11.97. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка B(x). Найти вероятность того. что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую, чем 1/3.

11.98. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса r, причем $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадратов.

11.99. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: точка B с координатой x и C с координатой y, причем $y \geqslant x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше длины отрезка OB.

11.100. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки B с координатой x и C с координатой y, причем $y \geqslant x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше $L/2$.

11.101'. (Задача Бюффона). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2L$, причем $L < a$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь из прямых.

11.102. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки B с координатой x и C с координатой y. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно составить треугольник.

11.103. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью 2T. Моменты поступления сигналов независимы друг от друга. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 2t (где t<T). Найти вероятность того, что сигнализатор сработает, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

11.104. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное y/x не больше двух.

11.105. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x + y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0.09.

11.106. Два студента условились встретиться в определенном месте между 13 и 15 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течении 1 часа, после чего уходит. (Уходит также, если уже наступило 15 час. дня). Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 13 до 15 часов).

11.107. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше $5/2$, а частное x/y не больше $3/2$.

11.6. Ответы

[11.1] 2^6. **[11.2]** $C_7^2 \cdot C_9^2 = 756$. **[11.3]** $A_5^3 = 60$; $3 \cdot A_4^2 = 36$. **[11.4]** $C_3^1 \cdot C_5^3 = 30$. **[11.5]** $\frac{5!}{2} = 60$. **[11.6]** 37; 83. **[11.7]** 12. **[11.8]** $5! = 120$. **[11.9]** 60; 10. **[11.10]** $3 \cdot C_{30}^3$. **[11.11]** $\frac{7!}{2!2!3!} = 210$. **[11.12]** 28. **[11.13]** $C_{22}^{20} = 231$. **[11.14]** $C_2^{20}9 = 10015005$. **[11.15]** $C_{10}^6 \cdot 5^4/6^{10}$. **[11.16a]** 5/21. **[11.16b]** $C_2^1 \cdot C_6^2/C_8^3 = \frac{15}{28} \approx 0.536$. **[11.16c]** $\frac{C_5^4}{C_8^4} \approx 0.071$. **[11.17a]** $\frac{A_{10}^4}{10^4} = 0.504$. **[11.17a]** $\frac{189}{625}$. **[11.18]** $\frac{C_5^3+C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{6}$. **[11.19]** а) $\frac{95}{1001} \approx 0.095$; б) $\frac{996}{1001} \approx 0.996$. **[11.20a]** $\frac{1}{A_5^3} \approx 0.017$. **[11.20b]** $\frac{1}{A_8^4} \approx 0.00059$. **[11.20c]** $\frac{3}{A_7^3} = \frac{1}{70}$. **[11.21]** $\frac{C_5^3}{C_8^3} = 0.179$; $\frac{C_5^2 \cdot C_3^1 + C_5^3}{C_8^3} \approx 0.714$; $\frac{C_5^3+C_3^3}{C_8^3} \approx 0.196$; $\frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_8^3} \approx 0.535$. **[11.22]** $\frac{C_{10}^5 \cdot C_{70}^{35}}{C_{80}^{40}}$. **[11.23]** 0.2. **[11.24]** $\frac{1}{15} \approx 0.067$. **[11.25]** $\frac{C_{10}^5 \cdot C_{70}^{35}}{C_{80}^{40}}$. **[11.26]** $\frac{C_4^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} = 0.2$. **[11.27a]** $\frac{C_6^2 \cdot C_4^1 + C_6^3}{C_{10}^3} \approx 0.667$. **[11.27b]** $\frac{10}{21}$. **[11.28]** $1 - \frac{2 \cdot 5! \cdot 4!}{9!} \approx 0.984$. **[11.29]** $\frac{2 \cdot C_{10}^4}{C_{12}^6} \approx 0.455$. **[11.30]** $\frac{C_{40}^1 \cdot C_{60}^2}{C_{100}^3} \approx 0.438$; $\frac{C_{40}^3}{C_{100}^3} \approx 0.061$. **[11.31]** 0.47; 0.38; 0.53. **[11.32]** $\frac{C_{20}^2+C_{30}^2}{C_{50}^2} = \frac{38+87}{245} = \frac{25}{49} \approx 0.510$. **[11.33]** $\frac{33}{1150}$. **[11.34]** $\frac{C_6^2 \cdot C_9^1 + C_6^3}{C_{15}^3}$. **[11.35]** $\frac{C_3^2}{C_{10}^2} \approx 0.067$; $\frac{C_3^2 + C_3^1 \cdot C_5^1}{C_{10}^2} = 0.4$. **[11.36]** $\frac{C_6^3+C_9^3+C_{10}^3}{C_{25}^3} = \frac{56}{575} \approx 0.097$. **[11.37]** 20/31. **[11.38a]** 0.5. **[11.38b]** 0.123529. **[11.39]** 24/95. **[11.40]** $25/203 \approx 0.123$. **[11.41]** 5/36. **[11.42]** 1/6; 1/18; 1/2; 1/18. **[11.43]** 0.384; 0.096; 0.008. **[11.44]** 0.6; 1/3. **[11.45]** $C_{10}^3/C_{15}^3 = 24/91$. **[11.46]** $C_{90}^4/C_{100}^4 \approx 0.65$; $C_{10}^4/C_{100}^4 \approx 0.00005$. **[11.47]** $C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}/C_N^m$. **[11.48]** 14/55.

[11.49] 0.6; 0.3; 0.9. **[11.50]** $\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. **[11.51]** 0.24; 0.46. **[11.52]** 4/33. **[11.53]** 0.7. **[11.54]** 0.18. **[11.55]** 0.432. **[11.56]** 0.384. **[11.57]** 2/3; 1/3. **[11.58]** 0.184; 0.452; 0.336. **[11.59]** 0.5976; 0.9596. **[11.60]** 1/216; 1/36. **[11.61]** 5/72; 5/12; 5/9. **[11.62a]** $\geqslant 7$. **[11.62b]** $\geqslant 5$. **[11.63a]** 1/60; 1/10. **[11.63b]** 1/720; 1/1000. **[11.64]** 0.9. **[11.65]** $c - b$. **[11.66]** $1 - c$. **[11.67]** 0.388. **[11.68]** 0.9496. **[11.69]** $1 - 0.5^4 = 0.9375$. **[11.70]** 0.5. **[11.71]** 8/27. **[11.72]** $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot (1/4)^8 = \frac{315}{8192}$. **[11.73]** 0.1792. **[11.74]** Две из четырех. **[11.75]** 11. **[11.76]** 0.96. **[11.77]** 0.38. **[11.78]** a) 0.066; b) 0.7795. **[11.79]** 0.81. **[11.80]** 0.86. **[11.81]** 0.416. **[11.82]** 0.475. **[11.83]** 43/60. **[11.84]** 14/15. **[11.85]** 0.65. **[11.86]** 0.84024. **[11.87]** 0.5. **[11.88]** 0.4. **[11.89]** 10/17. **[11.90]** 3/7. **[11.91]** 5/11. **[11.92]** 4/29. **[11.93a]** 20/29. **[11.93b]** 10/19. **[11.93c]** 14/47. **[11.94]** $31/225 = 0.1378$; $2/31 \approx 0.09677$. **[11.95]** $123/550 \approx 0.2236$. **[11.96]** 2/9. **[11.97]** 1/3. **[11.98]** $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$. **[11.99]** 1/2. **[11.100]** 3/4. **[11.101]** $\frac{2L}{\pi a}$. **[11.102]** 1/4. **[11.103]** $\frac{t(2T-t)}{T^2}$. **[11.104]** $\frac{1+3\ln 2}{8} \approx 0.38$. **[11.105]** $0.1 + 0.09\ln 9 \approx 0.2$. **[11.106]** 0.5556. **[11.107]** 0.9480.

Математика - это вид умственной деятельности, а не свод точных знаний.

Г.Вейль

Глава 12

Параметры

12.1. Рациональные

12.1 [Потапов]. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$ax > \frac{1}{x}.$$

12.2 [Потапов]. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\frac{a}{x+1} \geqslant -1.$$

12.3 [Потапов]. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\frac{x-a}{x+2a} > 0.$$

12.4 [Потапов]. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$x - 2\left(1 - \frac{1}{a}\right) < \frac{2(x+1)}{3a}.$$

12.5 [Потапов]. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\frac{(a-1)x + a + 1}{x-1} > 0.$$

12.6a [СУНЦ НГУ, 2002]. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-3)x \leqslant 1 - a$ имеет решения и каждое решение удовлетворяет условию $|x| \geqslant 2$.

12.6b [СУНЦ НГУ, 2002]. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-3)x \geqslant a - 1$ имеет решения и каждое решение удовлетворяет условию $|x| \geqslant 3$.

12.6c [СУНЦ НГУ, 2002]. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-1)x \geqslant a + 1$ имеет решения и каждое решение удовлетворяет условию $|x| \geqslant 2$.

12.6d [СУНЦ НГУ, 2002]. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-4)x \leqslant 2-a$ имеет решения и каждое решение удовлетворяет условию $|x| \geqslant 3$.

12.7’ [МГУ, почв, 1993]. Найдите все действительные числа a, при которых неравенство $x + \dfrac{7a^2-a-2}{x-a} < -7a$ не имеет решений x, больших 1.

12.8’ [ЦыпПин]. Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a} < 0$ выполняется для таких x, что $1 \leqslant x \leqslant 2$.

12.9’ [МГУ, геол, 1998]. При каких значениях a уравнение

$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

имеет хотя бы одно решение?

12.10 [НГУ, МФ, 2002]. Найти все пары чисел $(a;b)$, при которых функция $f(x) = \dfrac{(a+2b)x+a+b}{ax+b}$ постоянна в области определения.

12.11 [МГУ, ВМК, 2002]. При каких значениях параметра b уравнение $b^4x + b^2 + (2+\sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b+\sqrt{2}) + 4x$ имеет бесконечно много корней?

12.12. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x+a}{x+1} + \dfrac{a-3x}{x-3} = 2$ имеет одно решение?

12.13. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} 3(a-5x) < 1+x, \\ 2-x/2 > 3+5(x-a) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

12.2. Модули

12.14a [Вавилов-2]. Для каждого значения a найти все x, удовлетворяющие условию $|x+3| - a|x-1| = 4$.

12.14b [Вавилов-2]. Для каждого значения a найти все x, удовлетворяющие условию $|x-2| + a|x+3| = 5$.

12.14c [Вавилов-2]. Для каждого значения a найти все x, удовлетворяющие условию $3|x-2| - a|2x+3| = 21/2$.

12.15 [Вавилов-2]. При всех a решить неравенство: $|x+2a| < \dfrac{8a^2}{|x-2a|}$.

12.16 [Вавилов-2]. При всех a решить неравенство:

$$|x-a|-2a>|x-3a|.$$

12.17 [Вавилов-2]. При всех a решить неравенство: $|1+x|\leqslant ax$.

12.18 [Вавилов-2]. При всех a решить неравенство: $|x-1|\geqslant ax$.

12.19 [Вавилов-2]. При всех a решить неравенство: $|ax|\geqslant 1+x$.

12.20 [Вавилов-2]. При всех a решить неравенство:

$$2|x-a|<2ax-x^2-2.$$

12.21 [Вавилов-2]. При всех a решить неравенство: $a+\dfrac{4a^2}{|x-2a|}\geqslant 0$.

12.22 [Вавилов-2]. При всех a решить неравенство: $|1-|x||<a-x$.

12.23a [НГУ, МФ, 1989]. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|a-2x|+1=|x+3|$ имеет единственное решение.

12.23b [НГУ, МФ, 1989]. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|x+a|+|2x-3|=3$ имеет единственное решение.

12.24a [Вавилов-2]. Найти все значения a, при которых уравнение имеет единственный корень: $|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$.

12.24b [Вавилов-2]. Найти все значения a, при которых уравнение имеет единственный корень: $|(a+1)x-2|=(1+a)x^2-2ax+2$.

12.25a [Вавилов-2]. Найти все значения a, при которых уравнение имеет три различных корня. Найти эти корни: $x-a=2|2|x|-a^2|$.

12.25b [Вавилов-2]. Найти все значения a, при которых уравнение имеет три различных корня. Найти эти корни: $x-a/2=4|4|x|-a^2|$.

12.25c [Вавилов-2]. Найти все значения a, при которых уравнение имеет три различных корня. Найти эти корни: $x-a/3=9|9|x|-a^2|$.

12.26a [Вавилов-2]. Найти все значения a, при которых уравнение имеет ровно два различных корня: $x|x+2a|+1-a=0$.

12.26b [Вавилов-2]. Найти все значения a, при которых уравнение имеет ровно два различных корня: $x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$.

12.27a' [Вавилов-2]. Найти все значения a, при которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений:

$$\begin{cases}|x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0,\\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0.\end{cases}$$

12.27b' [Вавилов-2]. Найти все значения a, при которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений:

$$\begin{cases}|x^2-7x+6|+x^2+5x+6-12|x|=0,\\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0.\end{cases}$$

12.28a [МГУ, экон, 1977]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

12.28b [МГУ, экон, 1977]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $2>|x+a|+x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

12.28c [МГУ, экон, 1977]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2<4-|x+a|$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

12.28d [МГУ, экон, 1977]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2+|x-a|<1$ имеет хотя бы одно положительное решение.

12.29 [ЦыпПин]**.** Решить уравнение $|x+3|-a|x-1|=4$ и найти, при каких значениях a оно имеет два решения.

12.30 [проб. ЕГЭ, 2013]**.** Найдите все значения a, при которых график функции $f(x)=x^2-|x^2+2x-3|-a$ пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

12.31 [Ларин, 2014]**.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $5|x-3a|+|x-a^2|+4x=a$ не имеет решений.

12.32 [Ларин, 2014]**.** При каких значениях параметра a уравнение

$$|x|+\left|\frac{x+1}{3x-1}\right|=a$$

имеет ровно три решения?

12.3. Квадратный трехчлен

12.33a. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2-x+3=0$ имеет единственное решение?

12.33b. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2-4x+a+3=0$ имеет более одного корня?

12.33c. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-2)x^2+(4-2a)x+3=0$$

имеет единственное решение?

12.34'. При каких значениях параметра a уравнения $x^2-a=0$ и $\sqrt{x}-a=0$ равносильны?

12.35a. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(2-m)x-m-3=0$ наименьшая?

12.35b. При каких значениях параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (m-1)x + m^2 - 1.5 = 0$ наибольшая?

12.36. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a^2 - 6a + 8)x^2 + (a^2 - 4)x + (10 - 3a - a^2) = 0$$

имеет более двух корней?

12.37. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$$

имеет три корня?

12.38. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(a-2)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$$

имеет два положительных корня.

12.39. При каких значениях параметра b уравнение

$$\frac{x^2 - (3b-1)x + 2b^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$$

имеет одно решение?

12.40. При каких значениях параметра a число 2 находится между корнями уравнения $x^2 + (4a+5)x + 3 - 2a = 0$?

12.41. При каких значениях параметра a уравнение

$$a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9 = 0$$

имеет более одного корня?

12.42. Найдите все значения параметра p, для которых неравенство $px^2 - 4x + 3p + 1 > 0$ выполняется при всех положительных x.

12.43. При каких значениях параметра a все корни уравнения

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$$

удовлетворяют условию $|x| < 1$?

12.44. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)x^2 - (2a+1)x + 2 + 5a = 0$$

имеет два корня, большие 1?

12.45. Числа x, y и a таковы, что $\begin{cases} x + y = a - 1, \\ xy = a^2 - 7a + 14. \end{cases}$ При каких значениях a сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение?

12.46. Найдите все значения параметра h, при которых уравнение $x^4 + (h-1)x^3 + x^2 + (h-1)x + 1 = 0$ имеет не менее двух различных отрицательных корней.

12.47 [ЦыпПин]**.** При каких действительных значениях m неравенство $x^2 + mx + m^2 + 6m < 0$ выполняется для любых $x \in (1; 2)$?

12.48 [ЦыпПин]**.** Найти все значения параметра m, для которых неравенство $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ выполнено при всех $x > 0$.

12.49' [ЦыпПин]**.** При каких действительных m из неравенства $x^2 - (3m + 1)x + m > 0$ следует неравенство $x > 1$?

12.50' [ЦыпПин]**.** Найти все значения параметра a, при которых из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следуют неравенства $0 < x < 1$.

12.51' [ЦыпПин]**.** Найти все значения параметра a, при которых из неравенств $0 \leqslant x \leqslant 1$ следует неравенство $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2 \leqslant 0$.

12.52' [ЦыпПин]**.** Найти все значения параметра a, для которых справедливо неравенство $2x^2 - 4a^2x - a^2 + 1 > 0$ при любых x таких, что $|x| < 1$.

12.53a [МГУ, экон, 1978]**.** Найти все значения параметра b, при каждом из которых неравенство $\cos^2 x + 2b \sin x - 2b < b^2 - 4$ выполняется для любого числа x.

12.53b [МГУ, экон, 1978]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a \cos x > 2$ выполняется для любого числа x.

12.53c [МГУ, экон, 1978]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a^2 + a - \sin^2 x - 2a \cos x > 1$ выполняется для любого числа x.

12.53d [МГУ, экон, 1978]**.** Найти все значения параметра b, при каждом из которых неравенство $\cos^2 x + 2b \sin x - b^2 < b - 2$ выполняется для любого числа x.

12.54a' [МГУ, псих, 1981]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трехчлена $4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a + 2)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2$ равно 3.

12.54b' [МГУ, псих, 1981]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых наибольшее значение квадратного трехчлена $-x^2 + 2ax - (a^2 - 2a + 3)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ равно (-2).

12.54c' [МГУ, псих, 1981]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трехчлена $4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a - 1)$ на отрезке $-2 \leqslant x \leqslant 0$ равно 2.

12.54d' [МГУ, псих, 1981]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых наибольшее значение квадратного трехчлена $-x^2 + 2ax - (a^2 - 2a - 3)$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 0$ равно 2.

12.55a [МГУ, фил, 1980]**.** Найти все значения параметра a из промежутка $(-\infty; -4]$, при каждом из которых меньший из корней уравнения $x^2 + ax - 3x - 2a - 2 = 0$ принимает наименьшее значение.

12.55b [МГУ, фил, 1980]**.** Найти все значения параметра a из промежутка $[1;\infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения $x^2-6x+2ax+a-13=0$ принимает наибольшее значение.

12.56a [НГУ, МФ, 1996]**.** Найти все значения параметра p, при которых уравнение $px^2+2(p-1)x+(p-3)=0$ имеет два различных отрицательных корня.

12.56b [НГУ, МФ, 1996]**.** Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(1-p)x^2+2(p-3)x+(4-p)=0$ имеет два различных положительных корня.

12.57a* [МГУ, геол, 1977]**.** Найти все значения параметра k, при которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств $x^2+4kx+3k^2>1+2k$ и $x^2+2kx\leqslant 3k^2-8k+4$.

12.57b* [МГУ, геол, 1977]**.** Найти все значения параметра k, при каждом из которых каждое решение неравенства $x^2+3k^2-1\geqslant 2k(2x-1)$ является решением неравенства $x^2+(2x-1)k+k^2>0$.

12.57c* [МГУ, геол, 1977]**.** Найти все значения параметра k, при каждом из которых любое число является решением хотя бы одного из неравенств: $x^2+5k^2+8k>2(3kx+2)$ и $x^2+4k^2\geqslant k(4x+1)$.

12.57d* [МГУ, геол, 1977]**.** Найти все значения параметра k, при каждом из которых неравенство $\dfrac{x^2+k^2}{k(6+x)}\geqslant 1$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $-1<x<1$.

12.58a' [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(x-a)^2[a(x-a)^2-a-1]=-1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

12.58b' [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $[(x-a-1)^2-2](x-a-1)^2=a^2-1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

12.58c' [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $[(x-a)^2-2a-4](x-a)^2=-2a-3$ имеет больше отрицательных корней, чем положительных.

12.58d' [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(x+2a)^2[(x+2a)^2-a-a^4]=-a^5$ имеет больше отрицательных корней, чем положительных.

12.59a [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x^2+4x+3\leqslant a, \\ x^2-2x\leqslant 3-6a. \end{cases}$$

12.59b [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a \leqslant 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leqslant 0. \end{cases}$$

12.60a [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых решения системы неравенств образуют на числовой прямой отрезок длины 1:

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 7 + a \leqslant 0, \\ x^2 + 4x + 7 \leqslant 4a. \end{cases}$$

12.60b [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых решения системы неравенств образуют на числовой прямой отрезок длины 1:

$$\begin{cases} x^2 - 2x \leqslant a - 1, \\ x^2 - 4x \leqslant 1 - 4a. \end{cases}$$

12.61a [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств не имеет решений:

$$\begin{cases} (x - a)(ax - 2a - 3) \geqslant 0, \\ ax \geqslant 4. \end{cases}$$

12.61b [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств не имеет решений:

$$\begin{cases} ax^2 + (a - 3)x + \dfrac{2}{a} - 2a \geqslant 0, \\ ax \geqslant a^2 - 2. \end{cases}$$

12.62a [СУНЦ НГУ, 1999]**.** При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + 8x + 12 - a < 0$ имеет хоть одно решение на луче $x > -2$?

12.62b [СУНЦ НГУ, 1999]**.** При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + 6x + 10 - 2a < 0$ имеет хоть одно решение на луче $x > -4$?

12.63a [СУНЦ НГУ, 2000]**.** При каких значениях параметра a неравенство $8\sin x - a\cos 2x + 2 - 3a < 0$ выполнено хотя бы для одного x из промежутка $[0; \pi/6]$?

12.63b [СУНЦ НГУ, 2000]**.** При каких значениях параметра b неравенство $b\cos 2x + 8\cos x - 2 - 3b < 0$ выполнено хотя бы для одного x из промежутка $[\pi/3; \pi/2]$?

12.64 [МГУ, МФ, 2001]. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leqslant 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

12.65 [МГУ, соц, 2002]. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(1+a)x^2 + (1-a)x + a + 3 = 0$ имеет по крайней мере один корень и все его корни являются целыми числами.

12.66 [МГУ, геогр, 2002]. Квадратное уравнение $x^2 - 6px + q = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Числа p, x_1, x_2, q – четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите x_1 и x_2.

12.4. Радикалы

12.67 [Вавилов-2]. Для всех $a \geqslant 0$ решить неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} > x + 1$.

12.68 [Вавилов-2]. Для всех a решить неравенство $(a+1)\sqrt{2-x} < 1$.

12.69 [Вавилов-2]. Для всех a решить неравенство

$$\sqrt{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}} \leqslant \sqrt{2}.$$

12.70 [Вавилов-2]. Для всех a решить неравенство $x + \sqrt{4 - x^2} < a$.

12.71 [Вавилов-2]. Для всех a решить неравенство $\sqrt{1 - x^2} < x + a$.

12.72 [Вавилов-2]. Для всех a решить неравенство $\sqrt{\dfrac{3x+a}{x-a}} < a - 1$.

12.73 [Вавилов-2]. Для всех a решить неравенство $|x| + 1 > \sqrt{x} + a$.

12.74 [МГУ, ФФ, 2001]. Для любого значения a, решите неравенство

$$3(2x - a) + 5a\sqrt{2x - a} - 2a^2 > 0.$$

12.75 [Горн]. Решить уравнение $\sqrt[5]{a+x} - \sqrt[5]{a-x} = \sqrt[5]{2a}$.

12.76 [Горн]. Решить уравнение $\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 - x} = a + b$.

