log_2\left(x^2+x+\frac{3}{4}\right)} \geqslant 0.$

7.149 [НГУ, ест, 1982]. $\log_2(4x^4+3x^2+6)+\log_{1/2}(x^2+1) \geqslant \log_2(3x^2+6).$

7.150a [НГУ, ест, 1991].

$$\log_{\sqrt{3}-1}(x+20)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left[\log_{\sqrt{3}-1}(2-\sqrt{3})\right]\cdot\log_{2-\sqrt{3}}\left[(x+20)(x^2-2x-8)\right].$$

7.150b [НГУ, ест, 1991].

$$\log_{4-\sqrt{10}}(x+16)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left[\log_{4-\sqrt{10}}(\sqrt{10}-3)\right]\cdot\log_{\sqrt{10}-3}\left[(x+16)(x^2-6x+8)\right].$$

7.151a [НГУ, ест, 1993].

$$\log_{3\sqrt{2}}(x^2-6x+4)+\log_{\sqrt{2}/6}\left(5-\frac{9x}{2}-\frac{x^2}{2}\right) \geqslant 0.$$

7.151b [НГУ, ест, 1993]. $\log_{5\sqrt{2}}(x^2-4x+1)+\log_{\sqrt{2}/10}(2+5x-x^2)\leqslant 0.$

7.152 [Вавилов-2].

$$\log_2(\sqrt{x^2-4x}+3)>\log_{1/2}\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}+1.$$

7.153 [Вавилов-2].

$$(\sqrt{x^2-4x+3}+1)\log_2\frac{x}{5}+\frac{1}{x}(\sqrt{8x-2x^2-6}+1)\leqslant 0.$$

7.154a [СУНЦ НГУ, 2001]. $\sqrt{\log_2 2x\cdot\log_2 8x}>\sqrt{6}\log_2\dfrac{x}{2}.$

7.154b [СУНЦ НГУ, 2001]. $\sqrt{\log_3\dfrac{x}{3}\cdot\log_3 27x}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}\log_3 3x.$

7.155 [МИЭМ, 2001]. $\log_4(3x-8)<\log_{1/4}(x-2)+\dfrac{3}{2}.$

7.156 [МГУ, ФФ, 2001]. $\sqrt{2\log_9(3x^2-4)}>\log_3\sqrt{3x^2-4}.$

7.157 [МГУ, ФФ, 2001].

$$\log_2\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)<\log_{1/8}\left(\log_{1/9}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right).$$

7.158 [МГУ, фил, 2001]. $\dfrac{1}{\log_{1/12}(2x^2-1)}>\dfrac{1}{\log_{1/4}x}+\dfrac{1}{\log_{1/3}x}.$

7.159a [МГУ, экон, 2001]. $\log_2(2^x-3)\cdot\log_{\sqrt{2}}(4^{x+2}-12\cdot 2^{x+3}+144)<32.$

7.159b [МГУ, менедж, 2001]. $\log_3(3^x-1)\cdot\log_9(9^{x+2}-6\cdot 3^{x+3}+81)<3.$

7.160 [МГУ, ФФ, 1999]. $\dfrac{2}{\log_3(x+1)}\leqslant\dfrac{1}{\log_9(x+5)}.$

7.161 [МГУ, геол, 1998]. $\log_{1/3}(x-2)>\dfrac{1}{\log_{1/3}(x-2)}+\dfrac{3}{2}.$

7.162a [СУНЦ НГУ, 2015]. $\log_{\frac{1}{4}}(25x^2)\geqslant\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6).$

7.162b [СУНЦ НГУ, 2015]. $\log_{\frac{1}{49}}(9x^2)\geqslant\log_{\frac{1}{7}}(x^2-3x-10).$

7.163a’ [НГУ, МФ, 1993].

$$\log_{3+\sqrt{8}}(3x+2-2\sqrt{x+2})+\log_{3-\sqrt{8}}(2x+1-\sqrt{x+2})\leqslant 0.$$

7.163b’ [НГУ, МФ, 1993].

$$\log_{\sqrt{5}-2}(2x+1-2\sqrt{x+1})+\log_{\sqrt{5}+2}(x+3-\sqrt{x+1})\geqslant 0.$$

7.164' [МГУ, псих, 1972]. Найти все целые решения неравенства
$$x-1<\log_6(x+3).$$

7.165a' [НГУ, ест, 2002]. $\log_4(|2x+3|-|x-1|)\geqslant\log_2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}$.

7.165b' [НГУ, ест, 2002]. $\log_9(|2x-1|-|x+3|)\geqslant\log_3\sqrt{\dfrac{x+3}{x-4}}$.

7.166' [МГУ, МФ, 2002]. $\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{x}{x+1}+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{3}\geqslant 2$.

7.167' [МГУ, МФ, 1998]. $\dfrac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{1/2}(13-x)}{|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8|}\geqslant 0$.

7.168* [МГУ, био, 2002]. $\log_2^2|2x|-5\log_2|2x|+2|x|\log_2|2x|-4|x|+6\geqslant 0$.

7.169 [МГУ, почв, 2002]. $\log_3\log_4 x\leqslant\log_9\log_2(8x)$.

7.170a [НГУ, ФФ, 1987]. $\dfrac{1}{\log_2(x^2-x+1)}+1\geqslant\dfrac{\log_2(x+3)}{\log_2(x^2-x+1)}$.

7.170b [НГУ, ФФ, 1987]. $\dfrac{1}{\log_3(x+3)}+1\leqslant\dfrac{\log_3(x^2+4x+5)}{\log_3(x+3)}$.

7.171 [Вавилов-2].
$$\log_3\frac{27}{\sqrt{9x-x^2}+\sqrt{5-x^2}+2}-3<\log_{1/3}(\sqrt{9x-x^2}+3).$$

7.172 [МГУ, МФ, 2004]. $\dfrac{\log_4(2-x)-\log_6(2-x)}{\log_6 x-\log_9 x}\leqslant\log_4 9$.

7.173 [Вавилов-2].
$$5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\cdot\log_2 x>(x^2-x)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}.$$

7.174 [Вавилов-2]. $|\sqrt{2}|x|-1|\cdot\log_2(2-2x^2)\geqslant 1$.

7.175 [Вавилов-2].
$$\log_5(\sqrt{2+x-x^2}+4)>\log_{1/5}\frac{25}{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{1-x}+1}+2.$$

7.176 [Вавилов-2].
$$\log_{1/4}(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{3}+1)<\log_4\frac{16}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-1}+1}-2.$$

7.177 [Вавилов-2].

$$12x + \sqrt{3x^4 + 4x^5 - 4x^6}\log_2 x^2 > 3\sqrt{3 + 4x - 4x^2} + 4x^3 \log_4 x^4.$$

task7.178[Вавилов-2] $\log_{1/2}|x| \geqslant |x| - 1$.

7.179 [Вавилов-2]. $(\log_2 x + \log_{0.25}(x+3))^{x-4} > 1$.

7.180a' [НГУ, МФ, 2000]. $\dfrac{1}{x}\log_{0.8}\dfrac{7 - 2\cdot 3^x}{3} \geqslant \log_{1.25} 3$.

7.180b' [НГУ, МФ, 2000]. $\dfrac{1}{x}\log_{0.4}\dfrac{12 - 4\cdot 5^{-x}}{5} \leqslant \log_{2.5}(1/5)$.

7.180c' [НГУ, МФ, 2000]. $\dfrac{1}{x}\log_{0.08}\dfrac{8 - 4^{x+1}}{3} \geqslant \log_{12.5} 4$.

7.181a' [СУНЦ НГУ, 1992]. $\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}} > (3x-1)^{\log_{1/4}(-x^2+5x-1)}$.

7.181b' [СУНЦ НГУ, 1992]. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x+1}} > (2x+1)^{\log_{1/27}(-x^2+5x+5)}$.

7.5. Логарифмы с переменным основанием

Решить уравнение:

7.182 [МГУ, геогр, 1999]. $\log_{4x-8}(x^2 - 2x - 3) = 1$.

7.183 [Вавилов-2]. $\log_{(5+x)/3} 3 = \log_{-1/(x+1)} 3$.

7.184a [НГУ, ест, 1975]. $\log_2 3 \cdot \log_{x+5} 4 - \log_4(x-5)^2 \cdot \log_{x+5} 2 = 1$.

7.184b [НГУ, ест, 1975]. $\log_{\sqrt{x}}(6-x)\cdot\log_6 x + \log_6(x-1)^2 = 2$.

7.185 [Вавилов-2].

$$2\log_3(x-2)^2 + (x-5)^2\log_{x-2} 3 = 2\log_{x-2} 9 + (x-5)^2\log_3(x-2).$$

7.186 [Вавилов-2]. $\dfrac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2} + \log_{2x} 2 \cdot \log_{1/2} 2x = 0$.

7.187 [Вавилов-2]. $\log_{2x^2-1}(x^2 - \dfrac{2}{3}) = 2 - \dfrac{1}{\log_3(2x^2-1)}$.

7.188 [Вавилов-2].

$$(x-4)^2\log_4(x-1) - 2\log_4(x-1)^2 = (x-4)^2\log_{x-1} 4 - 2\log_{x-1} 16.$$

7.189 [Вавилов-2]. $\dfrac{x}{18} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_x 12}$.

7.190a [СУНЦ НГУ, 2002].

$$\log_4^2(2x-3)+\log_{x+5}^2 4=\log_4^2(x+5)+\log_{2x-3}^2 4.$$

7.190b [СУНЦ НГУ, 2002].

$$\log_3^2(2x+1)+\log_{x+4}^2 3=\log_3^2(x+4)+\log_{2x+1}^2 3.$$

7.191 [МГУ, псих, 1999]. $x^{\log_7 4}+5\cdot 2^{\log_7 x}-4=0.$

7.192 [Вавилов-2]. $3+\dfrac{1}{\log_{32}(x/2)}=\log_{x/2}\left(\dfrac{75x}{4}-\dfrac{11}{x}\right).$

7.193 [Вавилов-2].

$$(x-3)^2\log_2(x-1)+2\log_{x-1}\sqrt{2}=(x-3)^2\log_{x-1}2+2\log_2\sqrt{x-1}.$$

7.194 [Вавилов-2].

$$2\log_{x-2}\sqrt{3}+(x-4)^2\log_3(x-2)=(x-4)^2\log_{x-2}3+2\log_3\sqrt{x-2}.$$

7.195 [Вавилов-2]. $\log_{1-2x}(6x^2-5x+1)-\log_{1-3x}(4x^2-4x+1)=2.$

7.196 [Вавилов-2]. $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4.$

7.197 [НГУ, ест, 1977]. $3\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+2\cdot 3^{\log_x(3x-2)}-5\cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)}=0.$

7.198a [НГУ, ФФ, 1998]. $\log_{2/5}x+\log_5 x=\log_x(1/2).$

7.198b [НГУ, ФФ, 1998]. $\log_3 x+\log_{1/2}x=\log_x(2/3).$

7.199a' [НГУ, МФ, 1995].

$$2\log_{x+3}(2x^2+10x+12)+\frac{1}{2}\log_{2x+4}(x^2+6x+9)=5.$$

7.199b' [НГУ, МФ, 1995]. $\log_{x-2}(7x-10-x^2)+\log_{5-x}(x^2-4x+4)=4.$

7.200 [МГУ, био, 1999].

$$\log_{8-7x}\left(x^3-3x^2-\frac{37}{8}x+\frac{55}{8}\right)+2\log_{(8-7x)^2}(x+3)=1.$$

7.201a' [СУНЦ НГУ, 2004]. Найти все общие корни уравнений $\log_x(15x-4)+\log_{x+3}(x^2+11)=2$ и $\log_{x+3}(x^2+11)+\log_x(3x+2)=1.$

7.201b' [СУНЦ НГУ, 2004]. Найти все общие корни уравнений $\log_{x+1}(3x+5)+\log_{x+3}(x^2+5)=1$ и $\log_{x+3}(x^2+5)+\log_{x+1}(12x+9)=2.$

7.202 [МГУ, хим, 1971]. $2^{\log_{\sqrt{2}}(x-0.5)}+x=x^{0.5x^2}+\cos^4(\pi/4).$

7.203 [Вавилов-2]. $\log_{x^3+x}(x^2-4)=\log_{4x^2-6}(x^2-4)$.

7.204 [Вавилов-2]. $\log_{x^2+6x+8}\Big(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\Big)=0$.

7.205 [МГУ, фил, 1973]. $\log_{x-1}\sqrt[4]{2x^2-8x+9}=1/2$.

7.206a [НГУ, ест, 1988]. $\log_{x+2}\log_2\log_{x+3}(11x^2+46x+48)=0$.

7.206b [НГУ, ест, 1988]. $\log_{x+4}\log_3\log_{x+3}(x^2+7x+12)=0$.

7.207a [НГУ, ест, 1975]. $\log_{x-4}(x-2)\cdot\log_7(x-4)^2+\log_7(8-x)^2=2$.

7.207b [НГУ, ест, 1975]. $\log_{\sqrt{x}}(3-x)\cdot\log_2 x+\log_2(x-6)^2=4$.

Решить неравенство:

7.208 [Вавилов-2]. $\log_{x^2}(2+x)<1$.

7.209 [Вавилов-2]. $\log_x\dfrac{2x+2/5}{5(1-x)}>0$.

7.210 [Вавилов-2]. $\log_{-4x^2+12x-8}|4x-5|>0$.

7.211 [Вавилов-2]. $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2}-x-1)\geqslant 1$.

7.212 [Вавилов-2]. $\log_x(2x)\leqslant\sqrt{\log_x(2x^3)}$.

7.213 [Вавилов-2]. $\log_{1/2}\log_2\log_{x-1}9>0$.

7.214 [Вавилов-2]. $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{(x+1)/(x-1)}2>0$.

7.215 [Вавилов-2]. $\log_{1/x}\left(\dfrac{5}{2}x-1\right)\geqslant -2$.

7.216 [Вавилов-2]. $\log_x\dfrac{4x+5}{6-5x}<-1$.

7.217 [Вавилов-2]. $\log_x\dfrac{2x-1}{x-1}>1$.

7.218 [Вавилов-2]. $\log_{3x-2}x\leqslant 1$.

7.219 [Вавилов-2]. $\log_{2x-(4/25)}\dfrac{x^2-14x+51}{50}\leqslant 0$.

7.220 [Вавилов-2]. $\log_{x-1}(1+2x^4-x^6)>0$.

7.221 [Вавилов-2]. $\log_{x+2.5}\left(\dfrac{x-5}{2x-3}\right)^2>0$.

7.222 [Вавилов-2]. $\log_{0.2x}(x^2-8x+16)\geqslant 0$.

7.223 [Вавилов-2]. $\log_{x-1}\dfrac{2(x-2)(x-4)}{x+5}\geqslant 1$.

7.224 [Вавилов-2]. $\log_{1/x^2}(x^7+x^3-3)+3.5<0$.

7.225 [Вавилов-2]. $\log_{2x-x^2}(x-3/2)>0$.

7.226a [МГУ, ВМК, 1973]. $\log_{(x^2-10x+31)/30}(5x-11/20)\leqslant 0$.

7.226b [МГУ, ВМК, 1973]. $\log_{(x^2-18x+91)/90}(5x-3/10)\geqslant 0$.

7.227 [Вавилов-2]. $\log_{|x|}(6x+27)>2$.

7.228 [Вавилов-2]. $\log_x|x-2|<1$.

7.229 [Вавилов-2]. $\log_{x^2}\dfrac{4x-5}{|x-2|}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

7.230 [Вавилов-2]. $\log_{\frac{3x}{x^2+1}}(x^2-2.5x+1)\geqslant 0$.

7.231 [Вавилов-2]. $\log_{\frac{100x-7}{25}}\dfrac{x^2-16x+65}{64}<0$.

7.232 [Вавилов-2]. $\log_{\log_2 x}\dfrac{1}{4x^2-20x+22}<0$.

7.233 [Вавилов-2]. $\log_{x^2}\dfrac{2x}{|x-3|}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

7.234 [Вавилов-2]. $\log_{(x+6)/3}\log_2\dfrac{x-1}{x+2}>0$.

7.235 [Вавилов-2]. $\log_x\log_2(4^x-12)\leqslant 1$.

7.236 [Вавилов-2]. $\log_{-x^2-x/2+1/2}|16x-3|<0$.

7.237 [Вавилов-2]. $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1}x>2$.

7.238 [Вавилов-2]. $\log_{(x^2-12x+30)/10}\left(\log_2\dfrac{2x}{5}\right)>0$.

7.239 [Вавилов-2]. $\log_{\log_2(0.5x)}(x^2-10x+22)>0$.

7.240 [Вавилов-2]. $\log_x\log_9(3^x-9)\leqslant 1$.

7.241 [Вавилов-2]. $\log_{4x/3-4x^2/9}(x-2)^2>0$.

7.242a [Вавилов-2].

$$(2+\sqrt{x^2-7x+12})\left(\frac{2}{x}-1\right)\leqslant(\sqrt{14x-2x^2-24}+2)\log_x(2/x).$$

7.242b [Вавилов-2]. $\sqrt{x^2-5x+6}+x+\sqrt{10x-2x^2-12}+3\log_4\dfrac{3}{x}\geqslant 3$.

7.243a [Вавилов-2]. $\log_x 3\cdot\log_9\sqrt[3]{\dfrac{1-5x}{6x-4}}\leqslant\dfrac{1}{6}$.

7.243b [Вавилов-2]. $\log_x 4\cdot\log_2\dfrac{5-12x}{12x-8}\geqslant 2$.

7.244a' [НГУ, ест, 1996].

$$(\log_{6x+5} 2 + \log_{6x+5} 5) \log_4 10 = \bigl(1/2 + \log_4 5 - \log_{6x+5} 10\bigr) \log_{x^2} 100.$$

7.244b' [НГУ, ест, 1996].

$$(\log_{9x+1} 2 + \log_{9x+1} 5)(\log_8 5 + 1/3) = \bigl(\log_8 10 - \log_{9x+1} 10\bigr) \log_{x^2} 100.$$

7.245 [МГУ, экон, 1973]. $\log_x 5 < \log_{2x-1} 5$.

7.246 [МГУ, ФФ, 1968]. $\log_{x/2} 8 + \log_{x/4} 8 < \dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

7.247 [МГУ, ФФ, 1970]. $\log_x 3 - \log_{4x} 3 > 0$.

7.248a [НГУ, ест, 1976]. $\left(\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3x}{2} + 3\right)^{x^2-x-7} > \dfrac{4}{x^2 - 6x + 12}$.

7.248b [НГУ, ест, 1976]. $\left(x^2 + \dfrac{1}{2}\right)^{3x^2-10x+2} > \dfrac{2}{2x^2+1}$.

7.249 [МГУ, АзАфр, 2001]. $(1 + \log_3 x)\sqrt{\log_{3x} \sqrt[3]{\dfrac{x}{3}}} \leqslant 2$.

7.250 [МГУ, ВМК, 1998]. $\log_2(5 - x) \cdot \log_{(x+1)} \dfrac{1}{8} \geqslant -6$.

7.251 [МГУ, георг, 1998]. $\dfrac{\sqrt{-4x^2 + 13x - 3} + 1}{\log_{3x} 7} \geqslant 0$.

7.252a [СУНЦ НГУ, 1998]. $\dfrac{\log_2 2x}{\log_3 2x} \geqslant \log_x 5$.

7.252b [СУНЦ НГУ, 1998]. $\dfrac{\log_{0.5}(x/4)}{\log_5(x/4)} \leqslant \log_x 10$.

7.253 [МГУ, ВМК, 2002]. $\bigl|6 - \log_2(4x^2 - 20x + 25)\bigr| \cdot \log_{5-2x} 32 \leqslant 5$.

7.254a [СУНЦ НГУ, 2006]. $\dfrac{\log_9(7 - 6x) \cdot \log_{7-6x} 4}{\log_3(6 - 5x)} \leqslant 1$.

7.254b [СУНЦ НГУ, 2006]. $\dfrac{\log_3(5x + 6) \cdot \log_{5x+6} 2}{\log_9(4x + 5)} \leqslant 1$.

7.255 [МГУ, ФФ, 1966]. $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}} \left(\dfrac{x}{3}\right) > 0$.

7.256 [МГУ, фил, 1969]. $|x - 2|^{\log_4(x+2) - \log_2 x} < 1$.

7.257a [НГУ, ест, 1994]. $|x - 1|^{2\sqrt{x+2}} < |x - 1|^{x+1}$.

7.257b [НГУ, ест, 1994]. $|x+2|^{2\sqrt{x+4}} < |x+2|^{\frac{1}{2}-x}$.

7.258a [НГУ, МФ, 1997]. $\log_{x+3/16} 4 \leqslant \log_{\sqrt{x}} 4$.

7.258b [НГУ, МФ, 1997]. $\log_{x+6/25} 5 \leqslant \log_{\sqrt{x}} 5$.

7.259a [НГУ, ФФ, 1993]. $\dfrac{5}{6} + \log_3(x^2+x-6) > \dfrac{1}{\log_{x-2} 3} + \dfrac{2}{\log_{x+3}\sqrt{27}}$.

7.259b [НГУ, ФФ, 1993]. $\log_2(x^2-7x+12) < \dfrac{1}{\log_{3-x} 2} + \dfrac{1}{\log_{4-x} 8} + 1$.

7.260a [НГУ, ФФ, 1995]. $\log_{5-x}(\sqrt{6-x}+2) \leqslant 1$.

7.260b [НГУ, ФФ, 1995]. $\log_{2-x}\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}-x} + \dfrac{3}{2}\right) \leqslant 1$.

7.261a [НГУ, МФ, 1976]. $\log_{x^2+\frac{1}{4}}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{2}\right) \geqslant 1$.

7.261b [НГУ, МФ, 1976]. $\log_{x-2}(9x-16-x^2) > 2$.

7.262a [НГУ, ФФ, 1986]. $\log_{x+1} \dfrac{3x}{5x-8} > 1$.

7.262b [НГУ, ФФ, 1986]. $\log_x \dfrac{3x-7}{3x-3} < -1$.

7.263a* [НГУ, МФ, 1999]. $\log_3(\log_x(1/3)) \leqslant \sqrt{3}\log_x(\log_{1/3} x)$.

7.263b* [НГУ, МФ, 1999]. $\log_2(\log_x 2) + \sqrt{2}\log_x(\log_2 x) \leqslant 0$.

7.263c* [НГУ, МФ, 1999]. $\sqrt{2}\log_2(\log_x(1/2)) \leqslant \log_{\sqrt{x}}(\log_{1/2} x)$.

7.264a' [НГУ, ест, 1999]. $2\log_{1/2}(\log_{1/x} 2) + 5\log_{\sqrt{x}}(\log_{1/2} x) \leqslant 0$.

7.264b' [НГУ, ест, 1999]. $\log_{1/2}(\log_x 2) \leqslant \log_{\sqrt{x}}(\log_2 x)$.

7.264c' [НГУ, ест, 1999]. $2\log_2(\log_x(1/2)) \geqslant 3\log_{\sqrt{x}}(\log_2(1/x))$.

7.265 [Вавилов-2]. $x^{\log_2 x^2} + 2 \geqslant 4^{1+2\log_4^2 x}$.

7.266 [Вавилов-2]. $2(9^{0.25+2\log_9^2 x} - 1) \leqslant x^{\log_{\sqrt{3}} x}$.

7.267a [СУНЦ НГУ, 1999]. $\log_{x^2-1}(x^2-3x+3) \leqslant 1$.

7.267b [СУНЦ НГУ, 1999]. $\log_{x^2-2}\left(x^2 - x - \dfrac{1}{2}\right) \geqslant 1$.

7.268 [МФТИ, 2001]. $\log_{20-2x}(99-2x-x^2) + \log_{\sqrt{99-2x-x^2}}(20-2x) \leqslant 3$.

7.269a’ [НГУ, МФ, 1996]. Найти все решения неравенства

$$\left(x^{\log_3 x} - 9\right)\left[\log_7 \frac{x+1}{7} + \log_{x+1} \frac{7}{x+1}\right] \leqslant 0$$

и указать наибольшее из них.

7.269b’ [НГУ, МФ, 1996]. Найти все решения неравенства

$$\left(x^{\log_5 x} - 25\right)\left[\log_{81} \frac{2x+3}{27} + \log_{6x+9} \frac{27}{2x+3}\right] \leqslant 0$$

и указать наибольшее из них.

7.270a [НГУ, МФ, 1979]. $\log_{x^2+2x-3} \dfrac{|x+4|-|x|}{x-1} > 0.$

7.270b [НГУ, МФ, 1979]. $\log_{2x^2-x}(|x+2|-|x|) > \log_{2x^2-x} \sqrt{2-x^2}.$

7.271a’ [НГУ, ФФ, 1993]. $\log_2(x^2-5x+6) < \dfrac{1}{\log_{x-2} 2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\log_{x-3} 2} + \dfrac{1}{2}.$

7.271b’ [НГУ, ФФ, 1993]. $\log_2(x^2-7x+12) < \dfrac{1}{\log_{3-x} 2} + \dfrac{1}{\log_{4-x} 8} + 1.$

7.272a [НГУ, ест, 1997]. $\log_{x^2+12/49} 7 \geqslant \log_x 7.$

7.272b [НГУ, ест, 1997]. $\log_{x^2+6/25} 5 \geqslant \log_x 5.$

7.273a [НГУ, ФФ, 1996].

$$\log_x\left(8x - \frac{31}{2}x^2\right) \leqslant \log_{\sqrt{8-(31x/2)}}\left(8x - \frac{31}{2}x^2\right).$$

7.273b [НГУ, ФФ, 1996].

$$\log_x\left(\frac{25}{6}x - \frac{25}{6}x^2\right) + \log_{\sqrt{(25/6x^2)-(25/6x)}}\left(\frac{25}{6}x - \frac{25}{6}x^2\right) \leqslant 0.$$

7.274a [СУНЦ НГУ, 2000]. $\log_x((5/2)-x) \leqslant \log_{((5/2)-x)} x.$

7.274b [СУНЦ НГУ, 2000]. $\log_{((9/4)-x)}(2x) \leqslant \log_{2x}((9/4)-x).$

7.275a [СУНЦ НГУ, 2000]. $\log_{4x-1} \dfrac{12x^2-11x+2}{x-1} \geqslant 2.$

7.275b [СУНЦ НГУ, 2000]. $\log_{2x+3} \dfrac{6x^2+13x+6}{x} \geqslant 2.$

7.276a [НГУ, МФ, 2001]. $\log_{2x-1} \dfrac{3}{8x^2-6} + \log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}(5+2\sqrt{6}) \leqslant 0.$

7.276b [НГУ, МФ, 2001]. $\log_{1-2x} \dfrac{5}{1-5x^2} + \log_{(\sqrt{5}-2)}(9-4\sqrt{5}) \geqslant 0.$

7.277a [СУНЦ НГУ]. $4+\log_4(x^2+6x+8) > \dfrac{1}{\log_{x+4}\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\log_{x+2}4}$.

7.277b [СУНЦ НГУ]. $\dfrac{5}{6}+\log_3(x^2+x-6) > \dfrac{1}{\log_{x-2}3} + \dfrac{2}{\log_{x+3}\sqrt{27}}$.

7.278 [МГУ, МФ, 2001]. $\dfrac{\log_{(21+4x-x^2)}(7-x)}{\log_{x+3}(21+4x-x^2)} < \dfrac{1}{4}$.

7.279 [МГУ, ВМК, 1999].

$$\left(x+\frac{8}{x}\right)\cdot\left|\log_{(2x-3)/2}(x^2-4x+4)\right| \geqslant 9\left|\log_{(2x-3)/2}(x^2-4x+4)\right|.$$

7.280 [МГУ, ВМК, 1999].

$$\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4}+2\right| \geqslant -3+\log_{1/(x+1)}\sqrt{(x-2)^6}.$$

7.281 [МГУ, хим, 1999].

$$(\log_{3-x}(2x+1))(\log_{2x+1}x^2) \leqslant (\log_{3-x}(3x+1))(\log_{3x+1}(x+2)).$$

7.282 [МГУ, экон, 1999]. $\log_{|x|-2}|x-3| \leqslant 0$.

7.283 [МГУ, МФ, 1998]. $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2+x-2) \leqslant 0$.

7.284 [МГУ, хим, 2002].

$$\log_{17-x^2}(56-x^2+10x) \leqslant \frac{1}{2}(\log_{3+\sqrt{7}}(8+3\sqrt{7})+\log_{3+\sqrt{7}}2).$$

7.285 [МГУ, соц, 2002].

$$\log_{(\sqrt{x^3+x^2+x-14})/5}\Big(\log_{1/4}(-x^2+5x-6)\Big) < 0.$$

7.286 [МГУ, АзАфр, 2002].

$$\left|\log_{x+1}2+\log_2\frac{x+1}{4}\right| + |\log_2(4x+4)+\log_{x+1}2| < \frac{17}{2}.$$

7.287a [СУНЦ НГУ, 2003]. $\log_{x-1}(3-2\sqrt{2}) \leqslant \log_{\frac{2x-1}{4}}(\sqrt{2}-1)$.

7.287b [СУНЦ НГУ, 2003]. $\log_{x-2}(4+2\sqrt{3}) \geqslant \log_{\frac{x-1}{3}}(\sqrt{3}+1)$.

7.288a [НГУ, МФ, 2004]. $\log_x\log_2\left(\dfrac{14}{3}-5\cdot 2^{-x}\right) \geqslant 1$.

7.288b [НГУ, МФ, 2004]. $\log_x \log_3\left(\frac{13}{2} - 10\cdot 3^{-x}\right) \geqslant 1.$

7.289a [СУНЦ НГУ, 2006]. $\dfrac{\log_9(7-6x)\cdot\log_{7-6x}4}{\log_3(6-5x)} \leqslant 1.$

7.289b [СУНЦ НГУ, 2006]. $\dfrac{\log_3(5x+6)\cdot\log_{5x+6}2}{\log_9(4x+5)} \leqslant 1.$

7.389c [СУНЦ НГУ, 2006]. $\dfrac{\log_4(8-7x)\cdot\log_{8-7x}9}{\log_2(7-6x)} \leqslant 1.$

7.290a [НГУ, МФ, 2007].

$$\log_{3x}(x^2+1)\cdot\log_{3x}(x^2+2)+1 \geqslant \log_{3x}(x^4+3x^2+2).$$

7.290b [НГУ, МФ, 2007].

$$\log_{4x}(x^2+1)\cdot\log_{4x}(x^2+3)+1 \geqslant \log_{4x}(x^4+4x^2+3).$$

7.291a [СУНЦ НГУ, 1993]. $\log_{7-2x}\left(\log_{1/2}\dfrac{4x-5}{2x-6}\right) > 0.$

7.291b [СУНЦ НГУ, 1993]. $\log_{\frac{x+4}{2}}\left(\log_2\dfrac{2x-1}{x+3}\right) < 0.$

7.292a [СУНЦ НГУ]. $\log_{\frac{x-1}{2}}(\sqrt{5}-2) \leqslant \log_{x^2-1}(\sqrt{5}-2).$

7.292b [СУНЦ НГУ]. $\log_{\frac{x^2-1}{2}}(\sqrt{3}-1) \geqslant \log_{x-1}(\sqrt{3}-1).$

7.6. С тригонометрией

7.293 [Шар-11]. $|\sin x|^{\operatorname{tg} x} + |\cos x|^{\operatorname{tg} x} = 1.$

7.294 [Шар-11]. $|\sin 3x|^{\operatorname{tg} 5x} = 1.$

7.295 [ЦыпПин]. $\log_{\cos x}\sin x + \log_{\sin x}\cos x = 2.$

7.296 [ЦыпПин]. $3^{\lg \operatorname{tg} x} + 3^{\lg \operatorname{ctg} x} = 2.$

7.297 [МГУ, псих, 1998]. Какое из двух чисел больше: $\frac{1}{2}\log_{1/7}\left(\frac{2401}{36}\right)$ или $\operatorname{tg}\left(\frac{226\pi}{17}\right)$?