12.77 [МГУ, МФ, 2001]. Найдите все числа, которые не могут быть корнями уравнения $4\sqrt{2x^4 + x^3} = a\sqrt[4]{4 - a^4}(x + 4x^2 - 8)$ ни при каком значении a.

12.78a [СУНЦ НГУ, 2015]. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{32 - 14x - x^2} = x - a$ имеет единственное решение.

12.78b [СУНЦ НГУ, 2015]. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{28 + 12x - x^2} = x + a$ имеет единственное решение.

12.78c [СУНЦ НГУ, 2015]**.** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{20-8x-x^2}=x-a$ имеет единственное решение.

12.78d [СУНЦ НГУ, 2015]**.** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{24+10x-x^2}=x+a$ имеет единственное решение.

12.79 [Ларин, 2015]**.** Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=x^2-4|x|-ax+a$ на отрезке $[-1;3]$ не меньше, чем -5.

12.5. Линейные системы

12.80a [МГУ, экон, 1978]**.** Найти все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} bx+2y=b+2, \\ 2bx+(b+1)y=2b+4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

12.80b [МГУ, экон, 1978]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x+(9a^2-2)y=6a-2, \\ x+y=1 \end{cases}$ не имеет ни одного решения.

12.80c [МГУ, экон, 1978]**.** Найти все значения параметра c, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} -4x+cy=1+c, \\ (6+c)x+2y=3+c \end{cases}$ не имеет ни одного решения.

12.80d [МГУ, экон, 1978]**.** Найти все значения параметра d, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (2-d)x+d^2y=3d^2+2, \\ (2d-1)x+dy=d-1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

12.81 [ЦыпПин]**.** При каждом значении параметра a решить систему:

$$\begin{cases} ax+y=2, \\ x+ay=2a. \end{cases}$$

12.82a [ЦыпПин]**.** При каждом значении параметра a найти число решений системы: $\begin{cases} x+ay-1=0, \\ ax-3ay-(2a+3)=0. \end{cases}$

12.82b [ЦыпПин]**.** При каждом значении параметра a найти число решений системы: $\begin{cases} 3x+ay=5a^2, \\ 3x-ay=a^2. \end{cases}$

12.82c [ЦыпПин]. При каждом значении параметра a найти число решений системы: $\begin{cases} (a+5)x+(2a+3)y-(3a+2)=0, \\ (3a+10)x+(5a+6)y-(2a+4)=0. \end{cases}$

12.82d [ЦыпПин]. При каждом значении параметров a, b найти число решений системы: $\begin{cases} (a^2+b^2)x+(a^2-b^2)y=a^2, \\ (a+b)x+(a-b)y=a. \end{cases}$

12.83 [МГУ, био, 1970]. Числа a и b таковы, что система

$$\begin{cases} a^2x-ay=1-a, \\ bx+(3-2b)y=3+a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x=1$, $y=1$. Найти a и b.

12.84 [ЦыпПин]. При каких значениях a и b система

$$\begin{cases} a^2x-by=a^2-b, \\ bx-b^2y=2+4b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

12.85 [ЦыпПин]. Числа a, b и c таковы, что система

$$\begin{cases} ax-by=2a-b, \\ (c+1)x+cy=10-a+3b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, причем $x=1$; $y=3$ — одно из этих решений. Найти a, b и c.

12.86a [Потапов]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x-2y=a+16, \\ 3x+y=0 \end{cases}$$

удовлетворяют условиям $x>1/a$; $y>-8$.

12.86b [Потапов]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения системы уравнений

$$\begin{cases} ax-y=5, \\ 2x+3ay=7 \end{cases}$$

удовлетворяют условиям $x>0$; $y<0$.

12.87a* [НГУ, МФ, 1980]. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений

$$\begin{cases} bx+y=ac^2, \\ x+by=ac+1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

12.87b* [НГУ, МФ, 1980]. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений
$$\begin{cases} 2x + by = c^2, \\ bx + 2y = ac - 1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение?

12.87c* [НГУ, МФ, 1980]. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений
$$\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c, \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение?

12.87d* [НГУ, МФ, 1980]. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений
$$\begin{cases} x + by = ac^2 + c/2, \\ (b+1)x + 2y = c - 1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение?

12.88a' [НГУ, МФ, 1995]. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + (a+2)y = -1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x < 4$, $y < -1$.

12.88b' [НГУ, МФ, 1995]. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} (4-a)x + ay = 1, \\ ax + 2y = 1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x < -1$, $y > -4$.

12.88c' [НГУ, МФ, 1995]. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} (a+6)x - ay = 2, \\ ax - y = -1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x < 2$, $y > 3$.

12.88d' [НГУ, МФ, 1995]. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} ax + (3a-2)y = 2, \\ x + ay = 1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям: $x > -4$, $y > 2$.

12.89a [СУНЦ НГУ, 2001]**.** Найти, при каких значениях параметра α не существует ни одной пары $(x;y)$, удовлетворяющей системе уравнений

$$\begin{cases} x(\cos\alpha - 1) + y\sin\alpha = \sin 2\alpha, \\ x\sin\alpha + y(\cos\alpha + 1) = \cos 2\alpha. \end{cases}$$

12.89b [СУНЦ НГУ, 2001]**.** Найти, при каких значениях параметра α существует бесконечно много пар $(x;y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha = 2\cos 2\alpha, \\ x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha = 1 + \cos\alpha. \end{cases}$$

12.6. Нелинейные алгебраические системы

Задачи решаются: чисто алгебраическим способом, или изображением множеств на плоскости, или комбинацией этих подходов.

12.90 [МГУ, ФФ, 1981]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

12.91 [МГУ,ФФ, 1981]**.** Найти все значения параметра m, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = m, \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

12.92 [Потапов]**.** Для каждого значения параметра a определить число решений системы уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

12.93 [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} ax^2 + y = 2, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

12.94 [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

12.95a [МГУ, экон, 1977]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$ имеет два решения.

12.95b [МГУ, экон, 1977]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ xy=a-1/2 \end{cases}$ имеет два решения.

12.95c [МГУ, экон, 1977]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x-y)^2=2/3, \\ xy=5a-1/3 \end{cases}$ имеет два решения.

12.96a [МГУ, псих, 1977]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая условиям: $\begin{cases} x^2+(y+3)^2<4, \\ y=2ax^2. \end{cases}$

12.96b [МГУ, псих, 1977]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая условиям: $\begin{cases} x^2+(y-2)^2<1, \\ y=ax^2. \end{cases}$

12.96c [МГУ, псих, 1977]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая условиям: $\begin{cases} x^2-y^2>1, \\ y=ax^2+1. \end{cases}$

12.96d [МГУ, псих, 1977]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая условиям: $\begin{cases} x^2-(y-a)^2>1, \\ y=x^2+1. \end{cases}$

12.97 [Потапов]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases} x^2+xy-6y^2=0, \\ y-|ax|=0. \end{cases}$$

12.98 [Потапов]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases} x^2=(x-a)y, \\ y^2-xy=9ax. \end{cases}$$

12.99 [Потапов]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + xy + y^2 = a. \end{cases}$$

12.100 [Потапов]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} \sqrt{y} = 1/\sqrt{x}, \\ y = ax + 1. \end{cases}$$

12.101' [Потапов]. Для каждого значения параметра a определить число решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2, \\ (x^2 + y^2)^2 = 4a^2xy. \end{cases}$$

12.102a [Потапов]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x - y = a(1 + xy), \\ 2 + x + y + xy = 0. \end{cases}$$

12.102b [Потапов]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x - y = 1 + xy, \\ (y - a)x + (2a - 3)y = a. \end{cases}$$

12.102c [Потапов]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} a(x + y) - xy + 1 = 0, \\ xy - x + y = 2. \end{cases}$$

12.103' [Потапов]. При каждом значении параметра a решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^5 + y^5 = a^5. \end{cases}$$

12.104a [НГУ, МФ, 1992]. Найти все значения параметра α, при которых система уравнений $\begin{cases} |x-2\alpha+2| = y, \\ |y-\alpha+2| = x \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

12.104b [НГУ, МФ, 1992]. Найти все значения параметра α, при которых система уравнений $\begin{cases} |x+\dfrac{\alpha}{2}+1| = y, \\ |y+3\alpha-3| = x \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

12.104c [НГУ, МФ, 1992]. Найти все значения параметра α, при которых система уравнений $\begin{cases} |x+\alpha+1| = y, \\ |y+\dfrac{\alpha}{3}+1| = x \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

12.105a [НГУ, ест, 2003]. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (a+2)x^2+y^2 = 1-2a, \\ 2x^2+(a+1)y^2 = 1-a. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

12.105b [НГУ, ест, 2003]. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2x^2+(a-1)y^2 = 3-a, \\ ax^2+y^2 = 5-2a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

12.106 [Горн]. При каких a неравенство $3xy-4x^2 < a(x^2+y^2)$ имеет решения?

12.107* [Горн]. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2 = a^2, \\ xy(2x^2-a^2) = 1 \end{cases}$$

имеет решение?

12.108 [МГУ, АзАфр, 2001]. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a(x+2)+y = 3a, \\ a+2x^3 = y^3+(a+2)x^3 \end{cases}$ имеет не более двух решений.

12.109 [МГУ, АзАфр, 1998]. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4-(a-1)\sqrt{a+3}y+a^4+2a^3-9a^2-2a+8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

12.110 [пробный ЕГЭ, 2012]. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + a = 4\cos x, \\ \sqrt{y} + z^2 = a, \\ (a-2)^2 = |z^2 - 2z| + |\sin 2x| + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

12.111 [пробный ЕГЭ, 2012]. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (|x|-5)^2 + (|y|-5)^2 = 9, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

12.112 [Ларин, 2012]. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 - 4y + 37 = 5a - y^2 - 12x, \\ |x+3| = 1 - |y-3| \end{cases}$ имеет единственное решение?

12.113 [демо ЕГЭ, 2013]. Найдите значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |x-1| + 7|y| = 1, \\ x^2 + 49y^2 + 4a + 1 = 2x \end{cases}$ имеет ровно четыре решения.

12.114 [Ларин, 2015]. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + y^2 - 12y + 40} = 5, \\ y = x^2 + a \end{cases}$ имеет ровно два решения.

12.115 [Ларин, 2015]. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 1, \\ a + 3 - \sqrt{y} = \dfrac{1}{2}(a-x)^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

12.116 [Ларин, 2015]. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} \dfrac{y^3 + yx^2 - 4y}{\sqrt{x+1}} = 0, \\ y - ax = 5a + 2 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

12.117 [Ларин, 2015]. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x(xy - x^2 + 6x - 9) = y(2x + y + 3), \\ 4(y - ax) = 3(4a - 3) \end{cases}$ имеет ровно два решения.

12.7. Множества на плоскости

12.118 [МГУ, АзАфр, 2002]. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+y^2-6|x|-6|y|+17 \leqslant 0, \\ x^2+y^2-2y=a^2-1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

12.119a* [МФТИ, 1989]. На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(a;b)$ которых таковы, что система неравенств $\begin{cases} x^2+(a-b+25)x+25(a-b)>0, \\ 2x^2+(a^2+b^2-16)x-8(a^2+b^2)<0 \end{cases}$ не имеет решений. Найти площадь фигуры Φ.

12.119b* [МФТИ, 1989]. На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(a;b)$ которых таковы, что каждое решение неравенства $x^2+(a^2-3b^2)x-2a^2(a^2+3b^2) \leqslant 0$ является решением неравенства $x^2-(a^2-2b^2-15)x-(a^2+1)(2b^2+16) \leqslant 0$. Найти площадь фигуры Φ.

12.119c* [МФТИ, 1989]. На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(a;b)$ которых таковы, что система неравенств $\begin{cases} x^2+(3-a^2-b^2)x-3(a^2+b^2)<0, \\ 2x^2+(2a+2b-25)x-25(a+b)>0 \end{cases}$ не имеет решений. Найти площадь фигуры Φ.

12.119d* [МФТИ, 1989]. На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(a;b)$ которых таковы, что каждое решение неравенства $x^2-(2a^2-b^2)x-2b^2(2a^2+b^2) \leqslant 0$ является решением неравенства $x^2-(a^2-b^2+8)x-(b^2+1)(a^2+9) \leqslant 0$. Найти площадь фигуры Φ.

12.120a* [МФТИ, 1991]. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{xy}{15}} \geqslant y-2x, \\ \dfrac{x-25}{x^2+y^2-625} > \dfrac{1}{26}. \end{cases}$ Изобразить фигуру M и найти ее площадь.

12.120b* [МФТИ, 1991]. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} \sqrt{(16x^4-y^4)/6} \geqslant xy, \\ y^2+25 \geqslant 10y+x^2/4, \\ x^2+y^2+10x \leqslant 0. \end{cases}$ Изобразить фигуру M и найти ее площадь.

12.120c* [МФТИ, 1991]**.** На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} \sqrt{xy/3} \geqslant 2x - y, \\ \dfrac{y-8}{x^2+y^2-64} > \dfrac{1}{10}. \end{cases}$ Изобразить фигуру M и найти ее площадь.

12.120d*. МФТИ, 1991] На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} \sqrt{5(y^4-x^4)/6} \geqslant 2xy, \\ x^2+y^2+4y \leqslant 0, \\ y^2-16 \leqslant x^2-8x. \end{cases}$ Изобразить фигуру M и найти ее площадь.

12.121a* [МФТИ, 1991]**.** На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(a;b)$ которых удовлетворяют таковы, что система уравнений $\begin{cases} ax+(b-4)y=2, \\ (a-4)x+by=3, \\ bx-(a+6)y=3 \end{cases}$ имеет единственное решение. Изобразить фигуру Ф и составить уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку $(0;7)$ и имеет с фигурой Ф единственную общую точку.

12.121b* [МФТИ, 1991]**.** На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(a;b)$ которых удовлетворяют таковы, что система уравнений $\begin{cases} ax+4y=2, \\ bx+ay=-1, \\ (b+3)x+(a+8)y=-3 \end{cases}$ имеет решение. Изобразить фигуру Ф и составить уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку $(-6;4)$ и имеет с фигурой Ф единственную общую точку.

12.122a [СУНЦ НГУ, 2000]**.** Известно, что график функции $y = ax^2$, $a < 0$, расположен выше некоторой окружности радиуса 2 за исключением единственной общей точки – начала координат. Найти наименьшее значение параметра a. Система координат Oxy — прямоугольная.

12.122b [СУНЦ НГУ, 2000]**.** Окружность расположена выше графика функции $y = 5x^2$ за исключением единственной общей точки – начала. Найти наибольший радиус такой окружности. Система координат Oxy — прямоугольная.

12.123’ [МГУ, МФ, 1998]**.** Фигура задана на координатной плоскости системой $\begin{cases} (y^2-x^2)^2+6(y^2-x^2)-(y+x)^2+5y+7x+1>0, \\ y>1-x. \end{cases}$ Сколько интервалов на прямой $y=2-x$ образует ортогональная проекция этой фигуры на указанную прямую?

12.124’. МГУ, соц, 1998] Две кривые на плоскости $(x;y)$, заданные уравнениями $y=x^2-2x$ и $x^2/9+y^2=1$ пересекаются в четырех точках. Докажите, что:

1) существуют по крайней мере две различные параболы, каждая из которых проходит через эти четыре точки;

2) эти точки лежат на одной окружности; найдите радиус этой окружности.

12.125 [МГУ, геол, 2002]**.** При каких значениях параметра a периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy системой $\begin{cases} y\leqslant\sqrt{1-x^2}, \\ a|y|\leqslant|x| \end{cases}$ больше, чем $4+2\sqrt{2}+\dfrac{\pi}{2}$.

12.126. МФТИ, 1998] Фигура M на плоскости $(x;y)$ ограничена графиками функций $y=3e^{ax}$, $y=7-2e^{-ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y=9x+3$. Найти a и площадь фигуры M.

12.127 [Ларин, 2015]**.** Найдите все a, при каждом из которых неравенство $(x^2+y^2-3)\cdot(x^2+y^2-a)<0$ имеет ровно четыре целочисленных решения $(x;y)$.

12.128 [Ларин, 2015]**.** Найти все значения a, при каждом из которых найдется хотя бы одна пара чисел $(x;y)$. удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} 2y-x\leqslant 15, \\ y+2x\leqslant 15, \\ 4y+3x\geqslant 25, \\ x^2+y^2=a. \end{cases}$$

12.8. Алгебраические задачи

12.129a [НГУ, МФ, 1995]**.** Найти все значения параметра t, при которых в интервале $(7t, 3t-4)$ содержится хотя бы одно целое число.

12.129b [НГУ, МФ, 1995]**.** Найти все значения параметра q, при которых в интервале $(8q+5, 4q)$ содержится хотя бы одно целое число.

12.129c [НГУ, МФ, 1995]**.** Найти все значения параметра a, при которых в интервале $(3a, 6a-1)$ содержится хотя бы одно целое число.

12.130a [МГУ, геогр, 1993]**.** При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4+(a-3)x^2+(a+10)^2=0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

12.130b [МГУ, псих, 1970]**.** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^8+ax^4+1=0$ имеет ровно четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

12.130c [Ларин, 2015]**.** Найдите все значения a, при каждом из которых корни уравнения $x^4+(a-5)x^2+(a+2)^2=0$ является четырьмя последовательными членами арифметической последовательности.

12.131a [НГУ, МФ, 1985]**.** Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2-(a+3)x+2a=0,$$

причем $x_1=4x_2$. Найти a.

12.131b [НГУ, МФ, 1985]**.** Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2-(a+5)x+4a=0,$$

причем $x_1=3x_2$. Найти a.

12.132a [НГУ, МФ, 1989]**.** Определить, при каких значениях параметра a уравнение $ax^2+3x+2a^2-3=0$ имеет только целые корни.

12.132b [НГУ, МФ, 1989]**.** Определить, при каких значениях параметра a уравнение $ax^2+3x+2a^2=0$ имеет только целые корни.

12.133a [НГУ, ест, 1994]**.** Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+ax+b=0$, а (x_1-x_2) и (x_1+x_2) — корни уравнения $x^2-bx+a^2=0$. Найти числа a и b.

12.133b [НГУ, ест, 1994)]**.** Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+ax+b=0$, а $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$ — корни уравнения $x^2+bx-a=0$. Найти числа a и b.

12.134a [СУНЦ НГУ, 1995]**.** Найти, при каких значениях a числа $3+a$, $4+a$, $6-a$ могут быть длинами сторон остроугольного треугольника.

12.134b [СУНЦ НГУ, 1995]. Найти, при каких значениях a числа $2+3a$, $2+4a$, $2+5a$ могут быть длинами сторон тупоугольного треугольника.

12.135. Найдите наибольшее из значений z, при которых существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2+2y^2+z^2+xy+xz+yz=4.$$

12.136. Решите уравнение с параметром a: $x^4-2ax^2-x+a^2-a=0$.

12.137 [МГУ, геол, 1997]. При каких значениях α уравнения

$$(2x-1)\alpha^2-(x^2-x+1)\alpha-(x^3-4x^2+3)=0,$$
$$(5-3x)\alpha^2+(5x^2-5x-2)\alpha-(2x^3-8x^2+6)=0$$

не имеют общего решения?

12.138a [НГУ, ест, 1980]. Пусть x принадлежит множеству решений неравенства $x^4-4x^2+3\leqslant 0$. Каково при этом максимальное значение выражения $1+ax-x^2$?

12.138b [НГУ, ест, 1980]. Пусть x принадлежит множеству решений неравенства $(x+2)(\sqrt{x^2}-1)\leqslant 0$. Каково при этом минимальное значение выражения $x^2-4ax+3$?

12.139a' [МГУ, геол, 1979]. Найти все неотрицательные числа x, при каждом из которых из неравенств $abx\geqslant 2a+9b+x$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ следует неравенство $ab\geqslant 4$.

12.139b' [МГУ, геол, 1979]. Найти все неотрицательные числа x, при каждом из которых из неравенств $abx\geqslant 4a+7b+x$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ следует неравенство $ab\geqslant 5$.

12.139c' [МГУ, геол, 1979]. Найти все неотрицательные числа x, при каждом из которых из неравенств $abx\geqslant 5a+4b+x$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ следует неравенство $ab\geqslant 3$.

12.139d' [МГУ, геол, 1979]. Найти все неотрицательные числа x, при каждом из которых из неравенств $abx\geqslant 3a+4b+x$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ следует неравенство $ab\geqslant 2$.

12.140' [МГУ, хим, 2001]. Найдите такие значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a\geqslant 0,\\ x^3-(a+3)x^2+3ax\leqslant 0\end{cases}$ имеет единственное решение.

12.141 [МГУ, био, 1999]. Найдите все значения y, удовлетворяющие условию $y>1/2$, такие, что неравенство

$$16y^3+6y^3x-4y^3x^2-50y^2-11y^2x+10y^2x^2+$$
$$+52y+4yx-8yx^2-18+x+2x^2>0$$

выполняется при всех x из интервала $1<x<2y$.

12.142 [МГУ, псих, 1999]**.** Найдите все значения a, при каждом из которых ровно пять различных наборов натуральных чисел $(x; y; z)$ удовлетворяют системе условий $\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ a \cdot yz + a \cdot xz + a \cdot xy > xyz. \end{cases}$

12.143 [Ларин, 2014]**.** Найти все пары действительных чисел a и b, при которых уравнение $(3x - a^2 + ab - b^2)^2 + (2x^2 - a^2 - ab)^2 + x^2 + 9 = 6x$ имеет хотя бы одно решение x .

12.9. Тригонометрические

12.144a [НГУ, ест, 1984]**.** Определить, при каких значениях параметра a уравнение $(a^2 + 1)\sin^2 x + 2a^2 \sin x + 1/2 = 0$ имеет хотя бы одно решение.

12.144b [НГУ, ест, 1984]**.** Определить, при каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x + a^2 \cos x + 1 = 0$ не имеет решений.

12.145a [НГУ, МФ, 1979]**.** При каких значениях параметра a уравнение $(a+1)\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{2\operatorname{tg} x}{\cos x} + a = 0$ не имеет решений?

12.145b [НГУ, МФ, 1979]**.** Решить уравнение

$$2ab \cdot \operatorname{ctg} 3x \sin 2x + 2(a^2 + b^2)\frac{\sin 2x}{1 + 2\cos 2x} = (a^2 + b^2)\frac{\operatorname{ctg} x}{4\cos^2 x - 1}.$$

12.146 [МГУ, МФ, 1993]**.** При каких значениях a, принадлежащих интервалу $(-\pi/2; \pi/2)$, уравнение $\sqrt{2\sin(x - a) + \sqrt{3}} = \cos 6x - 1$ имеет решения?

12.147a [Горн]**.** При каких $a > 0$ неравенство $||\operatorname{tg} x - 1/2| - 1/2| \leqslant a$ выполняется для всех x, удовлетворяющих неравенству $-\pi/6 < x < \pi/6$?

12.147b [Горн]**.** Найти все значения a, для которых неравенство $||\sin x - 1/3| - 1/3| \leqslant a$ выполняется для всех x таких, что $0 \leqslant x \leqslant 2\pi/3$.

12.148a [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет единственное решение:

$$x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin a}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos a} + 36 = 0.$$

12.148b [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет единственное решение:

$$x^2 + \frac{2x}{\sqrt{\sin a}} + \frac{1}{\cos a} + 2\sqrt{2} = 0.$$

12.149 [МГУ, псих, 1971]**.** При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 3x - (a + 1/2)\sin 3x + a/2 = 0$$

имеет ровно три корня на отрезке $2\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi$?