7.298a [ЦыпПин]. Найти все решения уравнения

$$\sin(x-\pi/4) - \cos(x+3\pi/4) = 1,$$

удовлетворяющие неравенству $2\cos 7x/(\cos 3+\sin 3) > 2^{\cos 2x}$.

7.298b [ЦыпПин]. Найти все решения уравнения
$$\sin(x+\pi/4) = 1/(2\sqrt{2}\cos x),$$
удовлетворяющие неравенству $\log_{\sin^2 3}(1+\cos(2x+4)) < \cos 4x$.

7.298c [ЦыпПин]. Найти все решения уравнения
$$\sin(4x+\pi/4) + \cos(4x+5\pi/4) = \sqrt{2},$$
удовлетворяющие неравенству $\cos 2x/(\cos 2 - \sin 2) > 2^{-\sin 4x}$.

7.298d [ЦыпПин]. Найти все решения уравнения
$$\sin(2x-\pi/4) = \sqrt{2}\sin^2 x,$$
удовлетворяющие неравенству $\log_{\cos^2 3}(1+\sin(7x+5)) < \sin 8x$.

7.299 [МГУ, хим, 1970]. Найти все значения x, лежащие в промежутке $-1 < x < 4$ и удовлетворяющие неравенству $\log_{0.75}\sin x \geqslant \log_{9/16} 0.75$.

7.300 [МГУ, геогр, 1997]. $\log_{|\sin\frac{\pi x}{4}|}(9^x - 3^{x+3} + 30) = \log_{|\sin\frac{\pi x}{4}|}(3^x + 3)$.

7.301a [НГУ, МФ, 1984]. $\log_{\cos x}\dfrac{9-14\cos x}{8} = 2$.

7.301b [НГУ, МФ, 1984]. $\log_{\sin x}\dfrac{5-6\sin x}{8} = 2$.

7.302a [НГУ, МФ, 1992]. $\log_{\operatorname{ctg} x}(3 + 2\cos 2x + 2\cos 4x) = 0$.

7.302b [НГУ, МФ, 1992]. $\log_{\sin x}(1 + \cos 2x + \cos 4x) = 0$.

7.303a [НГУ, ест, 1992].
$$\log_{\cos^2 x}(2\cos^2 x \cdot \sin 2x) = \log_{\cos x}\sqrt{3\sin x \cdot \cos x}.$$

7.303b [НГУ, ест, 1992].
$$\log_{\sin^2 x}(2\sin 4x \cdot \sin^2 x) = \log_{\sin x}\sqrt{\sin 2x \cdot \cos 2x}.$$

7.304 [НГУ, ест, 1987].
$$3^{2\sqrt{3}\sin 2x + 2\cos 2x + 2} - (1/15)^{-\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \log_{15} 18} + \\ + 5^{2\cos 2x + 2\sqrt{3}\sin 2x + 1} = 0.$$

7.305 [Потапов]. $\log_{\frac{1}{8\cos^2 x}}\sin x = \dfrac{1}{2}$.

7.306 [МГУ, псих, 1972]. Найти все действительные числа x такие, что числа 0, $\log_3(2\sin x)$, $\log_3(\frac{\sin 2x}{2})$ в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию.

7.307 [МГУ, МФ, 1973].

$$\cos 2x + \log_4(\frac{1}{2}\sin x) + 2\cos x \log_{1/2}\sin x = 2\cos x + \sin^2 x \cdot \log_2 \sin^2 x.$$

7.308 [МГУ, хим, 1973]. $(4-x^2)^{-\frac{\cos^2 x}{\cos x+1}} = 1/\sqrt{4-x^2}$.

7.309 [МГУ, био, 1973]. $\log_{\sin 2x}(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 1 - \log^2_{\sin 2x} 2$.

7.310 [МГУ, псих, 1973]. $\log_3(2\sin^2 x) - 1 = 2\log_3 \cos x + \log_3 2$.

7.311 [МИЭМ, 2001]. $\log_3 \cos x = \log_3(2 + 3\sin x) - 1$.

7.312 [МГУ, соц, 2001]. $\log_{\sin x}(3\sin x - \cos 2x) = 0$.

7.313 [МГУ, МФ, 1999].

$$(x^2+4)\lg\sin^2 3x + x^2 \lg\cos^2 2x = 4\lg(\cos 2x \sin^3 3x).$$

7.314 [МГУ, фил, 1999]. $\log_{1-2\cos z}(\cos 2z + \sin z + 2) = 0$.

7.315 [МГУ, МФ, 1998]. $3 \cdot 2^{\cos x + 3\sqrt{1-\sin^2 x}} + 11 \cdot 2^{2\cos x} - 34 = 0$.

7.316a [СУНЦ НГУ, 1997]. $\log_{\sin x}\left(\dfrac{1+\cos x - 2\cos 2x}{2}\right) = 2$.

7.316b [СУНЦ НГУ, 1997]. $\log_{\sin 2x}\left(\operatorname{ctg} x - \sin x + \dfrac{1}{\sin x}\right) = 1$.

7.317a [СУНЦ НГУ]. $\log_{sin^2 x}(2\sin^2 x \cdot \sin 2x) = \log_{sinx}\sqrt{3\sin x \cdot \cos x}$.

7.317b [СУНЦ НГУ]. $\log_{sin^2 x}(3\sin 4x \cdot \sin^2 x) = \log_{sinx}\sqrt{\sin 4x \cdot \cos^2 x}$.

7.318a [СУНЦ НГУ, 2015].

$$(4\cos x - 5\sin 2x + 2\sin x \sin 2x) \cdot \log_{(2-\frac{2x}{\pi})}(3\pi/2 + x) = 0.$$

7.318b [СУНЦ НГУ,2015].

$$(6\sin x - 7\sin 2x + 2\sin 2x \cos x) \cdot \log_{(1-\frac{x}{2\pi})}(\pi/2 + x) = 0.$$

7.319 [МГУ, ФФ, 1967]. $x^{\lg\sin x} \geqslant 1 \quad (x > 0)$.

7.320 [МГУ, экон, 1966]. $\log_{\sin x - \cos x}(\sin x - 5\cos x) \geqslant 1$.

7.321 [МГУ, ФФ, 1968]. $\log_{|\sin x|}(x^2 - 8x + 23) > \dfrac{3}{\log_2|\sin x|}$.

7.322 [МГУ, фил, 1966]. $\log_{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin^2 x - 5/12} < -1$.

7.323 [МГУ, псих, 1969]. $\log_{\operatorname{tg} x}\left(\dfrac{\sin x}{2}\right) < 2$.

7.324 [МГУ, псих, 1970]. $\log_{\cos x^2}\left(\dfrac{5}{2x}-2x\right) > \log_{\cos x^2}(2x-1)$.

7.325a [МГУ, МФ, 1970]. $-\log_{1/2}(1+\cos 3x) \leqslant 2+\log_2(1/4-\cos x)$.

7.325b [МГУ, МФ, 1970]. $\log_2(1+\cos 4x) \leqslant 1+\log_{\sqrt{2}}\sin x$.

7.326a [НГУ, ФФ, 1989]. $\log_{|\sin x|}(x^2-14x+73) > \dfrac{2}{\log_5|\sin x|}$.

7.326b [НГУ, ФФ, 1989]. $\log_{|\cos 2x|}(2x^2-5x+29) > \dfrac{3}{\log_3|\cos 2x|}$.

7.327 [МГУ, почв, 2001].

$$\log_\pi(\sin x)\log_\pi(\sin 2x)-\log^2_\pi(\sin 2x) \leqslant \log^2_\pi(\sin x).$$

7.328 [МГУ, экон, 2002].

$$\log_2(\cos 3(\pi/6-x))\cdot\log_2(\cos 2x)+\log_2(\sin 5x+\sin x)=0.$$

7.329. $3^{\sin x-1} > (1/81)^{1/\sin x}$.

7.7. Использование свойств функций

7.330 [Вавилов-2]. $3^{x-1}+5^{x-1}=34$.

7.331 [Вавилов-2]. $1+3^{x/2}=2^x$.

7.332 [Потапов]. $2^{-|x-2|}\log_2(4x-x^2-2)=1$.

7.333 [Потапов]. $(1/3)^x=x+4$.

7.334 [Потапов]. $8-x\cdot 2^x+2^{3-x}-x=0$.

7.335 [Потапов]. $\log_{1/3}(3+|\sin^3 x|)=2^{|x^3|}-2$.

7.336 [Потапов]. $\log_2(3+|\sin x|)=2^{-|\pi-x|}$.

7.337 [Потапов]. $(4x-x^2-3)\log_2\left(\cos^2(\pi x)+1\right)=1$.

7.338 [Потапов]. $\log_3(1/3-|3\pi/2-x|)=\sin x$.

7.339 [Потапов]. $\log_3(4-|\cos(4x/3)|)=\sin x$.

7.340 [МГУ, хим, 1993]. Найдите число решений уравнения

$$2^{x+2}+2^{-x}=4+2x-x^2.$$

7.341 [МГУ, хим, 1993].

$$\log_2(4x+1)\log_5(4x+4)+\log_3(4x+2)\log_4(4x+3)=$$
$$=2\log_3(4x+2)\log_5(4x+4).$$

7.342a* [МГУ, МФ, 1979]. $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}$.

7.342b* [МГУ, МФ, 1979]. $\dfrac{6-3^{x+1}}{x} > \dfrac{10}{2x-1}$.

7.342c* [МГУ, МФ, 1979]. $\dfrac{2+\log_3 x}{x-1} < \dfrac{6}{2x-1}$.

7.342d* [МГУ, МФ, 1979]. $\dfrac{2^{x+1}-7}{x-1} < \dfrac{10}{3-2x}$.

7.343 [МГУ, хим, 1983].

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\cdot(\log_5 x-1)+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\leqslant 0.$$

7.344* [Квант]. $\log_{12}\left(\sqrt{2x}+\sqrt[4]{2x}\right)=\dfrac{1}{2}\log_9(2x)$.

7.345* [МГУ, почв, 1998].

$$(x^2-4x+3)\cdot\log_{1/\sqrt{2}}\left(\cos^2(\pi x)+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}\right)\geqslant 2.$$

7.8. Системы уравнений

7.346 [МГУ, ФФ, 2002]. $\begin{cases} 2^{x+1}\log_9 y-2^{2x}=2, \\ 9\cdot 2^x\cdot\log_{27} y-\log_3^2 y=9. \end{cases}$

7.347 [МГУ, геогр, 1972]. $\begin{cases} 2^{x+1}=4y^2+1, \\ 2^x\leqslant 2y. \end{cases}$

7.348 [МГУ, геол, 2002]. $\begin{cases} \log_{x-y}\dfrac{xy}{2}=2, \\ x+y=xy+1. \end{cases}$

7.349* [МГУ, био, 1998].

$$\begin{cases} \cos 10x-2\sin 5x\geqslant 3\cdot 4^t-3\cdot 2^{t+2}+27/2, \\ \sqrt{(2-\sqrt{3})^{4t}+(2+\sqrt{3})^{4t}+2}+14\log_2(\cos 10x)+6\cos 5x\geqslant(2t+1)^{1.5}. \end{cases}$$

7.350 [МГУ, ВМК, 2001]. $\begin{cases} 2\cdot 5^{1-y}=\log_3(x^{-2}), \\ 5^y+\log_3 x=4. \end{cases}$

7.351 [МФТИ, 2001]. $\begin{cases} 2^{x+y+1}+7\cdot 2^{y-5}=4, \\ \sqrt{2x+y^2}=x+y. \end{cases}$

7.352a [НГУ, ФФ, 1999]. $\begin{cases} 2^{2\lg x} = 1/5^{\lg y}, \\ 5^{\lg 5} \cdot y^{\lg 4} = 4^{\lg 4}/x^{\lg 5}. \end{cases}$

7.352b [НГУ, ФФ, 1999]. $\begin{cases} 9^{\lg x} = 1/4^{\lg y}, \\ 4^{\lg 4} \cdot y^{2\lg 3} = 9^{\lg 9}/x^{\lg 4}. \end{cases}$

7.352c [НГУ, ФФ, 1999]. $\begin{cases} 3^{2\lg x} = 7^{\lg y}, \\ 7^{\lg 7} \cdot y^{2\lg 3} = 3^{4\lg 3} \cdot x^{\lg 7}. \end{cases}$

7.353 [МГУ, геол, 1973]. $\begin{cases} \lg 3 \cdot \lg(3x) = \lg 2 \cdot \lg(2y), \\ \lg x \cdot \lg 2 = \lg y \cdot \lg 3. \end{cases}$

7.354 [МГУ, ФФ, 1999]. $\begin{cases} 2^{\frac{y}{x}+\frac{3x}{y}} = 16, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}. \end{cases}$

7.355 [МГУ, ФФ, 1999]. $\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$

7.356 [МГУ, почв, 1998]. $\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$

7.357a [НГУ, МФ, 1975].

$$\begin{cases} 1 + \log_y x + \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{y}}(x+y) = \log_y 10 + \log_y 10 \cdot \log_{10} 18, \\ 1 = \log_{x-y}(29 - 2x - xy). \end{cases}$$

7.357b [НГУ, МФ, 1975].

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x}}(11-y) = 2 + 2\log_x(1+y), \\ \log_{10} y + \log_{10} y \cdot \log_y(x+y) = \log_{10} 3 - \log_{10} x + 1. \end{cases}$$

7.357c [НГУ, МФ, 1975].

$$\begin{cases} \log_y(2xy-1) \cdot \log_{2xy-1}(y-x) = \log_y \dfrac{2xy-1}{x+y}, \\ 2 + 2\log_{x+y}(y-x) = \log_{x+y}(13 - x^2y^2). \end{cases}$$

7.357d [НГУ, МФ, 1975].

$$\begin{cases} \log_x(x+y) \cdot (\log_{x+y} 20 - 1) = 1 + \log_x(x+y) \cdot \log_{x+y} y, \\ 4(1 + \log_x y)\log_{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \log_{\sqrt{x}}\left(\dfrac{4}{5}xy + 2\sqrt{xy}\right). \end{cases}$$

7.358a [СУНЦ НГУ, 1996]. $\begin{cases} x^{\log_y 9} = 2, \\ y^{\log_2 x} = 3\sqrt{y}. \end{cases}$

7.358b [СУНЦ НГУ, 1996]. $\begin{cases} x^{\log_y 3} = 2\sqrt{x}, \\ y^{\log_2 x} = 9. \end{cases}$

7.9. Системы неравенств с одним неизвестным

7.359. $\begin{cases} \log_4(3x+9) < 2, \\ \dfrac{x^2-31}{x-5} \geqslant 5. \end{cases}$

7.360 [Ларин, 2012]. $\begin{cases} 5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^{2x}\cdot 6^x, \\ \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{16}} > \log_{(x+\frac{1}{4})} 3 - \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

7.361 [Ларин, 2012]. $\begin{cases} 4^x \leqslant 7\cdot 2^x + 8, \\ \log_5(x^2+6x+5) \leqslant 1 + \log_5 \dfrac{x+5}{x+1}. \end{cases}$

7.362 [Ларин, 2012]. $\begin{cases} 9^x \leqslant 4\cdot 3^x + 45, \\ \log_2(2x^2+3x-2) \leqslant 2 + \log_2 \dfrac{x+2}{2(2x-1)}. \end{cases}$

7.363 [Ларин, 2012]. $\begin{cases} 64\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \geqslant 1 - 63\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x, \\ \log_3(x^2-x-12) \leqslant 1 + \log_3 \dfrac{x+3}{x-4}. \end{cases}$

7.364 [ЕГЭ, проб, 2012]. $\begin{cases} \log_x(\log_2 x + \log_4 x + 1) \geqslant \dfrac{1}{\log_2 x}, \\ 3^x + 3^{x+1} > 4^x. \end{cases}$

7.365 [Ларин, 2012]. $\begin{cases} 243^x - 3^{5x-2} \geqslant 7, \\ \log_{x+1}(4x^2-4x+1)\cdot\log_{1-2x}(6x+6) \geqslant 2. \end{cases}$

7.366 [Ларин, 2012]. $\begin{cases} 4^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} + 3\cdot 6^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} \geqslant 4\cdot 9^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}}, \\ \log_{\frac{1}{3}}|x-2| - \log_{2-x} 3 \leqslant 2. \end{cases}$

7.367 [Ларин, 2012]. $\begin{cases} 31^x + 33 \geqslant 11\cdot(7-\sqrt{18})^x + 3\cdot(7+\sqrt{18})^x, \\ \log_{\frac{3-x}{2}} \dfrac{6}{x+1} \geqslant -1. \end{cases}$

7.368 [Ларин, 2013]. $\begin{cases} \log_{5-x}(x^2-6x+36) \leqslant \log_{5-x} 29, \\ \dfrac{x^2-6x+6}{x-5} \leqslant \dfrac{x}{2}. \end{cases}$

7.369 [Ларин, 2013]. $\begin{cases} x^2+6^x+4 \leqslant 44 \cdot \log_5(x+3), \\ 4x+6^x \geqslant 44 \cdot \log_5(x+3). \end{cases}$

7.370 [Ларин, 2013]. $\begin{cases} \log_7(x^2-9) \leqslant 1, \\ \dfrac{2x^2+x-28}{6^{x-6}+5^{x-5}-4} \leqslant 0. \end{cases}$

7.371 [Ларин, 2013]. $\begin{cases} \log_{6-x}(x^2-8x+17) \leqslant \log_{6-x} 3, \\ \dfrac{x^2-8x+13}{x-6} \leqslant \dfrac{x-1}{2}. \end{cases}$

7.372 [Ларин, 2013]. $\begin{cases} 3^{x^2}+2\cdot 3^{1-x^2} \geqslant 7, \\ \dfrac{\log_{x+5}(x^2+2x+56)}{\log_{x+5}(x^2+2x-2)} \geqslant \dfrac{\log_2(x^4+4x^3+4x^2)}{\log_2(x^2+2x-2)}. \end{cases}$

7.373 [Ларин, 2013]. $\begin{cases} |x+1|-1 \leqslant \sqrt{8x^2-2x^3}, \\ \dfrac{2^{6-5x/2}-2^{7-2x}-2^{-x/2-1}+1}{2-2^{2-x/2}} \geqslant 0. \end{cases}$

7.374 [Ларин, 2014]. $\begin{cases} 2^{x+3}-x^3\cdot 2^x \leqslant 16-2x^3, \\ \log_3((x+2)(x+4))+\log_{1/3}(x+2) < \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 7. \end{cases}$

7.375 [Ларин, 2014]. $\begin{cases} \log_{x+2}(2x^2+x) \leqslant 2, \\ 3^x < 1+12\cdot 3^{-x}. \end{cases}$

7.376 [Ларин, 2014]. $\begin{cases} \log_4(3^x-1)\log_{1/4}\left(\dfrac{3^x-1}{16}\right) \leqslant \dfrac{3}{4}, \\ \log_4(3-2x)^2 \geqslant \log_2(x^2-1). \end{cases}$

7.377 [Ларин, 2014]. $\begin{cases} \dfrac{4^x+5}{2^x-11} \geqslant -1, \\ 6\log_{2x} x+2\log_{4\sqrt{x}}(2x) \geqslant 1. \end{cases}$

7.378 [Ларин, 2014]. $\begin{cases} 3^{4x^2-3x+1/2} < (1/3)^{-40x^2}, \\ \log_2^2(2-x)-8\log_{1/4}(2-x) \geqslant 5. \end{cases}$

7.379 [Ларин, 2014]. $\begin{cases} 2^{2x+1}-21\cdot(1/2)^{2x+2}+2 \geqslant 0, \\ \log_{10-x}(19/2-x)^2 > 2\log_{x-9}(x-9). \end{cases}$

7.380 [Ларин, 2014]. $\begin{cases} 25^{x^2-x}-30\cdot 5^{x^2}+5^{2x+3}\geqslant 0,\\ \log_{4x}(2x)+\log_{2x^2}(4x^2)\leqslant 5/2. \end{cases}$

7.381 [Ларин, 2014]. $\begin{cases} \dfrac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5}\geqslant 5,\\ \log_{x+1}(x^2+x-6)\geqslant 4. \end{cases}$

7.382 [Ларин, 2014]. $\begin{cases} 9^{x+1/2}-28\cdot 3^{x-1}+1\leqslant 0,\\ \log_{(\sqrt{7})^{x+1/2}} 7^{2/(x^2+x)}\leqslant \dfrac{4}{2x+1}. \end{cases}$

7.383 [Ларин, 2014]. $\begin{cases} \dfrac{0.04+1/x}{5(x+1)+0.04\cdot(1+1/x)}\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{\log_5(-25x)}\leqslant \dfrac{1}{\log_5\left(\log_{\frac{1}{5}} 5^x\right)}. \end{cases}$

7.384 [Ларин, 2014]. $\begin{cases} \log_{(8x^2)}(-4x^3)\geqslant 1,\\ 3^{1+3x^2}+3^{1-x^2}\leqslant 10\cdot 3^{x^2}. \end{cases}$

7.10. Ответы

[7.1] 1. **[7.2]** 11.1. **[7.3]** 3. **[7.4]** 1/3. **[7.5]** 1. **[7.6]** $ab(a-b)^2$. **[7.7]** a^2+a+1. **[7.8]** $(\log_2 x+1)^3$. **[7.9]** $\frac{1}{\log_a b-1}$. **[7.10]** 6. **[7.11]** $\frac{3(1-a)}{b+1}$. **[7.12]** 3. **[7.13]** $a(b+3)$. **[7.14]** $\frac{a+b}{1-b}$. **[7.15]** $abc+1$. **[7.16]** $\log_8 a = \frac{1}{1-\log_8 c}$. **[7.23]** 9/4. **[7.24]** 3/2. **[7.25]** 11/13. **[7.26]** 4. **[7.27]** -3. **[7.28]** 3/2. **[7.29]** $\frac{1+3\log_5 7}{2+\log_5 7}$. **[7.30]** $\frac{2(\log_5 3-4)}{4\log_5 3-7}$. **[7.31]** $3\log_6 2$; 3. **[7.32]** 1/2. **[7.33]** -4; 1. **[7.34]** 1; 2. **[7.35]** 5; 1/5. **[7.36]** 0. **[7.37]** 2; $-1-\log_3 2$. **[7.38]** 1; 8. **[7.39]** $-\frac{1}{\lg 5}$; 2. **[7.40]** -1; 4. **[7.41]** -2; 2. **[7.42]** 2. **[7.43]** $-7/2$; 2. **[7.44]** 9; 1/81. **[7.45]** $3\sqrt{3}$. **[7.46]** 1/3. **[7.47]** 125; 1/5. **[7.48]** $\log_2(1+\sqrt{5})-1$. **[7.49]** $\frac{\lg 2-\lg 3}{\lg(\sqrt{5}+1)-\lg 2}$. **[7.50]** 2. **[7.51]** 4. **[7.52]** -2 (корни $2\log_6 2$; $-\log_2 6$). **[7.53]** 3. **[7.54]** 5. **[7.55]** $\pm\sqrt{\log_2\frac{6+\sqrt{26}}{5}}$. **[7.56]** 1/4; 1/2. **[7.57]** 0. **[7.58]** $3\pm\sqrt{5}$. **[7.59]** 0.1; 2; 1000. **[7.60]** 1; 2; 3. **[7.61]** 2. **[7.62]** $1\pm$

$\sqrt{1+\log_{2+\sqrt{3}}10}$. **[7.63]** $-2+\sqrt{4-2\log_3 5}$. **[7.64a]** 2; $\log_2\frac{7-\sqrt{37}}{2}$. **[7.64b]** 3; $\log_3\frac{63-3\sqrt{393}}{2}$. **[7.65]** $\log_3 2$; $2\log_2 3$. **[7.66]** 1; $\frac{30-\sqrt{10}}{20}$. **[7.67]** $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. **[7.68]** $(-1;2]\cup[3;+\infty)$. **[7.69]** $(-1;-2]\cup[1;+\infty)$. **[7.70]** $\left(0;\log_{2/3}\frac{1}{3}\right)$. **[7.71]** $(-\infty;0]$. **[7.72]** $\left(0;5^{-2\sqrt{5}}\right]\cup\left[5^{2\sqrt{5}};+\infty\right)$. **[7.73]** $\left(-\infty;\frac{4(\lg 3-2)}{8\lg 3-7}\right)$. **[7.74]** $(2;3)\cup(4;+\infty)$. **[7.75a]** $(-\infty;-2]\cup[5;\infty)$. **[7.75b]** $(-\infty;-1/2]\cup[8;\infty)$. **[7.76]** $\left(-\infty;\log_2(\sqrt{2}-1)\right]\cup[1/2;+\infty)$. **[7.77]** $(2;3]$. **[7.78]** $(-\infty;-2]\cup[0;\lg 101-2)$. **[7.79]** $\left(-1;\sqrt{2}\right]$. **[7.80]** 1; 2. **[7.81]** $(-5;5)$. **[7.82]** $\left[0;\log_3^2 2\right)\cup(3/2;+\infty)$. **[7.83]** $(-\infty;-11/6]\cup\{0\}$. **[7.84]** $(0;3]$. **[7.85]** $(-\infty;3/2)$. **[7.86a]** $\left[\log_4\frac{5-\sqrt{21}}{4};-\frac{1}{2}\right]$. **[7.86b]** $\left(-\infty;\log_9\frac{5-2\sqrt{6}}{3}\right]\cup\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **[7.87]** $[2;3]$. **[7.88]** $[-2;1)$. **[7.89]** $\left(0;\log_{3/4}(1/4)\right]$. **[7.90]** $(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$. **[7.91]** $[-1/2;0]\cup[7/3;5/2)$. **[7.92a]** $(-\infty;-3]\cup[-1;1]\cup[2;+\infty)$. **[7.92b]** $[-3;-2]\cup[-1;2]$. **[7.93a]** $(-\infty;-1)\cup(1-\sqrt{2};0)\cup(1+\sqrt{2};\infty)$. **[7.93b]** $(-\infty;-1/\sqrt{3})\cup(1/2;1/\sqrt{3})\cup(3/2;\infty)$. **[7.94]** $(-1+\sqrt{13})/2$. **[7.95]** Нет решения. **[7.96]** $9/2$. **[7.97]** $(\sqrt{5}+1)/2$. **[7.98]** $(\sqrt{5}-1)/2$. **[7.99]** 1; 7. **[7.100]** $1/2$. **[7.101]** $-13/5$; -2; 3. **[7.102]** 4. **[7.103]** $x\geqslant 1/6$. **[7.104]** 2. **[7.105]** $\pm\sqrt{\log_2 3}$. **[7.106]** 4; 8. **[7.107a]** 3. **[7.107b]** 4. **[7.108a]** 2; $2^{-4/3}$. **[7.108b]** 4; $2^{-5/3}$. **[7.109a]** $10^{\log_2 6}$. **[7.109b]** $10^{\log_3 5}$. **[7.110]** 2. **[7.111a]** 13. **[7.111b]** 17. **[7.112a]** 1; $\sqrt{5}/125$. **[7.112b]** 1; $\sqrt[3]{5}/625$. **[7.113]** $3+\sqrt{2}$. **[7.114]** 2. **[7.115]** $\log_2 5-1$. **[7.116]** $4^{\pm\sqrt{2}}$. **[7.117]** $4/3$; 3. **[7.118]** -3. **[7.119]** 3. **[7.120]** -3; -2; 1. **[7.121a]** $-1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}$. **[7.121b]** $-2\pm\sqrt{14+4\sqrt{3}}$. **[7.121c]** $2\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}$. **[7.122]** $\left[-\sqrt{10};-3\right)\cup\left(3;\sqrt{10}\right]$. **[7.123]** $\left(-3;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};3\right)$. **[7.124]** $(-4;-3]\cup[8;\infty)$. **[7.125]** $\left[(1-3\sqrt{3})/2;-2\right)\cup\left(3;(1+3\sqrt{3})/2\right]$. **[7.126]** $(-4;-3)\cup(8;+\infty)$. **[7.127]** $[2;\infty)$. **[7.128]** $\left(-3;(-1-\sqrt{19})/2\right)\cup$

$\big((\sqrt{19}-1)/2;2\big)$. **[7.129]** $\sqrt{6}<|x|\leqslant 3$. **[7.130]** $(2;5]$. **[7.131]** $(-2;3)$. **[7.132]** $(4;+\infty)$. **[7.133]** $(0;4/5]\cup\{2\}$. **[7.134]** $(-\infty;-2)\cup\big(-2;2-\sqrt{15}\big)\cup[6;+\infty)$. **[7.135]** $(-\infty:-2)$. **[7.136]** $(-1;+\infty)$. **[7.137]** $(-2;-1)\cup(1;2)$. **[7.138]** $(-3;-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};3)$. **[7.139]** $[27;+\infty)$. **[7.140]** $\{5\}\cup(4+\sqrt{2};+\infty)$. **[7.141]** $(-2;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};2)$. **[7.142]** $[3/4;1)$. **[7.143]** $[1/2;4/5]\cup\{4\}$. **[7.144]** $(4;+\infty)$. **[7.145]** $(-1;-1/2)\cup(1/2;1)$. **[7.146]** $(-1;0)\cup[1;+\infty)$. **[7.147a]** $(0;1/2)\cup(1;4)\cup(32;\infty)$. **[7.147b]** $(1/16;1/4)\cup[1/2;1)\cup(1;\infty)$. **[7.148a]** $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(-1;\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\cup[1;\infty)$. **[7.148b]** $(-\infty;-2]\cup\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2};0\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2};\infty\right)$. **[7.149.]** $(-\infty;-\sqrt{6}]\cup\{0\}\cup\left[\sqrt{6};\infty\right)$. **[7.150a]** $[-4;-2)$; $(4;7]$. **[7.150b.]** $[-1;2)\cup(4;8]$. **[7.151a]** $\left(-10;\frac{3-\sqrt{33}}{6}\right]$. **[7.151b]** $\left[\frac{9-\sqrt{89}}{4};2-\sqrt{3}\right)\cup\left(2+\sqrt{3};\frac{9+\sqrt{89}}{4}\right]$. **[7.152]** $[-1;0]$. **[7.153]** $x=1$. **[7.154a]** $\left(0;\frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{1}{2};8\right)$. **[7.154b]** $\left(0;\frac{1}{27}\right]\cup(27;+\infty)$. **[7.155]** $\left(\frac{8}{3};4\right)$. **[7.156.]** $\left(-\sqrt{85/3};-\sqrt{5/3}\right)\cup\left(\sqrt{5/3};\sqrt{85/3}\right)$. **[7.157]** $(-\infty;-2)$. **[7.158]** $(1;+\infty)$. **[7.159a]** $(\log_2 49-4;\log_2 7)$. **[7.159b]** $(\log_3 28-3;\log_3 4)$. **[7.160]** $(-1;0)$. **[7.161]** $\left(2;\frac{19}{9}\right)\cup\left(3;2+\sqrt{3}\right)$. **[7.162a]** $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right]\cup\left[5+\sqrt{31};+\infty\right)$. **[7.162b]** $\left(-\infty;-\sqrt{10}\right]\cup\left[3+\sqrt{19};+\infty\right)$. **[7.163a]** $\left(\frac{2\sqrt{13}-4}{9};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$. **[7.163b.]** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$. **[7.164]** -2, -1, 0, 1. **[7.165a.]** $\left(-\infty;\frac{-9-\sqrt{21}}{2}\right]\cup(1;\infty)$. **[7.165b]** $(-\infty;-3)\cup\left[\frac{9+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)$. **[7.166]** $(0;2]$. **[7.167]** $(-4;1)\cup(1;5/3)\cup(5/3;11)$. **[7.168]** $(-\infty;-2]\cup[-1;0)\cup(0;1]\cup[2;+\infty)$; разложить: $(y-2)(y+t-3)\geqslant 0$, где $t=2|x|$, $y=2\log_2 t$. **[7.169]** $(1;64]$. **[7.170a]** $\left(-3;\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right]\cup(0;1)\cup\left[\frac{3+\sqrt{17}}{4};\infty\right)$. **[7.170b]** $\left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2};-2\right)\cup\left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\infty\right)$. **[7.171]** $[0;2)$. **[7.172]** $(0;1)\cup(1;2)$. **[7.173]** $\left(\frac{5}{2};3\right]$. **[7.174]** $x=0$. **[7.175]** $[-1;1]$. **[7.176]** $(-2;1]\cup\{1\}$. **[7.177]** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$. **[7.178]** $[-1;0)\cup(0;1]$. **[7.179]** $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};4\right)\cup(6;+\infty)$.

[7.180a] $\left[-\log_3 2; 0\right) \cup \left[1; \log_3 \frac{7}{2}\right)$. **[7.180b]** $\left(\log_5 \frac{1}{3}; \log_5 \frac{2}{5}\right] \cup (0; \log_5 2]$. **[7.180c]** $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left[\log_4 \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **[7.181a]** $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$. **[7.181b]** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(0; \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)$. **[7.182]** 5. **[7.183]** -4. **[7.184a]** 4; $\sqrt{34}$. **[7.184b]** 3; 4. **[7.185]** 7/3; 5; 7. **[7.186]** 4. **[7.187]** $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **[7.188]** 5/4; 5; 6. **[7.189]** 3/2; 12. **[7.190a]** 8; $\frac{\sqrt{177}-7}{4}$. **[7.190b]** 3; $\frac{\sqrt{57}-9}{4}$. **[7.191]** $7^{\log_2 \frac{\sqrt{41}-5}{2}}$. **[7.192]** $\sqrt{11}/4$. **[7.19]** $\frac{3}{2}$; 3; 4. **[7.194]** $\frac{8}{3}$; 5. **[7.195]** 1/4. **[7.196]** $-1/4$. **[7.197]** 2. **[7.198a]** $5^{\pm\sqrt{1-\log_5 2}}$. **[7.198b]** $3^{\pm\sqrt{\log_3 2}}$. **[7.199a]** -1; $\frac{\sqrt{17}-15}{8}$. **[7.199b]** $\frac{7}{2}$; $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. **[7.200]** -1. **[7.201a]** $x = \frac{1}{3}$. **[7.201b]** $x = -\frac{2}{3}$. **[7.202]** 1; 2. **[7.203]** 3; $\sqrt{5}$. **[7.204]** -1. **[7.205]** 4. **[7.206a]** $\frac{1}{\sqrt{10}} - 2$. **[7.206b]** $\frac{\sqrt{5}-5}{2}$. **[7.207a]** $5 + \sqrt{2}$; 9. **[7.207b]** 2. **[7.208]** $(-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$. **[7.209]** $\left(0; \frac{23}{35}\right)$. **[7.210]** $(1; 5/4) \cup (5/4; 3/2)$. **[7.211]** $\left[-2\sqrt{2}; -1\right) \cup \left[\frac{-2+2\sqrt{11}}{5}; 1\right)$. **[7.212]** $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] \cup [2; +\infty)$. **[7.213]** $(4; 10)$. **[7.214]** $(3; +\infty)$. **[7.215]** $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup [2; +\infty)$. **[7.216]** $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **[7.217]** $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. **[7.218]** $(2/3; 1) \cup (1; +\infty)$. **[7.219]** $\left(0.58; 7 + 4\sqrt{3}\right]$. **[7.220]** $(1; \sqrt{2})$. **[7.221]** $\left(-\frac{5}{2}; -2\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{8}{3}\right)$. **[7.222]** $[3; 4) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty)$. **[7.223]** $\left[8 - \sqrt{43}; 2\right) \cup \left[8 + \sqrt{43}; +\infty\right)$. **[7.224]** $(\sqrt[3]{3}; +\infty)$. **[7.225]** $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. **[7.226a]** $\left[0.31; 5 + 2\sqrt{6}\right)$. **[7.226b]** $\left[0.26; 9 + 4\sqrt{5}\right)$. **[7.227]** $(-3; -1) \cup (1; 9)$. **[7.228]** $(0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$. **[7.229]** $\left[\sqrt{6} - 1; 2\right) \cup (2; 5]$. **[7.230]** $\left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **[7.231]** $(0.32; 8 + 3\sqrt{7})$. **[7.232]** $\left(\frac{3}{2}; \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$. **[7.233]** $[5; \infty)$. **[7.234]** $(-6; -5) \cup (-3; -2)$. **[7.235]** $(\log_4 13; 2]$. **[7.236]** $\left(-1; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. **[7.237]** $(2; +\infty)$. **[7.238]** $\left(\frac{5}{2}; 6 - \sqrt{6}\right) \cup (10; +\infty)$. **[7.239]** $(3; 5 - \sqrt{3}) \cup (7; +\infty)$. **[7.240]** $(\log_3 10; +\infty)$. **[7.241]** $(1; 3/2) \cup (3/2; 2) \cup (2; 3)$. **[7.242a]** $x = 4$. **[7.242b]** $x = 3$. **[7.243a]** $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **[7.243b]** $\left(\frac{5}{12}; \frac{1}{2}\right]$. **[7.244a]** $-\frac{1}{2}$.

[7.244b] $-\frac{1}{17}$. **[7.245]** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **[7.246]** $(0;2)\cup(4;\infty)$. **[7.247]** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;\infty)$. **[7.248a]** $(-\infty;-2)\cup(2;3)\cup(4;\infty)$. **[7.248b]** $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup(3;\infty)$. **[7.249]** $\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup\left[3;3^{\sqrt{13}}\right]$. **[7.250]** $(-1;0)\cup[1;5)$. **[7.251]** $\left(\frac{1}{3};3\right]$. **[7.252a]** $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left[5^{\log_3 2};+\infty\right)$. **[7.252b]** $\left(1;(0.5)^{\log_5 10}\right]\cup(1;4)\cup(4;+\infty)$. **[7.253]** $\left[-\frac{59}{2};\frac{1}{2}\right]\cup\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **[7.254a]** $\left(-\infty;\frac{4}{5}\right]\cup\left(1;\frac{7}{6}\right)$. **[7.254b]** $\left(-\frac{6}{5};-1\right)\cup\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **[7.255]** $\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(2;\frac{5}{2}\right)\cup(3;\infty)$. **[7.256]** $(1;2)\cup(3;\infty)$. **[7.257a]** $(0;1)\cup(1;2)\cup(1+2\sqrt{2};\infty)$. **[7.257b]** $[-4;-3)\cup\left(\frac{5}{2}-\sqrt{22};-2\right)\cup(-2;-1)$. **[7.258a]** $\left(0;\frac{1}{16}\right]\cup\left[\frac{9}{16};\frac{13}{16}\right)\cup(1;\infty)$. **[7.258b]** $\left(0;\frac{4}{25}\right]\cup\left[\frac{9}{25};\frac{19}{25}\right)\cup(1;\infty)$. **[7.259a]** $(2;\ 3)\cup(3;\ 9\sqrt{3}-3)$. **[7.259b]** $(4-2\sqrt{2};\ \ 2)\cup(2;\ \ 3)$. **[7.260a]** $\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right]\cup(4;\ \ 5)$. **[7.260b]** $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup(1;\ \ 2)$. **[7.261a]** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]$. **[7.261b]** $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2};\frac{5}{2}\right)\cup(3;4)$. **[7.262a]** $\left(-\frac{4}{5};0\right)\cup\left(\frac{8}{5};2\right)$. **[7.262b]** $\left(\frac{1}{3};1\right)\cup\left(\frac{7}{3};3\right)$. **[7.263a]** $\left(0;3^{-\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{1}{3};1\right)$. **[7.263b]** $(1;2]\cup\left[2^{\sqrt{2}};\infty\right)$. **[7.263c]** $\left(0;2^{-\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{2};1\right)$. **[7.264a]** $\left[\frac{1}{32};\frac{1}{2}\right]$. **[7.264b]** $[2;16]$. **[7.264c]** $\left[\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right]$. **[7.265]** $\left(0;2^{-\sqrt{\log_2(2+\sqrt{2})}}\right]\cup\left[2^{\sqrt{\log_2(2+\sqrt{2})}};+\infty\right)$. **[7.266]** $\left(0;3^{-\sqrt{\log_3(1+\sqrt{3})}}\right]\cup\left[3^{\sqrt{\log_3(1+\sqrt{3})}};+\infty\right)$. **[7.267a]** $x\in\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right]\cup\left(\sqrt{2};\infty\right)$. **[7.267b]** $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left[\frac{3}{2};\sqrt{3}\right)$. **[7.268]** $\left(-11;-1-3\sqrt{11}\right)\cup\left[-\sqrt{79};7\right]\cup\left[43/5;\sqrt{79}\right]\cup\left(-1+3\sqrt{11};9\right)$. **[7.269a]** $\left[3^{-\sqrt{2}};3^{\sqrt{2}}\right]\cup\{6\}$; $x_{max}=6$. **[7.269b]** $\left[5^{-\sqrt{2}};5^{\sqrt{2}}\right]\cup\{12\}$; $x_{max}=12$. **[7.270a]** $(-1-\sqrt{5};-3)\cup(-1+\sqrt{5};5)$. **[7.270b]** $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{6}-4}{5}\right)\cup(1;\sqrt{2})$. **[7.271a]** $(3;4)\cup(4;2+2\sqrt{2})$. **[7.271b]** $(4-2\sqrt{2};2)\cup(2;3)$. **[7.272a]** $\left[\frac{3}{7};\frac{4}{7}\right]\cup\left(\frac{\sqrt{37}}{7};1\right)$. **[7.272b]** $\left[\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right]\cup\left(\frac{\sqrt{19}}{5};1\right)$. **[7.273a]** $\left[\frac{8-\sqrt{2}}{31};\frac{8+\sqrt{2}}{31}\right]\cup\left(\frac{14}{31};\frac{1}{2}\right]$. **[7.273b]** $\left[\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right]\cup\left[\frac{19}{25};\frac{5}{6}\right)$. **[7.274a]** $[1/2;1)\cup[5/4;3/2)\cup[2;5/2)$. **[7.274b]** $(0;1/4]\cup(1/2;3/4]\cup$

$(5/4; 2]$. **[7.275a]** $(1; 3/2]$. **[7.275b]** $(0; 1]$. **[7.276a]** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$. **[7.276b]** $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; 0\right) \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}$. **[7.277a]** $(-2; -1) \cup \left(-1; 4^{4/3} - 4\right)$. **[7.277b]** $(2; 3) \cup \left(3; 3^{5/2} - 3\right)$. **[7.278]** $x \in (-3; 7)$, $x \neq 2 \pm \sqrt{6}$, $x \neq \pm 2$. **[7.279]** $\{3\} \cup [8; +\infty)$. **[7.280]** $\left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$. **[7.281]** $(-1/3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 3)$. **[7.282]** $(-3; -2) \cup (3; 4]$. **[7.283]** $(\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$. **[7.284]** $(-4; -3.9] \cup (4; \sqrt{17})$. **[7.285]** $\left(2; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; 3\right)$. **[7.286]** $\left(-\frac{15}{16}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - 1\right) \cup \left(\sqrt[4]{2} - 1; 15\right)$. **[7.287a]** $\left(1; \frac{5}{2} - \sqrt{2}\right] \cup \left(2; \frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2} + \sqrt{2}; +\infty\right)$. **[7.287b]** $\left(2; \frac{11-\sqrt{45}}{2}\right] \cup (3; 4) \cup \left[\frac{11+\sqrt{45}}{2}; +\infty\right)$. **[7.288a]** $\left(\log_2 \frac{15}{11}; \log_2 \frac{5}{3}\right] \cup (1; \log_2 3]$. **[7.288b]** $\left(\log_3 \frac{20}{11}; \log_3 \frac{5}{2}\right] \cup (1; \log_3 4]$. **[7.289a]** $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right] \cup \left(1; \frac{7}{6}\right)$. **[7.289b]** $\left(-\frac{6}{5}; -1\right) \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **[7.289c]** $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup \left(1; \frac{8}{7}\right)$. **[7.290a]** $(0; 1/3) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup [1; 2] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$. **[7.290b]** $(0; 1/4) \cup \left(\frac{1}{4}; 2 - \sqrt{3}\right] \cup [1; 3] \cup \left[2 + \sqrt{3}; +\infty\right)$. **[7.291a]** $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{4}\right) \cup \left(3; \frac{7}{2}\right)$. **[7.291b]** $(-4; -3) \cup (4; +\infty)$. **[7.292a]** $(1; \sqrt{2}) \cup (3; +\infty)$. **[7.292b]** $(1; \sqrt{3}) \cup (2; +\infty)$. **[7.293]** $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$. **[7.294]** $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k,\ k \neq 3m + 1;\ \dfrac{\pi}{5}n,\ n \neq 5m$. **[7.295]** $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$. **[7.296]** $\dfrac{\pi}{4} + \pi k$. **[7.297.]** Больше второе. **[7.298a]** $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. **[7.298b]** $\frac{3\pi}{8} + \pi k$. **[7.298c]** $\frac{5\pi}{8} + \pi k$. **[7.298d]** $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. **[7.299]** $\left(0; \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right)$. **[7.300]** 3. **[7.301a]** $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$. **[7.301b]** $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + n\pi$. **[7.302a]** $\dfrac{\pi}{3} + n\pi$. **[7.302b]** $\dfrac{\pi}{6} + 2n\pi;\ \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$. **[7.303a]** $\dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$. **[7.303b]** $\dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$. **[7.304]** $-\dfrac{\pi}{6} + n\pi;\ \dfrac{\pi}{2} + n\pi$. **[7.305]** $(-1)^n \frac{\pi}{8} + n\pi;\ (-1)^n \frac{3\pi}{8} + n\pi$. **[7.306]** $\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + 2n\pi$. **[7.307]** $\dfrac{\pi}{6} + 2n\pi;\ \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi;\ \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$. **[7.308]** $0;\ \pm\sqrt{3}$. **[7.309]** $(-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$. **[7.310]** $\pm\dfrac{\pi}{3} + n\pi$. **[7.311]** $\dfrac{\pi}{4} - \arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{3} + 2\pi n$. **[7.312]** $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + n\pi$. **[7.313]** $\sqrt{2};\ \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$. **[7.314]** $\arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi + 2n\pi$. **[7.315]** $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$. **[7.316a]** $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$. **[7.316b]** $\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$.

[7.317a] $\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$. **[7.317b]** $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$. **[7.318a]** $-\frac{7\pi}{6}$; $-\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{5\pi}{6}$; $1-\dfrac{3\pi}{2}$. **[7.318b]** $\pm\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{5\pi}{3}$; π; $1-\dfrac{\pi}{2}$. **[7.319]** $0 < x \leqslant 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n = 0, 1, 2, 3...)$. **[7.320]** $\operatorname{arctg} 5 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$. **[7.321]** $3 < x < \pi$; $\pi < x < 3\pi/2$; $3\pi/2 < x < 5$. **[7.322]** $\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k\pi$. **[7.323]** $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$; $2k\pi < x < \arcsin(\sqrt{2}-1) + 2k\pi$. **[7.324]** $\frac{1+\sqrt{41}}{8} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}$. **[7.325a]** $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$; $x \neq \pi+2k\pi$. **[7.325b]** $\dfrac{\pi}{6} + 2n\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$; $x \neq \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$; $x \neq \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi$. **[7.326a]** $6 < x < 8$; $x \neq 2\pi$; $x \neq \frac{5\pi}{2}$. **[7.326b]** $\frac{1}{2} < x < 2$; $x \neq \dfrac{\pi}{4}$; $x \neq \dfrac{\pi}{2}$. **[7.327]** $\left(2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$. **[7.328]** $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$; $\dfrac{\pi}{18}+2\pi k$; $\dfrac{17\pi}{18}+2\pi k$. **[7.329]** $(2n\pi; \pi + 2n\pi)$. **[7.330]** 3. **[7.331]** 2. **[7.332]** 2. **[7.333]** -1. **[7.334]** 2. **[7.335]** 0. **[7.336]** π. **[7.337]** 2. **[7.338]** $3\pi/2$. **[7.339]** $6n\pi-3\pi/2$. **[7.340]** Нет решения. **[7.341]** $1/4$. **[7.342a]** $-1/2 < x < 0$. **[7.342b]** $0 < x < 1/2$. **[7.342c]** $1/2 < x < 1$. **[7.342d]** $1 < x < 3/2$. **[7.343]** 1. **[7.344]** $81/2$. **[7.345]** 2. **[7.346]** $(1; 27)$. **[7.347]** $(0; 1/2)$. **[7.348]** $(1; 1/2)$. **[7.349]** $t = 1$; $x = -\pi/30 + 2n\pi/5$; первое переписать: сумма квадратов $\leqslant 0$. **[7.350]** $(1/3; 1)$. **[7.351]** $\left(0; \log_2 \frac{128}{71}\right)$; $(2\log_2 7 - 6; 4 - \log_2 7)$. **[7.352a]** $\left(\frac{1}{5}; 4\right)$. **[7.352b]** $\left(\frac{1}{4}; 9\right)$. **[7.352c]** $(7; 9)$. **[7.353]** $(1/3; 1/2)$. **[7.354]** $(1; 3)$. **[7.355]** $(\log_2 3; \log_3 2)$. **[7.356]** $(-1; 1/\sqrt{3})$; $(3/2; 9)$. **[7.357a]** $(10-\sqrt{91}; 10+\sqrt{91})$. **[7.357b]** $(3; 2)$; $(2; 3)$. **[7.357c]** $(1; 2)$. **[7.357d]** $(4; 1)$. **[7.358a]** $(2; 9)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{3}\right)$. **[7.358b]** $(4; 3)$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{9}\right)$. **[7.359]** $\left[-1; \frac{7}{3}\right)$. **[7.360]** $\left(\frac{1}{2}\log_5 6; \frac{3}{4}\right)$. **[7.361]** $\left(-1; \sqrt{5}-1\right]$. **[7.362]** $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right]$. **[7.363]** $\left(4; \sqrt{3}+4\right]$. **[7.364]** $\left(2^{-2/3}; 1\right) \cup \left[2^{2/3}; \log_{4/3} 4\right)$. **[7.365]** $\left[\frac{2+\log_3 0.875}{5}; \frac{1}{2}\right)$. **[7.366]** $\left[-\sqrt{2}; 1\right)$. **[7.367]** $\left(-1; \log_{7+\sqrt{18}} 11\right] \cup [2; 3)$. **[7.368]** $\left[3-\sqrt{2}; 3\right] \cup \left[3+\sqrt{2}; 5\right)$. **[7.369]** 2. **[7.370]** -4; $[3.5; 4]$. **[7.371]** $\left[4-\sqrt{2}; 5\right) \cup \left[4+\sqrt{2}; 6\right)$.

[7.372] $(-4;-3) \cup \left[\sqrt{1+\log_2 3}; 2\right]$. **[7.373]** $[-2;2) \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$. **[7.374]** $(-2;-1] \cup [2;3)$. **[7.375]** $(-2;-1) \cup \left(-1;-\frac{1}{2}\right) \cup (0;\log_3 4)$. **[7.376]** Нет решения. **[7.377]** $\left(0;\frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup (\log_2 11;\infty)$. **[7.378]** $\left(-\infty;-\frac{1}{6}\right) \cup \left[\frac{63}{32};2\right)$. **[7.379]** $(9;9.5) \cup (9.5;9.75)$. **[7.380]** $\left(0;\frac{1}{8\sqrt{2}}\right] \cup \left(\frac{1}{4};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left[1;1+\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{3};+\infty\right)$. **[7.381]** Нет решения. **[7.382]** $[-2;-1) \cup \left(-\frac{1}{2};0\right) \cup \{1\}$. **[7.383]** $\{-25\} \cup (-1/25;-1/125)$. **[7.384]** $\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}};0\right)$.

Глава 8

Алгебраические системы

8.1. Комбинирование уравнений

(Задачи этого раздела взяты из [Вавилов-1], если не сказано иного).

8.1. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1, \\ x^2 + 3y^2 - xy - 4y = -1. \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0, \\ 2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0. \end{cases}$

8.3. $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x, \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2). \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} y^3 + z^3 = 7x^3, \\ y - z = 3x, \\ z - x = y - 2. \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 3y + 5 = 0, \\ 3x^2 + 3y^2 - 11x - 7y + 10 = 0. \end{cases}$

8.6. $\begin{cases} x + xy + y = 1, \\ y + yz + z = 2, \\ z + zx + x = 3. \end{cases}$

8.2. Симметричные и кососимметричные

8.7. $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$

8.8. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32, \\ 12(x + y) = 7xy. \end{cases}$

8.9. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{2}, \\ x+y+z=7/2, \\ xyz=1. \end{cases}$

8.10. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1, \\ x^4+y^4+x^2y^2=1. \end{cases}$

8.11. $\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

8.12. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=2, \\ x^3-y^3=4. \end{cases}$

8.13. $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=447, \\ xy(x-y)=210. \end{cases}$

8.14. $\begin{cases} xy-x+y=7, \\ xy+x-y=13. \end{cases}$

8.15. $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=61, \\ xy=12. \end{cases}$

8.16. $\begin{cases} x^3+y^3=6, \\ xy=2. \end{cases}$

8.17. $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=0. \end{cases}$

8.18. $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=a^3, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=a. \end{cases}$

8.19. $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0, \\ x^2-xy-2x-3y=6. \end{cases}$

8.20. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0. \end{cases}$

8.21'. Решить систему $\begin{cases} x^3=ax+by, \\ y^3=bx+ay, \end{cases}$ при условии $2b>a>0$.

8.22. $\begin{cases} x^2 - y^2 - ax + ay = 0, \\ xy = a^2. \end{cases}$

8.23. $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = (x + y - z)^2 + 2, \\ x^3 + y^3 - z^3 = (x + y - z)^3 + 9, \\ x^4 + y^4 - z^4 = (x + y - z)^4 + 29. \end{cases}$

8.24. $\begin{cases} (2x - 5)^2 + (3y - 2)^2 = 17, \\ (2x - 5)(3y - 2) = 4. \end{cases}$

8.25. $\begin{cases} (2x - 5)^2 + (3y - 2)^2 = 17, \\ (2x - 5)(3y - 2) = 4. \end{cases}$

8.26. $\begin{cases} x + xy - y = 13, \\ x^2y - xy^2 = 30. \end{cases}$

8.27. $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43. \end{cases}$

8.28. $\begin{cases} x^2 - xy + ay = 0, \\ y^2 - xy - 4ax = 0. \end{cases}$

8.29. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + xy^2 = 1. \end{cases}$

8.30. $\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$

8.31. $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 40y, \\ y^3 + x^2y = 10x. \end{cases}$

8.32. $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38, \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15. \end{cases}$

8.33. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 9, \\ xy + 2y^2 = 18. \end{cases}$

8.34 [МГУ, геогр, 2002]**.** $\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = 5y + x. \end{cases}$

8.35. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1, \\ x^2 + 3y^2 - xy - 4y = -1. \end{cases}$

8.36. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 15, \\ x^2 + 3xy - 8y^2 = 20. \end{cases}$

8.37. $\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0. \end{cases}$

8.38. $\begin{cases} x^2 + y + 1/4 = 0, \\ x + y^2 + 1/4 = 0. \end{cases}$

81.39. $\begin{cases} 4x^2 + 2xy + 6x - 27 = 0, \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = 0. \end{cases}$

8.40. $\begin{cases} (x+a)(y-b) + (x-a)(y+b) = 2(y^2 - b^2), \\ ay + bx = 2ab. \end{cases}$

8.3. Переход к новым переменным

8.41. $\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 + a, \\ y^2 = (z-x)^2 + b, \\ z^2 = (x-y)^2 + c, \end{cases}$ при условии $abc \neq 0$.

8.42. $\begin{cases} xy + yz = 18, \\ xz + zy = 20, \\ yx + xz = 8. \end{cases}$

8.43. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + x = 4xy + 2y + 2, \\ 4x^2 + 4xy + y^2 = 2x + y + 56. \end{cases}$

8.44. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 11, \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 18, \\ 6x - 3y = 2. \end{cases}$

8.4. Использование свойств функций и неравенств

8.45 [МГУ, хим,1978]**.** Найдите удовлетворяющие условию $z \geqslant 0$ решения системы $\begin{cases} y + 2 = (3-x)^2, \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y, \\ x^2 + z^2 = 4x. \end{cases}$

8.46 [Квант]. $\begin{cases} x-y=e^y-e^x, \\ x^2+xy+y^2=12. \end{cases}$

8.47 [Квант]. $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$

8.48a [Потапов]. $\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0, \\ z^3-9y^2+27y-27=0, \\ x^3-9z^2+27z-27=0. \end{cases}$

8.48b [Потапов]. $\begin{cases} 2y^3+2x^2+3x+3=0, \\ 2z^3+2y^2+3y+3=0, \\ 2x^3+2z^2+3z+3=0. \end{cases}$

8.48c [Потапов]. $\begin{cases} y^3-6x^2+12x-8=0, \\ z^3-6y^2+12y-8=0, \\ x^3-6z^2+12z-8=0. \end{cases}$

8.48d [Потапов]. $\begin{cases} y^3+2x^2+6x+12=0, \\ z^3+2y^2+6y+12=0, \\ x^3+2z^2+6z+12=0. \end{cases}$

8.49 [Потапов]. $\begin{cases} \dfrac{x}{y^2+1}=z, \\ \dfrac{y}{z^2+1}=x, \\ \dfrac{z}{x^2+1}=y. \end{cases}$

8.50 [Потапов]. $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^5+y^5=1. \end{cases}$

8.51 [Потапов]. $\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1. \end{cases}$

8.52 [Потапов]. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2xy-z^2=4. \end{cases}$

8.53 [Потапов]. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$

8.5. Разное

8.54 [МГУ, МФ, 1970]. Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие условиям $\begin{cases} \sqrt{(x-y)^2/2-(x-y)^4} = y^2-2x^2, \\ y \geqslant 4x^4+4yx^2+1/2. \end{cases}$

8.55 [МГУ, экон, 1973]. Найти все пары чисел $(x; y)$, для которых выполняются одновременно следующие условия: а) $x^2-2xy+12=0$; б) $x^2+4y^2 \leqslant 60$; в) x является целым числом.