12.150 [МГУ, МФ, 2001]**.** Можно ли подобрать числа A, B, φ, ψ так, чтобы выражение $(\sin(x - \pi/3) + 2)^2 + A\cos(x+\varphi) + B\sin(2x+\psi)$ принимало при всех x одно и то же значение C? Если да, то какие значения может принимать константа C?

12.151 [МГУ, ФФ, 2001]**.** Для каждого значения a найдите все решения уравнения $\cos 2x + 2\sin^2(x+a) + 2 - \sin a = 0$, принадлежащие промежутку $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

12.152 [МГУ, геол, 2001]**.** При каких значениях параметра $a \geqslant 1$ уравнение $\sin(4x/13)\operatorname{tg} x = 0$ имеет ровно шесть различных корней на отрезке $[2a\pi; (a^2+1)\pi]$? Укажите эти корни.

12.153 [МГУ, ФФ, 1999]**.** При каких значениях a уравнение $\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ имеет ровно одно решение на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$?

12.154 [МГУ, геогр, 1999]**.** Найдите все значения параметра a, при которых среди корней уравнения $\sin 2x + 6a\cos x - \sin x - 3a = 0$ найдутся два корня, разница между которыми равна $3\pi/2$.

12.155* [МГУ, МФ, 2001]**.** Найдите все значения k, при которых хотя бы одна общая точка графиков функций $y = -2/3 - \arcsin x$ и $y = -2/3 - 2\operatorname{arctg} kx$ имеет положительную ординату.

12.156 [МГУ, ВМК, 1998]**.** Найдите все значения параметра a, при которых существуют $(x; y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \max(2-3y, y+2) \leqslant 5, \\ \left(a^2 + \dfrac{6}{\pi}\arccos\sqrt{1-x^2} - 16 - \dfrac{2}{\pi^2}\arcsin x \cdot (\pi + 2\arcsin x)\right)^{1/2} \geqslant \\ \qquad \geqslant y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

12.157 [МГУ, почв, 1998]**.** Определите: а) при каких значениях a существует такое b, что уравнение $5\cos x + \sin x + \cos(x-b) = a$ имеет решения; б) при каких значениях a это уравнение имеет решения при любом b.

12.158 [МГУ, фил, 1998]**.** При каких значениях параметра a уравнение $\sin^2(x+6) - (a-1)\sin(x+6)\cdot\sin(\pi x) + (a-1)\sin^2(\pi x) = 0$ имеет единственное решение?

12.159 [МГУ, МФ, 2002]**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых сумма арктангенсов корней уравнения $x^2 + (1-2a)x + a - 4 = 0$ больше $\pi/4$.

12.160 [Горн]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых область значений функции $y = \dfrac{a - \cos x}{2a + \sin^2 x - 1}$ содержит отрезок $[1/5; 1/3]$.

12.161a [Ларин, 2013]**.** Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|\cos x + 2\sin x - a| = 2\cos x + \sin x + a$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $(0; \pi/2]$.

12.161b [Ларин, 2013]**.** Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|\cos x + 3\sin x - a| = 3\cos x + \sin x + a$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $(0; \pi/2]$.

12.162 [Ларин, 2014]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin^2 x + (a-2)^2 \sin x + a(a-2)(a-3) = 0$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три корня .

12.163a** [МГУ, ВМК, 1979]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(a - x^2 - \cos\dfrac{11\pi x}{4}\right)\sqrt{8 - ax} = 0$ имеет на отрезке $[-2; 3]$ нечетное число различных корней.

12.163b** [МГУ, ВМК, 1979]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(a - 3x^2 + \cos\dfrac{9\pi x}{2}\right)\sqrt{3 - ax} = 0$ имеет на отрезке $[-1; 5]$ нечетное число различных корней.

12.163c** [МГУ, ВМК, 1979]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(a - x^2 + \cos\dfrac{13\pi x}{4}\right)\sqrt{8 + ax} = 0$ имеет на отрезке $[-5; 2]$ нечетное число различных корней.

12.164 [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$$

12.165 [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} (|x| + 1)a = y + \cos x, \\ \sin^4 x + y^2 = 1. \end{cases}$$

12.166 [Потапов]. Для каждого значения параметра a решить систему уравнений: $\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 a, \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \pi/2, \end{cases}$ a — целое число.

12.167 [МГУ, био, 2001]. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} \sin x = \cos\left(\sqrt{6-2a^2}\, x\right), \\ \cos x = (a-2/3)\sin\left(\sqrt{6-2a^2}\, x\right) \end{cases}$ имеет ровно одно решение на отрезке $[0; 2\pi]$.

12.10. Показательные

12.168. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $\log_2(4^x - a) = x$ имеет единственный корень.

12.169. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет ровно два корня.

12.170. Найдите все значения параметра c, при которых уравнение $27 \cdot 9^{-x-1.5} - (c+2) \cdot 3^{-x} + (1+c)(2c+1) = 0$ имеет единственное решение.

12.171. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $5(a+1) \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + a - 3 > 0$ выполнено для всех значений x.

12.172 [МГУ, псих, 1997]. При каких действительных p уравнение $4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$ имеет решение ?

12.173 [МГУ, МФ, 1993]. Найдите все значения b, при которых уравнение $9^x + \left(b^2+6\right) 3^x - b^2 + 16 = 0$ не имеет решения.

12.174a [НГУ, МФ, 1980]. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $5^{x+1} + 5^{1-x}$, $a/2$, $25^x + 25^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

12.174b [НГУ, МФ, 1980]. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $2^{2x+1} + 4^{-x}$, $a/2$, $4^{2x}/2 + 2^{-4x-3}$ образуют арифметическую прогрессию?

12.175 [ЦыпПин]. Найти все решения неравенства

$$a^2 - 9^{x+1} - 8 \cdot 3^x \cdot a > 0.$$

12.176 [ЦыпПин]. Найти все значения параметра a, при которых неравенство имеет хотя бы одно решение: $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leqslant 0$.

12.177 [Потапов]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x^y = a, \\ \operatorname{arctg} x = \pi/4 + y. \end{cases}$$

12.178 [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет единственное решение:

$$\sqrt{a(2^x-2)+1} = 1-2^x.$$

12.179 [Потапов]**.** Для каждого значения параметра a решить неравенство: $4^{x+1}\cdot a^2 - 33\cdot 2^x \cdot a + 8 > 0$.

12.180 [Потапов]**.** Для каждого значения параметра a решить неравенство: $\dfrac{x^2-2x+2^{|a|}}{x^2-a^2} > 0$.

12.181 [МГУ, МФ, 1999]**.** Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\dfrac{a+2-2^{x-2}}{a+3} \geqslant \dfrac{5a+5}{2(2^x+3a+3)}$ содержит какой-либо луч на числовой прямой.

12.182 [МГУ, ВМК, 1999]**.** При каких значениях параметра a уравнение $3^{x^2+2ax+4a-3}-2 = \left|\dfrac{a-2}{x+a}\right|$ имеет ровно два корня, лежащих на промежутке $[-4;0]$?

12.183 [МГУ, ВМК, 2002]**.** При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \sin(2\pi\sqrt{a^2-x^2}) = 0, \\ 2\cdot 3^{|ax|} + 3^{2-|ax|} \leqslant 19 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

12.184a [НГУ, МФ, 2003]**.** При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (a+2)\cdot 2^x + 3^y = 1-2a, \\ 2\cdot 2^x + (a+1)\cdot 3^y = 1-a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

12.184b [НГУ, МФ, 2003]**.** При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2\cdot 3^x + (a-1)\cdot 5^y = 3-a, \\ a\cdot 3^x + 5^y = 5-2a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

12.185 [демо ЕГЭ, 2013]**.** Найдите значения параметра a, при каждом из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений:

$$\begin{cases} (1+3x^2)^a + (b^2-4b+5)^y = 2, \\ x^2y^2 + (b-2)xy + a^2 + 2a = 3. \end{cases}$$

12.186 [Ларин, 2015]. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|9^{\sqrt{x}} - 2(a+5)\cdot 3^{\sqrt{x}} + 9a + 19| = 2a^2 + a + 2$ имеет ровно три различных корня.

12.187a [МАИ]. При каких $a > 0$ область значений функции $y = \dfrac{a^{x-1}+5}{a^x+3a}$ не содержит ни одного целого чётного числа?

12.187b [МАИ]. Найти все положительные значения a, при которых область значений функции $f(x) = \dfrac{a^{x+1} - 2a^2 - 2a}{a^{x-1} - 2}$ содержит все чётные целые числа.

12.11. Логарифмические

12.188 [Потапов]. Решить для каждого значения параметра a:
$$\log_2(|a|x - x^2) = 0.$$

12.189 [Потапов]. Решить для каждого значения параметра a:
$$\log_a x + \log_a(x-2) = 1.$$

12.190a [НГУ, МФ, 1981]. При каждом значении параметра a указать, для каких значений x выполняется неравенство
$$\log_8(x(x-4)) + \log_8 \frac{x-2}{x-4} \geqslant a.$$

12.190b [НГУ, МФ, 1981]. При каждом значении a указать, для каких значений x выполняется неравенство
$$\log_2[(x+1)(x-3)] + \log_2 \frac{x-1}{x+1} \geqslant a.$$

12.190c [НГУ, МФ, 1981]. При каждом значении a указать, для каких значений x выполняется неравенство
$$\log_8(x^2-4) + \log_8 \frac{x}{x+2} \leqslant a.$$

12.191a [НГУ, МФ, 1977]. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{2x}(ax+1) = 1/2$ имеет единственное решение.

12.191b [НГУ, МФ, 1977]. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x+1}(x^2 - ax) = 1$ имеет единственное решение.

12.191c [НГУ, МФ, 1977]. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x-1}(x+a) = 1/2$ имеет единственное решение.

12.191d [НГУ, МФ, 1977]. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x-2}(x^2 - ax + 3a - 9) = 1$ имеет единственное решение.

12.192. Укажите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y + \ln(y/|y|) = x, \\ y + 2(x+a)^2 = x + 2a + 4 \end{cases}$ имеет единственное решение. Укажите это решение.

12.193a [МАИ]. При каких значениях a найдутся такие b, что числа $4+25^b$, a, 5^{-b} будут являться последовательными членами геометрической прогрессии?

12.193b [МАИ]. При каких значениях a найдутся такие b, что числа $4+25^b+25^{-b}$, 5^b+5^{-b}, a будут являться последовательными членами геометрической прогрессии?

12.194a' [НГУ, МФ, 1994]. При каких значениях параметра a уравнение $\log_5\left(\sqrt{a+3}-x\right)+\log_{1/5}(x-a-2)=\log_{\sqrt{5}} 2$ имеет решение?

12.194b' [НГУ, МФ, 1994]. При каких значениях параметра a уравнение $\log_3\left(\sqrt{a+4}-x\right)+\log_{1/3}(x-a-1)=\log_9 4$ имеет решение?

12.194c' [НГУ, МФ, 1994]. При каких значениях параметра a уравнение
$\log_7\left(\sqrt{a+6}-x\right)+\log_{\frac{1}{7}}(x-a-2)=\log_{49} 4$ имеет решение?

12.195' [Шар-11]. Найти все значения x, при которых равенство

$$2\log_{2+a^2}\left(4-\sqrt{7+2x}\right)=\log_{2+a^2x^2}(4-3x)$$

выполняется при любом значении параметра a.

12.196a [НГУ, МФ, 1978]. Определить, при каких значениях параметра a все решения уравнения $\log_{2+x/2}\left(x^2/2-3x/2-5\right)\geqslant 1$ являются одновременно решениями неравенства $a^4x^2-a^2x-2>0$.

12.196b [НГУ, МФ, 1978]. Определить, при каких значениях параметра a все решения уравнения $\log_{x+3}(11x/2+14)>2$ являются одновременно решениями неравенства $a^2x^2-4\leqslant 0$.

12.196c [НГУ, МФ, 1978]. Определить, при каких значениях параметра a все решения уравнения $\log_{3x+2}(x^2-3x+7)\leqslant 1$ являются одновременно решениями неравенства $(x+1)^2-4a^2(x+1)+3a^4\geqslant 0$.

12.197a [НГУ, МФ, 1983]. Определить, при каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$\log_2(x-100)-\log_{\frac{1}{2}}\frac{|x-101|}{105-x}+\log_2\frac{|x-103|(105-x)}{x-100}>a$$

содержится единственное целое число.

12.197b [НГУ, МФ, 1983]. Определить, при каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$\log_{1/2}\frac{2|x-150|}{x-146}-\log_2(151-x)+\log_{1/2}\frac{|x-148|(x-146)}{151-x}<a$$

содержится единственное целое число.

12.197c [НГУ, МФ, 1983]. Определить, при каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$\log_{1/3}(200-x)-\log_3\frac{|x-199|}{x-195}+\log_{1/3}\frac{|x-197|(x-195)}{3(200-x)}<a$$

содержится единственное целое число.

12.198a [НГУ, МФ, 1991]. Найти все значения a, при которых уравнение $\log_{1-a}(2-\cos x+\sin(x/2))=2$ имеет решение.

12.198b [НГУ, МФ, 1991]. Найти все значения a, при которых уравнение $\log_{a+1}(25/8+\cos x-2\sin(x/2))=3$ имеет решение.

12.198c [НГУ, МФ, 1991]. Найти все значения a, при которых уравнение $\log_{a-3}(5-3\cos x-6\sin(x/2))=2$ имеет решение.

12.199a [НГУ, ест, 1983]. Определить, при каких значениях параметра a для любого действительного числа x выполняется неравенство $\log_{a^2-2}\left[(a^2-1)x^2+2x+2\right]>1$.

12.199b [НГУ, ест, 1983]. Определить, при каких значениях параметра a для любого действительного числа x выполняется неравенство $\log_{a^2-6}\left[(a^2-1)x^2+4ax+5\right]<1$.

12.200 [Потапов]. Для каждого значения параметра a определить число решений системы уравнений $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=5/2,\\ x+y=a^2+a.\end{cases}$

12.201* [МГУ, МФ, 1993]. Найдите все значения a, для которых неравенство $\log_5\left(a\cos 2x+\left(1+a^2-\sin^2 x\right)\cos x+4+a\right)\leqslant 1$ выполняется при всех x.

12.202* [МГУ, геол, 1993]. Найдите действительные значения параметра k, при которых ровно одна точка графика функции $y=2x+(\lg k)\sqrt{\cos 2k\pi x+2\cos k\pi x-3}+1$ лежит в области $(2x-7)^2+4(y-3)^2\leqslant 25$.

12.203 [Потапов]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет хоть одно решение:

$$\begin{cases}\log_a x\cdot\left(\dfrac{1}{\log_x 3}+\log_3 y\right)=\log_3 x,\\ \log_3 x\cdot\log_2(x+y)=2\log_2 x.\end{cases}$$

12.204a [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет хотя бы одно решение. При каждом таком a найти все решения:

$$\begin{cases} 2\cos x + a\sin y = 1, \\ \log_z \sin y = \log_z a \cdot \log_a(2 - 3\cos x), \\ \log_a z + \log_a (1/(2a) - 1) = 0. \end{cases}$$

12.204b [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет хотя бы одно решение. При каждом таком a найти все решения:

$$\begin{cases} (a-2)\sin x + \cos y = 1, \\ \log_a(2\cos y) = \log_a z \cdot \log_z(1 + 7\sin x), \\ \log_z (a/(5-a)) = 1. \end{cases}$$

12.204c [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет хотя бы одно решение. При каждом таком a найти все решения:

$$\begin{cases} a\cos y + \sin x + 1 = 0, \\ \log_z(-1 - 4\sin x) = \log_z a \cdot \log_a(1 + 2\cos y), \\ \log_a z + \log_a ((4-a)/a) = 0. \end{cases}$$

12.205 [Потапов]**.** Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \log_{\sqrt{x}} a = a\log_x a$.

12.206 [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы одно решение:

$$\log_{100} x^2 = \log_{\sqrt{x}} 10 \cdot (\lg(10a) - |\lg(x/a)|)\,.$$

12.207 [Потапов]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы одно решение:

$$[1 + (3a-2)^2] \cdot \log_3(-4x - 4x^2) + [1 + (a+1)^2] \cdot \log_7(1 - 2x^2) =$$
$$= \log_3(-4x - 4x^2) + \log_7(1 - 2x^2).$$

12.208a [Потапов]**.** Найти все значения параметра a из интервала $(2;5)$, при каждом из которых существует хотя бы одно число x из отрезка $[2;3]$, удовлетворяющее уравнению:

$$\log_2(3 - |\sin ax|) = \cos(\pi x - \pi/6)\,.$$

12.208b [Потапов]**.** Найти все значения параметра a из интервала $(5;16)$, при каждом из которых существует хотя бы одно число x из отрезка $[1;2]$, удовлетворяющее уравнению:

$$1 - \cos^2\left(\frac{ax}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x - \sin\pi x|}.$$

12.209 [МГУ, фил, 1970]**.** Найти все x, принадлежащие промежутку $0.5 < x < 2.5$, которые удовлетворяют неравенству $\log_{3x-x^2}(3a-ax) < 1$ при всех a из промежутка $0 < a < 2$.

12.210 [МФТИ, 2001]**.** Найдите все a, при которых уравнение $\log_3(x+\sqrt{5-a}) + \log_{1/3}(a-2-x) = \log_9 4$ имеет решение.

12.211 [МГУ, МФ, 2002]**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_{a+1} x + \log_x(19-8a) = 2$ имеет по крайней мере два корня и при этом произведение всех его корней не меньше 0.01.

12.212 [МГУ, соц, 1999]**.** При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)} \geqslant \\ \geqslant \left|\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)}\right|$$

не имеет решений на отрезке $[-5;6]$?

12.213 [МГУ, почв, 2002]**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{(x^3-1)(x^2-16)}{\log_{10}(15a-x)-\log_{10}(x-a)} = 0$ имеет единственное решение.

12.214 [Ларин, 2014]**.** Найти все значения параметра p, для которых неравенство $\log_{x-p}(x^2) < 2$ выполняется хотя бы для одного числа x такого, что $|x| < 0.01$.

12.215 [Ларин, 2014]**.** При каких значениях параметра a уравнение $(\sin x - \log_4 a)(\sin x - 2 + 2a) = 0$ имеет ровно два корня на отрезке $[\pi/2; 5\pi/2]$?

12.216 [Ларин, 2014]**.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a+2)^2\log_3(2x-x^2) + (3a-1)^2\log_{11}\left(1-x^2/2\right) = 0$ имеет решение.

12.217 [Ларин, 2015]**.** При каких a для всех $x \in [2; 5/2]$ выполняется неравенство $\log_{|x-a|}(x^2+ax) \leqslant 2$?

12.218 [Ларин, 2015]**.** Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \log_2\left(5 + 4\cdot\dfrac{|x-2|}{x-2} - \dfrac{|x+5|}{x+5}\right), \\ x^2+4x+(y-a)^2 = 21 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

12.219a* [МГУ, ВМК, 1989]. Найдите все значения p, при которых уравнение

$$\sqrt{(x+3p-3\pi-4)(|x+\pi|+p-2\pi+2)}+ \\ +\log_\pi\left(\frac{\pi^2+p^2+4}{2(p-\pi)|x+2|-x^2-4x+2\pi p}\right)=0$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение.

12.219b* [МГУ, ВМК, 1989]. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{\pi}}\left(\frac{a^2+4\pi^2+4}{4x-x^2-2(a-2\pi)|x-2|+4\pi a}\right)- \\ -\sqrt{(x-5a+10\pi-34)(|\pi-x|-a+\pi+2)}=0$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение.

12.12. Приведение к виду $f(U) = f(V)$ или $f(f(t)) = t$

12.220 [Горн]. Указать все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$ имеет решения.

12.221 [Горн]. Найти a, при которых уравнение

$$\sqrt{3a+\sqrt{3a+2x-x^2}}=2x-x^2$$

имеет решение.

12.222 [Потапов]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет три различных корня. Найти эти корни:

$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x+3)+2^{-x^2+2x}\log_{1/3}(2|x-a|+2)=0.$$

12.223 [демо ЕГЭ, 2014]. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $8x^6+4x^2=(3x+5a)^3+6x+10a$ не имеет корней.

12.224* [Ларин, 2014]. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{4}{3}(x^2-ax)-\frac{\pi}{3}<\sin(x^2-ax)+\cos\left(2x^2-2ax+\frac{\pi}{4}\right)$$

выполняется для всех x из отрезка $[\pi;2\pi]$.

12.225a [МГУ, почв, 1984]. Указать все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{1+a+\sqrt{a+2\cos^2 x}}=\cos 2x$ имеет решения.

12.225b [МГУ, почв, 1984]**.** Указать все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{5a+\sqrt{5a-x-x^2/4}}+x+x^2/4=0$ имеет решения.

12.226. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x-y+2a=3^y-9^a\cdot 3^x, \\ y=x^2+x. \end{cases}$

12.227 [МГУ, ВМК, 2004]**.** При каких значениях параметра a уравнение

$$|x-3|-(1-2a)x^2+(3-4a)x+6a-4=$$
$$=\sin(|x-3|+6a-4)-\sin((1-2a)x^2-(3-4a)x)$$

не имеет решений?

12.13. Использование четности и иных видов симметрий

12.228 [МГУ, ФФ, 1999]**.** При каких значениях a уравнение $\cos 2x+2\cos x-2a^2-2a+1=0$ имеет ровно одно решение на промежутке $[0;2\pi)$.

12.229 [МГУ, псих, 1995]**.** Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\cos x-2\sqrt{x^2+9}\leqslant-\dfrac{x^2+9}{a+\cos x}-a$ имеет единственное решение.

12.230 [МГУ, почв, 2001]**.** При каких значениях параметра b уравнение $\operatorname{tg}|b|=\log_2(\cos x-|x|)$ имеет ровно один корень?

12.231. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений $\begin{cases} (x^2+1)b=y+\cos 2x \\ 2^{|\sin x|}+|y|=2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

12.232 [МГУ, геол, 2003]**.** При каких значениях параметра a уравнение $2\pi^2(x-2)^2+4a\cos(2\pi x)-25a^3=0$ имеет единственное решение?

12.233 [МГУ, экон, 2005]**.** Найдите все значения параметра b, при которых уравнение имеет ровно три решения:

$$b^2\sin\left(\frac{\pi+2}{2}-x\right)+\sin^2\left(\frac{2x}{b+1}-\frac{2}{b+1}\right)-b\sqrt{4x^2+8-8x}=$$
$$=3+\arcsin|1-x|.$$

12.234 [СУНЦ НГУ, 2013]**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\pi^2\cdot(x-3)^2+4a\cdot\cos(2\pi x)-49a^3=0$$

имеет единственное решение.

12.235’ [МГУ, хим, 1999]**.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$$
имеет нечетное число решений.

12.236* [Ларин, 2013]**.** При каких значениях a уравнение
$$\frac{x^2+1}{x}\cdot\log_a^4 x+\frac{50-2a}{a}\log_a^2 x+\sin(\pi a)\cdot\sqrt{3-a}=0$$
имеет единственный корень?