8.56 [МГУ, ФФ, 1997]. $\begin{cases} y+|x+1|=1, \\ |y-x|=5. \end{cases}$

8.57 [МГУ, МФ, 1970]. $\begin{cases} |xy-2|=6-x^2, \\ 2+3y^2=2xy. \end{cases}$

8.58 [Вавилов-1]. $\begin{cases} xy=9z, \\ yz=x, \\ zx=4y. \end{cases}$

8.59 [Вавилов-1]. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=931. \end{cases}$

8.60a [НГУ, МФ, 2001]. $\begin{cases} xy+5yz-6xz=-2z, \\ 2xy+9yz-9xz=-12z, \\ yz-2xz=6z. \end{cases}$

8.60b [НГУ, МФ, 2001]. $\begin{cases} -2xy+2yz+xz=-10y, \\ -4xy+3yz=6y, \\ 23xy-16yz-3xz=-y. \end{cases}$

8.60c [НГУ, МФ, 2001]. $\begin{cases} 5xy+yz+2xz=-x, \\ 14xy+3yz+5xz=-4x, \\ 2xy+xz=4x. \end{cases}$

8.60d [НГУ, МФ, 2001]. $\begin{cases} 3xy-5yz-xz=3y, \\ xy+yz=-y, \\ -5xy+4yz+xz=-4y. \end{cases}$

8.61 [МФТИ, 2001]. $\begin{cases} y^2+3xy+1 \leqslant 0, \\ 9x^2-12x-8y \leqslant 0. \end{cases}$

8.62 [МФТИ, 2001]. $\begin{cases} 3x-y-5z-2yz=0, \\ x-5y-z-2z^2=0, \\ x+9y-3z+2xz=0. \end{cases}$

8.63 [МГУ, геол, 2001]. $\begin{cases} \dfrac{xy}{2}+\dfrac{5}{2x+y-xy}=5, \\ 2x+y+\dfrac{10}{xy}=4+xy. \end{cases}$

8.64 [МГУ, хим, 1998]. $\begin{cases} x^2+y^2+2(x-y)+2=0, \\ z^2+xz+yz-4=0. \end{cases}$

8.65 [МГУ, геол, 1998]. $\begin{cases} x(1+y)=y+7, \\ x^2y-xy^2=6. \end{cases}$

8.66 [МГУ, экон, 2002]. $\begin{cases} y-xy-x=11, \\ xy^2-x^2y=-30. \end{cases}$

8.6. Ответы

[8.1] $(0;1)$; $(1;1)$; скомбинировать в линейное по x. **[8.2]** $(-3;1)$; $(-1;2)$; $(3;1)$; $(1;1)$; скомбинировать в линейное по x, выразить x. **[8.3]** $(1;-3)$; $(-1;3)$; $(0;2)$; $(0;-2)$; уединить y, разделить, выразить y. **[8.4]** $(1/2;1;-1/2)$. **[8.5]** $(3;1)$; $(1;2)$. **[8.6]** $\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}-1;\frac{1}{2}\sqrt{6}-1;\sqrt{6}-1\right)$; $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{6}-1;-\frac{1}{2}\sqrt{6}-1;-\sqrt{6}-1\right)$. **[8.7]** $(3;1)$; $(1;3)$. **[8.8]** $(3;4)$; $(4;3)$; $(\frac{-16+8\sqrt{10}}{7};\frac{-16-8\sqrt{10}}{7})$; $(\frac{-16-8\sqrt{10}}{2};\frac{-16+8\sqrt{10}}{7})$. **[8.9]** $(1;2;1/2)$; $(2;2;1/2)$; $(2;1/2;1)$; $(1/2;1;2)$; $(1/2;2;1)$. **[8.10]** $(0;\pm1)$; $(\pm1;0)$. **[8.11]** $(2;3)$; $(3;2)$. **[8.12]** $(\frac{\sqrt{5}+1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2})$; $(-\frac{\sqrt{5}-1}{2};-\frac{\sqrt{5}+1}{2})$. **[8.13]** $(10;7)$; $(-7;-10)$. **[8.14]** $(5;2)$; $(-2;-5)$. **[8.15]** $\pm(4;3)$; $\pm(3;4)$. **[8.16]** $(\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4})$; $(\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{2})$. **[8.17]** $\left(\frac{\sqrt{51}+\sqrt{12\sqrt{51}+51}}{6};\frac{\sqrt{51}-\sqrt{12\sqrt{51}+51}}{6}\right)$ и наоборот. **[8.18]** $(a;0;0)$; $(0;a;0)$; $(0;0;a)$. **[8.19]** $(-2;2)$; $(3/2;-3/2)$; $(6;2)$; $(-3/2;-1/2)$. **[8.20]** $\pm(4;5)$; $\pm(3\sqrt{3};\sqrt{3})$. **[8.21]** если $a-b\geqslant0$, то $(0;0)$; $\pm(\sqrt{a+b};\sqrt{a+b})$; $\pm(\sqrt{a-b};-\sqrt{a-b})$; если $a-b<0$, то $(0;0)$; $\pm(\sqrt{a+b};\sqrt{a+b})$. **[8.22]** $\pm(a;a)$. **[8.23]** $(1/2;5/2;3/2)$; $(5/2;1/2;3/2)$ +

замены по симметрии x, y. **[8.24]** $(9/2;1)$; $(3;2)$; $(1/2;1/3)$; $(2;-2/3)$. **[8.25]** $(9/2;1)$; $(3;2)$; $(1/2;1/3)$; $(2;-2/3)$. **[8.26]** $5+2\sqrt{7};-5+2\sqrt{7})$; $(5-2\sqrt{7};-5-2\sqrt{7})$; $(5;2)$; $(-2;-5)$. **[8.27]** $\pm(2;3)$; $\pm(3;2)$. **[8.28]** $a=0 \Rightarrow (t;t)$, $t\in R$; $a\neq 0 \Rightarrow (2a;4a)$; $(2a/3;-4a/3)$. **[8.29]** $(\sqrt[3]{4}/2;\ \sqrt[3]{4}/2)$. **[8.30]** $(a;b;-b)$ + перестановки. **[8.31]** $(0;0)$; $(4;2)$; $(-4;-2)$. **[8.32]** $(3;1)$; $(-3;-1)$. **[8.33]** $(5;2)$; $(-5;-2)$. **[8.34]** $(0;0)$; $(\pm 2;\mp 2)$; $(\pm 6;\mp 6)$; $\left(\frac{(\pm\sqrt{3})+(\pm\sqrt{7})}{2};\frac{(\pm\sqrt{3})-(\pm\sqrt{7})}{2}\right)$. **[8.35]** $(0;1)$; $(1;1)$. **[8.36]** $\pm(4;1)$; $\pm(\frac{5}{4}\sqrt{10};\ \frac{1}{4}\sqrt{10})$. **[8.37]** $(0;0)$; $(2;-1)$; $(-10/7;-4/7)$. **[8.38]** $(-1/2;-1/2)$. **[8.39]** $(-3;-3/2)$; $(1.8;0.9)$; $\left(\frac{-9(1+\sqrt{15})}{14};\frac{-3(1+\sqrt{15})}{14}\right)$; $\left(\frac{-9(1-\sqrt{15})}{14};\frac{-3(1-\sqrt{15})}{14}\right)$. **[8.40]** $a=b=0 \Rightarrow (t;0)$; $(t;t)$; $a\neq 0$, $b=0 \Rightarrow (t;0)$; $a=-b\neq 0 \Rightarrow (-b;b)$; $a\neq -b$, $b\neq 0 \Rightarrow (a;b)$; $\left(\frac{a(a+3b)}{a+b};\frac{b(a-b)}{a+b}\right)$. **[8.41]** $\pm\left(\frac{b+c}{2bc}\sqrt{abc};\frac{a+c}{2ac}\sqrt{abc};\frac{a+b}{2ab}\sqrt{abc}\right)$. **[8.42]** $\pm(1;3;5)$. **[8.43]** $(-3.2;-0.6)$; $(2.4;3.2)$; $(-2.6;-1.8)$; $(2.8;2.4)$. **[8.44]** $(1/2;1/3;1/6)$; $(1/9;-4/9;4/17)$. **[8.45]** $(2;-1;2)$; $(4;-3;0)$; из третьего следует $0\leqslant z\leqslant 2$, из второго выразить y через z. **[8.46]** $(2;2)$; $(-2;-2;)$. **[8.47]** $(1;-1)$. **[8.48a]** $(3;3;3)$. **[8.48b]** $(-1;-1;-1)$. **[8.48c]** $(2;2;2)$. **[8.48d]** $(-2;-2;-2)$. **[8.49]** $(0;0;0)$. **[8.50]** $(0;1)$; $(1;0)$. **[8.51]** $(1;1;0)$. **[8.52]** Нет решения. **[8.53]** $x=y=z=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; первое переписать: $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$. **[8.54]** $\left(-1;-\frac{3}{2}\right)$; $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **[8.55]** $\left(3;\frac{7}{2}\right)$; $\left(-3;-\frac{7}{2}\right)$. **[8.56]** $\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$. **[8.57]** $\left(\sqrt{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$; $\left(-\sqrt{6};-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. **[8.58]** $(0;0;0)$; $(6;3;2)$. **[8.59]** $(5;3)$; $(3;5)$; $(-3;-5)$; $(-5;-3)$. **[8.60a]** $(-2;2;\frac{1}{6})$; $x=z=0, y\in R$; $y=z=0, x\in R$. **[8.60b]** $(-3;-\frac{1}{2};-2)$; $y=x=0, z\in R$; $y=z=0, x\in R$. **[8.60c]** $(\frac{1}{2};3;-2)$; $x=y=0$, $z\in R$; $x=z=0, y\in R$. **[8.60d]** $(2;-\frac{1}{3};-3)$; $y=x=0, z\in R$; $y=z=0$, $x\in R$. **[8.61]** $(\pm 2\sqrt{2}/3;1\mp\sqrt{2})$. **[8.62]** $(0;0;0)$; $(-3/2;-1/2;-1)$; $(-5/6;-1/6;-1/2)$. **[8.63]** $(1;5)$; $\left(\frac{5}{2};2\right)$. **[8.64]** $(-1;1;\pm 2)$. **[8.65]** $(3;2)$; $(-2;-3)$; $(3+\sqrt{10};-3+\sqrt{10})$; $(3-\sqrt{10};-3-\sqrt{10})$. **[8.66]** $(-2;3)$; $(-3;2)$; $(-1;5)$; $(-5;1)$.

Я не мог понять содержания вашей статьи, так как она не была оживлена иксами и игреками.

У. Томсон (лорд Кельвин)

Глава 9

Текстовые

9.1. Движение

9.1a [СУНЦ НГУ, 1993]**.** Две автомашины выехали одновременно из пункта A в одном направлении со скоростями 40 км/час и 50 км/час. Третья машина выехала из пункта A на полчаса позже и догнала вторую машину через полтора часа после того, как обогнала первую машину. Найти скорость третьей машины.

9.1b [СУНЦ НГУ, 1993]**.** Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в одном направлении со скоростями 10 км/час и 12 км/час. Третий велосипедист выехал из пункта A на полчаса позже, догнал первого велосипедиста, а еще через 15 км догнал и второго. Найти скорость третьего велосипедиста.

9.2 [МГУ, МФ, 1997]**.** Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью выехал второй. После остановки на 20 мин. в пункте B второй автомобиль поехал с той же скоростью назад, через 48 км встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии 120 км от B в момент прибытия в B первого автомобиля. Найдите расстояние от A до места первой встречи автомобилей, если AB=480 км.

9.3 [МГУ, ВМК, 1997]**.** Пункты A,B и C расположены на реке в указанном порядке вниз по течению. Расстояние между A и B равно 4 км, а между B и C – 14 км. В 12^{00} из пункта B отплыла лодка и направилась в пункт A. Достигнув пункта A, она сразу же повернула назад и в 14^{00} прибыла в пункт C. Скорость течения реки равна 5 км/ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде.

9.4 [НГУ, ест, 1992]**.** Автобус, на котором турист выехал из пункта A в пункт B, сломался через 7 минут после того, как проехал треть пути. Далее турист пошел пешком. Известно, что расстояние от A до B равно 18 км. Первая треть пути от A до B была преодолена на 25 минут быстрее второй, а вторая – на 35 минут быстрее третьей. С какой скоростью турист шел пешком ?

9.5 [НГУ, ест, 1993]**.** От двух причалов, расстояние между которыми 15 км, вниз по реке одновременно отплыли две лодки. Оба раза, когда одна из лодок находилась в 20 км от своего причала, расстояния между лодками были равны. Найти это расстояние.

9.6 [МГУ, ВМК, 1977]**.** Города A, B, C, D, расположенные так, что четырехугольник $ABCD$ выпуклый, соединены прямолинейными дорогами AB, BC, CD, AD, и AC. Их длины соответственно равны 6, 14, 5, 15 и 15 км. Из одного из этих городов одновременно вышли три туриста, идущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил маршрут на час раньше туриста, закончившего маршрут последним. Найти скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на $1/2$ км/ч меньше скорости первого, причем скорости всех туристов заключены в интервале от 5 км/ч до 8 км/ч.

9.7 [МГУ, МФ, 1970]**.** Три гонщика (A, затем B и потом C) стартуют с интервалом в 1 мин из одной точки кольцевого шоссе и двигаются в одном направлении с постоянными скоростями. Каждый гонщик затрачивает на круг более 2 минут. Сделав три круга, гонщик A в первый раз догоняет B у точки старта, а еще через три минуты он вторично обгоняет C. Гонщик B впервые догнал C также у точки старта, закончив четыре круга. Сколько минут тратит на круг гонщик A ?

9.8 [МГУ, хим, 1970]**.** Из пункта A в пункт B выехал автомобиль и одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта B, тотчас повернул назад и догнал велосипедиста через два часа после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта A, если известно, что в моменту второй встречи он проехал $2/5$ всего пути от B до A? (Скорости автомобиля и велосипедиста постоянны.)

9.9 [МГУ, фил, 1970]**.** В соревнованиях участвовали три байдарки. Первая байдарка проходит каждые 100 метров дистанции на две секунды быстрее второй байдарки и на три секунды быстрее третьей. За какое время первая байдарка прошла один километр, если за каждые 30 сек вторая байдарка опережает третью на $4\frac{8}{13}$ м ?

9.10 [МГУ, псих, 1970]**.** Два одинаковых парохода отправляются от двух пристаней: первый пароход от пристани A вниз по течению, второй – от пристани B вверх по течению. Каждый пароход, дойдя до конечного пункта, стоит там 45 минут и возвращается обратно. Если пароходы отправляются от начальных пунктов одновременно, то на обратном пути они встречаются в точке K, которая в два раза ближе к A, чем к B. Если первый пароход отходит от A на 1 час позже, чем второй пароход отходит от B, то на обратном пути они встречаются в 20 км от A. Если первый пароход отходит от A на 30 мин раньше, чем второй отходит от B, то на обратном пути пароходы встречаются на 5 км выше K. Найти скорость реки и время, за которое первый пароход доходит от A до K.

9.11 [МГУ, МФ, 1972]**.** Пункты A и B соединены двумя дорогами, одна из которых на 3 км короче другой. Из B в A по короткой дороге вышел пешеход и одновременно из A по той же дороге выехал велосипедист. Пешеход и велосипедист одновременно прибыли в A через 2 часа после начала движения. За это время пешеход прошел один раз путь от B до A, а велосипедист проехал два раза в одном направлении по кольцевому маршруту, образованному двумя названными дорогами. Найти скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что их вторая встреча произошла на расстоянии 3.5 км от пункта B. (Скорости постоянны.)

9.12 [МГУ, хим, 1972]**.** От пристани A одновременно отходят вниз по течению реки к пристани B две лодки. Первая лодка подходит к пристани B на 2 часа раньше второй. Если бы лодки отошли от этих пристаней одновременно, двигаясь навстречу друг другу (первая лодка отходит от пристани A), то они встретились бы через 3 часа. Расстояние между пристанями равно 24 км. Скорость второй лодки в стоячей воде в три раза больше скорости течения реки. Найти скорость течения реки.

9.13 [МГУ, геол, 1972]**.** Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 100 км, навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Через 4 часа они встретились. После встречи скорость первого велосипедиста, едущего из A в B, возросла на 5 км/час, а скорость второго, едущего из B в A, возросла на 10 км/час. Известно, что первый велосипедист прибыл в пункт B на 1 час раньше, чем второй прибыл в пункт A. Определить первоначальную скорость первого велосипедиста.

9.14 [МГУ, био, 1974]**.** Пристани A и B находятся на противоположных берегах озера. Пароход плывет из A в B и после десятиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью 18 км/ч. В момент выхода парохода из A навстречу ему из B в A отправляется движущаяся с постоянной скоростью лодка, которая встречается с пароходом в 11 часов 10 минут. В 11 часов 25 минут лодка находится на расстоянии 3 км от A. Направляясь из B в A после стоянки, пароход догоняет лодку в 11 часов 40 минут. Определить время прибытия лодки в A.

9.15 [МГУ, био, 1972]**.** Каждый из трех туристов должен преодолеть 1000 км сначала пешком, а затем используя последовательно велосипед, мотоцикл и автомобиль. Второй турист прошел пешком 3/4 пути, пройденного первым туристом и проехал на мотоцикле 2/3 того, что проехал на мотоцикле первый. На велосипеде второй турист проехал 108 км, а на автомобиле – 708 км. Известно, что с велосипеда второй турист пересел на мотоцикл в том же месте, что и первый турист. Наконец, третий турист проходит пешком столько же, сколько прошел пешком второй, проезжает на велосипеде столько же, сколько проехал на велосипеде первый, а на мотоцикле и автомобиле проезжает оставшиеся 876 км. Определить, сколько километров преодолел каждым из указанных способов первый турист.

9.16 [МГУ, геол, 1975]**.** Из пункта A и пункта B, расстояние между которыми равно 100 км, одновременно выехали два автобуса. Пройдя половину пути, первый автобус остановился, простоял 45 минут и поехал дальше со скоростью на 10 км/ч больше первоначальной. Второй автобус от A до B прошел с постоянной скоростью за 4 часа. Найти первоначальную скорость первого автобуса, если он прибыл в пункт B на час раньше второго.

9.17 [МГУ, фил, 1975]**.** Из пункта A в пункт B выехал автобус, а одновременно с этим из пункта B навстречу автобусу выехало такси. Через некоторое время автобус встретился с такси в пункте C, а еще через такое же время автобус встретился в пункте D с велосипедистом, выехавшим из пункта B в момент встречи автобуса с такси. Известно, что после встречи с автобусом велосипедист затратил на поездку в пункт C времени в 4 раза больше, чем автобус до конца своего пути. Во сколько раз скорость такси превосходит скорость велосипедиста?

9.18 [МГУ, хим, 1976]**.** Из города A в город B одновременно выехали автомобиль и мотоцикл, а в тот момент, когда мотоцикл преодолел шестую часть пути, выехал велосипедист. К моменту прибытия автомобиля в город B велосипедист проехал четвертую часть пути. Скорость мотоцикла на 21 км/ч меньше скорости автомобиля и на столько же больше скорости велосипедиста. Найти скорость автомобиля.

9.19 [МГУ, геофиз, 1976]**.** Из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению реки на расстоянии 24 км, одновременно вышли теплоход и плот. Теплоход, прибыв в B, простоял там 7 часов и, отправившись обратно в A, встретил плот на середине пути от A до B. Найти скорость теплохода в стоячей воде, если скорость плота совпадает со скоростью течения реки и равна 1 км/ч .

9.20 [МГУ, хим, 1977]**.** Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав $2/3$ трети расстояния от пункта A до пункта B, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B. При этом почта была доставлена из пункта A в пункт B за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта A до пункта B со скоростью 40 км/ч. Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта A до пункта B со скоростью 100 км/ч. Найти скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.

9.21 [НГУ, ест, 2002]**.** Студент половину пути от дома до университета прошел пешком, а вторую половину проехал на автобусе, затратив на весь путь 30 минут. Возвращаясь, четверть пути студент прошел пешком, а три четверти проехал на автобусе, затратив в целом 17 минут. Во сколько раз скорость автобуса больше скорости студента? Время ожидания автобуса не учитывается.

9.22 [МГУ, ВМК, 2001]**.** Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 км/час. Если бы первый велосипедист сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на три часа раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 180 км, а в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между ним и вторым велосипедистом было меньше 70 км. На весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 часов. Найдите первоначальную скорость велосипедистов.

9.23 [МГУ, АзАфр, 2001]**.** Из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 10 км, отправились в разное время пешеход, всадник и велосипедист. Известно, что их скорости постоянны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Первым из А вышел пешеход, которого в середине маршрута обогнал велосипедист, выехавший из А на 50 минут позже пешехода. В пункт Б пешеход прибыл одновременно с всадником, выехавшим из А на 1 час 15 минут позже пешехода. Определить скорости участников маршрута.

9.24 [МГУ, ВМК, 1999]**.** Пункты A, B, C и D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/ч и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 часов. Известно, что расстояние между A и C он прошел за 3 часа, а расстояния между A и B, B и C, C и D образуют (в заданном порядке) геометрическую прогрессию. Найдите расстояние между B и C.

9.25 [МГУ, МФ, 2002]**.** Из пункта A в пункт C выехал с постоянной скоростью велосипедист. За два километра до промежуточного пункта B он решил, что необходимо ехать быстрее, и, увеличив скорость в пункте B, продолжил движение с постоянной скоростью вплоть до пункта C. Приехав в C, велосипедист обнаружил, что время движения с каждой из скоростей было прямо пропорционально соответствующей скорости и что на первые 18 км пути он затратил времени в полтора раза больше, чем на последние 18 км. Найдите расстояние между пунктами A и B, если известно, что расстояние между A и C равно 75 км.

9.26 [МГУ, ВМК, 2002]**.** Из пункта A в пункт B в 8 часов утра вышел пешеход. Спустя два часа из пункта A вслед за пешеходом по той же дороге выехали велосипедист и мотоциклист. Известно, что скорость мотоциклиста в три раза больше скорости велосипедиста. Не позднее чем через 15 минут после своего выезда из пункта A мотоциклист обогнал пешехода и продолжил путь в пункт B. Велосипедист обогнал пешехода спустя не менее 45 минут после обгона пешехода мотоциклистом. Пешеход прибыл в пункт B в 14 часов того же дня. Найдите время прибытия мотоциклиста в пункт B.

9.27 [МГУ, геол, 2002]**.** Пункт C расположен между пунктами A и B, $AC = 2BC$. Из пунктов C и B одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Время, затраченное вторым поездом на путь от B до A, не менее чем в 6 раз превосходит время, затраченное первым поездом на путь от C до B. Третий поезд, скорость которого равна разности скоростей первых двух, затратил на путь от A до B не менее чем в 9 раз больше времени, чем первый поезд затратил на путь от C до места встречи со вторым. Чему равно отношение скоростей первого и второго поезда?

9.28 [НГУ, МФ, 2003]**.** Из пункта А в пункт Б выехали два автомобиля. Первый автомобиль проехал весь путь со скоростью 84 км/ч. Второй автомобиль первую треть пути проехал со скоростью 56 км/ч, вторую треть — со скоростью 120 км/ч. С какой скоростью он должен проехать последнюю треть пути, чтобы затратить на весь путь то же время, что и первый автомобиль?

9.29a [СУНЦ НГУ, 2003]**.** Алеша и Боря одновременно побежали по кольцевой дорожке с места старта в противоположных направлениях (каждый с постоянной скоростью). Когда Алеша пробежал 200 метров, они в первый раз встретились, а когда Алеша пробежал первый круг, Боре осталось пробежать 250 метров до конца второго круга. Найти длину дорожки.

9.29b [СУНЦ НГУ, 2003]**.** Боря и Ваня одновременно побежали по кольцевой лыжной трассе с места старта в противоположных направлениях (каждый с постоянной скоростью). В первый раз после старта они встретились через 6 минут, а когда Боря пробежал первый круг, Ване до конца второго круга осталось бежать 5 минут. За какое время Ваня пробегает полный круг?

9.30 [НГУ, МФ, 2004]**.** Путь из пункта А в пункт Б катер проплыл за 10 часов, двигаясь против течения реки. На обратном пути из Б в А у катера сломался двигатель, поэтому последнюю треть пути он двигался со скоростью течения реки. Всего на обратный путь ушло 14 часов. Сколько времени потребовалось бы катеру на обратный путь, если бы двигатель не сломался?

9.31a [НГУ, МФ, 2006]**.** Абитуриент начал писать экзаменационную работу между 9 и 10 часами, а закончил между 13 и 14 часами. Найти точное время, затраченное абитуриентом на выполнение задания, если известно, что в начале и в конце его работы часовая и минутная стрелки, поменявшись местами, занимали одни и те же положения на циферблате часов.

9.31b [НГУ, МФ, 2006]**.** Заседание приемной комиссии началось между 13 и 14 часами, а закончилось между 16 и 17 часами. Найти точное время длительности заседания, если известно, что в начале и в конце заседания часовая и минутная стрелки, поменявшись местами, занимали одни и те же положения на циферблате часов.

9.32a [НГУ, ест, 2006]**.** Абитуриент начал писать экзаменационную работу в 9 часов, а закончил между 13 и 14 часами. Найти точное время, затраченное абитуриентом на выполнение задания, если известно, что в момент окончания работы часовая и минутная стрелки на циферблате часов были направлены в противоположные стороны.

9.32b [НГУ, ест, 2006]**.** Заседание приемной комиссии началось в 13 часов, а закончилось между 16 и 17 часами. Найти точное время длительности заседания, если известно, что в конце заседания часовая и минутная стрелки на циферблате часов были направлены в противоположные стороны.

9.33a [НГУ, ест, 2006]**.** Колонна грузовиков, двигавшаяся с постоянной скоростью, проехала мимо наблюдателя, стоявшего на обочине, за 1 минуту. Автомобиль, который ехал с постоянной скоростью 90 км/час в том же направлении, обогнал колонну за 1.5 минуты. Найти длину колонны грузовиков.

9.33b [НГУ, ест, 2006]**.** Плот, двигаясь по течению реки, проплывал под мостом в течении 6 минут. Катер, который плыл с постоянной относительно берегов скоростью 36 км/час вниз по течению, обогнал плот за 40 секунд. Найти длину плота.

9.34 [СУНЦ НГУ, 2006]**.** Из пункта A в пункт B одновременно по двум различным дорогам выехали два велосипедиста. Первый велосипедист проехал весь путь длиной 19.2 километра с постоянной скоростью и прибыл в пункт B на 24 минуты раньше второго. Второй велосипедист преодолел путь длиной 28 километров, причем в течение первого часа он двигался по прямолинейному участку дороги со скоростью первого велосипедиста, а остаток пути до пункта B он ехал со скоростью 20 километров в час. Найти скорость первого велосипедиста.

9.35a' [НГУ, МФ, 2007]**.** Два автомобиля стартовали одновременно из пункта А и двигались прямолинейно параллельными курсами по дороге, проходящей через пункт Б. В пункт Б они прибыли одновременно. Первый автомобиль на протяжении всего пути двигался равноускоренно. Второй автомобиль сначала двигался равноускоренно, а затем с постоянной скоростью, достигнутой в результате ускорения на первом участке пути. В пункте Б скорость второго автомобиля составляла 70% скорости первого. Какую часть времени, затраченного на путь из пункта А в пункт Б, второй автомобиль двигался ускоренно?

9.35b' [НГУ, МФ, 2007]**.** Два автомобиля двигались прямолинейно параллельными курсами по дороге, проходящей через пункт А, который они проехали одновременно, а затем также одновременно прибыли в пункт Б.Первый автомобиль в пункте А начал торможение и двигался равнозамедленно до пункта Б. Второй автомобиль, пройдя пункт А, двигался с постоянной скоростью некоторое время, а потом перешел на равнозамедленное движение. Найти отношение скоростей автомобилей, с которыми они проехали пункт А, если известно, что на торможение у второго автомобиля ушло 40% времени, затраченного на путь из пункта А в пункт Б.

9.35c' [НГУ, МФ, 2007]**.** Два автомобиля стартовали одновременно из пункта А и двигались прямолинейно параллельными курсами по дороге, проходящей через пункт Б. В пункт Б они прибыли одновременно. Первый автомобиль на протяжении всего пути двигался равноускоренно. Второй автомобиль 60% времени, потраченного на путь из пункта А в пункт Б, двигался равноускоренно, а оставшееся время – с постоянной скоростью, достигнутой в результате ускорения на первом участке пути. Найти отношение скоростей автомобилей, с которыми они приехали через пункт Б.

9.36' [МГУ, МФ,1971]**.** Автомобиль едет от пункта A до пункта B с постоянной скоростью 42 км/ч. В пункте B он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на a км/ч, и едет так до полной остановки. Затем он сразу же начинает двигаться равноускоренно с ускорением a км/час^2. Каково должно быть значение a, чтобы через 3 часа после возобновления движения автомобиль автомобиль находился ближе всего к пункту B ?

9.37' [МГУ, ВМК, 1970]**.** Из города A в город B, находящийся на расстоянии 105 км от A, с постоянной скоростью v километров в час выходит автобус. Через 30 мин вслед за ним из A со скоростью 40 км/час выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определить все те значения v, при которых автомобиль возвращается в A позже, чем автобус приходит в B.

9.38' [МГУ, ФФ, 1970]**.** Два автомобиля едут по шоссе друг за другом на расстоянии 20 м с одинаковой скоростью 24 м/сек. Шоферы, заметив впереди препятствие, начинают тормозить. в результате автомобили переходят на равнозамедленное движение с ускорениями a_1 и a_2 ($a_1 < 0$ и $a_2 < 0$) и движутся так до полной остановки. Шофер переднего автомобиля начал тормозить на 2 сек раньше шофера заднего автомобиля. Ускорение переднего автомобиля $a_1 = -4\text{м}/\text{сек}^2$. Наименьшее расстояние, на которое сближались автомобили, равнялось 4м. Определить, какой автомобиль остановился раньше, и найти ускорение a_2 заднего автомобиля.

9.2. Изменение системы отсчета

9.39. Пароход плывет от Киева до Херсона 3 суток, а от Херсона до Киева 4 суток. За какое время доплывут от Киева до Херсона плоты?

9.40a [НГУ, МФ, 1995]**.** Из Останкино в Шаболовку шел Степашка. Ровно в полдень, когда он преодолел $1/3$ часть пути, вдогонку ему из Останкино выбегает Филя, а навстречу из Шаболовки – Хрюша. Филя обогнал Степашку в 13 часов и встретил Хрюшу в 13 часов 30 минут. Когда встретятся Степашка и Хрюша?

9.40b [НГУ, МФ, 1995]**.** Из Останкино в Шаболовку шел Степашка. Ровно в полдень, когда он преодолел $1/3$ часть пути, вдогонку ему из Останкино выбегает Филя, а навстречу из Шаболовки – Хрюша. Филя обогнал Степашку в 13 часов и встретил Хрюшу в 13 часов 30 минут. Когда встретятся Степашка и Хрюша?

9.41 [НГУ, ест, 1997]**.** Ехали медведи на велосипеде, а навстречу раки на хромой собаке. Медведи выехали из пункта A, а раки из пункта B одновременно с медведями. Через некоторое время медведи встретились с раками. Если бы собака бежала со скоростью велосипеда, то встреча произошла бы на 20 минут раньше, а если бы, наоборот, медведи ехали со скоростью собаки – то на 1 час позже. Определить, сколько времени прошло от начала движения до встречи.

9.42 [Квант]**.** На реке расположены пункты A и B, причем B ниже по течению на 20 км. Катер направляется из A в B, затем сразу возвращается в A и снова следует в B. Одновременно с катером из A отправился плот. При возвращении из B катер встретил плот в 4 км от A. На каком расстоянии от A катер нагонит плот, следуя вторично в B ?

9.43 [Квант]**.** На реке расположены пункты A и B. Одновременно из этих пунктов навстречу друг другу отходят два одинаковых катера, которые встречаются в некотором пункте, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Катер, вышедший из A, возвращается обратно через 1 час после выхода. Если бы катер, отправляющийся из A, вышел на 15 минут раньше катера, отправляющегося из B, то встреча произошла бы на равном расстоянии от обоих пунктов. Через сколько времени возвращается катер, выходящий из пункта B ?

9.44 [Потапов]**.** Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал автомобиль. На половине пути от A до B автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в B, велосипедисту осталось проехать еще треть пути. За какое время велосипедист проехал путь от A до B ?

9.45 [Потапов]**.** Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

9.46a [НГУ, МФ,2006]**.** Два бегуна, стартовав одновременно, с постоянными скоростями бегут по кольцевой дорожке в противоположных направлениях. Один из них пробегает кольцо за 5 минут, а второй – за 8 минут. Найти число различных точек встречи бегунов на дорожке, если они бегали не менее часа.