12.237 [демо ЕГЭ, 2013]**.** Найдите значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений
$$\begin{cases} y+a=|x|+5,\\ x^2+(y-2a+5)^2=4.\end{cases}$$

12.238’ [демо ЕГЭ, 2013]**.** Найдите пары значений параметров a, b, при каждой из которых имеет единственное решение система
$$\begin{cases} xyz+z=a,\\ xyz^2+z=b,\\ x^2+y^2+z^2=4.\end{cases}$$

12.239* [МГУ, био, 1991]**.** Найдите значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение $(x;y)$ система уравнений
$$\begin{cases} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)=z,\\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x,\\ (x+y+a\sin^2 z)((1-a)\ln(1-xy)+1)=0.\end{cases}$$

12.240 [демо ЕГЭ, 2013]**.** Найдите значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение $(x;y)$ система уравнений
$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

12.241* [МГУ, экон, 2002]**.** Найдите все значения a, при которых неравенство
$$\sqrt[4]{x^2-6ax+10a^2}+\sqrt[4]{3+6ax-x^2-10a^2}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt[4]{\sqrt{3}a+24-3/\sqrt{2}+|y-\sqrt{2}a^2|+|y-\sqrt{3}a|}$$
имеет единственное решение.

12.242 [МГУ, госупр, 2002]**.** Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}(3\sqrt{x|x|}+|y|-3)(|x|+3|y|-9)=0,\\(x-a)^2+y^2=25\end{cases}$ имеет ровно три решения.

12.243* [МГУ, геогр, 1997]**.** Найдите все значения параметра b, при которых единственное решение имеет система неравенств

$$\begin{cases}by^2+4by-2x+7b+4\leqslant 0,\\bx^2-2y-2bx+4b-2\leqslant 0.\end{cases}$$

12.244 [МГУ, фил, 1984]**.** Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases}y\geqslant x^2+2a,\\x\geqslant y^2+2a\end{cases}$ имеет единственное решение.

12.245. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений $\begin{cases}(x^2+1)b=y+\cos 2x,\\2^{|\sin x|}+|y|=2\end{cases}$ имеет единственное решение.

12.246a** [МГУ, МФ, 1980]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{1/a}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geqslant 0$$

имеет ровно одно решение.

12.246b** [МГУ, МФ, 1980]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x+3)+2^{-x^2+2x}\log_{1/3}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три решения.

12.246c** [МГУ, МФ, 1980]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$9^{a^2}\log_2(|x^2-4x+3|+1)+3^{3a-|x^2-4x+3|}\cdot\log_2\left(\frac{1}{1+3a-2a^2}\right)=0$$

имеет ровно три решения.

12.14. Свойства функций

12.247 [Горн]**.** Дана функция $f(x)=5^x+\dfrac{25}{5^x}$. При каких значениях параметра a функция $f(x+a)$ является четной?

12.248 [Горн]. Дана функция $f(x) = 3^x - \dfrac{27}{3^x}$. При каких значениях параметра a функция $f(x+a)$ является нечетной?

12.249 [Горн]. Найти наименьшее положительное значения параметра a, при котором функция $f(x) = 3ax^3 - 2\sin\dfrac{8\pi a - x}{5}$ является нечётной.

12.250 [Горн]. При каких a число π является периодом функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{a - \cos x}$?

12.251a [ЛГУ]. При каких значениях параметра a функция $f(x) = \dfrac{a^2-1}{(a+3)^2}\cos\dfrac{3x}{2} + (a^3 + a^2 - 4a - 4)\dfrac{x^2+a-5}{x^2-2a+1}$ является периодической и имеет наименьший положительный период $\dfrac{4\pi}{3}$?

12.251b [ЛГУ]. При каких значениях параметра a функция $f(x) = \dfrac{a^2-1}{a^2+1}\sin\dfrac{5x}{2} + (a^3 - a^2 - 9a + 9)\dfrac{x^2+a+1}{x^2+3a+5}$ является периодической и имеет наименьший положительный период $\dfrac{4\pi}{5}$?

12.252a [Горн]. При каких значениях параметра a уравнение $2\cos ax - 3\operatorname{tg}^2 x - 2 = 0$ имеет единственное решение ?

12.252b [Горн]. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 ax + \cos x = 2(\cos ax + \cos x - 1)$ имеет единственное решение ?

12.252c [Горн]. Решить уравнение $\sin x + 2\cos ax = 3$

12.253 [МАИ]. Найти все рациональные значения параметра a, при которых функции $f(x) = \cos\dfrac{2x}{\sqrt{5} + a^2}$ и $g(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{\sqrt{125} - 4a + 1}$ имеют одинаковые периоды.

12.15. Исследование функций, экстремальность

12.254 [МГУ, хим, 2002]. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2^{-x^2} \cdot 4^x + \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}$$

имеет единственное решение.

12.255* [МГУ, МФ, 2001]. Функция $f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{\bigl(2f(x^2-2x-112) + |f(x^2-2x-112) - 3f(-2x\sqrt{32-2x})|\bigr)}{\bigl(3f(-2x\sqrt{32-2x} - 112\bigr) - 2f(-2x\sqrt{32-2x}))^7} > 0.$$

12.256 [демо ЕГЭ, 2014]**.** Найдите все a, при каждом из которых уравнение $\sin|\operatorname{arctg} x| + a\cos\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{2}\right) = \dfrac{a|x|}{\sqrt{1+x^2}}$ имеет хотя бы одно решение.

12.257[**] [МГУ, экон, 2000]**.** Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $[1/6; 6]$ и удовлетворяет на этом отрезке системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 f(x) - 1/2} - 12\cos\left(2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{10}{x}, \\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

Решите неравенство $f(x) \leqslant \pi/8$.

12.258[*] [Ларин, 2015]**.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$4^{a^2} \cdot \log_2\left(|x^2-6x+8|+2\right) + 2^{3a-|x^2-6x+8|} \cdot \log_2\left(\frac{1}{2+3a-2a^2}\right) = 0$$

имеет ровно два различных действительных корня .

12.259a[*] [МГУ, хим, 1980]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения $3(x^2+a^2) = 1-(9a^2-2)x$ не превосходит числа решений уравнения

$$x + (3a-2)^2 3^x = (8^a - 4)\log_3\left(3^a - 1/2\right) - 3x^3.$$

12.259b[*] [МГУ, хим, 1980]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения

$$2x^3 + 6x = (3^{6a} - 9)\sqrt{2^{8a} - 1/6} - (3a-1)^2 12^x$$

не меньше числа решений уравнения $3(5x^2 - a^4) - 2x = 2a^2(6x-1)$.

12.259c[*] [МГУ, хим, 1980]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения

$$2(7x^2 - a^4) + a^2 = (12a^2+1)x$$

не превосходит числа решений уравнения

$$x^3 + (2a-1/2)^2 \cdot 7^x = (49^{2a} - 7)\log_7(7^{3a} - 1/4) - 7x.$$

12.260[*] [МГУ,ВМК, 1997]**.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^3 - 24x^2 + 118x + 7} = 5\cdot\sqrt{7x - x^2} + \sqrt{a^2 - 11a + 18}$$

имеет единственное решение.

12.261a [Горн]**.** Найти все значения параметра a, при которых неравенство $-5 + 5a + \sin^2 x + a(3-\cos x)^3 > 0$ выполняется при всех x.

12.261b [Горн]**.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых выполняется неравенство $a(4-\sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$ для всех x.

12.262a* [Горн]**.** Найдите наибольшее значение величины b, при котором неравенство $\sqrt{b^5}(8x-x^2-16) + \dfrac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16} \geqslant -\dfrac{2}{3}b|\cos \pi x|$ имеет хотя бы одно решение.

12.262b* [Горн]**.** Найти наибольшее значение величины a, при котором неравенство $a\sqrt{a}(x^2-2x+1) + \dfrac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1} \leqslant \sqrt[4]{a^3}\left|\sin \dfrac{\pi}{2}x\right|$ имеет хотя бы одно решение.

12.263a [Горн]**.** Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\left|3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a\right| \leqslant 3$ выполняется при любых значениях x.

12.263b [Горн]**.** Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\left|\sin^2 x - 2(a-1)\sin x\cos x + 3\cos^2 x - a + 1\right| \leqslant 3$ выполняется при любых значениях x.

12.264a [Горн]**.** При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 4p^2 - 5p + 3 \leqslant 4\sin y - 3\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi \end{cases}$$

имеет единственное решение.

12.264b [Горн]**.** При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 4p^2 + 2p + 4 \leqslant 4\sin y + 3\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi \end{cases}$$

имеет единственное решение.

12.265a [Горн]**.** Для всех действительных значений a решить уравнение

$$(3a-2)^2\log_3(-4x-4x^2) = -(a+1)^2\log_7(1-2x^2).$$

12.265b [Горн]**.** Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие равенству

$$(1+(3a+4)^2)\log_2(-2x-x^2) + (1+(a-2)^2)\log_7\left(1-x^2/3\right) = \\ = \log_7\left(1-x^2/3\right) + \log_2(-2x-x^2).$$

12.266 [Горн]**.** Найти все целые k, при которых уравнение $\cos kx = 1 + 2\cos^2(\pi/4 + x/2)$ имеет решения. Найти эти решения.

12.267* [ЛГУ]**.** При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt[3]{x^3/2+x+1}+\sqrt[3]{-x^3/2+x-1}=\sqrt[3]{ax}$ имеет ровно четыре корня?

12.268 [МАИ]**.** При каких значениях a уравнение $x^3-ax+2a+32=0$ имеет три действительных корня?

12.269 [МАИ]**.** Найти все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+1\leqslant\sqrt{a|x|-1}$ имеет решения.

12.270 [МГУ, МФ, 2001]**.** Можно ли подобрать числа A, B, φ, ψ так, чтобы выражение $(\sin(x-\pi/3)+2)^2+A\cos(x+\varphi)+B\sin(2x+\psi)$ принимало при всех x одно и то же значение C? Если да, то какие значения может принимать константа C ?

12.271 [МГУ, МФ, 1990]**.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2-2a\cdot\sin(\cos x)+a^2=0$ имеет единственное решение.

12.16. Ответы

[12.1] $a\leqslant 0\Rightarrow(-\infty;0)$; $a>0\Rightarrow(-1/\sqrt{a};0)\cup(1/\sqrt{a};\infty)$. **[12.2]** $a\leqslant 0\Rightarrow(-\infty;-1)\cup[-1-a;\infty)$; $a>0\Rightarrow(-\infty;-1-a]\cup(-1;\infty)$. **[12.3]** $a=0\Rightarrow(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; $a>0\Rightarrow(-\infty;-2a)\cup(a;\infty)$; $a<0\Rightarrow(-\infty;a)\cup(-2a;\infty)$. **[12.4]** $a<0$, $a>2/3\Rightarrow(-\infty;2)$; $0<a<2/3\Rightarrow(2;+\infty)$; $a=0$ или $a=2/3\Rightarrow$ нет реш. **[12.5]** $a<0\Rightarrow\left(\frac{1+a}{1-a};1\right)$; $0<a<1\Rightarrow\left(1;\frac{1+a}{1-a}\right)$; $a=1\Rightarrow(1;\infty)$; $a>1\Rightarrow\left(-\infty;\frac{1+a}{1-a}\right)\cup(1;\infty)$; $a=0\Rightarrow$ нет реш. **[12.6a]** $\left[\frac{7}{3};3\right)\cup(3;5]$. **[12.6b]** $\left[\frac{5}{2};3\right)\cup(3;4]$. **[12.6c]** $\left[\frac{1}{3};1\right)\cup(1;3]$. **[12.6d]** $\left[\frac{7}{2};4\right)\cup(4;5]$. **[12.7]** $a\in\left[\frac{1}{5};1\right]$. **[12.8]** $\frac{1}{2}<a<1$. **[12.9]** $a=0$; $a=1$ экстремум функции под модулем. **[12.10]** $a=\pm\sqrt{2}b$. **[12.11]** $-\sqrt{2}$. **[12.12]** $a=1$; $a=5$; $a=9$. **[12.13]** $a>\frac{21}{127}$. **[12.14a]** $a=1\Rightarrow[1;\infty)$; $a=-1\Rightarrow[-3;1]$; $|a|<1\Rightarrow\left\{\frac{7+a}{a-1};1\right\}$; $|a|>1\Rightarrow\{1\}$. **[12.14b]** $a=1\Rightarrow[-3;2]$; $a=-1\Rightarrow(-\infty;3]$; $|a|<1\Rightarrow\left\{-3;\frac{7-3a}{a+1}\right\}$; $|a|>1\Rightarrow\{-3\}$ **[12.14c]** $a=3/2\Rightarrow(-\infty;-3/2]$; $a=-3/2\Rightarrow[-3/2;2]$; $|a|<3/2\Rightarrow\left\{\frac{6a+33}{6-4a};-3/2\right\}$; $|a|>3/2\Rightarrow\{-3/2\}$ **[12.15]** $a\leqslant 0\Rightarrow\left(2\sqrt{3}a;2a\right)\cup\left(2a;-2\sqrt{3}a\right)$; $a=0\Rightarrow$ нет решений; $a>0\Rightarrow\left(-2\sqrt{3}a;2a\right)\cup\left(2a;2\sqrt{3}a\right)$. **[12.16]** $a<0\Rightarrow(-\infty;a)$; $a\geqslant 0\Rightarrow$ нет решений **[12.17]** $a\leqslant -1\Rightarrow\left(-\infty;\frac{1}{a-1}\right]$;

$-1 < a < 0 \Rightarrow \left[-\frac{1}{a+1}; \frac{1}{a-1}\right]$; $a = 0 \Rightarrow \{-1\}$; $0 < a \leqslant 1 \Rightarrow$ нет реш.; $a > 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{a-1}; +\infty\right)$. **[12.18]** $a < -1 \Rightarrow \left[\frac{1}{a+1}; +\infty\right)$; $-1 \leqslant a \leqslant 0 \Rightarrow (-\infty; +\infty)$; $0 < a \leqslant 1 \Rightarrow \left(-\infty; \frac{1}{1+a}\right] \cup \left[\frac{1}{1-a}; +\infty\right)$; $a > 1 \Rightarrow \left(-\infty; \frac{1}{1+a}\right]$. **[12.19]** $0 \leqslant |a| \leqslant 1 \Rightarrow \left(-\infty; -\frac{1}{1+|a|}\right]$; $|a| > 1 \Rightarrow \left(-\infty; -\frac{1}{1+|a|}\right] \cup \left[\frac{1}{|a|-1}; +\infty\right)$. **[12.20]** $|a| > \sqrt{2} \Rightarrow$ $(a+1-\sqrt{a^2-2};\ a-1+\sqrt{a^2-1})$; $|a| \leqslant \sqrt{2} \Rightarrow$ решений нет. **[12.21]** $a < 0 \Rightarrow [6a; 2a) \cup (2a; -2a]$; $a \geqslant 0 \Rightarrow (-\infty; 2a) \cup (2a; +\infty)$. **[12.22]** $a \leqslant -1 \Rightarrow$ решений нет; $-1 < a \leqslant 1 \Rightarrow \left(-\infty; \frac{a-1}{2}\right)$; $a > 1 \Rightarrow \left(-\infty; \frac{a+1}{2}\right)$. **[12.23a]** -4; -8. **[12.23b]** $\frac{3}{2}$; $-\frac{9}{2}$. **[12.24a]** 0; 1. **[12.24b]** -1; 1. **[12.25a]** $\{-2;\ 6/5;\ 10/3\}$ при $a = -2$; $\{-1/5;\ 0;\ 1/3\}$ при $a = -1/2$. **[12.25b]** $\{-1;\ 17/15;\ 15/17\}$ при $a = -2$; $\{-1/136;\ 0;\ 1/120\}$ при $a = -1/8$. **[12.25c]** $\{-1;\ 41/40;\ 40/41\}$ при $a = -3$; $\{-1/3321;\ 0;\ 1/3240\}$ при $a = -1/27$. **[12.26a]** $a = 1$; $a = (\sqrt{5}-1)/2$. **[12.26b]** $a < -7/3$; $a > -2$. **[12.27a]** $a = -1$; $1 < a < 3$; $4 < a \leqslant 6$. **[12.27b]** $a = -3$; $a = -2$; $a \in (1; 2) \cup (2; 5) \cup (6; 10]$. **[12.28a]** $-\frac{13}{4} < a < 3$. **[12.28b]** $-\frac{9}{4} < a < 2$. **[12.28c]** $-4 < a < \frac{17}{4}$. **[12.28d]** $-1 < a < \frac{5}{4}$. **[12.29]** $a = 1 \Rightarrow x \geqslant 1$; $a = -1 \Rightarrow -3 \leqslant x \leqslant 1$; $|a| < 1 \Rightarrow x = 1$; $x = \frac{7+a}{a-1}$; при $|a| < 1$ – два решения. **[12.30]** $-3.5 < a < 1$. **[12.31]** $(-\infty; -8) \cup (0; \infty)$. **[12.32]** 2. **[12.33a]** $a = 0$; $a = \frac{1}{12}$. **[12.33b]** $a \in (-4; 0) \cup (0; 1)$. **[12.33c]** $a = 5$. **[12.34]** $a \in (-\infty; 0]$. **[12.35a]** $m = 1$. **[12.35b]** $m = -1$. **[12.36]** $a = 2$. **[12.37]** $a = -1$. **[12.38]** $a \in (-\infty; -3) \cup (2; 6)$. **[12.39]** $b = -2$; $b = 1/2$. **[12.40]** $a \in \left(-\infty; -\frac{17}{6}\right)$. **[12.41]** $a = -3$; $a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$. **[12.42]** $p > 1$. **[12.43]** $a = 0$; $a \in \left(2+\sqrt{3}; 2+\sqrt{5}\right)$. **[12.44]** $a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{13}}{4}\right)$. **[12.45]** $a = 5$. **[12.46]** $h > \frac{5}{2}$. **[12.47]** $\frac{-7-\sqrt{45}}{2} \leqslant m \leqslant -4 + 2\sqrt{3}$. **[12.48]** $m > 1$. **[12.49]** ни при каких. **[12.50]** $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$. **[12.51]** $-3 \leqslant a \leqslant 3$. **[12.52]** $-\frac{1}{\sqrt{2}} < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$. **[12.53a]** $b < -2-\sqrt{8}$; $b > 2$. **[12.53b]** $a < -2-\sqrt{6}$; $a > \sqrt{2}$. **[12.53c]** $a < -\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **[12.53d]** $b < -\frac{3+\sqrt{17}}{2}$; $b > 2$. **[12.54a]** $1-\sqrt{2}$; $5+\sqrt{10}$.

[12.54b] $\frac{1}{2}$; $2+\sqrt{2}$. **[12.54c]** 3; $-\frac{3}{2}$. **[12.54d]** $-\frac{1}{2}$; $1+\sqrt{2}$. **[12.55a]** -4. **[12.55b]** 1. **[12.56a]** $(-1;0)\cup(3;\infty)$. **[12.56b]** $(-\infty;1)\cup(4;5)$. **[12.57a]** $k<1/2$; $k>3/2$. **[12.57b]** $k<\frac{9-\sqrt{17}}{32}$. **[12.57c]** $k\leqslant 0$; $k=1$. **[12.57d]** $k\geqslant\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. **[12.58a]** $a\geqslant 1$. **[12.58b]** $a\geqslant 0$. **[12.58c]** $a<-1$. **[12.58d]** $a>0$. **[12.59a]** $a=0$; $a=-1$. **[12.59b]** $a=0$; $a=1$. **[12.60a]** $a=1$; $a=\frac{7}{4}$. **[12.60b]** $a=1$; $a=\frac{1}{4}$. **[12.61a]** $-2<a\leqslant 0$. **[12.61b]** $a<-1-\sqrt{5}$. **[12.62a]** $a\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)\cup(6+\sqrt{20};\infty)$. **[12.62b]** $a\in\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2};\infty\right)$. **[12.63a]** $a>1/2$. **[12.63b]** $b>-1/2$. **[12.64]** $-\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$. **[12.65]** -1; $-5/7$; -3. **[12.66]** $(-3;9)$; $(2;4)$. **[12.67]** $0\leqslant a\leqslant\sqrt{2}/2\Rightarrow$ нет решений; $\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant 1\Rightarrow\left(\frac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2};\frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}\right)$; $a>1\Rightarrow\left[-a;\frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}\right)$. **[12.68]** $a\leqslant -1\Rightarrow(-\infty;2]$; $a>-1\Rightarrow\left(2-\frac{1}{(1+a)^2};2\right]$. **[12.69]** $a<0, a>1\Rightarrow$ нет решений; $a=0\Rightarrow x=0$; $0<a\leqslant 1/2\Rightarrow\left[0;a^2\right]$; $1/2<a<1\Rightarrow\left[2a-1;a^2\right]$; $a=1\Rightarrow x=1$. **[12.70]** $a\leqslant -2\Rightarrow$ нет решений; $-2<a\leqslant 2\Rightarrow\left[-2;\frac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}\right)$; $2<a\leqslant 2\sqrt{2}\Rightarrow\left[-2;\frac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}\right)\cup\left(\frac{a+\sqrt{8-a^2}}{2};2\right]$; $a>2\sqrt{2}\Rightarrow[-2;2]$. **[12.71]** $a\leqslant -1\Rightarrow$ нет решений; $-1<a\leqslant 1\Rightarrow\left(\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2};1\right]$;$1<a\leqslant\sqrt{2}\Rightarrow\left[-1;\frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}\right)\cup\left(\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2};1\right]$; $a>\sqrt{2}\Rightarrow[-1;1]$. **[12.72]** $a\leqslant 1\Rightarrow$ нет решений; $1<a<1+\sqrt{3}\Rightarrow\left(\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2};-\frac{a}{3}\right]$; $a=1+\sqrt{3}\Rightarrow\left[-\infty;\frac{-1-\sqrt{3}}{3}\right)$; $a>1+\sqrt{3}\Rightarrow\left(-\infty;-\frac{a}{3}\right]\cup\left(\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2};+\infty\right)$. **[12.73]** $a<3/4\Rightarrow$ нет реш.; $a=3/4\Rightarrow x=1/4$; $3/4<a\leqslant 1\Rightarrow\left[\left(\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}\right)^2;\left(\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}\right)^2\right]$; $a>1\Rightarrow\left[0;\left(\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}\right)^2\right]$. **[12.74]** $a<0\Rightarrow\left(2a^2+\frac{a}{2};+\infty\right)$; $a\geqslant 0\Rightarrow\left(\frac{a^2}{18}+\frac{a}{2};+\infty\right)$. **[12.75]** $x=a$. **[12.76]** $(a+b)>0$ и $(ab\geqslant 0)\Rightarrow x=0$; $(a+b=0)\Rightarrow x=a^2$; $(a+b<0)$ или $(a+b>0)$ и $(ab<0))\Rightarrow$ нет реш. **[12.77]** $\left(-\infty;-\frac{8}{7}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(\frac{8}{9};+\infty\right)$. **[12.78a]** $\{-7-9\sqrt{2}\}\cup(-16;2]$. **[12.78b]** $[-14;2)\cup\{8\sqrt{2}-6\}$. **[12.78c]** $\{-4-6\sqrt{2}\}\cup(-10;2]$. **[12.78d]** $[-12;2)\cup\{7\sqrt{2}-5\}$.