9.46b [НГУ, МФ,2006]**.** Два бегуна, стартовав одновременно, с постоянными скоростями бегут по кольцевой дорожке в противоположных направлениях. Один из них пробегает кольцо за 5 минут, а второй – за 8 минут. Найти число различных точек встречи бегунов на дорожке, если они бегали не менее часа.

9.47a [НГУ, МФ,2007]**.** К кормушке напрямик с постоянными скоростями без остановок бегут цыпленок, за ним курица, а следом петух. Когда курица догнала цыпленка, петух отставал от них на 6 метров, а когда цыпленка догнал петух, курица опережала их на два метра. Петух и курица прибежали к кормушке одновременно. На каком расстоянии от кормушки в этот момент был цыпленок?

9.47b [НГУ, МФ,2007]**.** Шарик гонится за зайцем, чтобы отдать ему фотографию, а навстречу Матроскин корову с пастбища ведет. Скорости всех персонажей постоянны. Когда Матроскин встретился с зайцем, тот опережал Шарика на 60 метров, а когда Шарик догнал зайца, Матроскин удалился от них на 40 метров. На сколько метров Шарик отставал от зайца, когда Матроскин встретил Шарика?

9.3. Работа

9.48 [МГУ, био, 1971]**.** Три насоса, работая вместе, наполняют бассейн за 4.5 час. Один второй насос наполняет бассейн на 5 часов быстрее, чем один третий насос. За сколько часов второй насос наполняет бассейн, если первый насос наполняет его втрое дольше, чем второй и третий вместе ?

9.49 [МГУ, био, 1973]**.** Три каменщика (разной квалификации) выложили кирпичную стенку, причем первый каменщик работал 6 часов, второй – 4 часа и третий - 7 часов. Если бы первый каменщик работал 4 часа, второй – 2 и третий – 5, то было бы выполнено лишь 2/3 всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали все вместе одно и то же время?

9.50a [НГУ, МФ,2004]**.** В первый день бригада выполнила задание за 8 часов, работая без прогульщика Василия. Во второй день бригада в полном составе выполнила $\frac{5}{6}$ такого же задания, а оставшуюся часть доделывал Василий в одиночку. Всего на выполнение задания во второй день ушло 9 часов. Сколько времени требуется бригаде, чтобы выполнить задание, работая в полном составе?

9.50b [НГУ, МФ,2004]**.** Два насоса, работая одновременно, наполняют бассейн за 4 часа. Если 60% объема заполнить с помощью первого насоса, а затем оставшуюся часть– с помощью второго, менее мощного, то на заполнение бассейна уйдет 11 часов. Сколько времени потребуется, чтобы заполнить весь бассейн, используя только первый насос?

9.51 [МГУ, псих, 1973]**.** Два экскаватора должны прорыть канал длиной 36 метров. Первый экскаватор, начавший эту работу, проработал 2 часа, затем его сменил второй экскаватор, проработавший 3 часа, в результате чего весь канал был прорыт. Сколько метров канала роет в час первый экскаватор, если 24 метра канала он роет за время, на 1 час большее, чем второй.

9.52 [МГУ, псих, 1973]**.** Бригаде из трех трактористов поручено вспахать поле. Если бы работали только первый и второй трактористы, то за один день было бы вспахано 45% поля. Если бы работали только второй и третий трактористы, то за два дня было бы вспахано 75% поля. Наконец, если бы работали только первый и третий трактористы, то за три дня было вспахано 97.5% поля. За сколько дней данное поле вспахал бы каждый тракторист в отдельности?

9.53 [МГУ, хим, 1997]**.** n насосов различной мощности наполняют бассейн водой. Первый насос, работая автономно, может наполнить весь бассейн за 2 часа, второй – за 4 часа,..., n-й – за 2^n часов. Каким должно быть наименьшее число насосов n, чтобы все n насосов, работая одновременно, наполнили бассейн быстрее, чем за 1 час и 1 минуту? Можно ли наполнить бассейн быстрее, чем за 1 час?

9.54 [МГУ, геол, 1997]**.** В момент, когда два бассейна были пустыми, 5 труб одинаковой производительности были подключены для заполнения первого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/3$ его объема, 2 трубы переключили для заполнения второго бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/2$ его объема, еще одну трубу переключили для заполнения второго бассейна. После этого оба бассейна наполнились доверху одновременно. Найдите отношение объемов бассейнов. (Временем на переключения пренебречь.)

9.55 [НГУ, МФ, 1993]**.** Имеются два бака равного объема, первый – полный воды, второй – заполненный водой на четверть. Из первого начали выпускать воду со скоростью 10 л/мин. Одновременно второй бак начали заполнять с постоянной скоростью. Разница объемов воды в баках дважды составляла 60 литров: сначала, когда первый бак опустел на $3/10$ объема, и затем, когда второй бак заполнился на $3/5$ объема. С какой скоростью заполняли второй бак?

9.56 [Потапов]**.** Экскаваторщик получил задание выкопать две траншеи одинаковой глубины на различных участках строительной площадки. Экскаватор сначала выкопал первую траншею длиной 5 м, потом доехал до второго участка и выкопал вторую траншею длиной 3 м. Время, затраченное на прокладку первой траншеи, на 1 час 12 минут меньше, чем время, затраченное на переезд экскаватора и рытье второй траншеи. Если бы производительность экскаватора была в 4 раза меньше, то время, затраченное на прокладку первой траншеи, равнялось бы времени переезда экскаватора от одной траншеи до другой. Определить длину траншеи, выкапываемой экскаватором за один час.

9.57’ [МГУ, хим, 1971]**.** Три экскаватора получили задание вырыть по котловану: первый и второй – емкостью по 800 м^3, а третий – емкостью 400 м^3. Первый и второй экскаваторы вместе вынимают за час грунта втрое больше, чем третий. Первый и третий экскаваторы начали работу одновременно, а второй – в тот момент, когда первый уже вынул 300 м^3 грунта. Когда третий экскаватор выполнил $2/3$ своей работы, второй вынул 100 м^3 грунта. Первым выполнил свое задание третий экскаватор. Сколько кубометров грунта вынул первый экскаватор к моменту, когда третий закончил рыть свой котлован?

9.58 [МГУ, соц, 2002]**.** Куплен товар двух сортов: первого на 1200 рублей и второго на 1500 руб. Товара второго сорта куплено на 10 кг больше, чем первого, а по цене (за 1 кг) на 20 руб. меньше. Сколько куплено товара первого сорта?

9.59 [МГУ, геол, 1971]**.** Автозавод изготавливает легковые и грузовые автомобили. В первый день было изготовлено грузовых автомобилей на 100 машин больше, чем легковых. Во второй день было изготовлено легковых автомобилей на 150 машин больше, чем в первый день, а грузовых – на 50 машин больше, чем в первый день. Сколько легковых и сколько грузовых автомобилей было изготовлено в первый день, если во второй день было изготовлено машин в 1.2 раза больше, чем в первый ?

9.60 [МГУ, хим, 1973]**.** Трое рабочих обрабатывали одинаковые детали. К концу месяца оказалось, что количество деталей, обработанных первым, вторым и третьим рабочими образуют геометрическую прогрессию. Месячный заработок каждого рабочего складывался из части, пропорциональной количеству обработанных деталей, и премии. У первого рабочего он составил 150 рублей, у второго – 180 и у третьего – 250 рублей. Найти размеры премий, если известно, что у первого и второго рабочего они одинаковы, а у третьего – в полтора раза больше.

9.61 [МГУ, почв, 1973]**.** Два экскаватора разной конструкции должны проложить две траншеи одинакового поперечного сечения длиной 960 и 180 метров. Вся работа продолжалась 22 дня, в течение которых первый экскаватор прокладывал большую траншею. Второй экскаватор начал работать на 6 дней позже первого, отрыл первую траншею, три дня ремонтировался и затем помогал первому. Если бы не нужно было тратить времени на ремонт, то работа была бы закончена за 21 день. Сколько метров траншеи в день может отрыть каждый экскаватор?

9.62* [МГУ, ВМК, 1974]**.** Имеются три несообщающихся между собой резервуара, причем объем третьего не меньше объема второго. Первый резервуар имеет объем V и может быть заполнен первым шлангом за 3 часа, вторым шлангом – за 4 часа, третьим шлангом – за 5 часов. К каждому из резервуаров может быть подключен любой из этих трех шлангов. После того, как произведено подключение к каждому из резервуаров по одному шлангу каким-то способом, все шланги одновременно включаются. Как только какой-то резервуар наполнится, соответствующий шланг отключается и не может быть подключен в дальнейшем к другому резервуару. Заполнение считается оконченным, если наполнены все три резервуара. При самом быстром способе подключения заполнение окончится через 6 часов. Если бы все резервуары сообщались, то заполнение окончилось бы через 4 часа. Найти объемы второго и третьего резервуаров.

9.63 [МГУ, геол, 1976]**.** В бассейне имеется 6 м^3 воды. Вода из бассейна может выливаться через две трубы. Если одновременно открыть обе трубы, то вся вода вытечет за 2 часа. Если открыть сначала большую трубу, а потом, когда вытечет одна треть воды, закрыть большую и одновременно открыть меньшую трубу, то вся вода вытечет через 5 часов после того, как была открыта большая труба. Определить, какое количество воды вытекает из каждой трубы за 1 час.

9.64 [МГУ, фил, 1976]**.** Автоматическая линия выпускает за 600 операций три партии шин для легковых автомобилей и 11 партий шин для грузовых автомобилей. Если бы эта автоматическая линия изготовляла только шины для грузовых автомобилей и изготовила столько партий таких шин, сколько операций она тратит на изготовление партии шин для легковых автомобилей, то этой линии потребовалось бы не менее 2727 операций. Сколько операций требуется ей для изготовления одной партии шин для грузовых автомобилей ?

9.65 [МГУ, псих, 1976]**.** Двое рабочих, работая совместно, за один час выполняют $3/4$ всей работы. Если первый рабочий выполнит одну четвертую часть всей работы, а второй рабочий, сменив первого, выполнит половину всей работы, то вместе они проработают 2.5 часа. За сколько часов каждый рабочий может выполнить всю работу, если за один час работы первого рабочего и 0.5 часа работы второго рабочего будет выполнено больше половины всей работы ?

9.66 [МГУ, экон, 1998]**.** Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов А и Б общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида А была больше цены одной акции вида Б. К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый. Определите цену продажи одной акции видов А и Б.

9.67a* [НГУ,2005]**.** Для постройки амбара поп нанял несколько одинаково работоспособных и одинаково прожорливых работников, уговорившись, что в качестве платы будет их кормить. После того, как половина амбара была построена, поп сообразил, что ему не хватит запаса провизии. Когда провизия закончится, $1/10$ амбара останется недостроенной. Поэтому поп нанял дополнительно Балду, который ест за четверых, а работает за семерых. В результате амбар был построен, да еще и $1/36$ провизии осталась несъеденной. Сколько работников было у попа без Балды?

9.67b* [НГУ,2005]**.** Змей Горыныч решил благоустроить свою пещеру. Поймав несколько леших в ближайшем лесу, он приказал им произвести ремонт, пообещав кормить по ходу выполнения работ. Один из леших оказался страшным обжорой. Работая наравне с каждым из остальных, он ел за пятерых. Когда половина ремонта была завершена, Змей Горыныч сообразил, что ему не хватит запаса еды до окончания работ. Запас закончится, когда неотремонтированной останется $1/10$ часть пещеры. Недолго думая, он съел обжору, а оставшуюся часть ремонта остальные лешие делали без него. В результате, когда ремонт был завершен, у Змея Горыныча осталась еще 1/21 часть общего запаса еды. Сколько леших поймал Змей Горыныч перед началом ремонта?

9.67c* [НГУ, 2005]. Царь решил построить новые палаты и призвал нескольких богатырей, предложив им в качестве платы по ходу строительства пить мед из его кладовой. После того, как половина работы была сделана, царь зашел в кладовые и обнаружил, что меда недостаточно. Когда он закончится, 1/16 часть палат останется недостроенной. Поэтому царь обратился за помощью к Илье Муромцу, который хоть и пьет в три раза больше каждого богатыря, но и работает за пятерых. В результате, когда совместными усилиями Ильи Муромца и ранее призванных богатырей строительство было завершено, в кладовой осталась невыпитой 1/45 часть имевшегося там меда. Сколько богатырей призвал царь в самом начале?

9.67d* [НГУ, 2005]. Соловей-Разбойник решил построить склад для хранения награбленного добра. Поймав несколько путников, он приказал им построить склад, пообещав в качестве вознаграждения поить их по ходу выполнения работ пивом из имевшейся у него бочки. На его беду, одним из пойманных путников оказался Иван Разгуляев, который хоть и работал в два раза быстрее каждого из остальных, но и пил за троих. После того, как половина склада была построена, Соловей-Разбойник сообразил, что пива недостаточно. Когда бочка опустеет, 1/16 часть склада останется недостроенной. Тогда Соловей-Разбойник выгнал Разгуляева, а оставшуюся часть склада достраивали остальные путники. В результате, когда склад был построен, в бочке осталась 1/25 часть от первоначального количества пива. Сколько путников поймал Соловей-Разбойник?

9.68a’ [НГУ, ест, 2006]. Винни-Пух отправился в гости к Пятачку, прихватив с собой полный горшочек меда. По дороге он лакомился медом, съедая одинаковое количество меда каждые 100 метров пути. После того, как Винни-Пух прошел половину пути, он сообразил, что меда на весь путь не хватит. Когда горшочек опустеет, непройденной останется 1/15 часть пути. Поэтому Винни-Пух ускорил шаг, за счет чего потребление меда на 100 метров пути уменьшилось на 48 граммов. В результате, когда он пришел к Пятачку, в горшочке осталась 1/10 часть от общего количества меда. Сколько граммов меда съедал за 100 метров пути Винни-Пух первоначально?

9.68b’ [НГУ, ест, 2006]. Бендер, Балаганов и Козлевич отправились в Черноморск на автомобиле “Антилопа-Гну". Перед дорогой они запаслись бензином с тем расчетом, чтобы по прибытию в Черноморск в баке осталась 1/16 часть всего горючего. Однако, в середине пути на борт “Антилопы-Гну"был экстренно взят Паниковский, из-за чего расход горючего на каждые 100 км пути увеличился на 2 литра. В результате горючее кончилось раньше времени, и оставшуюся 1/36 часть пути до

Черноморска им пришлось пройти пешком. Сколько литров бензина на 100 км пути расходовалось первоначально?

9.68c' [НГУ, ест, 2006]**.** Мальчик Вася половину пути до школы прошел пешком, после чего сообразил, что опаздывает к звонку. Если он будет идти в том же темпе, то когда начнется урок, ему останется еще $1/4$ часть пути. После чего Вася потуже завязал шнурки, потратив на это $1/9$ часть общего времени до звонка, и припустил бегом, увеличив скорость по сравнению с шагом на 8 км/час. В результате он попал в класс как раз к началу урока. С какой скоростью шел Вася первоначально?

9.68d' [НГУ, ест, 2006]**.** Мишка должен съесть тарелку каши до прихода мамы. Сначала он ел быстро, и если бы продолжал есть с такой скоростью, то доел бы кашу за $9/10$ от общего количества времени до прихода мамы. Однако, съев половину тарелки, Мишка о чем-то задумался, из-за чего стал есть на 5 ложек в минуту меньше. В результате, когда мама пришла, несъеденной осталась $1/24$ часть от общего количества каши. Сколько ложек в минуту съедал Мишка первоначально?

9.4. Проценты

9.69 [МГУ, почв, 1997]**.** В сосуде находится 10%-й раствор спирта. Из сосуда отлили $1/3$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на $5/6$ первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в сосуде?

9.70a [НГУ, ест, 1994]**.** Свежая малина содержит 94% воды, сушеная 19%. Сколько сушеной малины получится из 18 килограммов свежей?

9.70b [НГУ, ест, 1994]**.** Содержание воды в свежем винограде составляет 92% , в изюме – 25% . Сколько надо собрать винограда, чтобы получить 40 кг изюма?

9.70c [НГУ, ест, 1994]**.** Сплав меди и серебра весит 9 килограммов и содержит 17% серебра. Сколько меди нужно добавить к сплаву, чтобы содержание серебра в нем снизилось до 15%?

9.71a [НГУ, ест, 2000]**.** Имеется два сплава, в одном из которых содержится 40 % , а в другом – 20 % серебра. Сколько килограммов второго сплава нужно добавить к 20 кг первого, чтобы получить сплав, содержащий 32 % серебра?

9.71b [НГУ, ест, 2000]**.** Имеется два сплава, в одном из которых содержится 30 % , а в другом – 50 % золота. Сколько килограммов второго сплава нужно добавить к 10 кг первого, чтобы получить сплав, содержащий 42 % золота?

9.72 [МГУ, почв, 1999]**.** Какое количество воды надо добавить в один литр 10%-го водного раствора спирта, чтобы получить 6%-й раствор.

9.73 [НГУ, МФ, 2003]**.** Из пункта B в сторону, противоположную пункту A, выходит пешеход. В то же самое время из пункта A по направлению к B выезжает велосипедист и догоняет пешехода через полчаса. Если бы скорость велосипедиста была на 16% выше, то он догнал бы пешехода через 25 минут. Какое время потребуется велосипедисту, чтобы догнать пешехода, если скорость велосипедиста будет на 20% ниже исходной?

9.74 [Плеханов]**.** В связи с увеличением надежности работы изделия его цена поднялась на 5% , за счет чего при реализации 100 изделий доход предприятия возрос на 12500 руб. Какова новая цена изделия?

9.75a [НГУ, ест, 2005]**.** Из некоторого раствора соли в воде испарилось 30 г воды. В результате получился раствор, содержащий 2% соли. Затем добавили 10 г соли и получили раствор, содержащий 3% соли. Определить процентное содержание соли в начальном растворе.

9.75b [НГУ, ест, 2005]**.** В некоторый раствор соли в воде добавили 2 г соли. В результате получился раствор, содержащий 5% соли. Затем, когда из раствора испарилось 17 г воды, получился раствор, содержащий 6% соли. Определить процентное содержание соли в начальном растворе.

9.76a [НГУ, ест, 2005]**.** Строительный раствор состоит из смеси песка, цемента и воды. Известно, что в растворе песка и воды в 4 раза больше, чем цемента, а песка и цемента в 3 раза больше, чем цемента и воды. Найти процентное содержание песка, цемента и воды в растворе.

9.76b [НГУ, ест, 2005]**.** На участке леса растут березы, осины и сосны. Известно, что берез и осин в 1.8 раза больше, чем осин и сосен, а берез и сосен в 1.5 раза больше, чем осин. Каково процентное содержание берез, осин и сосен на участке?

9.77 [НГУ, МФ, 1995]**.** Буратино и папа Карло планировали положить свои капиталы на общий счет в банк “Навроде"под 500% годовых, рассчитывая через год забрать вклад величиной Ф. Крах банка изменил их планы. Буратино подарил часть своих золотых папе Карло, а остальные положил в банк “Обирон”, даже не поинтересовавшись процентной ставкой. Папа Карло присоединил полученные золотые к своему капиталу и сделал вклад в банк “Вампириал"под 50% годовых. Ровно через год они забрали свои вклады. Оказалось, что папа Карло получил $\frac{1}{6}$Ф, а Буратино – в три раза меньше. Какой процент годовых дает банк "Обирон"?

9.78a [НГУ, ест, 1995]**.** В резервуар, содержащий 100 кг водного раствора соли, в котором соль составляет 15%, по одной трубе со скоростью 20 кг/мин поступает раствор, содержащий 5% соли, а по другой трубе со скоростью 10 кг/мин поступает раствор, содержащий 15% соли. Через какое время в резервуаре окажется раствор, содержащий 10% соли?

9.78b [НГУ, ест, 1995]. В одной стране в обращении находилось 1 000 000 долларов, 20% которых были фальшивыми. Некая криминальная структура стала ввозить в страну по 100 000 долларов в месяц, 10% которых были фальшивыми. В это же время другая структура стала вывозить из страны по 50 000 долларов в месяц, из которых фальшивыми оказывалось 30%. Через сколько месяцев содержание фальшивых долларов в стране составит 5% ?

9.79 [Квант]. Имеются два слитка массой m кг и n кг с различным процентным содержанием меди. От каждого слитка отделяется кусок, причем эти куски имеют равную массу, и сплавляется с оставшейся частью другого слитка. Какой массы куски следует отрезать от каждого слитка, чтобы процентное содержание меди в новых слитках было бы равным?

9.80a [НГУ, МФ, 1996]. В Племени АБы-ВыГаДать на пост вождя претендовало три кандидата: Е,Ж и З. По правилам выборов голосование осуществлялось путем вычеркивания из бюллетеня не более одного кандидата. После подсчета голосов оказалось, что за Е подано 50% голосов, за Ж – 70% голосов и за З – 90% голосов. В голосовании приняло участие 200 человек. Сколько из них проголосовало за всех трех кандидатов?

9.80b [НГУ, МФ, 1996]. В соревнованиях по прыжкам участвовали 45 человек. Из них 40 выполнили норму первого разряда по прыжкам в высоту, 30 – по прыжкам в длину и 25 – по прыжкам в ширину. Оказалось, что каждый участник выполнил норму первого разряда хотя бы по двум дисциплинам. Сколько участников выполнили норму первого разряда ровно по двум дисциплинам?

9.81a [НГУ, МФ, 1997]. Статистика знает все. В городе Урюпинске 47,7% всех детей считают, что их нашли в капусте, 15,1% – что их принес аист, а оставшиеся 37,2% детей вообще не знают, откуда взялись. Аналогичная статистика отдельно по мальчикам такова: соответственно 33%, 20% и 47%. Определить, сколько процентов урюпинских девочек считают, что их принес аист, если известно, что 63% из них полагают, что были найдены в капусте.

9.81b [НГУ, МФ, 1997]. Статистика знает все. В городской думе города Урюпинска 60% всех депутатов считают секвестр полезной мерой для экономики, 30% – вредной, оставшиеся 10% стесняются произнести это слово вслух. В то же время остальные взрослые жители Урюпинска (не являющиеся депутатами) имеют другое мнение: лишь 10% из них считают секвестр полезным для экономики, 20% – вредным, а остальные 70% думают, что секвестр – это садовые ножницы. Определить, сколько процентов всех взрослых жителей Урюпинска считают секвестр полезной мерой для экономики, если известно, что вредным его считают 20,01% из них.

9.82 [Потапов]. Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем во втором. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота.

9.83 [Потапов]. Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину добавили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 литра смеси и добавили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и сколько воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций ?

9.84 [Потапов]. Для составления смеси из двух жидкостей A и B были взяты два сосуда: первый емкостью 10 литров, второй – 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости A. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью B и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того, как в первый сосуд было добавлено жидкости A столько, сколько ее было в этом сосуде с самого начала, отношения количества жидкости A ко всему объему имеющейся жидкости в сосуде для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости A было налито первоначально в первый сосуд ?

9.85a [МГУ, экон, 1978]. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70 % меди, второй – 10% меди и 90 % марганца, третий – 15% никеля, 25 % меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

9.85b [МГУ, экон, 1978]. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 70% олова и 30 % свинца, второй – 80% олова и 20% цинка, третий – 50% олова, 10% свинца и 40% цинка. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 15% свинца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание олова может быть в этом новом сплаве?

9.86a [МГУ, экон, 1979]. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть – во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 денежным единицам, к концу следующего года – 749 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально $5/6$ исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов стала бы равной 710 денежным единицам. Определить величину вклада по истечении двух лет в том случае, если бы все деньги первоначально были положены в первый банк.

9.86b [МГУ, экон, 1979]. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $3/5$ некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть – во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 590 денежным единицам, к концу следующего года – 701 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально $3/5$ исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов стала бы равной 610 денежным единицам. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

9.87 [МГУ, ФФ, 1972]. В двух сосудах имеется вода разной температуры. Из этой воды составляют смеси. Если отношение объемов воды, взятой из первого и второго сосудов, равно 1:3, то температуры смеси будет 49°, а если 2:5, то температура смеси будет 48°. Найти температуру воды в каждом сосуде (считая, что плотность и удельная теплоемкость воды не зависят от температуры).

9.88 [МГУ, био, 1976]. Имеются две смеси – n.1 и n.2, составленные из одних и тех же веществ А, Б и В, но взятых в различных весовых соотношениях. В смеси n.1 вещества В в девять раз меньше, чем вещества А и в два раза меньше, чем вещества Б. Соединив 6 кг смеси n.1 с тремя кг смеси n.2 и добавив 1 кг вещества А, получим новую смесь, в которой вещества А в шесть раз раз больше, чем вещества Б, а вещества В столько же, сколько вещества Б. Требуется определить весовое соотношение веществ А, Б и В в смеси n.2.

9.89a [НГУ, ест, 2001]. В магазине "Мойдодыр"в продаже имеются стиральные порошки в пачках трех сортов: обычный, необычный и превосходный. Вначале количественное соотношение по сортам было 3:4:6. В результате продаж и поставок со склада это соотношение изменилось и стало 2:5:8. Известно, что число пачек обычного порошка уменьшилось на 10% , а необычного порошка возросло на 55 пачек. Сколько всего пачек порошка стало в магазине?

9.89b [НГУ, ест, 2001]. В заповеднике "Карлуша"черные вороны составляли 60% , серые – 30% , а белые – 10% от общего поголовья ворон. Появившийся в заповеднике злостный браконьер Нехорошев перестрелял множество ворон, причем количество истребленных им белых ворон составляет 120% от количества истребленных серых ворон и составляет 30% от количества истребленных черных ворон. Определить, сколько всего ворон перестрелял Нехорошев, если известно, что в живых осталось 49 серых ворон и $2/3$ от всех белых.

9.89c [НГУ, ест, 2001]**.** На автостоянке стояли мерседесы, запорожцы и прочие иномарки в количественном соотношении 2:3:6. После того, как на стоянку подъехало некоторое количество мерседесов и 33 запорожца, а 40% прочих иномарок уехало, количественное соотношение стало 5:7:4. Сколько мерседесов стало на стоянке?

9.89d [НГУ, ест, 2001]**.** Черепашки снова идут в бой. Из них 45% входят в клан „ниндзя“, 30% – в клан „нундзя“, и 25% – в клан "няндзя". После трудной победы над жестоким врагом подсчитали, что число погибших в бою черепашек из клана "няндзя"составляет 120% от числа убитых из клана "нундзя"и составляет 60% от числа убитых из клана "ниндзя". Определить общее число черепашек, погибших в бою, если известно, что уцелела лишь $1/4$ часть клана „няндзя“, а в клане "нундзя"осталось 23 черепашки.

9.90 [МГУ, экон, 2001]**.** Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем продала их за общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40% , а при продаже второго – 20% ?

9.91 [МГУ, менедж, 2001]**.** Антикварный магазин приобрел два предмета, а затем продал их за общую сумму 39900 рублей, при этом прибыль составила 40%. За сколько магазин купил каждый предмет, если при продаже первого предмета прибыль составила 30%, а при продаже второго – 55% ?

9.92 [МГУ, соц, 2001]**.** В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8% ?

9.93* [МГУ, соц, 1999]**.** Кандидат в депутаты за время избирательной компании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тысячи рублей; каждое выступление по телевидению на 80 % и стоит 47 тысяч рублей. Определите последовательность и количество выступлений в этих средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если на всю кампанию можно израсходовать не более 112 тысяч рублей.

9.94 [МГУ, геол, 1998]**.** Из цистерны в бассейн сначала перелили 50% имеющейся в цистерне воды, затем еще 100 литров, затем еще 5% от остатка. При этом количество воды в бассейне возросло на 31% . Сколько воды было в цистерне, если в бассейне первоначально было 2000 литров воды?

9.95’ [МГУ, соц, 1998]**.** 9% коренного населения города N в зимний период занято народным промыслом. Летом 36% коренного населения уезжает из города, но общая численность населения за счет приезжающих туристов составляет 4/5 от численности в зимний период. Определите, какая часть от общей численности населения в летний период занята народным промыслом, если среди коренного населения доля занятых народным промыслом осталась такой же, как в зимний период.

9.5. Целочисленность

9.96a [НГУ, МФ, 1992]**.** Рыбаки поймали n рыб, из них 48% окуней. Пять рыб были отпущены в озеро. После этого рыб снова пересчитали и оказалось, что среди оставшейся рыбы 50% составляют окуни. Сколько рыб поймали рыбаки, если известно, что $30 \leqslant n \leqslant 100$?

9.96b [НГУ, МФ, 1992]**.** В корзине лежало не более 70 грибов. После разбора оказалось, что 52% из них – белые. Если отложить 3 самых малых гриба, то среди оставшихся будет ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?

9.97 [МГУ, био, 1997]**.** В двух коробках лежат карандаши: в первой красные, во второй – синие. Известно, что красных карандашей меньше, чем синих. Сорок процентов карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем половину из них составляли синие. После этого красных карандашей в первой коробке оказалось на 26 больше, чем во второй, а общее количество карандашей во второй коробке увеличилось по сравнению с первоначальным более, чем на 5% . Найдите общее количество синих карандашей.

9.98 [МГУ, псих, 1971]**.** Рабочий изготовил некоторое количество деталей двух видов: A и B, причем деталей A он изготовил больше, чем деталей B. Если он изготовит деталей A в два раза больше, то общее число деталей будет менее 32, а если деталей B в два раза больше, то общее число деталей станет больше 28. Сколько деталей A и сколько деталей B изготовил рабочий ?

9.99 [НГУ, ест, 1993]**.** Сто один человек купили 212 воздушных шаров четырех цветов, причем ни у кого не было двух шаров одного цвета. Число купивших четыре шара на 13 больше числа купивших два шара. Сколько человек купили только один шар ?

9.100a [НГУ, МФ, 1996]**.** Купил Роман раков, вчера – мелких, по цене 510 рублей за штуку, а сегодня – по 990 рублей, но очень крупных. Всего на раков он истратил 25200 рублей, из них переплаты ввиду отсутствия сдачи в сумме составили от 160 до 200 рублей. Определить, сколько раков купил Роман вчера и сколько сегодня.

9.100b [НГУ, МФ, 1996]**.** Папа Карло выстрогал Буратино и отправил его в школу, дав ему на букварь несколько деревянных рублей, не более 30 штук. Буратино продал все рубли коллекционерам, по 150 сольдо за каждый. Пять сольдо он сунул себе за щеку, не более трех закопал на поле Чудес, а на все оставшиеся купил хлеба по цене 51 сольдо за корочку. Определить, сколько корочек хлеба купил Буратино.

9.101a [Квант]**.** В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа членов группы, принявших участие в кроссе, заключен в пределах от 96,8% до 97,2%. Определите минимально возможное число членов такой группы.