[12.79] $\left[-1; -2+2\sqrt{2}\right]$. **[12.80a]** $b \neq 0$. **[12.80b]** $a = -2/3$. **[12.80c]** $c = -4$. **[12.80d]** $d \neq \pm 1$. **[12.81]** $a \neq \pm 1 \Rightarrow (0;2)$; $a = 1 \Rightarrow$ все пары $(x;y)$ такие, что $x + y = 2$; $a = -1 \Rightarrow$ все пары такие, что $x - y = -2$. **[12.82a]** $a = 0 \Rightarrow$ нет реш.; $a = -3 \Rightarrow$ беск. много; иначе одно. **[12.82b]** $a = 0 \Rightarrow$ беск. много, иначе одно. **[12.82c]** $a = 0 \Rightarrow$ беск. много; $a = 2 \Rightarrow$ нет реш., иначе одно. **[12.82d]** Если хотя бы один из a, b равен 0, то беск. много; иначе одно. **[12.83]** $a = 1$; $b = -1$. **[12.84]** $(\pm 1; -1)$; $(\pm 1; -2)$. **[12.85]** $(0;0;9/4)$; $(2;-1;1)$. **[12.86a]** $-8-\sqrt{71} < a < 0$; $\sqrt{71} - 8 < a < 8/3$. **[12.86b]** $a \in (-7/15; 10/7)$. **[12.87a]** $a \in (-\infty; -4] \cup [4; \infty)$. **[12.87b]** $a \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. **[12.87c]** $a \in [-1; 0)$. **[12.87d]** $a \in [-9/16; 0)$. **[12.88a]** $(1; 3/2) \cup \{-1\}$. **[12.88b]** $(-5; -9/2) \cup \{2\}$. **[12.88c]** $(2; 5/2) \cup \{-2\}$. **[12.88d]** $(5/4; 3/2) \cup \{2\}$. **[12.89a]** $\pi + 2\pi k$. **[12.89b]** $2\pi k$. **[12.90]** $a = \pm\sqrt{2}$. **[12.91]** $m = -1/3$. **[12.92]** $1 < a < \sqrt{2} \Rightarrow 8$ решений; $a = \sqrt{2}$, $a = 1 \Rightarrow 4$ реш. $a < 1, a > \sqrt{2} \Rightarrow$ нет реш. **[12.93]** $a = 0$; $a = -1/4$. **[12.94]** $a = 1/5$. **[12.95a]** $a = 5/2$. **[12.95b]** $a = 1/4$. **[12.95c]** $a = 1/30$. **[12.96a]** $a < \frac{-3-\sqrt{5}}{16}$. **[12.96b]** $a > \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. **[12.96c]** $\frac{-1-\sqrt{2}}{2} < a < \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$. **[12.96d]** $a > \frac{7}{4}$. **[12.97]** $a = \pm 1/2$; $a = \pm 1/3$. **[12.98]** $a = 0$. **[12.99]** $1/2 \leqslant a \leqslant 3/2$. **[12.100]** $a = -1/4$; $a \geqslant 0$. **[12.101]** $a \neq 0 \Rightarrow 2$ реш. $a = 0 \Rightarrow 1$ реш.; можно триг. заменой. **[12.102a]** $a = \pm 1$; $a = \pm 2/\sqrt{5}$. **[12.102b]** $a = 1$; $a = 2$; $a = 1 \pm 2/\sqrt{3}$. **[12.102c]** $a = \pm 1$; $a = \pm\sqrt{5}/2$. **[12.103]** $a \neq 0 \Rightarrow (a;0)$; $(0;a)$; $a = 0 \Rightarrow (c;-c)$, где $c \in R$. **[12.104a]** 4/3. **[12.104b]** 4/7. **[12.104c]** $-3/2$. **[12.105a]** $(-3; 0]$. **[12.105b]** $(-1; 2]$. **[12.106]** $a > -9/2$; можно триг. заменой. **[12.107]** $|a| \geqslant \sqrt{2}$; триг. замена. **[12.108]** $\{-1\} \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$. **[12.109]** $a = 2$. **[12.110]** $a = 0$; $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi; 0; 0\right)$; $a = 4$; $(2\pi k; 0; 2)$. **[12.111]** $\frac{5-3\sqrt{2}}{4}$; $\frac{15+3\sqrt{13}}{8}$. **[12.112]** 0.4 или 2.8. **[12.113]** $a = -1/4$; $a = -1/8$. **[12.114]** $[2; 34/9)$. **[12.115]** $\{-1.25\} \cup (-1; 5]$. **[12.116]** $\{0; \quad -\frac{2}{7}\} \cup \left(\frac{-2-\sqrt{3}}{4}; -\frac{1}{2}\right]$. **[12.117]** -18; 0; $\frac{1}{16}$; $\frac{3}{8}$; 1. **[12.118]** $\left[-6; 1-\sqrt{13}\right] \cup \left[\sqrt{13}-1; 6\right]$. **[12.119a]** $50 \arcsin\frac{3}{5} - 24 = \frac{25}{2}\pi - 50 \operatorname{arctg}\frac{1}{7} - 24$. **[12.119b]** $2\sqrt{15} +$

$32\arcsin\frac{1}{4}$. **[12.119c]** $\frac{25}{2}\arccos\frac{3}{5} - 6$. **[12.119d]** $18\arcsin\frac{1}{3} + 4\sqrt{2}$. **[12.120a]** $\frac{625}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{12}{5} + \operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right) - 72\pi$. **[12.120b]** $25\operatorname{arctg}\sqrt{2} + 20 + \frac{25\sqrt{2}}{3}$. **[12.120c]** $32\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}3\right) - \frac{9}{2}\pi$. **[12.120d]** $4\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{5}}{3} + 4$. **[12.121a]** $\{(a+13)^2 + b^2 = 169\} \setminus \{(-1;5)\}$; прямые $a = 0$; $b = 2a + 7$; $b = -\frac{60}{91}a + 7$. **[12.121b]** парабола $\{b = \frac{1}{12}(a^2 - a + 6)\}$ без точки $\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{16}\right)$; прямые $a = -6$; $b = -\frac{13}{12}a - \frac{5}{2}$; $b = -\frac{11}{24}a + \frac{5}{4}$. **[12.122a]** $a = -1/4$. **[12.122b]** $R = 1/10$. **[12.123]** 2; замена $u = x + y$; $v = x - y$. **[12.124]** а) это параболы $x = \frac{-9y^2 - y + 9}{2}$ и $y = x^2 - 2x$; б) $\left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{161}{81}$. **[12.125]** $(-\infty; 1)$. **[12.126]** $a = 3$; $\frac{7\ln 6 - 10}{3}$. **[12.127]** $[1;2) \cup (4;5]$. **[12.128]** $[25;90]$. **[12.129a]** $(-\infty; -8/7)$. **[12.129b]** $(-\infty; -3/2) \cup (-3/2; -11/8)$. **[12.129c]** $(1/2; 2/3) \cup (2/3; \infty)$. **[12.130a]** -7; $-109/7$. **[12.130b]** $a = -82/9$. **[12.130c]** -5; $-5/13$. **[12.131a]** 2; 9/2. **[12.131b]** 3; 25/3. **[12.132a]** 0; $-1/2$; 3/2. **[12.132b]** 0; 1; $-3/2$; -3. **[12.133a]** $(a;b) = (0;0)$ или $(0;-4)$. **[12.133b]** $(a;b) = (1;-1)$. **[12.134a]** $a \in \left(-13 + 3\sqrt{20}; 7 - \sqrt{20}\right)$. **[12.134b]** $a \in (-1/3; -1/4)$. **[12.135]** $z = \sqrt{5}$; выделить полные квадраты. **[12.136]** $a \geqslant 3/4 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$; $x = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$; $-\frac{1}{4} \leqslant a < \frac{3}{4} \Rightarrow$ только первая пара; при ост. a – нет реш.; решить отн. a, разложить на множители. **[12.137]** $\alpha \neq 0$; $\alpha \neq 1$; $\alpha \neq -3/4$. **[12.138a]** $\sqrt{3}|a| - 2$ при $|a| \geqslant 2\sqrt{3}$; $a^2/4 + 1$ при $2 \leqslant |a| < 2\sqrt{3}$; $|a|$ при $|a| < 2$. **[12.138b]** $-4a^2 + 3$ при $a \in (-\infty; -1] \cup (-1/2; 1/2]$; $8a + 7$ при $a \in (-1; -3/4]$; $-4|a| + 4$ при $a \in (-3/4; -1/2] \cup (1/2; \infty)$. **[12.139a]** $0 < x \leqslant \sqrt{32}$. **[12.139b]** $0 < x \leqslant \sqrt{35}$. **[12.139c]** $0 < x \leqslant \sqrt{60}$. **[12.139d]** $0 < x \leqslant \sqrt{96}$. **[12.140]** $[3; +\infty)$. **[12.141]** $[5/6; 1) \cup (1; 3/2]$. **[12.142]** $a \in (5/11; 6/13]$. **[12.143]** $(\pm 3; \pm 3)$; $(\pm 2\sqrt{3}; \pm\sqrt{3})$. **[12.144a]** $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$. **[12.144b]** $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. **[12.145a]** $a \leqslant -3$; $a \geqslant 1$. **[12.145b]** при всех a, b — серия $\pi/6 + \pi k/3$; при $a = b \neq 0$ — серия $\pi/4 + k\pi$; при $a = -b \neq 0$ — серия $-\pi/4 + \pi k$. При $a = b = 0$ все x, кроме $\pi n/3$. **[12.146]** $-\pi/3$; 0; $\pi/3$. **[12.147a]** $a \geqslant \sqrt{3}/3$; экстрем. **[12.147b]** $a \geqslant 1/3$; экстрем. **[12.148a]** $5\pi/6 + 2\pi n$; $\pi/18 + 2\pi n$; $13\pi/18 + 2\pi n$. **[12.148b]** $\pi/12 + 2\pi n$;

$3\pi/4+2\pi n$. **[12.149]** $a=1$. **[12.150]** $A=-4$; $B=1/2$; $\varphi=-\pi/2-\pi/3$; $\psi=\pi/2-2\pi/3$; $C=9/2$. **[12.151]** $a=\pi/2+2\pi n$; $n\in Z\Rightarrow 3\pi/2$; иначе решений нет. **[12.152]** $\{3\}\cup\left[\sqrt{10};\sqrt{11}\right)$. **[12.153]** $a=-2$; $a=1$. **[12.154]** $\pm 1/6$; $\pm\sqrt{2}/6$. **[12.155]** $k\in\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2(1/3)}{2};1\right]$; решать: $\operatorname{tg}\frac{t}{2}=k\sin t$, где $t=\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{2}{3}\right]$. **[12.156]** $\left(-\infty;-\sqrt{13}\right]\cup\left[\frac{11}{3};+\infty\right)$. **[12.157]** а) $|a|\leqslant\sqrt{26}+1$; б) $|a|\leqslant\sqrt{26}-1$. **[12.158]** $(1;5)$. **[12.159]** $(2;+\infty)$. **[12.160]** $a\in[-2;0)\cup\left(9;\frac{4}{3}\right]$. **[12.161a]** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. **[12.161b]** $(-1;1]$. **[12.162]** 0; 2; $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **[12.163a]** $a\leqslant -4$; $a=1$; $8/3\leqslant a<4$; $a>4$. **[12.163b]** $a\leqslant -3$; $a=-1$; $3/5\leqslant a<3$; $a>3$. **[12.163c]** $a\leqslant -4$; $a=-1$; $8/5\leqslant a<4$; $a>4$. **[12.164]** $a=2$. **[12.165]** $a=2$. **[12.166]** $a=1\Rightarrow\left(\operatorname{tg}\frac{\pi(1-\sqrt{7})}{4},\cos\frac{\pi(1+\sqrt{7})}{4}\right)$. **[12.167]** $-\frac{1}{3}$; $-\frac{5}{3}$; ± 1; $\pm\sqrt{3}$. **[12.168]** $a\geqslant 0$. **[12.169]** $a\in\left(0;\frac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$. **[12.170]** $c\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\{0\}\cup[1;+\infty)$. **[12.171]** $a\in(4;\infty)$. **[12.172]** $[17;+\infty)$. **[12.173]** $[-4;4]$. **[12.174a]** $a\geqslant 12$. **[12.174b]** $a\geqslant 2\sqrt{2}+\frac{1}{2}$. **[12.175]** $a=0\Rightarrow$ нет решений; $a>0\Rightarrow x<-2+\log_3 a$; $a<0\Rightarrow x<\log_3(-a)$. **[12.176]** $a\geqslant 2$. **[12.177]** $a=1$. **[12.178]** $0<a\leqslant 1$. **[12.179]** $a\leqslant 0\Rightarrow(-\infty;\infty)$; $a>0\Rightarrow(-\infty;-2-\log_2 a)\cup(3-\log_2 a;\infty)$. **[12.180]** $a\neq 0\Rightarrow(-\infty;-|a|)\cup(|a|;\infty)$; $a=0\Rightarrow(-\infty;\infty)$ кроме $x=0, x=1$. **[12.181]** $a\in(-\infty;-3)\cup\{-1\}\cup[3;+\infty)$. **[12.182]** $a\in[1;2)\cup(2;3]$; $t=\frac{x+a}{a-2}$. **[12.183]** $\left[-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right]$. **[12.184a]** $(-3;0]$. **[12.184b]** $(-1;2]$. **[12.185]** $a=-3$; $a=1$. **[12.186]** $(-2;-1)\cup\{2\}$. **[12.187a]** $a\in\left[\frac{5}{12};\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{6};+\infty\right)$. **[12.187b]** $a\in(0;1)\cup\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$. **[12.188]** $|a|<2\Rightarrow$ нет реш.; $|a|=2\Rightarrow x=1$; $|a|>2\Rightarrow\frac{|a|\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$. **[12.189]** $0<a<1, a>1\Rightarrow x=1+\sqrt{1+a}$; $a\leqslant 0, a=1\Rightarrow$ нет реш. **[12.190a]** $a\leqslant 1\Rightarrow\left(-\infty;1-\sqrt{1+8^a}\right]\cup(4;\infty)$; $a\geqslant 1\Rightarrow\left(-\infty;1-\sqrt{1+8^a}\right]\cup\left[1+\sqrt{1+8^a};\infty\right)$. **[12.190b]** при $a\leqslant 3$—$(-\infty;-1)\cup\left[2+\sqrt{2+2^a};\infty\right)$; при $a>3$—$\left(-\infty;2-\sqrt{1+2^a}\right]\cup\left[2+\sqrt{1+2^a};\infty\right)$. **[12.190c]** при $a\leqslant 1$—$\left(2;1+\sqrt{1+8^a}\right]$; при $a>1$— $\left[1-\sqrt{1+8^a};-2\right)\cup\left(2;1+\sqrt{1+8^a}\right]$.

[12.191a] $a \in (-\infty;0) \cup \{\frac{1}{2}\}$. **[12.191b]** $a \in (-\infty;-1]$. **[12.191c]** $a \in (-\infty;-1) \cup \{-\frac{3}{4}\}$. **[12.191d]** $a \in (-\infty;5]$. **[12.192]** $a \in [-1;2) \cup \{-2\}$. **[12.193a]** $|a| \geqslant 2$. **[12.193b]** $a \in \left[\frac{2}{3};1\right)$. **[12.194a]** $\left[-3;\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$. **[12.194b]** $\left[-4;\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$. **[12.194c]** $\left[-6;\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)$. **[12.195]** $x=1$. **[12.196a]** $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}};\infty\right)$. **[12.196b]** $\left[-\frac{11}{14};\frac{11}{14}\right]$. **[12.196c]** $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right] \cup \{-\sqrt{\frac{2}{3}}\} \cup \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right] \cup \{\sqrt{\frac{2}{3}}\} \cup \left[\sqrt{6};\infty\right)$. **[12.197a]** $0 \leqslant a < \log_2 3$. **[12.197b]** $-\log_2 6 < a \leqslant -1$. **[12.197c]** $a \in (0;1]$. **[12.198a]** $[-1;0) \cup \left(0;1-\frac{\sqrt{14}}{4}\right]$. **[12.198b]** $\left[-\frac{1}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{\sqrt[3]{37}}{2}-1\right]$. **[12.198c]** $\left[3+\frac{\sqrt{2}}{2};4\right) \cup \left(4;3+\sqrt{14}\right]$. **[12.199a]** $\left(-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}};-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3};\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)$. **[12.199b]** $\left(-\sqrt{4+\sqrt{5}};-\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6};\sqrt{4+\sqrt{5}}\right)$. **[12.200]** $a<-1$, $a \neq -2 \Rightarrow 2$ реш.; $a>0$, $a \neq 1 \Rightarrow 2$ реш.; $-1 \leqslant a \leqslant 0 \Rightarrow$ или $a=-2 \Rightarrow$ нет реш. **[12.201]** $a \in (-1;0]$. **[12.202]** $[1;2) \cup (2;3)$. **[12.203]** $0<a<1$; $1<a \leqslant \frac{81}{4}$. **[12.204a]** $0<a<\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}<a \leqslant \frac{1}{3}$. **[12.204b]** $2 \leqslant a < \frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}<a<5$. **[12.204c]** $\frac{3}{2}<a<2$, $2<a<4$. **[12.205]** $0<a<1 \Rightarrow 2$ реш.; $a \leqslant 0$, $a \geqslant 1 \Rightarrow 0$ реш. **[12.206]** $a \geqslant 10^{1-\sqrt{3}}$. **[12.207]** $a=-1$. **[12.208a]** $\frac{9\pi}{13}$; $\frac{15\pi}{13}$. **[12.208b]** $\frac{9\pi}{5}$; $\frac{15\pi}{5}$; 5π. **[12.209]** $[2;2.5)$. **[12.210]** $a \in \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2};5\right]$. **[12.211]** $[-9/10;0) \cup (2;9/4) \cup (9/4;19/8)$. **[12.212]** $a \in (-\infty;-1] \cup \{0\} \cup (2;+\infty)$. **[12.213]** $(1/15;1/8) \cup (1/8;4/15] \cup \{1/2\} \cup [1;4)$. **[12.214]** $(-\infty;-0.99) \cup (-0.02;0) \cup (0;0.01)$. **[12.215]** $(1/4;1/2) \cup \{1\}\,(3/2;4]$. **[12.216]** $1/3$. **[12.217]** $(-2;0] \cup (3/2;2) \cup (5/2;3) \cup [15/2;\infty)$. **[12.218]** $(-3;0] \cup [5;6)$. **[12.219a]** π; $\pi+1$; $\pi+3$; выделив полный квадрат в знаменателе под логарифмом, убедиться, что оба слагаемых неотрицательны, т.е. оба равны нулю. **[12.219b]** $2\pi-8$; $2\pi-1$; 2π. **[12.220]** $a \in [-1/4;0]$. **[12.221]** $a \in [-1/12;0]$. **[12.222]** $a=\frac{1}{2} \Rightarrow 0$; $2 \pm \sqrt{2}$; $a=1 \Rightarrow \pm 1$; 3; $a=\frac{3}{2} \Rightarrow \pm\sqrt{2}$; 2. **[12.223]** $(-\infty;-9/40)$. **[12.224]** $a>2\pi-1/8$; переписывается в виде $\frac{8}{3}t+\sin(2t+\frac{\pi}{4}) < \frac{4}{3}t+\sin(t+\frac{\pi}{4})$, где $t=x^2-ax-\frac{\pi}{4}$; отсюда $f(2t)<f(t)$. **[12.225a]** $a \in [-5/4;-1]$.

[12.225b] $a \in [-1/20; 0]$. **[12.226]** $a \geqslant 0 \Rightarrow (\sqrt{2a}; 2a + \sqrt{2a})$; $(-\sqrt{2a}; 2a - \sqrt{2a})$. **[12.227]** $(-\infty; 0) \cup [1/2; +\infty)$; $f(t) = t - \sin t$. **[12.228]** $a = -2$; $a = 1$. **[12.229]** $a = 2$. **[12.230]** $b = \pi n$. **[12.231]** $b = 2$. **[12.232]** 0; $-2/5$. **[12.233]** $b = 3$. **[12.234]** $a = 0$; $a = -2/7$. **[12.235]** $a = \pm 1$; левая часть — четная. **[12.236]** $a = 2$; уравнение не меняется при замене x на $1/x$. **[12.237]** $a = 4$. **[12.238]** $a = b = -2$; система не меняется при перестановке x и y. **[12.239]** $a = 1$. **[12.240]** $a = 4/3$. **[12.241]** $\sqrt{3/2}$. **[12.242]** -4; 4; 6. **[12.243]** $b = 1/3$; система симметрична относительно новых переменных $u = x - 1$; $v = y + 2$. **[12.244]** $a = 1/8$. **[12.245]** $b = 1$. **[12.246a]** $a = 2$. **[12.246b]** 1/2; 1; 3/2. **[12.246c]** $a = 1/2$. **[12.247]** $a = 1$. **[12.248]** $a = 3/2$. **[12.249]** $a = 5/8$. **[12.250]** $a = 0$. **[12.251a]** $a = -2$. **[12.251b]** $a = 3$. **[12.252a]** Любое иррациональное число. **[12.252b]** Любое иррациональное число. **[12.252c]** Если $a = \frac{4n}{4k+1}$; $k, n \in Z$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, иначе нет решения. **[12.253]** $a = -1$; $a = 1/5$. **[12.254]** 0; $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **[12.255]** $\left(-13 - \sqrt{57}; 8\right)$. **[12.256]** $(-\infty; 0] \cup \left(2 + \sqrt{2}; +\infty\right)$. **[12.257]** $\left[3\sqrt{2}; 6\right]$. **[12.258]** $\{0\} \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \{1.5\}$. **[12.259a]** $a = 2/3$. **[12.259b]** $a = 1/3$. **[12.259c]** $a = 1/4$. **[12.260]** $a \in \left[\frac{11-\sqrt{77}}{2}; 2\right] \cup \left[9; \frac{11+\sqrt{77}}{2}\right]$. **[12.261a]** $a > 5/13$. **[12.261b]** $a > 3/82$. **[12.262a]** $b = 1/9$. **[12.262b]** $a = 1/16$. **[12.263a]** $a \in [-12/5; 0]$. **[12.263b]** $a \in [1; 17/5]$. **[12.264a]** $p = -1/3$ или $p = 2$. **[12.264b]** $p = -1$ или $p = 1/3$. **[12.265a]** $a = -1 \Rightarrow x = -1/2$; иначе нет решения. **[12.265b]** при $a = 2$: $x = -1$, иначе нет решения. **[12.266]** при $k = 4N : x = \pi/2 + 2m\pi$; иначе нет решения. **[12.267]** $a = (\sqrt[3]{5} - 1)^3/2$; один корень $x = 0$, затем разделить на $\sqrt[3]{x}$ и перейти к переменной $t = x^2 + 1/x$. **[12.268]** $a > 48$; выразить a через x, исследовать функцию. **[12.269]** $a \geqslant \frac{20+4\sqrt{7}}{3\sqrt{3\sqrt{7}-3}}$. **[12.270]** Например, $A = 4$; $B = 1/2$; $\varphi = \pi/6$; $\psi = -\pi/6$, $C = 9/2$. **[12.271]** 0; $2\sin 1$.

Математика является меньше знанием, чем умением.

Ф. Дж. Дэйвис

Глава 13

Предел

13.1. Общие свойства последовательностей

Доказать, что последовательность x_n ограничена:

13.1a. $x_n = \dfrac{(-1)^n + 10}{\sqrt{n^2+1}}$.

13.1b. $x_n = \dfrac{2n^2 - 1}{2 + n^2}$.

13.1c. $x_n = \dfrac{1 - n}{\sqrt{n^2+1}}$.

13.1d. $x_n = \dfrac{n + (-1)^n}{3n - 1}$.

13.1e. $x_n = \dfrac{5n^6 + 6}{(n^4+1)(n^2-2)}$.