9.101b [Квант]**.** В информации о результатах учебного года есть сведения о том, что число студентов группы, улучшивших за год свою успеваемость, составляет от 94,2% до 94,4% от общего числа студентов в группе. Какое наименьшее число студентов может быть в такой группе?

9.102 [ЦыпПин]**.** Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на каждый лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист окажется пустым. Если школьнику подарить еще один такой же альбом, на каждый лист которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

9.103 [ЦыпПин]**.** Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Ящик первого типа вмещает 70 деталей, ящик второго типа – 40 деталей, ящик третьего типа – 25 деталей. Стоимость пересылки ящика первого типа составляет 20 рублей, второго типа – 10 рублей, третьего типа – 7 рублей. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? (Недогрузка ящиков не допускается.)

9.104' [ЦыпПин]**.** Колхоз арендовал два экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 60 рублей в день, его производительность в мягком грунте – 250 м^3 в день, в твердом грунте – 150 м^3 в день. Аренда второго экскаватора стоит 50 рублей в день, его производительность в мягком грунте – 180 м^3 в день, в твердом грунте – 100 м^3 в день. Первый экскаватор проработал несколько полных дней и вынул 720 м^3. Второй за несколько полных дней вынул 330 м^3. Сколько дней работал каждый экскаватор, если колхоз заплатил за аренду не более 300 рублей?

9.105 [МГУ, псих, 1977]**.** Производительность первого автозавода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автозавода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 машин в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод первоначально? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое число машин.

9.106 [Потапов]**.** Груз вначале поместили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на 8 вагонов больше, и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, при этом все такие вагоны оказались загруженными полностью. Сколько тонн груза было?

9.107 [Потапов]**.** Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца 105 телевизоров. Каждый следующий рабочий день продажа возрастала на 10 телевизоров в день, и месячный план продажи 4000 телевизоров был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план, если в месяце 26 рабочих дней?

9.108 [Потапов]**.** Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы в параде участвовали все солдаты, то роту можно было бы построить так, что число солдат в каждом ряду равнялось бы числу рядов. Сколько солдат было в роте?

9.109 [МГУ, экон, 1993]**.** За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем $11\frac{1}{9}\%$, потом $7\frac{1}{7}\%$ и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определите срок хранения вклада.

9.110 [МГУ, псих, 1994]**.** Абитуриенты сдавали экзамены в течении трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести в два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу аудиторий. Найдите минимально возможное число абитуриентов, которое могло быть проэкзаменованы при этих условиях.

9.111 [МГУ, экон, 1994]. Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\dfrac{40500}{n}+270-\left|90-\dfrac{40500}{n}\right|$ тысяч рублей, а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540-\dfrac{3}{10}n$ тысяч рублей. Определите ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.

9.112a* [НГУ, МФ, 2001]. В магазине "Непарная обувь" за два дня продали 2 одинаковых правых сапога, 13 одинаковых левых сапог и один валенок, причем в первый день была выручена та же сумма, что и во второй. Левый сапог дешевле правого и дороже валенка на одну и ту же сумму. Сколько левых и сколько правых сапог продали в один день с валенком?

9.112b* [НГУ, МФ, 2001]. От фирмы "Рога и копыта" после ее банкротства осталось 17 рогов, 2 копыта и одна гиря. Все это богатство поделили между собой равными по весу частями Паниковский и Балаганов, причем гиря целиком досталась Балаганову, рога и копыта на части тоже не пилили. Каждый рог тяжелее каждого копыта и легче гири на одну и ту же величину. Сколько рогов и копыт у Паниковского?

9.112c* [НГУ, МФ, 2001]. В аптеке "У Дуремара" два покупателя, истратив денег поровну, купили 14 умеренных пиявок, 2 злобных и одну вялую. Каждая умеренная пиявка дешевле каждой злобной и дороже вялой на одну и ту же величину. Сколько и каких пиявок приобрел тот, кто купил вялую пиявку?

9.112d* [НГУ, МФ, 2001]. Пацюк пригласил восемнадцать эников и двух бэников есть вареники. Разместившись за двумя столами, они уничтожили все вареники, поданные поровну на оба стола. Все они ели вареники только со своего стола, причем каждый эник съел вареников больше каждого бэника, но меньше Пацюка на одно и то же число штук. Сколько эников и сколько бэников сидело за одним столом с Пацюком?

9.113a* [НГУ, МФ, 2001]. В магазине "Мойдодыр" в продаже имеются стиральные порошки в пачках трех сортов: обычный, необычный и превосходный. Вначале количественное соотношение по сортам было 3:4:6. В результате продаж и поставок со склада это соотношение изменилось и стало 2:5:8. Известно, что число пачек превосходного порошка возросло на 80% , а обычного порошка уменьшилось не более чем на 10 пачек. Сколько всего пачек порошка было в магазине вначале?

9.113b* [НГУ, МФ, 2001]. В заповеднике “Карлуша” черные вороны составляли 60% , серые – 30% , а белые – 10% от общего поголовья ворон. Появившийся в заповеднике злостный браконьер Нехорошев перестрелял множество ворон, причем количество истребленных им белых ворон составляет 120% от количества истребленных серых ворон и составляет 30% от количества истребленных черных ворон. Определить, сколько всего ворон было в заповеднике, если известно, что уцелело 2/3 всех белых ворон и не более 150 черных.

9.113c* [НГУ, МФ, 2001]. На автостоянке стояли мерседесы, запорожцы и прочие иномарки в количественном соотношении 2:3:6. После того, как на стоянку подъехало некоторое количество мерседесов и запорожцев общим числом не более 100 машин, а 40% прочих иномарок уехало, количественное соотношение стало 5:7:4. Сколько автомобилей уехало со стоянки?

9.113d* [НГУ, МФ, 2001]. Черепашки снова идут в бой. Из них 45% входят в клан “ниндзя”, 30% – в клан “нундзя”, и 25% – в клан “няндзя”. После трудной победы над жестоким врагом подсчитали, что число погибших в бою черепашек из клана “няндзя” составляет 120% от числа убитых из клана “нундзя” и составляет 60% от числа убитых из клана “ниндзя”. Определить общее число черепашек, участвовавших в битве, если известно, что уцелела лишь 1/4 часть клана “няндзя”, а в клане “ниндзя” осталось не более 40 черепашек.

9.114 [МГУ, био, 1999]. Два велосипедиста стартуют одновременно из разных точек круговой велотрассы – первый из точки A, второй из точки B – и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из их первых 15 встреч на трассе после старта только третья и пятнадцатая состоялись в точке B. Найдите отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что в моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.

9.115 [МГУ, фил, 1998]. А, И, Б сидели на трубе. К ним стали по очереди подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. Оказалось, что начиная с некоторого момента буквы стали циклически повторяться. а) Какая буква (из числа циклически повторяющихся) встречается наиболее часто? б) Может ли циклически повторяющийся набор состоять из одной буквы? Если да, укажите эту букву.

9.116 [МГУ, АзАфр, 1998]. При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного (неверного) произведения на меньший сомножитель получилось в частной 90 и в остатке 29. Найдите эти числа.

9.117 [МГУ, фил, 2002]. Словарь людоедов из племени Мумбо-Юмбо составляет 300 слов. Эллочка Щукина легко и свободно обходилась тридцатью. Однажды людоед начал посещать проповеди миссионера, поэтому его словарный запас, оставаясь целочисленным, стал увеличиваться на некоторое число процентов за каждые полгода. Эллочка поступила в вечернюю школу и каждый месяц стала узнавать целое число новых слов, равное 50% от того количества слов, которое людоед знал к концу первого полугодия. Однако, через несколько месяцев Эллочка бросила школу. Какое наибольшее целое число месяцев может проучиться Эллочка в школе, чтобы словарь людоеда после одного года посещения проповедей обязательно остался богаче словаря Эллочки?

9.118 [МГУ, геогр, 2002]. Тележка с передними колесами диаметром 30 см и задними колесами диаметром 40 см движется по прямой дороге, проходящей через точки A и B. Между точками A и B ровно 100 метров. Точка A покрашена. Через точку A проезжают правые колеса тележки и в точках соприкосновения с ней красятся. В свою очередь, при каждом соприкосновении с дорогой эти точки оставляют свой след в виде точек на дороге. Никакие точки на дороге, кроме точки A, не окрашивают колеса. Тележка движется от точки A к точке B. Найдите: а) наименьшее расстояние между соседними окрашенными точками; б) количество окрашенных точек на отрезке AB.

9.119a* [НГУ, МФ, 2003]. В Шестьляндии в обращении находятся денежные купюры номиналом 1 рубль, 6 рублей и 36 рублей. Банком, в котором содержится неограниченный запас купюр каждого вида, 14 купюрами выдана некоторая сумма, меньшая 200 рублей. Найти эту сумму, если известно, что меньшим числом купюр выдать ее невозможно.

9.119b* [НГУ, МФ, 2003]. В Семиземье в обращении находятся монеты трех видов: бронзовые рубли, серебряные монеты достоинством 7 рублей и золотые монеты достоинством 49 рублей. Из казны, в которой содержится неограниченный запас монет каждого вида, 17 монетами выдана некоторая сумма, меньшая 300 рублей. Найти эту сумму, если известно, что меньшим числом купюр выдать ее невозможно.

9.119c* [НГУ, МФ, 2003]. В Восьмиречье в обращении находятся денежные купюры номиналом 1 рубль, 8 рублей и 64 рубля. Банком, в котором содержится неограниченный запас купюр каждого вида, 20 купюрами выдана некоторая сумма, меньшая 500 рублей. Найти эту сумму, если известно, что меньшим числом купюр выдать ее невозможно.

9.119d* [НГУ, МФ, 2003]. В Тридевятом царстве в обращении находятся монеты трех видов: бронзовые рубли, серебряные монеты достоинством 9 рублей и золотые монеты достоинством 81 рубль. Из казны, в которой содержится неограниченный запас монет каждого вида, 23 монетами выдана некоторая сумма, меньшая 700 рублей. Найти эту сумму, если известно, что меньшим числом купюр выдать ее невозможно.

9.120a [НГУ, МФ, 2006]**.** В пяти диктантах школьник ошибся 31 раз, причем в каждом следующем диктанте он делал ошибок меньше, чем в предыдущем. В последнем диктанте школьник ошибся в 3 раза меньше, чем в первом. Сколько ошибок допустил школьник во втором диктанте?

9.120b [НГУ, МФ, 2006]**.** Из пяти шляп фокусник извлек 26 кроликов. Начав с первой шляпы, из которой он вынул не менее одного кролика, из каждой следующей он извлекал больше, чем из предыдущей. Из последней шляпы он вынул кроликов в четыре раза больше, чем из второй. Сколько кроликов извлек фокусник из третьей шляпы?

9.121a [НГУ, МФ, 2004]**.** За один выстрел по мишени в тире можно получить от 0 до 10 очков. Три стрелка сделали по 5 выстрелов каждый. В результате один из них победил, набрав больше всех очков. В сумме все трое набрали 141 очко. Кроме того, известно, что первый стрелок выбил не более двух „десяток“, второй – ровно три „девятки“, а третий – не менее одной "восьмерки". Сколько очков набрал каждый из стрелков?

9.121b [НГУ, МФ, 2004]**.** За один выстрел по мишени в тире можно получить от 0 до 10 очков. Три стрелка сделали по 5 выстрелов каждый. В результате один из них победил, набрав больше всех очков. В сумме все трое набрали 141 очко. Кроме того, известно, что первый стрелок выбил не более трех “десяток”, второй — ровно три “девятки”, а третий — не менее одной “семерки”. Сколько очков набрал каждый из стрелков?

9.121c [НГУ, МФ, 2004]**.** За один выстрел по мишени в тире можно получить от 0 до 10 очков. Три стрелка сделали по 5 выстрелов каждый. В результате один из них победил, набрав больше всех очков. В сумме все трое набрали 138 очков. Кроме того, известно, что первый стрелок выбил не более одной “десятки”, второй — ровно четыре “девятки”, а третий — не менее одной “семерки”. Сколько очков набрал каждый из стрелков?

9.121d [НГУ, МФ, 2004]**.** За один выстрел по мишени в тире можно получить от 0 до 10 очков. Три стрелка сделали по 5 выстрелов каждый. В результате один из них победил, набрав больше всех очков. В сумме все трое набрали 142 очка. Кроме того, известно, что первый стрелок выбил не более двух “десяток”, второй — ровно две “девятки”, а третий — не менее одной “восьмерки”. Сколько очков набрал каждый из стрелков?

9.6. Оценки

9.122a [НГУ, МФ, 1997]**.** Буратино хочет купить букварь с цветными картинками, но ему не хватает 18 сольдо. На этот же букварь Мальвине не хватает 7 сольдо, а Пьеро – 10 сольдо. Определить, смогут ли Пьеро и Мальвина вместе купить один букварь на двоих.

9.122b [НГУ, МФ, 1997]**.** Для того, чтобы купить каменный домик одному, Ниф-Нифу не хватает 19 золотых, а Нуф-Нуфу – 9 золотых. Бережливый Наф-Наф накопил денег столько же, сколько у Ниф-Нифа и Нуф-Нуфа вместе. Определить, смогут ли поросята купить домик втроем.

9.122c [НГУ, МФ, 1997]**.** Мальчиш Плохиш хочет купить варенье, печенье и конфеты. Если он купит только бочку варенья, то у него останется 3 доллара, если же только корзину печенья – то 4 доллара, а если только коробку конфет, то останется 8 долларов. Определить, хватит ли у Плохиша денег, чтобы купить бочку варенья и корзину печенья.

9.122d [НГУ, МФ, 1997]**.** Для того, чтобы купить в харчевне полпорции жареных пескарей, коту Базилио не хватает 3 сольдо, а лисе Алисе – 10 сольдо. Они закопали свои деньги на поле Чудес, и на следующий день их совместный капитал утроился. Определить, смогут ли теперь кот Базилио и лиса Алиса купить порцию жареных карасей на двоих.

9.123 [МГУ, соц, 1997]**.** В дошкольном учреждении провели опрос. На вопрос: „Что Вы предпочитаете, кашу или компот?“- большая часть ответила: „Кашу“, меньшая: „Компот“, а один респондент: "Затрудняюсь ответить". Далее выяснили, что среди любителей компота 30% предпочитают абрикосовый, а 70% – грушевый. У любителей каши уточнили, какую именно кашу они предпочитают. Оказалось, что 56.25% выбрали манную, а 37.5% – рисовую, и лишь один респондент ответил: "Затрудняюсь ответить". Сколько детей было опрошено?

9.124 [МГУ, экон, 2002]**.** Бригада рабочих выполняет задание за 42 дня. Если бы в бригаде было на 4 человека больше и каждый рабочий бригады работал бы на 1 час в день дольше, то это же задание было бы выполнено не более чем за 30 дней. При увеличении бригады еще на 6 человек и увеличении рабочего дня еще на 1 час все задание было бы закончено не ранее чем через 21 день. Определите наименьшую при данных условиях численность бригады, а также продолжительность рабочего дня.

9.125 [ЦыпПин]**.** Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами, причем девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет больше 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько построено пятиэтажных домов и сколько девятиэтажных?

9.126 [ЦыпПин]**.** В классе писали контрольную работу. Среди выставленных за нее оценок встречаются только 2, 3, 4, 5. Оценки 2,3,5 получило одинаковое число учеников, а оценок 4 поставлено больше, чем всех остальных вместе взятых. Оценки выше 3 получили менее 10 учеников. Сколько троек и сколько четверок было поставлено, если писали контрольную не менее 12 учеников ?

9.127 [МГУ, экон, 1971]**.** Колхоз арендовал два экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 60 руб в день, производительность его в мягком грунте – 250 м^3 в день, в твердом грунте – 150 м^3 в день. Аренда второго экскаватора стоит 50 руб в день, его производительность в мягком грунте – 480 м^3 в день, в твердом – 100 м^3 в день. Первый работал несколько полных дней и вырыл 720 м^3. Второй за несколько полных дней (более, чем за один день) вырыл 330 м^3. Сколько дней работал каждый экскаватор, если колхоз заплатил за аренду не более 300 рублей ?

9.128 [МГУ, экон, 1997]**.** Имеются три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс.р. до 20 тыс.р., а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 тыс.р. и не больше 60 тыс.р. Определите, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

9.129* [МГУ, ВМК, 1975]**.** Два грузовика доставили со склада на стройку одно и то же количество кирпича и одно и то же количество цемента, причем каждый из доставлял сначала кирпич, а затем цемент, перевозя за каждую поездку груз одного и того же веса. Первый грузовик начал работу на 40 минут раньше, а закончил на 40 минут позже второго. При этом интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был не более 20 минут. Если бы первый грузовик начал работу на 1 час 5 минут раньше второго, уменьшив свою производительность на 10%, а производительность второго грузовика не изменилась, то второй грузовик закончил бы работу на 55 минут раньше первого, а интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был бы не менее 20 минут. Если бы производительность первого грузовика уменьшилась на 2 тонны в час, а производительность второго грузовика не изменилась, то первый грузовик затратил бы на выполнение всей работы в два раза больше времени, чем второй грузовик на доставку кирпича. Сколько всего цемента было доставлено на стройку ?

9.130* [МГУ, экон, 1980]**.** На прямой дороге расположены последовательно пункты A, B, C, D. Расстояния от пункта A до пунктов B, C и D находятся в отношении 1:2:4. В направлении от A к D по дороге через равные промежутки времени с одной и той же скоростью едут автобусы. Из A в D вышли в разное время три пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первого пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт B обогнали 3 автобуса. Второго пешехода после выхода из пункта A и до прихода в пункт C обогнали 4 автобуса; известно, что когда он выходил из пункта A, через пункт A не проезжал очередной автобус. Третий пешеход вышел из A и прибыл в D, когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов обогнали третьего пешехода в пути между A и D?

9.131a* [ЦыпПин]**.** Из пункта A в пункт B сплавляют по реке плоты, отправляя их через равные промежутки времени. Пешеход, идущий из A в B, прошел треть пути от A к B к моменту отплытия первого плота. Дойдя до B, пешеход сразу отправился в A и встретил первый плот, пройдя более $3/13$ пути от B к A, а последний плот он встретил, пройдя более $9/10$ пути от B до A. Пешеход в пункт A и седьмой плот в пункт B прибыли одновременно. Из пункта A пешеход сразу вышел в B и прибыл туда одновременно с последним плотом. Сколько плотов отправлено из A в B ?

9.131b* [ЦыпПин]**.** Из пункта A в пункт B сплавляют по реке плоты, отправляя их через равные промежутки времени. Пешеход, идущий из A в B, прошел четверть пути от A к B к моменту отплытия первого плота. Этот плот поравнялся с пешеходом, проплыв более $6/11$ пути от A до B. Пешеход, прибыв в B одновременно с четвертым плотом, сразу отправился в A. Пройдя более $9/14$ пути от B до A, он встретил последний плот и прибыл в A одновременно с прибытием этого плота в B. Сколько отправлено плотов ?

9.131c* [ЦыпПин]**.** Несколько самосвалов загружаются поочередно в пункте A (время загрузки одно и то же, то есть самосвалы отправляются через равные промежутки времени) и отвозят груз в пункт B; там они мгновенно разгружаются и возвращаются в A. Скорости машин одинаковы; скорость груженой машины составляет $6/7$ скорости порожней. Первым выехал из A водитель Петров. На обратном пути он встретил водителя Иванова, выехавшего из A последним, и прибыл в A через 6 минут после встречи. Здесь Петров сразу же приступил к загрузке, а по окончании ее выехал в B и встретил Иванова во второй раз через 40 мин. после первой встречи. От места второй встречи до A Иванов ехал не менее 16 минут, но не более 19 минут. Определить время загрузки.

9.132’ [Квант]**.** Перед Али-Бабой в пещере лежит золото, цена которого – 20 динариев за килограмм, и алмазы по 60 динариев за килограмм. У Али-Бабы есть сундук. Если заполнить его доверху золотом, он будет весить 200 кг; если заполнить алмазами – он будет весить 40 кг. Ишак сможет увезти только 100 кг. Каким наилучшим образом должен Али-Баба заполнить сундук ?

9.133* [МГУ, био, 2001]. Из аэропорта одновременно вылетают два самолета и сразу же набирают скорость и высоту. Они летят по замкнутым круговым маршрутам: первый – по окружности радиуса R, а второй – по окружности радиуса r. Предполагается, что самолеты летят безостановочно с одинаковыми постоянными скоростями, и каждый из них облетает всю окружность за целое число часов. Кроме того, не ранее чем 43 часа и не позднее чем через 49 часов после вылета произошли следующие два события: первый самолет облетел свою окружность 4 раза, а второй самолет облетел свою окружность 5 раз, и разрыв во времени между этими событиями составил не менее 2 часов. Найдите отношение r/R.

9.134' [Ларин, 2015]. Школьники одного класса в сентябре ходили в два туристических похода. В первом походе мальчиков было меньше $2/5$ общего числа участников этого похода, во втором — тоже меньше $2/5$. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше $4/7$ общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников участвовал по крайней мере в одном походе.

9.135a' [Ларин, 2013]. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $4/13$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $2/5$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

9.135b' [Ларин, 2013]. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $1/3$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $3/8$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что в группе было 22 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 22 учащихся?

в) какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

9.136a’ [Ларин, 2013]**.** В течение четверти учитель ставил школьникам отметки “1“2“3“4"и “5". Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 4.7.

а) Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика?

б) На какое наибольшее число может увеличиться среднее арифметическое отметок этого ученика после замены четырех отметок “3“3“5” и “5” двумя отметками “4"?

9.136b’ [Ларин, 2013]**.** В течение четверти учитель ставил школьникам отметки “1”, “2“3“4” и “5". Среднее арифметическое Вовочки оказалось равным в точности 3.5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку “4” парой оценок “3” и “5”.

а) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического после такой замены.

б) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического, если такая замена произведена со всеми оценками “4".

9.7. Разное

9.137 [Квант]**.** Пятеро благородных рыбаков занимались ловлей рыбы. По окончании лова первому показалось, что он поймал больше остальных, и он разделил между ними поровну 1/3 своей добычи. После этого стало ясно, что у второго оказалось больше рыбы, чем у остальных, и он разделил между всеми остальными поровну 1/3 всей оказавшейся у него рыбы. Известно, что общий улов составляет 6кг 400г и что в результате описанных процедур его разделили поровну. Определите первоначальный улов каждого рыбака.

9.138 [Квант]**.** Поезд, следующий из пункта A в пункт B, делает по пути несколько остановок. На первой остановке в поезд садятся 5 пассажиров, а на каждой следующей – на 10 пассажиров больше, чем на предыдущей. На каждой остановке 50 пассажиров выходят из поезда. Возможен ли случай, когда в пункт B прибывает менее 336 пассажиров, если из пункта A их выезжает 462 ?

9.139 [Квант]**.** У каждого из трех школьников было сколько-то орехов. Сначала первый школьник дал каждому из двух других по одной четверти имевшихся у него орехов и еще по пол-ореха. Затем второй школьник дал каждому из двух других по одной четверти оказавшихся у него орехов и еще по пол-ореха. Затем то же сделал третий школьник. В результате у каждого оказалось по 30 орехов. Сколько орехов было у каждого школьника первоначально?

9.140 [МГУ, хим.1975]**.** На второй остановке вошло в автобус на 12 человек больше, чем вышло на третьей остановке, а на третьей вошло на 3 человека меньше, чем вышло на четвертой. Вошло на четвертой вдвое больше, чем на второй. На четвертую остановку приехало на 13 человек больше, чем уехало с первой. Известно, что если бы на второй остановке вышло вдвое больше человек, чем вошло на третьей, то с четвертой остановки уехало бы на 9 человек больше, чем с первой. Что больше и насколько: число человек, вошедших на второй остановке или вышедших на второй остановке ?

9.141 [МГУ, геофиз, 1978]**.** Пункт А стоит в поле на некотором расстоянии от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт В так, что расстояние от А до В равно 20 км. Скорость движения автомобиля по дороге в четыре раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из А по прямой до некоторой находящейся на дороге точки С, отличной от В, а затем по дороге до В, то при любом выборе точки С на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать из А в В напрямик по полю. На каком минимальном и на каком максимальном расстоянии от дороги может находиться точка А?

9.142 [МГУ, геол, 2002]**.** Пункты A и B расположены на двух различных дорогах, представляющих собой две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в пункте C. Два мотоциклиста одновременно начинают движение: один из пункта A по направлению к C, а второй из B по направлению к C. Через какое время расстояние между мотоциклистами будет наименьшим и каким, если скорость первого мотоциклиста равна 44 км/ч, второго – 33 км/ч, а расстояние от пункта A до пункта C и от пункта B до пункта C равны 275 км?

9.143 [МГУ, почв, 2001]**.** Дано задание: на прямоугольном участке земли размером 1×4 метра посадить три дерева, одно из которых должно быть в углу участка. расстояние между любыми двумя деревьями не должно быть меньше 2.5 метра. Можно ли выполнить это задание? Ответ обоснуйте.

9.8. Ответы

[9.1a] 60 км/ч. **[9.1b]** 15 км/ч. **[9.2]** 160 км. **[9.3]** 10 км/ч. **[9.4]** 5 км/ч. **[9.5]** 5 км. **[9.6]** $v_1 = 7$ км/ч; $v_2 = 6/3$ км/ч; $v_3 = 6/2$ км/ч. **[9.7]** 3 минуты. **[9.8]** 8 ч 45 мин. **[9.9]** за 230 сек. **[9.10]** 7.5 км/ч, 20 мин. **[9.11]** 3 км/ч, 15 км/час. **[9.12]** 1 км/ч. **[9.13]** 15 км/ч. **[9.14]** 11 час. 55 мин. **[9.15]** 32 км, 100 км, 240 км, 628 км. **[9.16]** 40 км/ч. **[9.17]** В три раза. **[9.18]** 63 км/ч. **[9.19]** 7 км/ч **[9.20]** 80 км/ч **[9.21]** в 14 раз. **[9.22]** 10 км/ч. **[9.23]** 4 км/ч; 8 км/ч;

12 км/ч. **[9.24]** 5 км. **[9.25]** 300/13 км. **[9.26]** 10 ч 40 мин того же дня. **[9.27]** 2. **[9.28]** 105 км/ч. **[9.29a]** 500 м. **[9.29b]** 10 мин. **[9.30]** 6 ч. **[9.31a]** 60/13 ч. **[9.31b]** 36/13 ч. **[9.32a]** 51/11 ч. **[9.32b]** 43/11 ч. **[9.33a]** 900 м. **[9.33b]** 360 м. **[9.34]** 16 км/ч. **[9.35a]** 4/7. **[9.35b]** $v_1/v_2 = 1.6$. **[9.35c]** $v_1/v_2 = 1.4$. **[9.36]** 14 км/час^2. **[9.37]** $30 < v \leqslant 33.6$. **[9.38]** Второй автомобиль остановился раньше, $a_2 = -8$м/сек^2. **[9.39]** 24 суток. **[9.40a]** в 14 часов. **[9.40b]** 6 мин. **[9.41]** 1 час. **[9.42]** 5 км от А. **[9.43]** 1час 30 мин. **[9.44]** 45 мин. **[9.45]** 2 км. **[9.46a]** 13. **[9.46b]** 11. **[9.47a]** 3 м. **[9.47b]** 24 м. **[9.48]** 10 час. **[9.49]** 6 час. **[9.50a]** 6 час. **[9.50b]** 5 час. **[9.51]** 6 м. **[9.52]** 5, 4, 8 дней. **[9.53]** 6; нет **[9.54]** 31:36. **[9.55]** 5 л/мин. **[9.56]** 15 м. **[9.57]** 600 м^3. **[9.58]** 15 кг. **[9.59]** 450 и 550. **[9.60]** 60 руб,90 руб. **[9.61]** 40 м, 20 м **[9.62]** $\frac{2}{15}V$, $2V$. **[9.63]** 2 м^3/час; 1 м^3/час. **[9.64]** 27 операций. **[9.65]** 2 часа, 4 часа. **[9.66]** 426 р, 142 р. **[9.67a]** 5. **[9.67b]** 10. **[9.67c]** 13. **[9.67d]** 3. **[9.68a]** 150 г. **[9.68b]** 10 л. **[9.68c]** 4 км/ч. **[9.68d]** 20 ложек. **[9.69]** 8%. **[9.70a]** $\frac{4}{3}$ кг. **[9.70b]** 375 кг. **[9.70c]** 1,2 кг. **[9.71a]** 40/3 кг. **[9.71b]** 15 кг. **[9.72]** 2/3 литра **[9.73]** 40 мин. **[9.74]** 2625. **[9.75a]** 1.94%. **[9.75b]** 3.1%. **[9.76a]** 70% : 20% : 10%. **[9.76b]** 50% : 40% : 10%. **[9.77]** 0%. **[9.78a]** 10 мин. **[9.78b]** 20 месяцев. **[9.79]** $\frac{mn}{m+n}$. **[9.80a]** 20 чел. **[9.80b]** 40 участников. **[9.81a]** 10%. **[9.81b]** 10.05%. **[9.82]** в 2 раза **[9.83]** глицерина 0.5 л, воды 3.5 л. **[9.84]** 3 л. **[9.85a]** 40%; $43\frac{1}{3}$%. **[9.85b]** 75%; 55%. **[9.86a]** 726 денежных единиц. **[9.86b]** 749 денежных единиц. **[9.87]** 28° и 56°. **[9.88]** 8:1:3. **[9.89a]** 405. **[9.89b]** 31. **[9.89c]** 45. **[9.89d]** 105. **[9.90]** 2.4 млн руб. и 3.6 млн руб. **[9.91]** 17100 руб. и 11400 руб. **[9.92]** $8\frac{3}{4}$%. **[9.93]** сначала газета, затем 2 раза радио и 1 раз телевидение. **[9.94]** 1000 л. **[9.95]** 7.2%. **[9.96a]** 75. **[9.96b]** 25. **[9.97]** 60. **[9.98]** 11 деталей A и 9 деталей B. **[9.99]** 52. **[9.100a]** вчера 18, сегодня 16. **[9.100b]** 44 корочки. **[9.101a]** 32 чел. **[9.101b]** 35 чел. **[9.102]** 12

листов. **[9.103]** 25 второго типа и 4 – третьего. **[9.103]** первый – 3 дня, второй – 2 дня. **[9.105]** 900 и 855. **[9.106]** 1750 т. **[9.107]** 43.2%. **[9.108]** 144 чел. **[9.109]** 12 месяцев **[9.110]** 432 чел. **[9.111]** 300 или 600 телевизоров. **[9.112a]** 8 левых, 0 правых. **[9.112b]** 9 рогов, 2 копыта. **[9.112c]** 0 злобных, 8 умеренных. **[9.112d]** 9 эников, 0 бэников. **[9.113a]** 260. **[9.113b]** 180. **[9.113c]** 24. **[9.113d]** 160. **[9.114]** 7:5. **[9.115]** а) И; б) Р. **[9.116]** 49 и 83. **[9.117]** 2. **[9.118]** а) 10π; б) 160. **[9.119a]** 179. **[9.119b]** 293. **[9.119c]** 447. **[9.119d]** 647. **[9.120a]** 8. **[9.120b]** 4. **[9.121a]** 46, 47, 48. **[9.121b]** 48, 47, 46. **[9.121c]** 45, 46, 47. **[9.121d]** 47, 48, 47. **[9.122a]** смогут. **[9.122b]** смогут. **[9.122c]** не сможет. **[9.122d]** смогут. **[9.123]** 37. **[9.124]** 20 рабочих, 6 часов. **[9.125]** пятиэтажных — 9, девятиэтажных — 8. **[9.126]** троек – 2, четверок – 7. **[9.127]** 3 дня и 2 дня. **[9.128]** 12.5% и 15%. **[9.129]** 42 тонны. **[9.130]** 8 автобусов. **[9.131a]** 20 плотов. **[9.131b]** 19 плотов. **[9.131c]** 13 мин. **[9.132]** 25 кг алмазов, 75 кг золота. **[9.133]** 3/4. **[9.135a]** а) да; б) 10; в) $\frac{9}{19}$. **[9.135b]** а) да; б) 11; в) $\frac{10}{21}$. **[9.136a]** а) 10; б) $\frac{7}{90}$. **[9.136b]** а) $3\frac{2}{3}$; б) $3\frac{8}{11}$. **[9.137]** 1.680 кг; 1.780 кг; у остальных трех – 0.98 кг. **[9.138]** нет. **[9.139]** 14; 26; 50. **[9.140]** вошло на одного человека больше. **[9.141]** $5\sqrt{15} \leqslant a \leqslant 20$. **[9.142]** 7 ч; 55 км. **[9.143]** нельзя.