Является ли последовательность x_n ограниченной?:

13.2a. $x_n = n^{(-1)^n}$?

13.2b. $x_n = (1-n)^{\sin(n\pi/2)}$?

13.2c. $x_n = \dfrac{n - n^4}{(n+2)^3}$?

Доказать, что последовательность монотонна, начиная с некоторого номера:

13.3a. $x_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$.

13.3b. $x_n = \dfrac{3n+4}{n+2}$.

13.3c. $x_n = \dfrac{100n}{n^2+16}$.

13.3d. $x_n = n^3 - 6n^2$.

13.3e. $x_n = \dfrac{n^3}{n^2-3}$.

13.3f. $x_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+7}}$.

13.3g. $x_n = \dfrac{6^{n+1}-5^{n+1}}{6^n+5^n}$.

13.3h. $x_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Прямое использование определения предела:

13.4. Найти $N(\epsilon)$ для последовательности $x_n = \dfrac{2}{\sqrt{2n-1}}$.

13.5. Найти $N(\epsilon)$ для последовательности $x_n = \dfrac{n+10}{2n-1}$.

13.6. Доказать, что число 3 не является пределом последовательности $x_n = \dfrac{2-\cos\pi n}{2+\cos\pi n}$.

13.7. Доказать, что число 1/2 не является пределом последовательности $x_n = \cos(\pi n/3)$.

13.8* [Кудр]**.** Привести пример последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условию:

1) $\forall m\,\exists n :\ x_m \neq x_n$;
2) $\exists N\,\forall n \geqslant N :\ x_n < x_N$;
3) $\{\exists N_1\,\forall n \geqslant N_1 :\ x_{N_1} > x_n\}\&\{\exists N_2\,\forall n \geqslant N_2 :\ x_{N_2} < x_n\}$;
4) $\exists N\,\forall n > N\,\forall m > n :\ x_n < x_m$;
5) $\forall n\,\exists m > n\,\exists k > n :\ x_m < x_n < x_k$.

13.9* [Кудр]**.** Пусть $\forall n\, x_n > 0$, $\lim x_n = 0$. Верно ли, что $\forall N\ \exists n_0 \geqslant N$ $\forall n > n_0$: $x_n < x_{n_0}$?

13.10* [Кудр]**.** Пусть $\forall n\, x_n > 0$, $\lim x_n = 0$. Верно ли, что $\forall N\ \exists n_0 \geqslant N$ $\forall n$: $\{1 \leqslant n < n_0 \Rightarrow x_n > x_{n_0}\}$?

13.11* [Кудр]**.** Пусть K – множество всех сходящихся последовательностей, а $K_1, K_2, \ldots, K_8$ – множества всех последовательностей, удовлетворяющих соответственно условиям:

1. $\exists \epsilon > 0\,\exists N\,\exists n \geqslant N :\ |x_n| < \epsilon$.
2. $\exists \epsilon > 0\,\exists N\,\forall n \geqslant N :\ |x_n| < \epsilon$.
3. $\exists \epsilon > 0\,\forall N\,\exists n \geqslant N :\ |x_n| < \epsilon$.

4. $\forall \epsilon > 0\, \exists N\, \exists n \geqslant N : |x_n| < \epsilon$.
5. $\exists \epsilon > 0\, \forall N\, \forall n \geqslant N : |x_n| < \epsilon$.
6. $\forall \epsilon > 0\, \exists N\, \forall n \geqslant N : |x_n| < \epsilon$.
7. $\forall \epsilon > 0\, \forall N\, \exists n \geqslant N : |x_n| < \epsilon$.
8. $\forall \epsilon > 0\, \forall N\, \forall n \geqslant N : |x_n| < \epsilon$.

Какие из следующих включений верны: а) $K_6 \subset K_2$; б) $K_2 \subset K_6$; в) $K_7 \subset K_2$; г) $K_8 \subset K$; д) $K \subset K_8$? е) Какие из множеств $K_j\,(j = 1, 2, \ldots, 8)$ являются подмножествами K? ж) Какие из множеств $K_j\,(j = 1, 2, \ldots, 8)$ содержат как сходящиеся, так и расходящиеся последовательности? з) Какие из множеств $K_j\,(j = 1, 2, \ldots, 8)$ содержат неограниченные последовательности? и) Какое из множеств $K_j\,(j = 1, 2, \ldots, 8)$ содержит вообще все последовательности?

13.12* [Кудр]**.** Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию $\forall \epsilon > 0\, \exists a\, \exists N\, \forall n \geqslant N : |x_n - a| < \epsilon$,
то $\{x_n\}$ – сходящаяся посл-ть.

13.2. Отыскание предела: главного – за скобку

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, **где:**

13.13. $x_n = \dfrac{2-n}{n+1} + \dfrac{n \cdot 2^{(-n)}}{n+2}$.

13.14. $x_n = \dfrac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2}$.

13.15. $x_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1} - \dfrac{3n^2+1}{6n+1}$.

13.16. $x_n = \dfrac{(-1)^n + 1/n}{1/n^2 - (-1)^n}$.

13.17. $x_n = \dfrac{3n}{5+3^{n+1}}$.

13.18. $x_n = \dfrac{2^{n+2}+3^{n+3}}{2^n+3^n}$.

13.19. $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} \cdot 6^{n+1}}$.

13.20. $x_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$.

13.21. $x_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

13.22. $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n}$.

13.23. $x_n = \dfrac{n^3 + 3^n}{n + 3^{n+1}}$.

13.24. $x_n = \dfrac{1}{(0.3)^n \cdot n!}$.

13.25. $x_n = \dfrac{2^{n/2} + (n+1)!}{n(3^n + n!)}$.

13.26. $x_n = \dfrac{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2} + \sqrt{n-2}}$.

13.27. $x_n = \dfrac{n\sqrt[4]{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n})\sqrt{5 - n + n^2}}$.

13.28. $x_n = \dfrac{\sqrt{n^6+4} + \sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6} - \sqrt{n-6}}$.

13.29. $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4 - n + 1}}$.

13.30. $x_n = \dfrac{\sqrt{n^7+5} - \sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5} + \sqrt{n-5}}$.

13.3. Отыскание пределов с $\sqrt[n]{\ }$.

13.31. $x_n = \sqrt[n]{3^n + n \cdot 2^n}$.

13.32. $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^2 + 4^n}{n + 5^n}}$.

13.33. $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{10}{n} - \dfrac{1}{1.2^n}}$.

13.34. $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{10} - 2}{1 + \sqrt[n]{0.01}}$.

13.35. $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{2n+5}{n-0.5}}$.

13.36. $x_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$.

13.37'. $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{3} - 1}{\sqrt[n]{9} - 1}$.

13.38'. $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{8} - 1}{\sqrt[n]{2} - 1}$.

13.39. $x_n = \sqrt[n^2]{n}$.

13.40. $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{n^3} + \sqrt[n]{7}}{3\sqrt[n]{n^2} + \sqrt[n]{3n}}$.

13.41. $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n \cdot n! + 4^n}{4^n \cdot (n+1)! + 5^n}}$.

13.42. $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{4^n \cdot (n+1)! + 3^n}{3^n \cdot n! + 6^n}}$.

13.4. Отыскание предела с комбинацией радикалов

13.43. $x_n = \sqrt{n^2 - 1} - n - 1$.

13.44. $x_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$.

13.45. $x_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n$.

13.46. $x_n = \dfrac{n}{2}\left(\sqrt[3]{1 + \dfrac{2}{n}} - 1\right)$.

13.47. $x_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$.

13.48. $x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}$.

13.49. $x_n = \sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{n(n-1)}$.

13.50. $x_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1984} - n$.

13.51. $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3 - n} - n}{\sqrt[5]{n^5 + n^3} - n}$.

13.52'. $x_n = (\sqrt{n^2 + 3n} - 3n + 2\sqrt{n^2 - n})$.

13.53. $x_n = \left(\sqrt{n\,(n+2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 3}\right)$.

13.54'. $x_n = n^{3/2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n})$.

13.55'. $x_n = n\left(\sqrt[4]{1 + \dfrac{2}{n}}\,\sqrt[3]{1 - \dfrac{3}{n}} - 1\right)$.

13.56'. $x_n = n\left(\sqrt[3]{1 + \dfrac{2}{n}}\,\sqrt[4]{1 - \dfrac{3}{n}} - 1\right)$.

13.57'. $x_n = n^{3/2}(\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n-2} - 3\sqrt{n-1})$.

13.58. $x_n = n^{3/2}(2\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1} - 3\sqrt{n+1})$.

13.59*. $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$.

13.5. Пределы e-образных последовательностей (типа 1^∞)

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где:

13.60. $x_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^n$.

13.61. $x_n = \left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$.

13.62. $x_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$.

13.63'. $x_n = \left(\dfrac{2n+3}{n^2}\right)^n$.

13.64'. $x_n = \left(\dfrac{n+10}{2n-1}\right)^n$.

13.65'. $x_n = \left(\dfrac{4n-3}{3n+1}\right)^n$.

13.66'. $x_n = \left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n}} + \dfrac{2}{n}\right)^n$.

13.67. $x_n = \left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

13.68'. $x_n = \left(\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{n}} - 1\right)^n$.

13.69'. $x_n = \left(\sqrt{4+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\,\right)^n$.

13.6. Рекуррентные последовательности

(Задачи взяты из [Кудр.])

Исследовать последовательность $\{x_n\}$ на сходимость, и если предел существует, то найти его:

13.70. $x_1 = -\dfrac{7}{13}$; $x_{n+1} = \dfrac{1+x_n}{2x_n}$.

13.71. $x_1 = \dfrac{6}{7}$; $x_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{x_n}$.

13.72. $x_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\cdots+\sqrt{6}}}}$. ($n$ корней).

13.73. $x_1 = 1;\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{125}{x_n^2}\right)$.

13.74. $x_1 = \dfrac{1}{2};\ x_{n+1} = (1 - x_n)^2$.

13.75. $x_1 \in (0;1);\ x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$.

13.76. $x_1 > 0;\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, где $a > 0$.

13.77. $x_1 = a,\ 0 < a < 1,\ x_{n+1} = 1 - x_n^2$.

13.78. $x_1 = \dfrac{8}{17},\ x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{3}{2}$.

13.79. $x_1 = a,\ a > -1,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$.

13.80'. Пусть $x_1 = \sqrt{2};\ x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}}$. Доказать, что последовательность сходится.

13.81*. Пусть $x_1 = a,\ 0 < a < 1;\ x_{n+1} = 1 + qx_n^2$. При каких $q \in [0;1]$ последовательность сходится?

13.82*. Последовательности x_n и y_n удовлетворяют условиям: $x_1 = a > 0;\ y_1 = b > 0;\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n);\ y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$. Доказать, что последовательности x_n и y_n имеют общий предел и найти его.

13.83*. Пусть $x_1 = a,\ x_2 = b;\ x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$. При каких a и b эта последовательность сходится или расходится?

13.84*. Пусть $x_1 = a,\ x_2 = b;\ x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$. При каких a и b эта последовательность сходится или расходится?

13.7. Пределы функций

Вычислить указанные пределы:

13.85. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

13.86. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 12x + 16}{x^2 - 4}$.

13.87. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2}{x^3 - 3x - 2}$.

13.88. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{4 - \sqrt{21 - x}}{\sqrt[3]{x - 13} + 2}$.

13.89. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{29-x}}{x-\sqrt{2x}}$.

13.90. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1-x}}$.

13.91a. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$.

13.91b. $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+5x}+x)$.

13.92. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2})$.

13.93. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt{1+x}+1}{2-2\sqrt{1+x}+x}$.

13.94. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt{1+x}+1}{2-2\sqrt{1-x}-x}$.

13.95. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{4x^4+1}}{x}$.

13.96. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{4x^4+1}}{x}$.

13.97. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^5+2}}{x}$.

13.98. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})$.

13.99. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})$.

13.100. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

13.101a. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{1+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1})$.

13.101b. $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{1+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1})$.

13.102. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+x-1})$.

13.8. Пределы функций, сводящиеся к замечательным

Вычислить указанные пределы:

13.103. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$.

13.104. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right).$

13.105. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}.$

13.106. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}.$

13.107. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}.$

13.108. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg} x^2}.$

13.109. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}.$

13.110. $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{1-\operatorname{ctg}\pi x}{\ln\operatorname{tg}\pi x}.$

13.111. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg} x\right).$

13.112. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}.$

13.113. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}.$

13.114. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin\bigl(\pi/6+x\bigr)\sin\bigl(\pi/6+2x\bigr)-1}{\sin x}.$

13.115. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(1+x)\operatorname{tg}(1-x)-\operatorname{tg}^2 1}{\operatorname{tg}^2 x}.$

13.116. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2(\cos(1/x)-\cos(3/x)).$

13.117. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1+\cos x}.$

13.118. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}).$

13.119. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-3\arcsin 4x}{\sin 5x-6\operatorname{arctg} 7x}.$

13.120. $\lim\limits_{x\to \infty} x\bigl(3^{1/x}-1\bigr).$

13.121. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\bigl(4^{1/x}-4^{1/(x+1)}\bigr).$

13.122’. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi-4\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}{x}.$

13.123. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\lg x - 1}{x - 10}$.

13.124. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}$.

13.125. $\lim\limits_{x\to \infty} x\log_2 \dfrac{10+x}{5+x}$.

13.126. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$.

13.127. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$.

13.128. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (1+\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

13.129. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{-1/x^2}$.

13.130. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 \ln\cos\frac{\pi}{x}$.

13.9. Ответы

[13.9] Да. **[13.10]** Да. **[13.11]** а), г) — верны; б), в), д) — ложны; е) K_6 и K_8; ж) K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_7; з) K_1, K_3, K_4, K_7; и) K_1. **[13.13]** -1. **[13.14]** 1. **[13.15]** $-1/6$. **[13.16]** -1. **[13.17]** 0. **[13.18]** 27. **[13.19]** 1/6. **[13.20]** $-1/2$. **[13.21]** 1. **[13.22]** 1/2. **[13.23]** 1/3. **[13.24]** 0. **[13.25]** 1. **[13.26]** $+\infty$. **[13.27]** 9. **[13.28]** $+\infty$. **[13.29]** 5. **[13.30]** $+\infty$. **[13.31]** 3. **[13.32]** 4/5. **[13.33]** 1. **[13.34]** $-1/2$. **[13.35]** 1. **[13.36]** 3. **[13.37]** 1/2. **[13.38]** 3. **[13.39]** 1. **[13.40]** 1/2. **[13.41]** 3/4. **[13.42]** 4/3. **[13.43]** -1. **[13.44]** 1. **[13.45]** 2/3. **[13.46]** 1/3. **[13.47]** 0. **[13.48]** 0. **[13.49]** 2. **[13.50]** 1/3. **[13.51]** $-5/3$. **[13.52]** 5/2. **[13.53]** 2. **[13.54]** $-15/4$. **[13.55]** $-1/2$. **[13.56]** $-1/12$. **[13.57]** $-3/4$. **[13.58]** $-3/4$. **[13.59]** 1. **[13.60]** e^2. **[13.61]** e^{-2}. **[13.62]** e^3. **[13.63]** 0. **[13.64]** 0. **[13.65]** $+\infty$. **[13.66]** $e^{5/3}$. **[13.67]** e^{-33}. **[13.68]** $e^{1/12}$. **[13.69]** e^3. **[13.70]** $\lim = 1$. **[13.71]** $\lim = 3$. **[13.72]** $\lim = 3$. **[13.73]** 5.

[13.74] Расходится. **[13.75]** 1. **[13.76]** $\sqrt{a}$. **[13.77]** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **[13.78]** -2. **[13.79]** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **[13.81]** $q \in [0; \frac{1}{4}]$. **[13.82]** $\sqrt{ab}$. **[13.83]** сходится только при $a = b$. **[13.84]** сходится только при $a = b = 0$. **[13.85]** 5. **[13.86]** 0. **[13.87]** ∞. **[13.88]** 3/2. **[13.89]** 4/27. **[13.90]** 0. **[13.91a]** 1. **[13.91b]** $-5/2$. **[13.92]** 10/3. **[13.93]** 0. **[13.94]** 1/6. **[13.95]** $1 - \sqrt[4]{4}$. **[13.96]** $\sqrt[4]{4} - 1$. **[13.97]** -2. **[13.98]** $\sqrt{2}/8$. **[13.99]** $-\infty$. **[13.100]** 0. **[13.101a]** 3. **[13.101b]** -3. **[13.102]** 2/3. **[13.103]** -1. **[13.104]** 1/2. **[13.105]** $1/2\pi$. **[13.106]** 13/6. **[13.107]** 1/3. **[13.108]** 3/2. **[13.109]** 2. **[13.110]** 1. **[13.111]** 2. **[13.112]** $e^{1/e}$. **[13.113]** $-9/128$. **[13.114]** $3\sqrt{3}$. **[13.115]** $\operatorname{tg}^4 1 - 1$. **[13.116]** 2. **[13.117]** 14. **[13.118]** 0. **[13.119]** 10/37. **[13.120]** $\ln 3$. **[13.121]** $\ln 4$. **[13.122]** 2. **[13.123]** $1/(10\ln 10)$. **[13.124]** -7. **[13.125]** $5/\ln 2$. **[13.126]** 2. **[13.127]** 3/2. **[13.128]** e. **[13.129]** 2. **[13.130]** $-\pi^2/2$.

С чувством непреодолимого отвращения я отшатываюсь от достойного всякого сожаления зла– непрерывных функций, не имеющих производных.

Шарль Эрмит

Глава 14

Производная

14.1. Вычисление производной

Найти производную функции [Кузнецов]:

14.1. $y = \dfrac{1 + x^2 \operatorname{arctg} x^2}{\sqrt{1 + x^4}}$.

14.2. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}$.

14.3. $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{e^x - 3}{2}$.

14.4. $y = \arcsin \dfrac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{5x}}$.

14.5. $y = \dfrac{1}{\ln 4} \ln \dfrac{1 + 2^x}{1 - 2^x}$.

14.6. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$.

14.7. $y = \dfrac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$.

14.8. $y = \arccos \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}$.

14.9. $y = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{3x - 1}{\sqrt{6x}}$.

14.10. $y = x + \dfrac{8}{1 + e^{x/4}}$.

14.11. $y = \dfrac{(1 + x) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x}$.

14.12. $y = \arcsin \dfrac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$.

14.13. $y = e^{\sin x}\left(x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$.

14.14. $y = \sqrt{1-x^2} - x \arcsin \sqrt{1-x^2}$, $x > 0$.

14.15'. $y = x^{(e^x)}$.

14.16'. $y = x^{tgx}$.

14.17'. $y = \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \dfrac{b + a\cos x + \sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a + b\cos x}$.

14.18. $y = 2\arcsin \dfrac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2+24x+12}, \qquad 3x+4>0$.

14.19. $y = x\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

14.20. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

14.21. $y = \dfrac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \dfrac{9}{8}\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$.

14.22. $y = \sqrt{1-3x-2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x+3}{\sqrt{17}}$.

14.23. $y = 2\sqrt{e^x+1} + \ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$.

14.24. $y = \sqrt{(4+x)(1+x)} + 3\ln\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{1+x}\right)$.

14.25. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

14.26. $y = \frac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

14.27. $y = \ln\left(e^x+1\right) + \dfrac{18e^{2x}+27e^x+11}{6\left(e^x+1\right)^3}$.

14.28. $y = \frac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x$.

14.29. $y = \dfrac{1}{2}(x-4)\sqrt{8x-x^2-7} - 9\arccos\sqrt{\dfrac{x-1}{6}}$.

14.30. $y = 2\arcsin\dfrac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2+6x-3}, \qquad 3x+1>0$.

14.31. $y = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} - 2\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$.

14.32. $y = \dfrac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2} + \dfrac{1}{3x\sqrt{x}}.$

14.33. $y = (2+3x)\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}.$

14.34. $y = \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \ln\left(\sqrt{x+1}+1\right).$

14.35. $y = \sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}.$

14.36. $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x^2-1}\right)\operatorname{arctg} x.$

14.37. $y = x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) + \frac{1}{2}(\arcsin x - x).$

14.38. $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1} - \dfrac{\arccos x}{2x^2}.$

14.39. $y = 6\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}.$

14.40'. $y = x - \ln\left(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right).$

14.2. Исследование функций

(Задачи взяты из [Кудр.])
Исследовать указанные функции и изобразить эскиз графика :

14.41. $y = \dfrac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}.$

14.42. $y = \dfrac{20x^2}{(x-1)^3}.$

14.43. $y = \dfrac{x^3}{x-1}.$

14.44. $y = \dfrac{1+x^2}{1+(x-2)^2}.$

14.45. $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}.$

14.46. $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}.$

14.47. $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}.$

14.48. $y = \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}.$

14.49. $y = x + \dfrac{7}{x} - \dfrac{3}{x^2}.$

14.50. $y = (x+1)\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2.$

14.51. $y = \dfrac{x^4}{x^3+2}$.

14.52. $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$.

14.53. $y = \dfrac{x^5}{(x^2-1)^2}$.

14.54. $y = \dfrac{(x-1)^5}{(x-2)^4}$.

14.55. $y = 4\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^3}}$.

14.56. $y = \dfrac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|}$.

14.57. $y = (1+x)x^{2/3}$.

14.58. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

14.59. $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$.

14.60. $y = \sqrt{2x^3+9x^2}$.

14.61. $y = \sqrt{x^2-x^3}$.

14.62. $y = x^2\sqrt{x+1}$.

14.63. $y = x(x+1)^{2/3}$.

14.64. $y = \sqrt[4]{x^4-4x^3}$.

14.65. $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.

14.66. $y = \dfrac{x+8}{\sqrt{x^2+4x+16}}$.

14.67. $y = \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-1}}$.

14.68. $y = \sqrt{\dfrac{3x^2-4}{x^3}}$.

14.69. $y = (x+1)^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

14.70. $y = (x^2-2)e^{-2x}$.

14.71. $y = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

14.72. $y = \sin x \sin 3x$.

14.73. $y = -(x+1)e^{x+2}$.

14.74. $y = \dfrac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}$.

14.75. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

14.76. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.

14.77. $y = x^x$.

14.78'. $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

14.79'. $y = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

14.80'. $y = (x+3)e^{-\frac{1}{x}}$.

14.3. Правило Лопиталя

Найти следующие пределы [Кудр.]:

14.81. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{a^x-a^a}$.

14.82. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x^a-a^a}$.

14.83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

14.84. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\ln(1+x)}$.

14.85. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$.

14.86. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\ln x}$.

14.87. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$.

14.88. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x^2-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1}$.

14.89. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x^2}{x\cos x-\sin x}$.

14.90. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\ln(1+x)-x}{e^x-x-1}$.

14.91. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x}{x-\sin x}$.

14.92. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$; $a>0$.

14.93. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^3(1+x)}$.

14.94. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\arcsin x - \ln(1+x)}$.

14.95. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\alpha x^{\alpha+2} - (\alpha+1)x^{\alpha+1} + x}{(x-1)^2}$.

14.96. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{x - x^x}$.

14.97. $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)$.

14.98. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\sqrt{x}$.

14.99. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\pi - 2\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

14.100. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

14.101. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$.

14.102. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\pi} \arccos x\right)^{1/x}$.

14.103. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$.

14.104. $\lim\limits_{x\to +0} x^{x^x - 1}$.

14.4. Доказательство неравенств

Доказать следующие неравенства:

14.105 [Шар-11]**.** $\sqrt{1+x} \geqslant 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ при $x \geqslant 0$.

14.106 [Шар-11]**.** $\operatorname{tg} x \geqslant x + \dfrac{x^3}{3}$ при $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$.

14.107 [Шар-11]**.** $2x \ln x \leqslant x^2 - 1$ при $x \geqslant 1$.

14.108* [Шар-11]**.** $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 \geqslant \cos x$ при $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

14.109. Что больше: e^π или π^e?

14.110’ [Вавилов-3]. $\ln^2 n > \ln(n-1)\ln(n+1)$ при $n > 2$.

14.111’ [Вавилов-3]. Если $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ n \in N$, то

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \frac{x^n + y^n}{2}.$$

14.112 [Вавилов-3]. Если $0 < x < y < \pi/2$, то $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} < \dfrac{\operatorname{tg} y}{y}$.

14.113 [Вавилов-3]. Если $0 < x < y < \pi/2$, то $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{\sin y}{y}$.

14.114 [Вавилов-3]. $e^e \cdot \pi^\pi > e^{2\pi}$.

14.115 [Вавилов-3]. Если $0 < x < \pi/2$, то $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg} x + \dfrac{2}{3}\sin x > x$.

14.116 [Вавилов-3]. Если $0 < x < \pi/2$, то $\sin 2x < \dfrac{2}{3x - x^2}$.

14.117 [Вавилов-3]. Если $0 < x < \pi/2$, то $\operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x < x$.

14.118 [Вавилов-3]. $e^{2x} < \dfrac{1+x}{1-x}$ при $0 < x < 1$.

14.119 [Вавилов-3]. $\ln x \geqslant \dfrac{2x}{2+x}$ при $x \geqslant 0$.

14.5. Число корней

14.120 [Звавич]. Сколько корней имеет уравнение

$$4e^{-x}(x^2 + x - 5) = 1\ ?$$

14.121 [Звавич]. Сколько корней имеет уравнение

$$e^{x-1}(x^2 - 3x - 3) + 12 = 0\ ?$$

14.122 [Звавич]. Сколько корней имеет уравнение $x^3 - 3x^2 = a$ при $-4 < a < 0$?

14.123 [Звавич]. Сколько корней имеет уравнение $-x^3 + 3x^2 - 2 = a$ при $a < -2$?

14.124 [Звавич]. При каких значениях a уравнение $x^3 - 3x = a$ имеет одно решение?

14.125 [Вавилов-3]. Для каждого a укажите количество корней уравнения $ae^x = x^3$.

14.126 [Вавилов-3]. Найти все значения a ,при каждом из которых уравнение $3x^4 - 14x^3 - 45x^2 + a = 0$ имеет четыре различных корня.

14.127 [Звавич]. Для каждого a укажите количество корней уравнения
$$\frac{a}{2x+1} = e^{-x^2}.$$
14.128 [Звавич]. Для каждого a укажите количество корней уравнения
$$\ln^2 x = \frac{a}{x}.$$
14.129 [Вавилов-3]. Для каждого a укажите количество корней уравнения $x \ln x = a$.

14.130' [Вавилов-3]. При каком условии уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет: (1) один действительный корень; (2) три действительных корня?

14.6. Наибольшее и наименьшее значения функции

14.131 [Шар-11]. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 24x - \cos 12x - 3\sin 8x$ на отрезке $[-\pi/6; \pi/6]$.

14.132 [Шар-11]. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 18x - \sin 9x + 3\sin 6x$ на отрезке $[-7\pi/18; \pi/18]$.

14.133* [ЦыпПин]. Доказать, что для функции $f(x) = \cos x \sin 2x$ справедливо неравенство $\min\limits_{x\in[-\pi;\pi]} f(x) > -7/9$.

14.134 [Звавич]. Найдите множество значений функции
$$y = \cos x \cdot e^{1-\cos 2x}.$$
14.135 [Звавич]. При каких x наибольшее значение функции $f(t) = t^3 - 3t^2$ на отрезке $[x-1; x]$ больше числа (-4) ?

14.136 [Кудр]. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = (x-3)e^{|x+1|}$ на отрезке $x \in [-2; 4]$

14.137 [Кудр]. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = |x^2 + 2x - 3| + \dfrac{3}{2}\ln x$ на отрезке $x \in [1/2; 2]$

14.138 [Звавич]. Какие целые значения принимает функция $y = -9x\sqrt{2x+1}$ в промежутке $[-0.5; 0]$?

14.139 [Звавич]. Найти множество значений функции $y = x\sqrt{1-2x}$.

14.140 [Звавич]. При каких положительных k наибольшее значение функции $y = (k-x)\sqrt{x}$ равно $10\sqrt{5}$?

14.141 [Звавич]. При каких положительных значениях a наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x+a}$ равно $-6\sqrt{3}$?

14.142 [Звавич]. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \ln(-x)$ на отрезке $[-4; -0.5]$.

14.143 [Звавич]. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + e^{-x}$ на отрезке $[-\ln 4; \ln 2]$.

14.144 [Зввич]. Для каждого $a > -1$ найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 12x$ на отрезке $[-1; a]$.

14.145 [Зввич]. Для каждого $a > -2$ найдите наименьшее значение функции $y = 27x - x^3$ на отрезке $[-2; a]$.

14.146 [Зввич]. Найдите множество значений функции $y = 2\cos x - \sin 2x$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$.

14.147 [Зввич]. Определите координаты точки графика функции $y = 4 + \dfrac{9x}{x^2+2}$, сумма расстояний от которой до осей координат минимальна.

14.148 [Зввич]. Определите координаты точки графика функции $y = \ln(x+2) + \ln(x/8)$, сумма расстояний от которой до осей координат минимальна.

14.149 [МИФИ]. В координатной плоскости Oxy задана точка $M(2; 1)$ и выходящий из нее целиком лежащий в верхней полуплоскости луч $l(k)$ с угловым коэффициентом $k > 0$. Найти, при каких значениях k точка M среди всех точек луча $l(k)$ является ближайшей к параболе $y = 3x^2/4$.

14.150 [Плеханов]. Среди точек, лежащих на параболе $y = 2 - x^2/4$, найти ближайшую к точке $(8; 0)$.

14.151 [Плеханов]. Найти наименьшее расстояние от прямой $y = x + 1$ до параболы $y = x^2 + 2x + 5$.

14.152 [Шар-11]. Найдите наименьшее расстояние между точками M и N, если M и N лежат соответственно на кривых $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$.

14.153 [Шар-11]. Найдите площадь наибольшего прямоугольника, две вершины которого находятся на отрезке $[0; 3]$ оси абсцисс, а две оставшиеся – на графике $y = 3x - x^2$.

14.154 [Шар-11]. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4, а основания являются квадратами. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и вычислите этот периметр.

14.155 [Шар-11]. В равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными 1, и основанием a вписан прямоугольник наибольшей площади. Чему равна его площадь в зависимости от a? При каком a площадь наибольшего прямоугольника будет наибольшей ?

14.156 [Шар-11]. На горизонтальной плоскости стоит чаша, имеющая форму полусферы; в нее положен стержень, отношение длины которого к диаметру сферы равно k, причем $1 < k < 2$. Трение между чашей и стержнем отсутствует. Под каким углом к горизонтальной плоскости должен располагаться этот стержень, чтобы быть в равновесии?

14.7. Касательные

14.157 [ЦыпПин]**.** Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = |x^2 - |x||$ в точке с абсциссой $x = -2$.

14.158 [ЦыпПин]**.** Записать уравнение тех касательных к окружности $x^2 + y^2 = 25$, которые параллельны прямой $2x - y + 1 = 0$.

14.159 [ЦыпПин]**.** При каком значении $x_0 \in [0; \pi/2]$ касательные к графику функции $f(x) = \sin x + \sin 2x$ в точках с абсциссами x_0 и $x_0 + \pi/2$ параллельны?

14.160 [ЦыпПин]**.** Найти все значения x_0, при которых касательные к графикам функций $y(x) = 3\cos 5x$, $y(x) = 5\cos 3x + 2$ в точках с абсциссой x_0 параллельны.

14.161 [НГУ, ФФ,1995]**.** Найти координаты точки, симметричной вершине параболы $y = x^2 + 2x + 2$ относительно касательной к этой параболе, которая параллельна прямой $2y - 2x = 1$.

14.162 [Звавич]**.** Найдите все a, при которых касательная к графику функции $y = \sin \dfrac{x+11}{2} + 1.5a - a^2$ в точке графика с абсциссой a не пересекает график ни одной из функций $y = 0.5x + 2$ и $y = -2/x$.

14.163 [Звавич]**.** Найдите все p, при которых касательная к графику функции $y = \cos 2x + p^2 - p + 1$ в точке графика с абсциссой p не пересекает график ни одной из функций $y = 3 - 2x$ и $y = x + \dfrac{3}{4x}$.

14.164 [Шар-11]**.** Найдите уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(1; 3)$, касающейся графика функции $y = 8\sqrt{x} - 7$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y = x^2 + 4x - 1$.

14.165 [Звавич]**.** Найдите расстояние между касательными к графику функции $y = x^3/3 - x^2 - 3x + 1$, параллельными оси абсцисс.

14.166 [Звавич]**.** Найдите все действительные значения параметра a, при которых график функции $y = x^3 - 12x + a$ касается оси абсцисс.

14.167 [ЦыпПин]**.** Найти уравнение общей касательной к кривым $y = x^2 + 4x + 8$ и $y = x^2 + 8x + 4$.

14.168 [Плеханов]**.** Найти абсциссу точки пересечения с осью Ox общей касательной к кривым $y = x^2 + 3$ и $y = (3x + 1)/x$.

14.169 [Плеханов]**.** Найти длину высоты BD треугольника ABC, образованного осью Oy $(AC \in Oy)$ и касательными к кривой $y = (1 - x)\sqrt{1 - x} - x^2$, проведенными в точках с абсциссами $x_0 = -3$, $x_1 = 1$.

14.170 [Звавич]**.** Составьте уравнения всех общих касательных к графикам функций $y = x^2 - x + 1$ и $y = 2x^2 - x + 0.5$.

14.171 [Звавич]**.** При каких значениях параметра a прямая $y = \sqrt{a}x$ касается графика функции $y = \ln x - ax^2$?

14.172 [Звавич]**.** При каких значениях параметра a прямая $y = ax + 1/\sqrt{a}$ касается графика функции $y = \sqrt{x}$?

14.173' [Звавич]**.** При каких значениях p из точки $B(p; -1)$ можно провести три различные касательные к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + 3$?

14.174' [Звавич]**.** При каких значениях t из точки $M(t; -3)$ можно провести только одну касательную к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 1$?

14.175 [Звавич]**.** Найдите все общие точки графика функции $y = 3x - x^3$ и касательной, проведенной к этому графику через точку $N(0; 16)$.

14.176 [Звавич]**.** Найдите все общие точки графика функции $y = x^3/3 - 4x$ и касательной, проведенной к этому графику через точку $M(0; 18)$.

14.8. Ответы

[14.1] $\dfrac{2x \operatorname{arctg} x^2}{\sqrt{1+x^4}^3}$. **[14.2]** $\dfrac{\sqrt{2}}{(\sin^4 x + \cos^4 x)}$. **[14.3]** $\dfrac{e^x}{13 + e^{2x} - 6e^x}$. **[14.4]** $\dfrac{1}{x\sqrt{(4x+2)(x-2)}}$. **[14.5]** $\dfrac{2^x}{1-4^x}$. **[14.6]** $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$. **[14.7]** $\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$. **[14.8]** $\dfrac{-2\sqrt{2}(x^2+4)}{x^4+16}$. **[14.9]** $\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}(9x^2+1)}$. **[14.10]** $\dfrac{1+e^{x/2}}{(1+e^{x/4})^2}$. **[14.11]** $\dfrac{\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2}$. **[14.12]** $\dfrac{1}{|x-1|\sqrt{x^2-2}}$. **[14.13]** $e^{\sin x}\dfrac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}$. **[14.14]** $-\arcsin\sqrt{1-x^2}$. **[14.15]** $e^x \cdot x^{(e^x)}\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$. **[14.16]** $x^{\operatorname{tg} x}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} + \dfrac{\ln x}{\cos^2 x}\right)$. **[14.17]** $\dfrac{1}{a + b\cos x}$. **[14.18]** $\dfrac{3\sqrt{9x^2+24x+12}}{3x+4}$. **[14.19]** $8x^2\sqrt{x^2+1}$. **[14.20]** $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. **[14.21]** $\sqrt{2+x-x^2}$. **[14.22]** $\dfrac{-2x}{\sqrt{1-3x-2x^2}}$. **[14.23]** $\sqrt{e^x+1}$. **[14.24]** $\sqrt{\dfrac{x+4}{x+1}}$. **[14.25]** $\dfrac{2x-1}{x(x^2-x+1)}$. **[14.26]** $-\dfrac{x}{x^6+1}$.

[14.27] $\dfrac{e^{4x}}{(e^x+1)^4}$. **[14.28]** $\dfrac{e^{4x}}{(e^x+1)^4}$. **[14.29]** $-\sqrt{8x-x^2-7}$.
[14.30] $\dfrac{3\sqrt{9x^2+6x-3}}{3x+1}$. **[14.31]** $\dfrac{xe^x}{\sqrt{e^x+1}}$. **[14.32]** $-\operatorname{arctg}\sqrt{x}\dfrac{x+2}{x^3}$.
[14.33] $\dfrac{18x^2-8x-3}{4x\sqrt{x-1}}$. **[14.34]** $\dfrac{1}{2}\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$. **[14.35]** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
[14.36] $\dfrac{5(x^2-1)+12x\operatorname{arctg}x}{12(x^2-1)^2}$. **[14.37]** $\ln(\sqrt{1-x}\ +\ \sqrt{1+x})$.
[14.38] $\dfrac{\arccos x}{x^3}$. **[14.39]** $\dfrac{9-x^2}{\sqrt{x(4-x)}}$. **[14.40]** $\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$.
[14.41] асимптоты $y=1$; $x=2$; $\max: x=10/7,\ y=33/8$; перегиб $(8/7;31/9)$. **[14.42]** асимптоты $y=0$; $x=1$; $\min:\ x=-2,\ y=-80/27$; max; $x=0,\ y=0$; перегибы: $x=-2\pm\sqrt{3}$. **[14.43]** асимптота $x=1$; $\max:\ x=3/2,\ y=27/4$; перегиб: $(0;0)$. **[14.44]** асимптота $y=1$; $\max:\ x=1+\sqrt{2},\ y=3+2\sqrt{2}$; $\min:\ x=1-\sqrt{2},\ y=3-2\sqrt{2}$; перегибы: $(-\sqrt{3};2-\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};2+\sqrt{3})$; $(3;5)$ **[14.45]** симметрия отн. (0;0); асимптоты $y=x$; $x=\pm1$; $\max:\ x=-\sqrt{3},\ y=-3\sqrt{3}/2$; $\min:\ x=\sqrt{3},\ y=3\sqrt{3}/2$; перегиб: $(0;0)$. **[14.46]** асимптоты $y=x+1$; $x=2$; $\min:\ x=4,\ y=27/4$; перегиб: $(1;0)$. **[14.47]** асимптоты $y=x-1$; $x=7$ $\min:\ x=11,\ y=13.5$; перегиб: $(5;0)$. **[14.48]** асимптоты $y=x+4$; $x=1$; $\min:\ x=0,\ y=0$ и $x=4,\ y=32/3$; $\max:\ x=-1,\ y=1/4$; перегиб: $(-2/7;16/189)$. **[14.49]** асимптоты $y=x$; $x=0$; $\max:\ x=1,\ y=5$ и $x=-3,\ y=-17/3$; $\min:\ x=2,\ y=19/4$; перегиб: $(9/7;929/189)$. **[14.50]** асимптоты $y=x+3$; $x=2$; $\max:\ x=0,\ y=1/4$; $\min:\ x=1,\ y=0$ и $x=5,\ y=32/3$; перегиб: $(5/7;16/185)$. **[14.51]** асимптоты $y=x$; $x=-\sqrt[3]{2}$; $\max:\ x=-2,\ y=-8/3$; $\min:\ x=0,\ y=0$; перегиб: $(\sqrt[3]{4};5\sqrt[3]{25}/3)$. **[14.52]** асимптоты $y=x-3$; $x=-1$; $\max:\ x=-4,\ y=-256/27$; $\min:\ x=0,\ y=0$. **[14.53]** симметрия отн (0;0); асимптоты $y=x$; $x=\pm1$;

max : $x = -\sqrt{5}$, $y = -25\sqrt{5}/16$; min : $x = \sqrt{5}$, $y = 25\sqrt{5}/16$; перегиб: $(0;0)$. **[14.54]** асимптоты $y = x + 3$; $x = 2$; min : $x = 6$, $y = 5^5/4^4$; перегиб: $(1;0)$. **[14.55]** асимптоты – оси Ox и Oy; min : $x = 3$, $y = 0$; max : $x = 3$, $y = \dfrac{8}{3\sqrt{3}}$; перегиб при $x = 5$. **[14.56]** асимптота – ось Ox; min : $x = 2$, $y = 1/3$; : max : $x = 0$, $y = \sqrt{3}$ и $x = 3$; $y = \sqrt{2}/4$; перегиб при $x = \dfrac{9+4\sqrt{3}}{3} \approx 5.3$ **[14.57]** min : $y = 0$ при $x = 0$; max: $y = 3\sqrt[3]{20}/25$ при $x = -2/5$; перегиб: $x = 1/5$, $y = 0.4$ **[14.58]** симметрия отн Oy; min : $x = \pm 1$, $y = \sqrt[3]{4} \approx 1.6$; max : $x = 0$, $y = 2$; выпукла вверх **[14.59]** симметрия отн. начала; асимптота $y = 0$; max : $x = 2$, $y = \sqrt[3]{16} \approx 2.5$; min : $x = -2$, $y = -\sqrt[3]{16}$; перегиб: $(0;0)$. **[14.60]** min : $x = 0$, $y = 0$ и $x = -9/2$, $y = 0$; max : $x = -3$, $y = 3\sqrt{3}$; выпукла вниз при $x > 0$, выпукла вверх при $-9/2 < x < 0$; угловая точка $(0;0)$. **[14.61]** min : $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$; max : $x = 2/3$, $y = 2/(3\sqrt{3}) \approx 0.38$; выпукла вниз при $x \leqslant 0$, выпукла вверх при $0 \leqslant x \leqslant 1$ угловая точка $(0;0)$. **[14.62]** min : $y = 0$ при $x = -1$ и $x = 0$; max : $x = -4/5$, $y = 16/(25\sqrt{5} \approx 0.29$; перегиб: $((\sqrt{5}-5)/5; (6-2\sqrt{5})/(5\sqrt[4]{5})) \approx (-0.55; 0.21)$. **[14.63]** min : $x = -2/50$, $y = -6\sqrt{15}/125 \approx -0.19$; перегиб: $(-4/5; -4/(25\sqrt{5}))$. **[14.64]** min : $x = 0$, $y = 0$ и $x = -9/2$, $y = 0$; max : $x = -3$, $y = 3\sqrt{3}$; выпукла вниз при $x > 0$, выпукла вверх при $-9/2 < x < 0$; угловая точка $(0;0)$. **[14.65]** асимптоты: $y = -1$ при $x \to -\infty$; $y = 1$ при $x \to +\infty$; max : $x = 1$, $y = \sqrt{3}$; перегибы: $(-0.5;1)$ и $(2; 2\sqrt{6}/3)$. **[14.66]** асимптоты: $y = -1$ при $x \to -\infty$; $y = 1$ при $x \to +\infty$; max : $x = 0$, $y = 2$; перегибы: $(-(1+\sqrt{33})/2 \approx -3.5;)$ и $((\sqrt{33}-1)/2 \approx 2.4)$. **[14.67]** асимптоты: $y = -3$ при $x \to -\infty$; $y = 3$ при $x \to +\infty$; $x = \pm 1$; min : $x = 3/2$, $y = \sqrt{5}$; перегиб: $(2; 4/\sqrt{3})$. **[14.68]** асимптоты: $y = 0$; $x = 0$; min : $x = \pm 2/\sqrt{3}$, $y = 0$;