Мнимые числа - это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что сочетание бытия с небытием.

Г.Лейбниц

Глава 10

Комплексные числа и многочлены

10.1. Действия в алгебраической форме

Вычислить (представив в алгебраической форме):

10.1. $(2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i)$.

10.2. $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$.

10.3. $(1+2i)^6$.

10.4. $(2+i)^7+(2-i)^7$.

10.5. $(1+2i)^5-(1-2i)^5$.

10.6. $\dfrac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2}$.

10.7. $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$.

10.8. $(2-i)^2+(1+i)^4-\dfrac{7-i}{2+i}$.

10.9. $\dfrac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\dfrac{(1-i)(2-i)}{2+i}$.

10.10. $\dfrac{(2+i)^3-(2-i)^3}{(2+i)^2-(2-i)^2}$.

10.11. Считая x и y вещественными, найти их из равенства

$$(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i.$$

10.12. Найти вещественные x, y, z, t из системы:

$$\begin{cases}(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)z+(1+4i)t=1+5i,\\ (3-i)x+(4-2i)y+(1+i)z+4it=2-i.\end{cases}$$

Решить систему уравнений (в комплексных числах):

10.13. $\begin{cases} x + yi - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30. \end{cases}$

10.14. $\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8. \end{cases}$

10.15. $\begin{cases} (1-3i)x + (-2+i)y = 13 - 9i, \\ (1+3i)x + (5-i)y = 2 + 4i. \end{cases}$

10.16. $\begin{cases} (1+2i)x + (2-i)y = 4 - 7i, \\ (1-3i)x + (5+i)y = 11 - 17i. \end{cases}$

10.17. $\begin{cases} (1-4i)x + (2+i)y = -14, \\ (1+4i)x + (5-i)y = 30 + 13i. \end{cases}$

10.18. $\begin{cases} (1-2i)x + (2+i)y = -5i, \\ (1+3i)x + (1+2i)y = 16 + 12i. \end{cases}$

10.2. Действия в тригонометрической форме

Вычислить (представив в алгебраической форме):

10.19. $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^{12}}$.

10.20. $\dfrac{(1-i)^{18}}{(\sqrt{3}+i)^{12}}$.

10.21. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{20}$.

10.22. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{18}$.

10.23. $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{10}}{(1+i)^{15}}$.

10.24. $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{16}}{(1+i)^{10}}$.

10.25. $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{15}}{(1+i)^{12}}$.

10.26. $\dfrac{(1-i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$.

10.3. Множества на комплексной плоскости

Изобразить на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих соотношениям:

10.27. $3 \leqslant |z+2i| < 4$.

10.28. $\{|z+i| \leqslant 2;\ |z-i| > 2\}$.

10.29. $|z+i| \leqslant |z-1|$.

10.30. $\pi/4 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi/3$.

10.31. $\operatorname{Re}((1+2i)z) \geqslant 3$.

10.32. $|2z-3| \leqslant 1$.

10.33. $\begin{cases} |z+i| \geqslant 1, \\ -\pi/4 \leqslant \arg(z-1) \leqslant 0. \end{cases}$

10.34. $|z-1| = |z+1| = |z+1-2i|$.

10.35. $\sqrt{2} < |(1-i)z-i| < 2\sqrt{2}$.

10.36. $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{\overline{z}}\right) \geqslant 1$.

10.37. $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\overline{z}}\right) \geqslant 1$.

10.38. $2 < |2iz+1-i| < 6$.

10.39. $\operatorname{Im}\dfrac{2}{\overline{z}-1} \geqslant 1$.

10.40. $\operatorname{Re}\dfrac{2}{\overline{z}+1} \geqslant 1$.

10.41. $\operatorname{Re}\dfrac{3}{z} \geqslant \left(\dfrac{1}{z} - 1\right)$.

10.42. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z} + i\right) \leqslant \operatorname{Im}\dfrac{2}{z}$.

10.43. $\operatorname{Im}(z^2+z) \geqslant 0$.

10.44. $\operatorname{Im}\dfrac{z-1+i}{z-3i} = 0$.

10.45. $\begin{cases} |z-i| < 1, \\ |\arg z| \geqslant \pi/4, \\ 0 \leqslant \arg(z+1-i) \leqslant \pi/4. \end{cases}$

10.46. $\begin{cases} |z-2-i| \geqslant 1, \\ 1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 3, \\ 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 3. \end{cases}$

10.47a [Звавич]. Из всех чисел z, удовлетворяющих условию $z \cdot \overline{z} = 25$ найдите такие, что $|z-7|+|z-7i|$ принимает наименьшее значение.

10.47b [Звавич]. Из всех чисел z, удовлетворяющих условию $z^2-(\overline{z})^2 = 16i$ найдите такие, что $|z-5|+|z-5i|$ принимает наименьшее значение.

10.48a [Звавич]. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z| = |z-2i|$ найдите число с наименьшим модулем.

10.48b [Звавич]. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z| = |z+6i|$ найдите число с наименьшим модулем.

10.49a [Звавич]. Пусть M – множество точек z_1 комплексной плоскости таких, что $|iz_1+\sqrt{2}| = 0.5$; K – множество точек z_2 комплексной плоскости вида $z_2 = iz_1$, где $z_1 \in M$. Найдите расстояние между фигурами M и K.

10.49b [Звавич]. Пусть M – множество точек z_1 комплексной плоскости таких, что $|-iz_1-2\sqrt{2}i| = 1$; K – множество точек z_2 комплексной плоскости вида $z_2 = -iz_1$, где $z_1 \in M$. Найдите расстояние между фигурами M и K.

10.50a [Звавич]. Найдите наибольший модуль комплексного числа z, удовлетворяющего условию $|zi-3i+4| \leqslant |i|$.

10.50b [Звавич]. Найдите наименьший модуль комплексного числа z, удовлетворяющего условию $|z-i| \leqslant |z+\sqrt{3}|$.

10.51a [Звавич]. Для комплексного числа $d = \sqrt{3}-i$ найдите множество всех таких комплексных чисел z, что $|z| = 2|d|$ и $|\arg d - \arg z| = \pi/3$.

10.51b [Звавич]. Для комплексного числа $b = -2-2i\sqrt{3}$ найдите множество всех таких комплексных чисел z, что $|z| = 0.5|b|$ и $|\arg z + \arg b| = \pi/6$.

10.52a [Звавич]. Множество точек комплексной плоскости определяется условием $|z-3-4i| \leqslant 1$, В каких пределах изменяется отношение $\operatorname{Im} z : \operatorname{Re} z$?

10.52b [Звавич]. Множество точек комплексной плоскости определяется условием $|z+4-3i| \leqslant 1$, В каких пределах изменяется отношение $\operatorname{Re} z : \operatorname{Im} z$?

10.53 [Говоров]. Найдите наименьшее значения, принимаемое функцией $w = |z+1/z|$, если $|z| \geqslant 2$.

10.54' [Вавилов-1]. Если $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ и $z_1+z_2+z_3 = 0$, то точки z_1, z_2 и z_3 являются вершинами правильного треугольника вписанного в единичную окружность. Доказать.

10.55 [Вавилов-1]. Найти наименьшее значение $|z|$, если $|z-2+2i| = 1$.

10.56 [Вавилов-1]**.** Даны два комплексных числа z_1 и z_2 $(z_1 \neq z_2)$. Доказать, что два треугольника, вершины которых находятся в точках плоскости, соответствующих комплексным числам
1) $0,\ 1,\ z_1$ и $0,\ z_1,\ z_1 z_2$;
2) $0,\ 1,\ z_2$ и $0,\ z_1,\ z_1/z_2$
подобны.

10.57. Три последовательно взятые вершины параллелограмма находятся в точках $1+i,\ 2-i,\ 4$. Найти комплексное число, соответствующее четвертой вершине.

10.58'. Пусть z_1 и z_2 — различные комплексные числа и

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|.$$

Доказать, что четырехугольник, вершины которого соответствуют комплексным числам $0,\ z_1,\ z_2$ и $z_1 + z_2$, является прямоугольником.

10.59 [Вавилов-1]**.** Центр квадрата находится в точке $z_0 = 1 + i$, а одна из его вершин - в точке $z_1 = 1 - i$. Найти комплексные числа, соответствующие остальным вершинам квадрата.

10.59 [Вавилов-1]**.** Доказать, что система $\begin{cases} |z + 1 - i| = \sqrt{2}, \\ \operatorname{Re} z \geqslant 2 \end{cases}$ не имеет решений.

10.59a [Вавилов-1]**.** Доказать, что комплексное число $w = \dfrac{1-z}{1+z}$ является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $|z| = 1$.

10.59b [Вавилов-1]**.** Доказать, что комплексное число z, не равное -1, можно записать в виде $z = \dfrac{1-ix}{1+ix}$, где x действительное число, тогда и только тогда, когда $|z| = 1$.

10.4. Тождества и неравенства

Доказать:

10.60. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

10.61. $z_1 \operatorname{Im}(\overline{z_2} z_3) + z_2 \operatorname{Im}(z_1 \overline{z_3}) + z_3 \operatorname{Im}(\overline{z_1} z_2) = 0$.

10.62. $|z_1 \overline{z_2} - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1)$.

10.63. $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 - 2\,(|z_1 \overline{z_2}| - \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}))$.

10.64. $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2 + 2\,(|z_1 \overline{z_2}| + \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}))$.

10.65. Если $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$ то $\arg \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \dfrac{1}{2} \arg \dfrac{z_2}{z_1}$.

10.66*. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 – различные комплексные числа и

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|.$$

Доказать, что:

а) число $\dfrac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$ является положительным действительным числом;

б) имеет место равенство

$$|z_1 - z_3||z_2 - z_4| = |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_2 - z_3|.$$

10.67. Доказать, что если $|z| \leqslant 1$, то $\left|\dfrac{2z - i}{2 + iz}\right| \leqslant 1$.

10.5. Корни из комплексных чисел

Найти все значения корня:

10.68. $\sqrt[4]{-1}$.

10.69. $\sqrt[4]{-4}$.

10.70. $\sqrt[4]{\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}$.

10.71. $\sqrt[3]{i}$.

10.72. $\sqrt[3]{-i}$.

10.7]. $\sqrt[3]{8i}$.

10.74. $\sqrt[4]{\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$.

10.75. $\sqrt[4]{\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{32}}$.

10.76. $\sqrt[6]{-27}$.

10.77. $\sqrt[6]{\dfrac{1 - i}{\sqrt{3} + i}}$.

10.78. $\sqrt[8]{\dfrac{1 + i}{\sqrt{3} - i}}$.

10.79. $\sqrt{2i}$.

10.80. $\sqrt{-8i}$.

10.81. $\sqrt{3 - 4i}$.

10.82. $\sqrt{-15 + 8i}$.

10.83. $\sqrt{-11 + 60i}$.

10.84. $\sqrt{-8 - 6i}$.

10.85. $\sqrt{2 - 3i}$.

10.6. Уравнения в комплексных числах

Найти все комплексные числа, удовлетворяющие уравнениям:

10.86. (Вавилов-1). $|z| + z = 0.$

10.87. (Вавилов-1). $|z|^2 + z = 0.$

10.88. (Вавилов-1). $z^2 + |\overline{z}| = 0.$

10.89. (Вавилов-1). $z + |z| = 3.$

10.90. (Вавилов-1). $z^2 = \overline{z}^2.$

10.91. (Вавилов-1). $\overline{z} = -4z.$

10.92. (Вавилов-1). $z^2 + \overline{z} = 0.$

10.93. (Вавилов-1). $z^2 + 2|z| = 0.$

10.94 [Вавилов-1]. $\begin{cases} z^3 + \overline{w}^7 = 0 \\ z^5 w^{11} = 1 \end{cases}$

10.95* [Вавилов-1]. $\begin{cases} \left|\dfrac{z-4}{z-6-5i}\right| = 2, \\ \left|\dfrac{z-1+4i}{z-8i}\right| = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

10.96 [Звавич]. $\begin{cases} \left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3}, \\ \left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1. \end{cases}$

10.97 [Вавилов-1]. $(z+a)^n = z^n$, где $n \in N;\ a \in R,\ a \neq 0.$

10.98 [Вавилов-1]. $(z+i)^4 - (z-i)^4 = 0.$

10.99 [Звавич]. $\begin{cases} \left|\dfrac{z+2i}{z+4i}\right| = 1, \\ \dfrac{|z+2i|}{|z-1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

10.100 [Звавич]. $\begin{cases} \left|\dfrac{z-4}{z-2}\right| = 1, \\ \dfrac{|z-2|}{|z-i|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

10.101 [Звавич]. Найдите z^{12}, если $z + 2\overline{z} = 3 + i.$

10.102 [Звавич]. Найдите z^6, если $3z - \overline{z} = -4 + 8i.$

10.103* [Вавилов-1]. Доказать, что корни уравнения

$$\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\frac{1}{z-z_3}=0,$$

где z_1, z_2, z_3 — попарно различные комплексные числа, соответствуют на плоскости точкам, лежащим внутри треугольника с вершинами z_1, z_2, z_3 или на его сторонах.

10.7. Формулы, получаемые с помощью комплексных чисел

(Задачи взяты из [ФадСом]).

10.104a. Выразить $\cos 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

10.104b. Выразить $\cos 8x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

10.104c. Выразить $\sin 6x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

10.104d. Выразить $\sin 7x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

10.105. Выразить $\operatorname{tg} 6\varphi$ через $\operatorname{tg}\varphi$.

10.106a'. Выразить через линейную комбинацию синусов и косинусов кратных углов функцию $\sin^3 x$.

10.106b'. Выразить через линейную комбинацию синусов и косинусов кратных углов функцию $\sin^4 x$.

10.106c'. Выразить через линейную комбинацию синусов и косинусов кратных углов функцию $\cos^5 x$.

10.106d'. Выразить через линейную комбинацию синусов и косинусов кратных углов функцию $\cos^6 x$.

10.107a'. Доказать: $2^{2m}\cos^{2m}x=2\sum\limits_{k=0}^{m-1}C_{2m}^k\cos 2(m-k)x+C_{2m}^m$.

10.107b'. Доказать: $2^{2m}\cos^{2m+1}x=\sum\limits_{k=0}^{m}C_{2m+1}^k\cos(2m-2k+1)x$.

10.107c'. Доказать:

$$2^{2m}\sin^{2m}x=2\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m+k}C_{2m}^k\cos 2(m-k)x+C_{2m}^m$$

.

10.107d'. Доказать:

$$2^{2m}\sin^{2m+1}x=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}C_{2m+1}^k\sin(2m-2k+1)x.$$

10.108'. Найти суммы: a) $1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots$; b) $C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots$.

10.109'. Найти сумму: $C_n^1-\frac{1}{3}C_n^3+\frac{1}{9}C_n^5-\frac{1}{27}C_n^7+\ldots$.

10.110'. Доказать, что:

a) $1+C_n^3+C_n^6+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$;

b) $C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$;

c) $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

10.111'. Доказать: $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

10.112'. Вычислить сумму $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx$.

10.113'. Вычислить сумму $1+a\cos x+a^2\cos 2x+a^3\cos 3x+\cdots+a^k\cos kx$.

10.114'. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+\cdots+\frac{1}{2^n}\cos nx\right)$.

10.115. Пусть $|x|<1$. Найти суммы:

a) $\cos\alpha+x\cos(\alpha+\beta)+x^2\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+x^n\cos(\alpha+n\beta)+\ldots$;

b) $\sin\alpha+x\sin(\alpha+\beta)+x^2\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+x^n\sin(\alpha+n\beta)+\ldots$.

10.116. Найти суммы:

a) $\cos x+C_n^1\cos 2x+C_n^2\cos 3x+\cdots+C_n^n\cos(n+1)x$;

b) $\sin x+C_n^1\sin 2x+C_n^2\sin 3x+\cdots+C_n^n\sin(n+1)x$.

10.117. Найти сумму $\sin^2 x+\sin^2 3x+\sin^2 5x+\cdots+\sin^2(2n-1)x$.

10.118. Показать, что:

a) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cdots+\cos^2 nx=\frac{n}{2}+\frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$;

b) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\cdots+\sin^2 nx=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$.

10.119. Найти суммы:

a) $\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\cdots+n\cos nx$;

b) $\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\cdots+n\sin nx$.

10.8. Комплексное квадратное уравнение

Решить в комплексных числах уравнение:

10.120. $(1+i)x^2+8x+(7-9i)=0$.

10.121. $(2-3i)x^2-(4+20i)x-(26+13i)=0$.

10.122. $(2-i)x^2+(3-14i)x-(17+19i)=0.$

10.123. $(2+i)x^2+(13-6i)x+(3-21i)=0.$

10.124. $(2+3i)x^2+(17i-6)x+(7i-17)=0.$

10.125. $(2-3i)x^2+(14+5i)x+(13i-13)=0.$

10.126. $(2-3i)x^2-(10+11i)x+(17i-7)=0.$

10.127. $(2+i)x^2+(3+14i)x+(-15+15i)=0.$

10.128. $(2+i)x^2+(13-6i)x+(3-21i)=0.$

10.9. Комплексные корни и разложение многочленов

Найти корни данного многочлена и представить его в виде разложения на многочлены с действительными коэффициентами.

10.129. $x^4+2x^2+9.$

10.130. $x^4-x^2+16.$

10.131. $x^4+6x^2+25.$

10.132. $x^4-11x^2+49.$

10.133. $x^4-9x^2+64.$

10.134. $x^4+3x^2+36.$

10.135. $x^4+5x^2+49.$

10.136. $x^4+2x^2+81.$

10.137. $x^4+(3x-10)^2.$

10.138. $x^4+(3x+10)^2.$

10.139. $x^4+2(x+6)^2.$

10.140. $x^4+(8x-30)^2.$

10.141. $x^4+12(x-6)^2.$

10.142. $x^4+7(3x-14)^2.$

10.143. $x^4+2(7x-36)^2.$

10.144. $x^4+8(x-12)^2.$

10.145 [Вавилов-1]**.** Решить уравнение $(z^2+z+1)(z^2+z+2)=12.$

10.146* [Вавилов-1]**.** Доказать, что если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – корни уравнения $z^{n+1}-1=0$, не равные 1, то $(1-z_1)(1-z_2)\ldots(1-z_n)=1.$

10.147* [Вавилов-1]**.** Пусть A_k, $k=1,2,\ldots,n$ — вершины правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность. Найти:

а) $|A_1A_2|^2+|A_1A_3|^2+\ldots+|A_1A_n|^2$;

б) $|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\cdot\ldots\cdot|A_1A_n|$.

10.148 [Вавилов-1]**.** Найти общие корни уравнений $z^3+2z^2+2z+1=0$ и $z^{1982}+z^{100}+1=0$.

10.149 [Вавилов-1]**.** Найти $z^{1980}+\dfrac{1}{z^{1980}}$, если известно, что $z+\dfrac{1}{z}=1$.

10.150 [Говоров]**.** Докажите, что многочлен $x^{3n}+x^{3m+1}+x^{3k+2}$ делится без остатка на x^2+x+1, если m,n,k — любые целые неотрицательные числа.

10.10. Рациональные корни

Найти все (включая комплексные) корни уравнения:

10.151. $z^3-4z^2-4z-5=0$.

10.152. $z^3+8z^2+15z+18=0$.

10.153. $z=\left(2-\dfrac{z+1}{z-7}\right)^2$.

10.154. $z^4-4z^3+6z^2-4z-15=0$.

Найти все рациональные корни уравнения [Вавилов-1]:

10.155. $x^3-6x^2+15x-14=0$.

10.156. $6x^4-x^3-7x^2+x+1=0$.

10.157. $2x^3+12x^2+13x+15=0$.

10.158. $x^4-4x^3+7x^2-16x+12=0$.

10.159. $2x^4-9x^3+4x^2+21x-18=0$.

10.160. $6x^6+13x^5+3x^4+x^3-7x^2-12x-4=0$.

10.161. $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6=0$.

10.162. $2x^3-4x^2-x=15$.

10.163. $x^2(1+x)^2+x^2=8(1+x)^2$.

10.164. $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12=0$.

10.165. $x^5-3x^4-2x^3-4x^2-24x+32=0$.

10.166. $8x^4+8x^3-x-190=0$.

10.167. $15x^4-4x^3-6x^2-4x-1=0$.

10.168. $(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12$.

10.169. $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$.

10.170. $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}=5$.

10.11. Возвратные уравнения

Найти все действительные корни уравнения [Вавилов-1]:

10.171. $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0.$

10.172. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0.$

10.173. $3x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 0.$

10.174. $x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0.$

10.175. $2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0.$

10.176. $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0.$

10.177. $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0.$

10.178. $x^4 + 3x^3 - 44x^2 + 15x + 25 = 0.$

10.179. $4x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 50x^3 - 9x^2 + 45x + 108 = 0.$

10.180. $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0.$

10.181. $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = 0.$

10.182. $2x^8 - 9x^7 + 20x^6 - 33x^5 + 46x^4 - 66x^3 + 80x^2 - 72x + 32 = 0.$

10.183. $\dfrac{4x}{x^2 + x + 3} + \dfrac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\dfrac{3}{2}.$

10.184. $\dfrac{x^2 - 13x + 15}{x^2 - 14x + 15} - \dfrac{x^2 - 15x + 15}{x^2 - 16x + 15} = -\dfrac{1}{12}.$

10.185. $x^4 = \dfrac{11x - 6}{6x - 11}.$

10.186. $8x = \dfrac{32x^3 - 1}{2x^3 + 3x - 1}.$

10.187. $\dfrac{1 + x^5}{(1 + x)^5} = 0.088.$

10.188. $x^5 = \dfrac{133x - 78}{133 - 78x}.$

10.12. Симметрии в многочленах

Найти все действительные корни уравнения [Вавилов-1]:

10.189. $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680.$

10.190. $x(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 24.$

10.191. $(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 35.$

10.192. $(8x + 7)^2(4x + 3)(x + 1) = \dfrac{9}{2}.$

10.193. $9(x+4/3)(x+2/3)(x-1/3)(1-x)=4x(x+1/3)$.

10.194. $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$.

10.195. $(x-2)^4+(x-3)^4=1$.

10.196. $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$.

10.197. $(x+3)^4+(x+1)^4=20$.

10.198. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}=0$.

10.199. $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

10.200. $\dfrac{2x}{3x^2-x+2}+\dfrac{7x}{3x^2+5x+2}=1$.

10.13. Переход к новой переменной

Найти все действительные корни уравнения [Вавилов-1]:

10.201. $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2=0$.

10.202. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$.

10.203. $(x^2+x-2)(x^2+x-3)=12$.

10.204. $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

10.205. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}$.

10.206. $(x^2-6x-9)^2=x(x^2-4x-9)$.

10.207. $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{3x}{2x-2}=-\dfrac{5}{2}$.

10.208. $\dfrac{2x}{3x^2-x+2}-\dfrac{7x}{3x^2+5x+2}=1$.

10.209. $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

10.14. Однородность

10.210. $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2=0$.

10.211. $(x^2+x+4)^2+3x(x^2+x+4)+2x^2=0$.

10.212. $(x^2-x+1)^4-6x^2(x^2-x+1)^2+5x^4=0$.

10.213. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

10.15. Переход к системе

Найти все действительные корни уравнения [Вавилов-1]:

10.214. $(3-x)^4+(2-x)^4=(5-2x)^4$.

10.215. $x^2+\dfrac{25x^2}{(x+5)^2}=11$.

10.216. $x^2+\dfrac{81x^2}{(9+x)^2}=40$.

10.217. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2=90$.

10.16. Отыскание НОД

Найти наибольший общий делитель двух данных многочленов:

10.218. $\{x^5+x^4-x^3+12x^2-9x+14\}$ и $\{x^4-3x^3+12x^2-12x+16\}$.

10.219. $\{x^5+x^4+14x^2-10x+21\}$ и $\{x^4-3x^3+13x^2-14x+24\}$.

10.220. $\{x^5+x^4+x^3+16x^2-11x+28\}$ и $\{x^4-3x^3+14x^2-16x+32\}$.

10.221. $\{x^5-3x^4+3x^3+6x^2-8x+8\}$ и $\{x^4+x^3+7x^2-6x+8\}$.

10.222. $\{x^5-2x^3-x^2+11x+21\}$ и $\{x^4+4x^3+15x^2+22x+24\}$.

10.223. $\{x^5-3x^3-2x^2+6x+8\}$ и $\{x^4+5x^3+13x^2+16x+10\}$.

10.17. Общие корни

Выяснить, есть ли у двух данных многочленов общие корни, и если есть, то найти их:

10.224. $\{10x^4-21x^3+45x^2-38x-24\}$ и $\{10x^4-41x^3+77x^2-37x-30\}$.

10.225. $\{20x^4+31x^3+108x^2+52x-15\}$ и $\{20x^4+51x^3+59x^2+16x-6\}$.

10.226. $\{20x^4+51x^3+119x^2+49x-15\}$ и $\{20x^4-29x^3+15x^2+28x-6\}$.

10.227. $\{20x^4-51x^3+119x^2-49x-15\}$ и $\{20x^4+9x^3+6x^2-14x-3\}$.

10.228. $\{6x^4-x^3-8x^2+64x-40\}$ и $\{6x^4+5x^3-9x^2+32x-20\}$.

10.229 [Вавилов-1]**.** Найти все значения a, при которых уравнения $x^2+ax+8=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют хотя бы один общий корень.

10.230 [Вавилов-1]**.** Найти все значения a, при которых уравнения $x^2-x+a=0$ и $x^2-ax+1=0$ имеют общий корень.

10.231 [Вавилов-1]. Найти все значения a, при которых уравнения $x^3+ax+1=0$ и $x^4+ax^2+1=0$ имеют общий корень.

10.232a [СУНЦ НГУ, 1997]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $2x^2+(4a-1)x+8a+1=0$ и $x^2+(2a-1)x+5a+1=0$ имеют хотя бы один общий корень.

10.232b [СУНЦ НГУ, 1997]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+(2a-1)x+1-3a=0$ и $2x^2+(4a-3)x+1-4a=0$ имеют хотя бы один общий корень.

10.232c [СУНЦ НГУ, 1997]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $2x^2+(4a+5)x+a-12=0$ и $x^2+(2a+1)x+2a-6=0$ имеют хотя бы один общий корень.

10.232d [СУНЦ НГУ, 1997]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+(2a+1)x+2a=0$ и $2x^2+(4a-1)x+10a+3=0$ имеют хотя бы один общий корень.

10.233a* [МФТИ, 1989]. Найти все значения a, при которых уравнения $22x^4+33x^3-16ax^2-3x+2=0$ и $11x^4+33x^3+21x^2-2ax-2=0$ имеют общие корни. Найти эти корни.

10.233b* [МФТИ, 1989]. Найти все значения c, при которых уравнения $2x^4-3x^3-8cx^2+33x+22=0$ и $2x^4+cx^3-21x^2-33x-11=0$ имеют общие корни. Найти эти корни.

10.233c* [МФТИ, 1989]. Найти все значения b, при которых уравнения $10x^4-25x^3+8bx^2+5x-2=0$ и $5x^4-5x^3-11x^2+bx+2=0$ имеют общие корни. Найти эти корни.

10.233d* [МФТИ, 1989]. Найти все значения a, при которых уравнения $2x^4-5x^3-16ax^2+25x-10=0$ и $2x^4+2ax^3-11x^2-5x+5=0$ имеют общие корни. Найти эти корни.

10.234* [МГУ, МФ, 1972]. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

1) $x^2-(a+b)x+8=0$;
2) $x^2+b(b+1)x+c=0$;
3) $x^4-b(b+1)x^2+c=0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c, если $b>3$.

10.18. Кратные корни

Выяснить, есть ли у данного многочлена кратные корни (действительные или комплексные):

10.235. $2x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 13x^2 + 12x - 4$.

10.236. $2x^5 - 5x^4 + 16x^3 - 19x^2 + 24x - 9$.

10.237. $2x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 4x - 1$.

10.238. $2x^5 - 15x^4 + 52x^3 - 99x^2 + 104x - 48$.

10.239. $2x^5 - 25x^4 + 132x^3 - 365x^2 + 528x - 320$.

10.240 [Вавилов-1]**.** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - a = 0$ имеет кратный корень. Найти этот корень и его кратность.

10.241' [Вавилов-1]**.** При каком соотношении между p и q уравнение $x^5 + px^4 + q = 0$ имеет корень кратности два?

10.242* [МГУ, экон, 1970]**.** Найти хотя бы один такой многочлен третьей степени $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, чтобы выполнялись неравенства $\left|\dfrac{x}{1 - x/2} - P_3(x)\right| < 0.02$ при всех $x \in [0; 1/2]$.

10.19. Ответы

[10.1] 46. **[10.2]** $x^4 + 4$. **[10.3]** 117+44i . **[10.4]** -556. **[10.5]** $-76i$. **[10.6]** $5 + 5i$. **[10.7]** $\frac{-1-32i}{25}$. **[10.8]** $\frac{-18-11i}{5}$. **[10.9]** $\frac{14}{5}i$. **[10.10]** -2. **[10.11]** $x = -4/11$; $y = 5/11$. **[10.12]** $x = -2$; $y = 3/2$; $z = 2$; $t = -1/2$. **[10.13]** $x = 3 - 11i$; $y = -3 - 9i$; $z = 1 - 7i$. **[10.14]** $x = 2 + i$; $y = 2 - i$. **[10.15]** $x = 6 + 2i$; $y = 1 - 3i$. **[10.16]** $x = 1 - i$; $y = 2 - 3i$. **[10.17]** $x = 1 - 4i$; $y = 2 + 3i$. **[10.18]** $x = 3 - 4i$; $y = 3 + i$. **[10.19]** $\frac{1}{8}(1 + i\sqrt{3})$. **[10.20]** $-\frac{1}{8}i$. **[10.21]** $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **[10.22]** $512i$. **[10.23]** $-2 - 2\sqrt{3} + i(-2 + 2\sqrt{3})$ **[10.24]** $1024(-\sqrt{3} + i)$. **[10.25]** $512i$. **[10.26]** $2^{-16}(\sqrt{3} + i)$. **[10.47a]** $z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = 4 + 3i$. **[10.47b]** $z_1 = 1 + 4i$; $z_2 = 4 + i$. **[10.48a]** $z = i$. **[10.48b]** $z = -3i$. **[10.49a]** 1. **[10.49b]** 3. **[10.50a]** 6. **[10.50b]** $1/2$. **[10.52a]** $\left[\frac{6-\sqrt{6}}{4}; \frac{6+\sqrt{6}}{4}\right]$. **[10.52b]** $\left[\frac{-6-\sqrt{6}}{4}; \frac{-6+\sqrt{6}}{4}\right]$.

[10.53] $9/4$. **[10.55]** $2\sqrt{2}-1$. **[10.57]** $3+2i$. **[10.59]** $1+3i$; $-1+i$; $3+i$. **[10.68]** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, все комбинации. **[10.69]** $\pm 1 \pm i$; все комбинации. **[10.70]** $\pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $\pm\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. **[10.71]** $-i$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$. **[10.72]** i; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$. **[10.73]** $-2i$; $\pm\sqrt{3}+i$. **[10.74]** $\pm\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; $\pm\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ **[10.75]** $\pm\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$; $\pm\frac{-\sqrt{3}+i}{4}$ **[10.76]** $\pm i\sqrt{3}$; $\frac{\pm 3\pm i\sqrt{3}}{2}$; все комбинации. **[10.77]** $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi + i\sin\frac{24k+19}{72}\pi\right)$; $k = 0,\dots,5$. **[10.78]** $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{24k+5}{96}\pi + i\sin\frac{24k+5}{96}\pi\right)$; $k = 0,\dots,7$. **[10.79]** $\pm(1+i)$. **[10.80]** $\pm(2-2i)$. **[10.81]** $\pm(2-i)$. **[10.82]** $\pm(1+4i)$. **[10.83]** $\pm(5+6i)$. **[10.84]** $\pm(1-3i)$. **[10.85]** $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$. **[10.86]** луч $\{y=0;\ x\leqslant 0\}$. **[10.87]** 0; -1. **[10.88]** 0; $-i$; i. **[10.89]** $3/2$. **[10.90]** 0; ± 1; $\pm i$ **[10.91]** 0. **[10.92]** 0; -1; $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **[10.93]** 0; $\pm 2i$. **[10.94]** $(i;i)$; $(-i;-i)$. **[10.95]** $10+8i$; $\frac{358}{85}+\frac{344}{85}i$. **[10.96]** $6+17i$; $6+8i$. **[10.97]** $z_k = \frac{-a}{2}\left(1+i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\right)$, $k=1,2,\dots,(n-1)$. **[10.98]** 0; 1; -1. **[10.99]** $2-3i$; $-4-3i$. **[10.100]** $3+2i$; $3-4i$. **[10.101]** -64. **[10.102]** $512i$. **[10.104a]** $\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$. **[10.104b]** $\cos^8 x - 28\cos^6 x\sin^2 x + 70\cos^4 x\sin^4 x - 28\cos^2 x\sin^6 x + \sin^8 x$. **[10.104c]** $6\cos^5 x\sin x - 20\cos^3 x\sin^3 x + 6\cos x\sin^5 x$. **[10.104d]** $7\cos^6 x\sin x - 35\cos^4 x\sin^3 x + 21\cos^2 x\sin^5 x - \sin^7 x$. **[10.105]** $\frac{2(3\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + 3\operatorname{tg}^5\varphi)}{1-15\operatorname{tg}^2\varphi + 15\operatorname{tg}^4\varphi - \operatorname{tg}^6\varphi}$. **[10.106a]** $\frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$. **[10.106b]** $\frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}$. **[10.106c]** $\frac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}$. **[10.106d]** $\frac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{32}$. **[10.108]** a) $2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$; b) $2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$. **[10.109]** $\frac{2^n}{3^{(n-1)/2}}\sin\frac{n\pi}{6}$. **[10.112]** $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$ **[10.113]** $\frac{a^{k+2}\cos kx - a^{k+1}\cos(k+1)x - a\cos x + 1}{a^2 - 2a\cos x + 1}$. **[10.114]** $\frac{2(2-\cos x)}{5-4\cos x}$. **[10.115]** a) $\frac{\cos\alpha - x\cos(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta + x^2}$; b) $\frac{\sin\alpha - x\sin(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta + x^2}$. **[10.116]** a) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{n+2}{2}x$; b) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{n+2}{2}x$. **[10.117]** $\frac{n}{2} - \frac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$. **[10.119]** a) $\frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2(x/2)}$; b) $\frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2(x/2)}$.

[10.120] $-3+2i$; $-1+2i$. **[10.121]** $-3+2i$; $-1+2i$. **[10.122]** $-3+2i$; $-1+3i$. **[10.123]** $-1+2i$; $-3+3i$. **[10.124]** $-1-i$; $-2-3i$. **[10.125]** $1-i$; $-2-3i$. **[10.126]** $1+i$; $-2+3i$. **[10.127]** $-1-2i$; $-3-3i$. **[10.128]** $-1+2i$; $-3+3i$. **[10.129]** а) $x = \pm 1 \pm i\sqrt{2}$; в) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x + 3)$. **[10.130]** а) $x = \frac{\pm 3 \pm i\sqrt{7}}{2}$; в) $(x^2 - 3x + 4)(x^2 + 3x + 4)$. **[10.131]** а) $x = \pm 1 \pm 4i$; в) $(x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 5)$. **[10.132]** а) $x = \frac{\pm 5 \pm i\sqrt{3}}{2}$; в) $(x^2 + 5x + 7)(x^2 - 5x + 7)$. **[10.133]** а) $x = \frac{\pm 5 \pm i\sqrt{7}}{2}$; в) $(x^2 + 5x + 8)(x^2 - 5x + 8)$. **[10.134]** а) $x = \frac{\pm 3 \pm i\sqrt{15}}{2}$; в) $(x^2 + 3x + 6)(x^2 - 3x + 6)$. **[10.135]** а) $x = \frac{\pm 3 \pm i\sqrt{19}}{2}$; в) $(x^2 + 3x + 7)(x^2 - 3x + 7)$. **[10.136]** а) $x = \pm 2 \pm i\sqrt{5}$; в) $(x^2 + 4x + 9)(x^2 - 4x + 9)$. **[10.137]** $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 4x + 20)$. **[10.138]** $(x^2 - 4x + 20)(x^2 + 4x + 5)$. **[10.139]** $(x^2 + 4x + 12)(x^2 - 4x + 6)$. **[10.140]** $(x^2 - 6x + 10)(x^2 + 6x + 90)$. **[10.141]** $(x^2 - 6x + 12)(x^2 + 6x + 36)$. **[10.142]** $(x^2 - 7x + 14)(x^2 + 7x + 98)$. **[10.143]** $(x^2 - 8x + 18)(x^2 + 8x + 144)$. **[10.144]** $(x^2 - 8x + 24)(x^2 + 8x + 48)$. **[10.145]** 1; -2; $\frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}$. **[10.147]** а) $2n$; б) n. **[10.148]** $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **[10.149]** 2. **[10.151]** 5; $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **[10.152]** -6; $-1 \pm i\sqrt{2}$. **[10.153]** 9; $3 \pm 4i$. **[10.154]** 3; -1; $1 \pm 2i$. **[10.155]** 2. **[10.156]** -1; 1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$. **[10.157]** -5. **[10.158]** 1; 3. **[10.159]** 1; 2; 3; $-\frac{3}{2}$. **[10.160]** -2; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; 1. **[10.161]** $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $-\frac{2}{3}$. **[10.162]** 3. **[10.163]** -2. **[10.164]** -3; $\frac{1}{2}$. **[10.165]** -2; 1; 4. **[10.166]** $-\frac{5}{2}$; 2 **[10.167]** $-\frac{1}{3}$; 1 **[10.168]** 1. **[10.169]** -3; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 2. **[10.170]** -1; 2. **[10.171]** -1. **[10.172]** 1; -3. **[10.173]** -1. **[10.174]** -1; 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **[10.175]** Нет решения. **[10.176]** -1. **[10.177]** -1; 1; 1; -2; $-\frac{1}{2}$. **[10.178]** 1; 5; $\frac{-9 \pm \sqrt{61}}{2}$. **[10.179]** -1; -3. **[10.180]** $-1 \pm \sqrt{3}$; $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$. **[10.181]** -2; 3. **[10.182]** 1; 2. **[10.183]** $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$. **[10.184]** $10 \pm \sqrt{85}$; $5 \pm \sqrt{10}$. **[10.185]** -1; $1/2$; 2. **[10.186]** $1/2$. **[10.187]** $2/3$; $3/2$. **[10.188]** -1; 1; $2/3$; $3/2$.

[10.189] -1; 12. **[10.190]** -3; 2. **[10.191]** $\frac{5\pm\sqrt{21}}{6}$. **[10.192]** $-5/4$; $-1/2$. **[10.193]** -1; $\frac{2}{3}$; $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{6}$. **[10.194]** $-\frac{1}{12}$; $\frac{1}{2}$. **[10.195]** 2; 3. **[10.196]** -1; 0; -2. **[10.197]** $-2\pm\sqrt{3\sqrt{2}-3}$. **[10.198]** $\pm\sqrt{\frac{15\pm\sqrt{145}}{10}}-2$ (все комбинации). **[10.199]** 0; -3; $\frac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$. **[10.200]** $\frac{-11\pm\sqrt{97}}{6}$. **[10.201]** -8; $-\frac{15}{2}$; $\frac{-35\pm\sqrt{265}}{4}$. **[10.202]** -6; -4; $\frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$. **[10.203]** 2; -3. **[10.204]** $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{2}$. **[10.205]** 0; -2. **[10.206]** -1; 9; $\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$. **[10.207]** 1/4; 2. **[10.208]** $\frac{-11\pm\sqrt{97}}{6}$. **[10.209]** $\frac{-11\pm\sqrt{97}}{6}$. **[10.210]** -1; 12. **[10.211]** Нет решения. **[10.212]** 1; 1; $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$. **[10.213]** 3; 2/3. **[10.214]** 2; 3. **[10.215]** $\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$; система относ. x и u, где $u=\frac{5x}{x+5}$. **[10.216]** $1\pm\sqrt{19}$. **[10.217]** $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\pm\frac{3\sqrt{11}}{11}$; новые переменные $u=\frac{x+1}{x}$; $v=\frac{x-1}{x}$. **[10.218]** x^2-x+2. **[10.219]** x^2-x+3. **[10.220]** x^2-x+4. **[10.221]** x^2-x+1. **[10.222]** x^2+2x+3. **[10.223]** x^2+2x+2. **[10.224]** 3/2; $-2/5$. **[10.225]** $-3/4$; 1/5. **[10.226]** $-3/4$; 1/5. **[10.227]** 3/4; $-1/5$. **[10.228]** $-5/2$; 2/3. **[10.229]** $a=-6$. **[10.230]** -2. **[10.231]** -2. **[10.232a]** $a=-1$; $a=-\frac{1}{8}$. **[10.232b]** $a=1$; $a=-\frac{3}{8}$. **[10.232c]** $a=1$; $a=-2$. **[10.232d]** $a=-1$; $a=-\frac{1}{4}$. **[10.233a]** $a=\frac{3}{16}$, $x=-\frac{1}{2}$; $a=\frac{3}{2}$, $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}$, $x_3=-2$; $a=\frac{297}{128}$, $x=-\frac{1}{4}$. **[10.233b]** $c=\frac{3}{8}$, $x=-2$; $c=3$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{11}$, $x_3=-\frac{1}{2}$; $c=\frac{297}{64}$, $x=-4$. **[10.233c]** $b=\frac{3}{8}$, $x=-\frac{1}{2}$; $b=1$, $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_3=2$; $b=\frac{361}{64}$, $x=-\frac{1}{4}$. **[10.233d]** $a=\frac{3}{16}$, $x=-2$; $a=\frac{1}{2}$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$, $x_3=\frac{1}{2}$; $a=\frac{361}{128}$, $x=-4$. **[10.234]** $a=2$; $b=4$; $c=64$. **[10.235]** $(x^2-x+2)^2$. **[10.236]** $(x^2-x+3)^2$. **[10.237]** $(x^2-x+1)^2$. **[10.238]** $(x^2-3x+4)^2$. **[10.239]** $(x^2-5x+8)^2$. **[10.240]** 1 при $a=11$; -1 при $a=-5$. **[10.241]** $q\neq 0$; $3125q+256p^5=0$. **[10.242]** $\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{2}+x$.

Всем правит случай. Знать бы еще, кто правит случаем.

Станислав Ежи Лец

Глава 11

Комбинаторика и вероятность

11.1. Простейшая комбинаторика

11.1. Сколько существует различных положений, в которых могут находиться 6 переключателей, если каждый из них может быть включен или выключен?

11.2. У одного человека есть 7 книг, а у другого – 9. Сколькими способами они могут обменять друг с другом по две книги?

11.3. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если имеются материалы пяти различных цветов? Ответить на этот вопрос, если одна из полос должна быть красной.

11.4. 5 девушек и 3 юношей должны быть разбиты на две команды по 4 человека в каждой. Сколькими способами это можно сделать, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

11.5. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами их можно расположить в списке ораторов, если Б не должен выступать до того, как выступит А?

11.6. Имеется 5 бычков красной породы, 4 – пестрой и 7 – черной. Наудачу отбирают двух бычков. Сколько существует способов выбора: а) двух бычков одной породы; б) двух бычков разных пород?

11.7. В аудитории 4 двери. Сколькими способами студент может войти в аудиторию через одну дверь, а выйти через другую?

11.8. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе не повторяются ?

11.9. На 5 сотрудников выделяют 3 путевки в дома отдыха. Сколькими способами это можно сделать, если (а) все путевки различные; (б) все путевки одинаковые ?

11.10. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования ?

11.11. Сколько различных семизначных чисел можно составить, используя в каждом числе три раза цифру 2, и по два раза – цифры 3 и 5.

11.12. Имеется 6 различных флагов. На флагштоке поднимается сигнал, состоящий не менее чем из двух флагов. Сколько различных сигналов можно поднять на флагштоке (порядок флагов учитывается)?

11.13'. Сколькими способами можно разделить 20 тетрадей между тремя учениками (учитывается только количество тетрадей, полученных каждым из учеников)?

11.14'. В оранжерее имеются цветы 10 наименований. Сколькими способами можно составить букет из 20 цветов ?

11.2. Классическая вероятность

(Многие задачи этого раздела можно решать также через условную вероятность.)

11.15. Игральная кость подбрасывается 10 раз. С какой вероятностью 6 очков выпадут 6 раз?

11.16a. В партии из 10 деталей 5 хороших и 5 бракованных. Случайно выбирают 6 деталей. С какой вероятностью из них 2 бракованных?

11.16b. В партии из 8 изделий 2 бракованных. Наудачу берут 3 изделия. С какой вероятностью среди них будет одно бракованное ?

11.16c. В партии из 8 изделий 3 бракованных. Наудачу берут 4 изделия. С какой вероятностью среди них все будут годными ?

11.17a. Подсчитать вероятность того, что в наудачу набранном телефонном номере, состоящем из четырех цифр, все цифры окажутся различными ?

11.17b. Подсчитать вероятность того, что в наудачу выбранном телефонном номере, состоящем из 5 цифр, все цифры окажутся различными? (Предполагается наличие произвольного номера, в частности состоящего из нулей).

11.18. Имеется 9 початков кукурузы, из них 5 початков содержат по 16 рядов зерен, остальные – по 18 рядов. Найти вероятность того, что взятые наугад три початка содержат одинаковое число зерен.

11.19. В бригаде работают 9 мужчин и 5 женщин. Наудачу назначают смену из 4 человек. Какова вероятность того, что среди них окажется: а) не менее трех женщин; б) хотя бы один мужчина.

11.20a. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д выбирают и выкладывают в ряд три карточки. С какой вероятностью получится слово ДВА?

11.20b. Из букв ИНТЕГРАЛ случайно извлекают и раскладывают в ряд 4 буквы. Какова вероятность получения слова ИГРА ?

11.20c. Из букв МОЛОТОК случайно извлекают и раскладывают в ряд 3 буквы. Какова вероятность получения слова КОМ ?

11.21. Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наудачу вынуты три шара. Найти вероятность того, что (а) все шары будут белые; (б) белых шаров будет не менее двух; (в) шары будут одного цвета; (г) будут два белых шара и один черный.

11.22. Из 80 учащихся 10 отличников. Случайным образом они разбиты на две группы по 40 человек. С какой вероятностью в каждой группе оказалось по 5 отличников ?

11.23. 10 человек садятся на десятиместную скамейку. С какой вероятностью два определенных человека окажутся рядом?

11.24. 10 человек садятся на десятиместную скамейку. С какой вероятностью три определенных человека окажутся сидящими рядом?

11.25. Из 80 учащихся 10 отличников. Случайным образом они разбиты на две группы по 40 человек. С какой вероятностью в каждой группе оказалось по 5 отличников ?

11.26. Имеется 6 видов минеральных удобрений. Случайным образом применяются какие-то три из них. Какова вероятность того, что в этой тройке одновременно окажутся удобрения А и Б ?

11.27a. Из 10 рабочих, из которых 6 мужчин и 4 женщины, выбирают случайно трех человек. С какой вероятностью мужчин в этой тройке будет больше, чем женщин ?

11.27b. Группа студентов из 5 юношей и 5 девушек выбирает по жребию хозяйственную команду в составе четырех человек. Какова вероятность того, что в составе этой команды окажутся два юноши и две девушки?

11.28. На книжной полке расставлены 5 книг по истории и 4 книги по биологии. Какова вероятность того, что какие-нибудь две книги по одному предмету окажутся рядом ?

11.29. 12 спортсменов должны разделиться по жребию на две команды по 6 человек. С какой вероятностью двое друзей окажутся в одной команде ?

11.30. В лотерее 100 билетов, из них 40 выигрышных. С какой вероятностью из трех билетов: (а) ровно один выигрышный; (б) все три выигрышные ?

11.31. В бассейне содержится 8 лещей и 12 карпов. Какова вероятность того, что из пяти выловленных рыб две окажутся лещами ?

11.32. В пакете 50 колосьев пшеницы. Из них 20 колосьев содержат по 45 зерен и 30 колосьев содержат по 50 зерен. Определить вероятность того, что два взятых наугад колоса содержат одинаковое количество зерен.

11.33. Для детей имеется 12 путевок в оздоровительный лагерь, 8 в туристический и 5 путевок в спортивный. Какова вероятность того, что три друга вместе попадут в туристический или спортивный лагерь, если их родители по жеребьевке получили по путевке ?

11.34. В железнодорожном составе 15 вагонов, из них 4 с рожью, 6 с пшеницей и 5 с ячменем. Случайно разгружены три вагона. Найти вероятность того, что из них не менее двух – с пшеницей.

11.35. В хозяйстве имеется 2 машины грузоподъемностью 1.5 тонны, 5 машин грузоподъемностью 2 тонны и 3 машины грузоподъемностью по 3 тонны. Случайно посылаются две свободные машины. С какой вероятностью они смогут забрать груз: (а) 6 тонн; (б) 5 тонн ?

11.36. Группа из 25 работников разбита на 3 бригады – по 6, 9 и 10 человек. С какой вероятностью определенных три человека попадут в одну бригаду?

11.37. Для некоторой местности среднее число ясных дней в июле равно 25. Найти вероятность того, что 1 и 2 июля 2004 года будут в этой местности ясными.

11.38a. Студент пришел на экзамен, зная 20 вопросов из 25, положенных по программе. Экзаменатор задал три вопроса. С какой вероятностью студент ответил на все три?

11.38b. Студент знает 9 из 17 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором 3 вопроса.

11.39. На полке 20 коробок с обувью, из них 12 коробок с обувью 25-го размера и 8 коробок с обувью 26 размера. Определить вероятность того, что из двух взятых последовательно наугад пар обуви первая будет 25-го размера, а вторая 26-го.

11.40. В пакете 30 колосьев пшеницы, из них 25 нового сорта, а 5– старого. Вынимают наудачу последовательно три колоса. С какой вероятностью первые два колоса окажутся нового сорта, а третий – старого?

11.41. В лотерее 100 билетов, из них – один выигрыш в 30 руб., три – по 15 руб., пять выигрышей по 10 руб., десять по 5 руб., и 25 выигрышей по 1 руб. Найти вероятность выигрыша не более 5 руб. по двум билетам.

11.42. Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность равна четырем; в) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что разность равна четырем; г) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение четырем.

11.43. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней а) одну; б) две; в) три.

11.44. В ящике 10 занумерованных деталей. Наудачу извлечены шесть деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся: а) деталь номер 1; б) детали с номерами 1 и 2.

11.45. В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 окрашено. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

11.46. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

11.47. В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность, что среди них ровно k стандартных.

11.48. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

11.49. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди них: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в). хотя бы одно окрашенное изделие.

11.3. Действия с вероятностями

11.50. Игральную кость подбрасывают до первого появления грани с 6 очками. С какой вероятностью это произойдет на n-м ходу?

11.51. Производительности трех станков, обрабатывающих одинаковые детали, относятся как 1:3:6. Из очень большой нерассортированной партии обработанных деталей взяты наудачу две. Найти вероятности: a) что одна из двух взятых деталей обработана на третьем станке; b) что обе взятые детали обработаны на одном станке.

11.52. Имеется три пакета с зернами кукурузы: в первом пакете 10 зерен, из них 8 высшей категории, во втором 9 зерен, из 5 высшей категории, в третьем 11, из них 3 высшей категории. Наудачу берут по одному зерну из каждого пакета. Найти вероятность того, что все три зерна окажутся высшей категории.

11.53. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0.38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0.8.

11.54. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0.9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

11.55. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0.4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

11.56. Из партии изделий товаровед выбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется первого сорта, равна 0.8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

11.57. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно, какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь..

11.58. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0.6, 0.7, 0.8. Найти вероятности того, что безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента

11.59. Вероятности того, что нужная сборщику деталь найдется в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0.6; 0.7; 0.8; 0.9. Найти вероятности того, что деталь найдется: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

11.60. Брошены три игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) на каждой из выпавших граней появится пять очков; б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

11.61. Брошены три игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) на двух выпавших гранях появится одно очко, а не третьей грани – другое число очков; б) на двух выпавших гранях появится одинаковое число очков, а на третьей грани – другое число очков; в) на всех выпавших гранях появится разное число очков.

11.62a. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0.3, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится шесть очков?

11.62b. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0.8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0.4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

11.63a. В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятности следующих событий: а) последовательно появятся шары с номерами 1, 4, 5; б) извлеченные шары будут иметь номера 1, 4, 5 независимо от того, в каком порядке они появились.

11.63b. В мешочке содержатся 10 одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наудачу извлекают по одному три кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3, если кубики извлекаются: а) без возвращения; б) с возвращением.

11.64. Найти вероятность $P(A)$, если известно, что $P(AB) = 0.72$; $P(A\overline{B}) = 0.18$.

11.65. Найти вероятность $P(A\bar{B})$ по данным вероятностям: $P(A) = a$; $P(B) = b$; $P(A + B) = c$.

11.66. Найти вероятность $P(\overline{A}\ \overline{B})$ по данным вероятностям: $P(A) = a$; $P(B) = b$; $P(A + B) = c$.

11.67. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0.1; 0.15; 0.2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

11.68. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0.3; 0.4; 0.6; 0.7.

11.69. Вероятность успешного выполнения упражнения для каждого из спортсменов равна 0.5. Спортсмены выполняют упражнение по очереди, причем каждый делает по две попытки. Выполнивший упражнение первым получает приз. Найти вероятность, что кто-нибудь из спортсменов получит приз.

11.70. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0.875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

11.71. Отрезок AB разделен точкой C в отношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C и две правее.

11.72. Отрезок разделен на четыре равные части. На этот отрезок наудачу брошены восемь точек. Найти вероятность того, что на каждую из частей отрезка попадет по две точки.

11.73. Найти вероятность, что событие A появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0.4.

11.74. Играют два равносильных шахматиста. Что вероятнее для первого из них: выиграть две партии из четырех или три партии из шести?

11.75. Сколько нужно поставить дублирующих приборов с той же надежностью 0.3, что и основной, чтобы надежность системы приборов была не ниже заданной величины 0.98?

11.76. Вероятность совершения покупки первым покупателем равна 0.9 а вторым - 0.6. Какова вероятность того, что будет совершена хотя бы одна покупка, если они совершаются независимо друг от друга?

11.77. Покупатель проходит мимо 4 трех расположенных подряд стеллажей с товарами и совершает или не совершает покупку. Вероятность покупки товара на первом стеллаже 0.6 и уменьшается на 0.1 при каждом последующем стеллаже. Какова вероятность получить ровно две покупки?

11.78. В городе имеется четыре коммерческих банка, оценка надежности которых 0.5; 0.7; 0.9; 0.7 соответственно. Администрацию города интересуют ответы на вопросы: а) какова вероятность того, что в течении года обанкротятся три банка; б) хотя бы один банк.

11.79. Инвестор полагает, что в следующем периоде вероятность роста акций компании A будет 0.65. Вероятность того, что цены поднимутся на акции компаний A и B равна 0.6. Вероятность роста акций хотя бы одной из этих компаний равна 0.86. Найти вероятность роста акций компании B.

11.4. Условные вероятности

11.80. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму составляет: для лыжника 0.9, для велосипедиста 0.8, для бегуна 0.75. Найти вероятность того, что вызванный наугад спортсмен выполнит квалификационную норму.

11.81. Имеется две одинаковые на вид коробки с лампочками одинакового размера. В первой коробке находится 70% лампочек мощностью 100 ватт и 30% – мощностью 75 ватт. Во второй коробке – 50% лампочек по 100 ватт и 50% – по 75 ватт. Некто взял наугад одну лампочку, она оказалась на 100 ватт. С какой вероятностью лампочка была взята из второй коробки?

11.82. В некую страну ввозится 40% телевизоров японского производства, и каждый такой телевизор работает без отказов два года с вероятностью 0.95. Остальные телевизоры – китайского производства, и его надежность за два года равна 0.7. Купленный телевизор проработал безотказно два года. С какой вероятностью он японский?

11.83. Имеется три одинаковых на вид пакета. В первом содержится 20 семян, из них 15 здоровых; во втором – 30 семян, из них 24 здоровых; в третьем 10 семян, из них 6 здоровых. Найти вероятность того, что наудачу извлеченное семя из наудачу выбранного пакета будет здоровым.

11.84. У сборщика две коробки деталей. В первой коробке 10 деталей, из них 9 стандартных; во второй коробке 15 деталей, из них 5 стандартных. Сборщик берет наудачу по одной детали из каждой коробки. Найти вероятность того, что из этих двух деталей хотя бы одна окажется стандартной.

11.85. Из урны, содержащей один белый и три черных шара, переложен один шар во вторую урну, где до того были три белых шара и один черный. Потом из второй урны вынимается один шар. Какова вероятность, что он белый?

11.86. В пункте проката имеются 10 телевизоров, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0.9 и 5 телевизоров с аналогичной вероятностью 0.95. Найти вероятность того, что 2 телевизора, взятые наугад в этом пункте проката, будут исправно работать в течение месяца.

11.87. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а потом из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что он белый.

11.88. В каждой из трех урн находится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

11.89. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей высшего качества, а второй – 84% . Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась высшего качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

11.90. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин как 3:2. Вероятность того, что грузовая машина будет заправляться на этой бензоколонке, равна 0.1; для легковой автомашины эта вероятность равна 0.2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. С какой вероятностью эта машина грузовая?

11.91. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 30% — с заболеванием L, 20% — с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0.7, для болезней L и M эти вероятности равны соответственно 0.8 и 0.9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K

11.92. Имеется три партии деталей – по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая тоже оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали извлекались из третьей партии.

11.93a. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны 0.4, 0.3 и 0.5.

11.93b. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками равны соответственно 0.6, 0.5 и 0.4.

11.93c. Два из трех независимо работающих элементов устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов равны соответственно 0.2, 0.4 и 0.3.

11.94. Имеется две партии изделий по 15 и 14 штук, причем в первой партии одно изделие бракованное, а во второй партии два изделия бракованные. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. а) Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии. б) Если извлеченное из второй партии изделие оказалось бракованным, то с какой вероятностью из первой партии извлекалось бракованное изделие?

11.95. В пирамиде 11 винтовок, 6 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 13/50; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 9/50. Найти вероятность того,что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

11.5. Геометрическая вероятность

11.96. Отрезок разделен на три равные части. На этот отрезок наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что на каждую из частей отрезка попадает по одной точке.

11.97. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка B(x). Найти вероятность того. что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую, чем 1/3.

11.98. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса r, причем $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадратов.

11.99. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: точка B с координатой x и C с координатой y, причем $y \geqslant x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше длины отрезка OB.

11.100. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки B с координатой x и C с координатой y, причем $y \geqslant x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше $L/2$.

11.101'. (Задача Бюффона). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2L$, причем $L < a$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь из прямых.

11.102. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки B с координатой x и C с координатой y. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно составить треугольник.

11.103. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью 2T. Моменты поступления сигналов независимы друг от друга. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 2t (где t<T). Найти вероятность того, что сигнализатор сработает, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

11.104. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное y/x не больше двух.

11.105. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x + y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0.09.

11.106. Два студента условились встретиться в определенном месте между 13 и 15 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течении 1 часа, после чего уходит. (Уходит также, если уже наступило 15 час. дня). Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 13 до 15 часов).