max : $x = 2,\ y = 1$; перегибы: $x_1 = -2\sqrt{11 - 2\sqrt{19}}/3 \approx -1.0,\ y \approx 1.0$ и $x_2 = 2\sqrt{11 + 2\sqrt{19}}/3 \approx 3.0,\ y \approx 0.9$; выпукла вверх на $(-2/\sqrt{3}; x_1)$ и $(2/\sqrt{3}; x_2)$. **[14.69]** min : $(1; 0)$; max : $(\frac{7}{11}; \frac{2^4 3^6}{11^3}\sqrt[3]{\frac{2}{121}} \approx 2.2)$; перегибы: $x = -1,\ x = (7 + 3\sqrt{3})/11 \approx 1.1,\ x = (7 - 3\sqrt{3})/11 \approx 0.2.$. **[14.70]** асимптоты – ось Ox; min : $x = -1,\ y = -e^2$; max : $x = 2,\ y = 2e^{-4}$; перегибы при $x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \approx -0.6$ и при $x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 2.6$. **[14.71]** асимптоты – оси Ox и Oy; min : $x = 1,\ y = 0$; max : $x = e^2,\ y = 4/e^2$; перегибы при $x = e^{(3\pm\sqrt{5})/2}$. **[14.72]** четная; период π; нули: $x = 0$, $x = \pm\pi/3$; max : $x = \pm\arccos(1/4),\ y = 9/16$; min : $(0; 0)$; $(\pm\pi/2; 1)$; перегибы при $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{129}+1}{16},\ x = \pm\frac{1}{2}\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{129}-1}{16}\right)$. **[14.73]** max : $x = -2$; перегиб: $x = -3$. **[14.74]** асимптоты: $y = \pm x/\sqrt{3}$; $x = \pm\sqrt{2/3}$; всюду вогнута. **[14.75]** асимптоты $x = 1$; $y = x + 1/2$; min : $x = 3/2$; вогнута на $(-\infty; 0]$; выпукла на $(1; \infty)$. **[14.76]** асимптоты $x = -1$; $y = x - 1/2$; max : $x = -3/2$; вогнута на $(-\infty; -1)$; выпукла на $[0; \infty)$. **[14.77]** min : $x = 1/e$; всюду выпукла. **[14.78]** асимптота: ось Ox; угловые точки при $x = \pm 1$; перегиб $(0; 0)$. **[14.79]** асимптота: ось Ox, угловая точка при $x = 0$. **[14.80]** асимптоты: $y = x + 2$; $x = 0$; всюду возрастает; перегиб при $x = 3/5$. **[14.81]** $\frac{1 - \ln a}{\ln a}$. **[14.82]** $1 - \ln a$. **[14.83]** $-1/2$. **[14.84]** $-2/\pi$. **[14.85]** -1. **[14.86]** 1. **[14.87]** 0. **[14.88]** $15/4$. **[14.89]** -3. **[14.90]** 1. **[14.91]** 4. **[14.92]** $1/a$. **[14.93]** $1/3$. **[14.94]** 0. **[14.95]** $\alpha(\alpha + 1)/2$. **[14.96]** $1/2$. **[14.97]** $-2/\pi$. **[14.98]** 2. **[14.99]** 2. **[14.100]** $-1/3$. **[14.101]** e. **[14.102]** $e^{-2/\pi}$. **[14.103]** $e^{-1/2}$. **[14.104]** 1. **[14.109]** Первое больше. **[14.110]** Исследовать $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x-1)}$. **[14.111]** Положив $x > y$, брать производную по x. **[14.114]** Переписать: $e^{e/\pi} \cdot \frac{\pi}{e} > e$ и исследовать $f(x) = \frac{e^x}{x}$. **[14.120]** 3. **[14.121]** 2. **[14.122]** 3. **[14.123]** 1. **[14.124]** $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **[14.125]** Два корня при $a \in \left(0; 27e^{-3}\right)$, один корень при $a \leqslant 0$ и $a = 27e^{-3}$. **[14.126]** $a \in \left(\dfrac{621}{16}; 0\right)$. **[14.127]** $a = 0$; $a < -1/e$; $a > 2/\sqrt[4]{e} \Rightarrow$ корней нет; $a = -1/e$; $a = 2/\sqrt[4]{e} \Rightarrow$ один корень; $-1/e < a < 0$; $0 < a < 2/\sqrt[4]{e} \Rightarrow$ два корня **[14.128]** Два корня при $a \in \left(0; 27e^{-3}\right)$, один корень при $a \leqslant 0$ и $a = 27e^{-3}$. **[14.129]** Два корня при $a \in (-1/e; 0)$, один корень при $a \leqslant 0$ и $a = -1/e$. **[14.130]** (1) $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 > 0$; (2) $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 < 0$. **[14.131]** $\max = 4\pi - 1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; $\min = -4\pi - 1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **[14.132]** $\max = \pi - 1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; $\min = -7\pi - 1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **[14.134]** $[-\sqrt{e}/2; \sqrt{e}/2]$. **[14.135]** $x \in (0; 2) \cup (3; +\infty)$. **[14.136]** e^5; $-e^3$. **[14.137]** $5 + \dfrac{3}{2}\ln 2$; 0. **[14.138]** 0 и 1. **[14.139]** $\left(-\infty; \sqrt{3}/9\right]$. **[14.140]** $k = 15$. **[14.141]** $a = 9$. **[14.142]** $\max = -1$; $\min = -4 + 2\ln 2$. **[14.143]** $\max = 4 - \ln 4$; $\min = 1$. **[14.144]** $-1 \leqslant a \leqslant (1 + 3\sqrt{5})/2 \Rightarrow \max = 11$; $a \geqslant (1 + 3\sqrt{5})/2 \Rightarrow \max = a^3 - 12a$. **[14.145]** $-1 \leqslant a \leqslant 1 + 2\sqrt{6} \Rightarrow \min = -46$; $a \geqslant 1 + 2\sqrt{6} \Rightarrow \min = 27a - a^3$. **[14.146]** $[0; 3\sqrt{3}/2]$. **[14.147]** $(-1; 1)$. **[14.148]** $(\sqrt{2}; \ln\dfrac{1+\sqrt{2}}{4})$. **[14.149]** $k < 1 + \sqrt{2}$. **[14.150]** $(4; -2)$. **[14.151]** $15\sqrt{2}/8$. **[14.152]** $\sqrt{2} \cdot \log_2 \dfrac{e}{\log_2 e}$. **[14.153]** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **[14.154]** 6. **[14.155]** $\dfrac{a}{8}\sqrt{4 - a^2}$; $a = \sqrt{2}$. **[14.156]** $\cos\varphi = \dfrac{k + \sqrt{k^2 + 32}}{8}$. **[14.157]** $y = -3x - 4$. **[14.158]** $y = 2x - 5\sqrt{5}$; $y = 2x + 5\sqrt{5}$. **[14.159]** $x_0 = \arcsin\dfrac{1}{4\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{4}$. **[14.160]** πn; $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{4}$. **[14.161]** $\left(-\dfrac{3}{4}; \dfrac{3}{4}\right)$. **[14.162]** $4\pi - 11$. **[14.163]** $\pi/4$. **[14.164]** $y = 2x + 1$. **[14.165]** $32/3$. **[14.166]** -16; 16. **[14.167]** $y = 8x + 4$. **[14.168]** $-1/4$. **[14.169]** $-7/5$. **[14.170]** $y = -3x$; $y = x$. **[14.171]** $a = 0.25 \cdot e^{-1.5}$. **[14.172]** $a = 1/16$. **[14.173]** $(-\infty; -1) \cup (5/3; 2) \cup (2; +\infty)$. **[14.174]** $t \in (-2; 2/3)$. **[14.175]** $(2; -2)$; $(-4; 52)$. **[14.176]** $(-3; 3)$; $(6; 48)$.

Наши математические затруднения Бога не беспокоят. Он интегрирует эмпирически.

Альберт Эйнштейн

Глава 15

Интеграл

15.1. Неопределенный интеграл – замена переменной

(Задачи взяты из [Кудр-2]).

15.1. $\int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1}\,dx.$

15.2. $\int \dfrac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^{16}}}.$

15.3. $\int \dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx.$

15.4. $\int \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{arcctg} x}}{1+x^2}\,dx.$

15.5. $\int \sin^2(ax+b)\,dx.$

15.6. $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\,dx.$

15.7. $\int \sqrt{x-x^2}\,dx.$

15.8. $\int \dfrac{x\,dx}{(1-x^2)^2}.$

15.9. $\int \dfrac{x\,dx}{(1-x)^{12}}.$

15.10. $\int \dfrac{x^5\,dx}{x+1}.$

15.11. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx.$

15.12. $\int xe^{-x^2}\,dx.$

15.13. $\int e^{\sqrt{x}}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}.$

15.14. $\int \dfrac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}.$

15.15. $\int \dfrac{\ln^2 x}{x}\,dx.$

15.16. $\int \dfrac{dx}{x\ln x\ln\ln x}.$

15.17. $\int \sin^6 x \cos x \, dx.$

15.18. $\int \dfrac{\sin x \, dx}{1+\cos x}.$

15.19. $\int \dfrac{dx}{2+\sqrt{x}}.$

15.20'. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$

15.21. $\int \dfrac{1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x} \, dx.$

15.22. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$

15.23. $\int \dfrac{dx}{2x^2-5x+7}.$

15.24. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+x^2}}.$

15.25. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{17-4x-x^2}}.$

15.26. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$

15.27. $\int \dfrac{x-1}{x^2-x-1} \, dx.$

15.28. $\int \dfrac{2x-1}{5x^2-x+2} \, dx.$

15.29. $\int \dfrac{x^3+x}{\sqrt{1+x^2-x^4}} \, dx.$

15.30. $\int \dfrac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}} \, dx.$

15.31'. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{3+7x^2}}.$

15.32. $\int \dfrac{x \, dx}{x^4+6x^2+5}.$

15.33. $\int x\sqrt{x+1} \, dx.$

15.34. $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

15.35. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$

15.36. $\int \dfrac{\sqrt[3]{x} \, dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$

15.37. $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x \, dx.$

15.38. $\int \dfrac{\sin x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$

15.39. $\int \dfrac{\cos x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$

15.40. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}.$

15.2. Интегрирование по частям

15.41. $\int xe^{-x}\,dx$.

15.42. $\int x2^x\,dx$.

15.43. $\int x^2e^x\,dx$.

15.44. $\int \ln x\,dx$.

15.45. $\int x^{\alpha}\ln x\,dx$.

15.46. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

15.47. $\int \arcsin x\,dx$.

15.48. $\int \arccos^2 x\,dx$.

15.49. $\int x\ln(x+\sqrt{4+x^2})\,dx$.

15.50. $\int x\ln\left|1+\dfrac{1}{x}\right|\,dx$.

15.51. $\int (x^2-2x+3)\ln|x+1|\,dx$.

15.52. $\int x\cos(5x-7)\,dx$.

15.53. $\int x\sin^2 x\,dx$.

15.54. $\int \dfrac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

15.55. $\int x\operatorname{tg}^2 2x\,dx$.

15.56. $\int \sin x\cdot\ln\operatorname{tg} x\,dx$.

15.57. $\int x\operatorname{arcctg} x\,dx$.

15.58. $\int x^2\arcsin 2x\,dx$.

15.59. $\int x^3\operatorname{arctg} x\,dx$.

15.60. $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}\,dx$.

15.61. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

15.62. $\int \dfrac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

15.63. $\int \dfrac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

15.64. $\int (x^2-6x+2)e^{3x}\,dx$.

15.65. $\int x^2\sin 2x\,dx$.

15.66. $\int \ln^2 x\,dx$.

15.67. $\int \dfrac{\ln^2 x}{x^2\sqrt{x}}\,dx$.

15.68. $\int \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^3\,dx$.

15.69. $\int \arcsin^2 x\,dx$.

15.70a*. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

15.70b*. $\int e^{ax}\cos bx\,dx.$

15.71a. $\int \sin(\ln x)\,dx.$

15.71b. $\int \cos(\ln x)\,dx.$

15.72. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

15.73. $\int \dfrac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\,dx.$

15.74. $\int e^{-x}\operatorname{arcctg} e^{x}\,dx.$

15.75. $\int \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

15.76. $\int \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\,dx.$

15.3. Рациональные интегралы — разложение на простейшие дроби

15.77. $\int \dfrac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$

15.78. $\int \dfrac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}.$

15.79. $\int \dfrac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx.$

15.80. $\int \dfrac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx.$

15.81. $\int \dfrac{(5x-3)\,dx}{(x-2)(3x^2+2x-1)}.$

15.82. $\int \dfrac{3x^3-5x+8}{x^2-4}\,dx.$

15.83. $\int \dfrac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx.$

15.84. $\int \dfrac{2x+11}{x^2+6x+13}\,dx.$

15.85. $\int \dfrac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,dx.$

15.86. $\int \dfrac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx.$

15.87. $\int \dfrac{(x^4+1)\,dx}{x^5+x^4-x^3-x^2}.$

15.88. $\int \dfrac{(5x-14)\,dx}{x^3-x^2-4x+4}.$

15.89. $\int \dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$

15.90. $\int \dfrac{dx}{x^4-13x^2+36}.$

15.91. $\int \dfrac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}\,dx.$

15.92. $\int \dfrac{x^5-2x^2+3}{x^2-4x+4}\,dx.$

15.93. $\int \dfrac{x^2+1}{x(x-1)^3}\,dx.$

15.94. $\int \dfrac{x^5-x+1}{x^6-x^5}\,dx.$

15.95. $\int \frac{dx}{x^3+1}$. **15.96'.** $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

15.97'. $\int \frac{dx}{x^6+1}$. **15.98.** $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$.

15.4. Рациональные интегралы – Остроградский

15.99. $\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$.

15.100. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

15.101. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

15.102. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

15.103. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,dx$.

15.104. $\int \frac{x(x-2)\,dx}{(x-2)^2(x^2+1)^2}$.

15.105. $\int \frac{(3x^4+4)\,dx}{x^2(x^2+1)^3}$.

15.106. $\int \frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}$.

15.5. Тригонометрические интегралы

15.107. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$.

15.108. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

15.109. $\int \frac{\cos x-\cos 3x}{1-\sin^4 x}\,dx$.

15.110. $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

15.111. $\int \frac{\cos^5 x+\cos^3 x}{\sin^4 x+\sin^2 x}\,dx$.

15.112. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x}$.

15.113. $\int \frac{dx}{1+4\cos x}$.

15.114. $\int \frac{dx}{\cos x+\sin x+1}$.

15.115. $\int \frac{dx}{4\cos x-3\sin x-5}$.

15.116. $\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+5}$.

15.117. $\displaystyle\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\,dx.$

15.118. $\displaystyle\int \frac{2\cos x+\sin x-3}{2\cos x-\sin x-3}\,dx.$

15.119. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1-\cos x+\sin x)^2}\,dx.$

15.120. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x+\sqrt{2}}\,dx.$

15.6. Интегралы с квадратичными иррациональностями

15.121. $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx.$

15.122. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx.$

15.123. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx.$

15.124. $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx.$

15.125. $\displaystyle\int \sqrt{3-4x+4x^2}\,dx.$

15.126. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx.$

15.127. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}.$

15.128. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

15.129. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4x+7)^{3/2}}.$

15.130. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}.$

15.7. Вычисление определенного интеграла

15.131. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6}.$

15.132. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx.$

15.133. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x\,dx.$

15.134. $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx.$

15.135. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$

15.136. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^3 x\,dx.$

15.137. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}\,dx.$

15.138. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}.$

15.139. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3\sin x\,dx.$

15.140. $\displaystyle\int_0^{\pi} (2x^2+4x+7)\cos 2x\,dx.$

15.141. $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\ln^2(x+1)\,dx.$

15.142. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}\,dx.$

15.143. $\int\limits_{0}^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

15.144. $\int\limits_{\pi/2}^{2\,\mathrm{arctg}\,2} \frac{1}{\sin^2 x(1-\cos x)}\,dx.$

15.145. $\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{1}{(1+\sin x-\cos x)^2}\,dx.$

15.146. $\int\limits_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2\,\mathrm{ctg}\,x+1}{(2\sin x+\cos x)^2}\,dx.$

15.147. $\int\limits_{0}^{\mathrm{arctg}(1/3)} \frac{8+\mathrm{tg}\,x}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx.$

15.148. $\int\limits_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sin^2 x-5\cos^2 x+4}\,dx.$

15.8. Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Доказать, что последовательность a_n имеет предел и найти его:

15.149. $a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}.$

15.150. $a_n = \frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\ldots+\frac{(4n-1)^3}{n^4}.$

15.151. $a_n = \frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}.$

15.152. $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}.$

15.153. $a_n = \frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right).$

15.154. $a_n = n^2\left(\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right).$

15.9. Оценки определенного интеграла

Доказать неравенства:

15.155. $\dfrac{\pi}{128} < \displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{10} x\, dx < \dfrac{\pi}{4}$.

15.156. $2 < \int\limits_1^2 2^{x^2}\, dx < 16$.

15.157. $\dfrac{e}{3} < \displaystyle\int\limits_1^e \dfrac{dx}{\ln x + 2} < \dfrac{e}{2}$.

15.158. $-\dfrac{1}{5} < \displaystyle\int\limits_2^3 \dfrac{dx}{1 + x - 2x^2} < -\dfrac{1}{14}$.

15.159. $-\dfrac{2}{11} < \displaystyle\int\limits_{-1}^1 \dfrac{\sin x}{x + 10}\, dx < \dfrac{2}{9}$.

15.160. $\dfrac{2}{25} < \displaystyle\int\limits_1^3 \dfrac{dx}{(x^2 - 4x + 8)^2} < \dfrac{1}{8}$.

15.161. $\int\limits_0^\pi x^2 \sqrt{\sin x}\, dx < \dfrac{2\pi^5}{5}$.

15.162. $\dfrac{\sqrt{2}}{3} < \displaystyle\int\limits_{-1}^1 \dfrac{\cos x}{2 + x^2}\, dx < 1$.

15.163. Какое из чисел больше:

а) $\displaystyle\int\limits_0^1 e^{-x} \sin x\, dx$ или $\int\limits_0^1 e^{-x^2} \sin x\, dx$?

б) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2 \sin x\, dx$ или $\displaystyle\int\limits_0^1 x \sin^2 x\, dx$?

в) $\displaystyle\int\limits_0^\pi e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$ или $\int\limits_\pi^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$?

г) $\dfrac{\pi}{6}$ или $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$?

д) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2e^{-x^2}\,dx$ или $\dfrac{1}{3}$?

15.164. Доказать, что $\displaystyle\int\limits_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$; $x>0$.

15.10. Площади плоских фигур

Найти площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

15.165. $y=3+2x-x^2$, $y=x+1$.

15.166. $y=x^2+3$, $xy=4$, $y=2$, $x=0$.

15.167. $y=x^3$, $y=-2x^2+3x$; (фигура расположена в первой четверти).

15.168. $y=\sqrt{1-x}$, $y=x+1$.

15.169. $y=\cos 2x$, $y=0$, x=0, $x=\pi/4$.

15.170. $y=2-x^4$, $y=x^2$.

15.171. $xy=1$, $y=x^2$, $x=3$, $y=0$.

15.172. $y=\arcsin 2x$, $x=0$, $y=-\pi/2$.

15.173. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$, $y=0$
(фигура расположена во второй четверти).

15.174. $xy=20$, $x^2+y^2=41$ (первая четверть).

15.175. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$.

15.176. $xy=4\sqrt{2}$, $x^2-6x+y^2=0$, $y=0$, $x=4$.

15.177. $y=6/|x+1|$; $y=3-|3-x|$.

15.178. $y=|4-x^2|$; $y=2|x|+4$.

15.179. $y=x^2-2x$; $y=-4x-1$; $y=4x-9$.

15.180. $y=x+1$; $y=1-x/3$; $y=1-(x-2)^3$.

15.181. $y=4+\sqrt{x+2}$; $y=-0.6x+2.8$; $x=\sqrt{10-y}$.

15.182. $x+\sqrt{6-y}=0$; $y=\sqrt{4-x}+4$; $y=x/3+8/3$.

15.183. $y=(3-x)^3$; $y=0.5x$; $y=0$.

15.184 [Звавич]. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = x/(2x-1)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

15.185 [Звавич]. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = x^2 - 4x + 5$ и прямыми, касающимися ее в точках с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

15.186 [Звавич]. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 0$; $y = 4x - x^2$ и касательной к графику этой функции, проведённой в точке с абсциссой $x = 3$.

15.187 [Звавич]. Найдите все такие точки M графика функции $y = x^2 - 4x$, что площадь фигуры, ограниченной этим графиком, касательной к графику, проведенной в точке M, и осью ординат, равна 72.

15.188 [Звавич]. Найдите все такие точки N графика функции $y = 6x - x^2$, что площадь фигуры, ограниченной этим графиком, касательной к графику, проведенной в точке N, и осью ординат, равна $125/3$.

15.189 [Звавич]. При каком t площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^4 + 2x^2$, касательной к нему, проведенной в точке графика с абсциссой t, и прямой $x = t - 1$, наименьшая?

15.190 [Звавич]. Найдите такое p, чтобы площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x - x^4$, касательной к нему, проведенной в точке графика с абсциссой p, и прямой $x = p + 2$,была наименьшей?

15.191 [Звавич]. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2+6x+9$ и касательными к этому графику, проходящими через начало координат.

15.192 [Вавилов-3]. В какой точке графика функции $y = x^2 + 1$ надо провести касательную, чтобы она отсекала от фигуры, образуемой графиком этой функции и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, трапецию наибольшей площади?

15.193 [Вавилов-3]. В какой точке графика функции $y = 1/x$ надо провести касательную, чтобы она отсекала от фигуры, образуемой графиком этой функции и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 1$, трапецию наибольшей площади?

15.194 [Вавилов-3]. Найти значение p ($p < 0$), при котором площадь фигуры, образуемой параболой $y = (1+p^2)^2x^2+p$ и прямой $y = 0$, была бы наибольшей.

15.195 [Вавилов-3]. Найти наименьшее значение площади фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$.

15.11. Длина кривой

15.196 [Кудр-2]**.** Найти длину дуги кривой $y = 2x^{3/2}$; $0 \leqslant x \leqslant 11$.

15.197 [Кудр-2]**.** Найти длину дуги кривой $y = -x^{2/3} - 1$; $0 \leqslant x \leqslant 5\sqrt{5}$.

15.198. Кудр-2]. Найти длину дуги кривой $y = \dfrac{x}{6}\sqrt{x+12}$; $-11 \leqslant x \leqslant -3$.

15.199 [Кудр-2]**.** Найти длину дуги кривой $x^2 = 5y^3$; $x^2 + y^2 \leqslant 6$.

15.200 [Кудр-2]**.** Найти длину дуги кривой $y = \ln\sin x$; $\pi/3 \leqslant x \leqslant 2\pi/3$.

15.201 [Кудр-2]**.** Найти длину дуги кривой (циклоиды): $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

15.202 [Кудр-2]**.** Найти длину дуги кривой : $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

15.12. Объем тела вращения

15.203 [СУНЦ НГУ, 2015]**.** Плоская фигура ограничена линиями: $y = \dfrac{5-x}{x-2}$; $y = 0$; $2x = 3y$. Найти объем тела, полученного вращением этой фигуры вокруг оси Ox.

15.204 [Демид]**.** Плоская фигура ограничена линиями $y = 2x - x^2$; $y = 0$. Найти объем тела, получаемого ее вращением: (а) вокруг оси Ox; (б) вокруг оси Oy.

15.205 [Демид]**.** Плоская фигура ограничена линиями $y = \sin x$; $y = 0$; $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Найти объем тела, получаемого ее вращением: (а) вокруг оси Ox; (б) вокруг оси Oy.

15.206 [Демид]**.** Центр круга радиуса r находится на расстоянии a от оси Ox ($a > r$). Найти объем тела (тора), получаемого вращением этого круга вокруг оси Ox.

15.207 [Демид]**.** Бесконечная плоская фигура ограничена линиями $y = e^{-x}$; $y = 0$ ($0 \leqslant x < +\infty$). Найти объем тела, получаемого вращением этой фигуры: (а) вокруг оси Ox; (б) вокруг оси Oy.

15.13. Ответы

[15.1] $\dfrac{1}{18}(5x^3+1)^{6/5} + C$. **[15.2]** $\dfrac{1}{8}\arcsin x^8 + C$. **[15.3]** $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x + C$. **[15.4]** $-\dfrac{3}{4}\operatorname{arcctg}^{4/3} x + C$. **[15.5]** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4a}\sin 2(ax + b) + C$.

[15.6] $\dfrac{x\cos 2b}{2}+\dfrac{\sin 2ax}{4a}+C$. **[15.7]** $\dfrac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\dfrac{1}{8}\arcsin(2x-1)+C$. **[15.8]** $\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1}+C$. **[15.9]** $\dfrac{1}{11}(1-x)^{-11}-\dfrac{1}{10}(1-x)^{-10}+C$. **[15.10]** $\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$. **[15.11]** $\dfrac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3}+C$. **[15.12]** $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}+C$. **[15.13]** $2e^{\sqrt{x}}+C$. **[15.14]** $\arcsin(e^x/2)+C$. **[15.15]** $\dfrac{1}{3}\ln^3 x+C$. **[15.16]** $\ln|\ln\ln x|+C$. **[15.17]** $-\ln(1+\cos x)+C$. **[15.18]** $-\sin\dfrac{1}{x}+C$. **[15.19]** $2\sqrt{x}-4\ln|2+\sqrt{x}|+C$. **[15.20]** $-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+C$; замена $\frac{1}{x}=t$. **[15.21]** $-\sin\dfrac{1}{x}+C$. **[15.22]** $\ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$. **[15.23]** $\dfrac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\dfrac{4x-1}{\sqrt{31}}+C$. **[15.24]** $\ln\left|x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$. **[15.25]** $\arcsin\dfrac{x+2}{\sqrt{21}}+C$. **[15.26]** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x-3}{5}+C$. **[15.27]** $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$. **[15.28]** $\dfrac{1}{5}\ln(5x^2-x+2)-\dfrac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\dfrac{10x-1}{\sqrt{39}}+C$. **[15.29]** $-\dfrac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\dfrac{3}{4}\arcsin\dfrac{2x^2-1}{5}+C$. **[15.30]** $-\dfrac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\dfrac{7}{4}\arcsin\dfrac{2x-1}{2}+C$. **[15.31]** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\dfrac{\sqrt{3+7x^2}+\sqrt{3}}{|x|}+C$; замена $\frac{1}{x}=t$. **[15.32]** $\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+5}+C$. **[15.33]** $\dfrac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5}-\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}+C$. **[15.34]** $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|+C$. **[15.35]** $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$. **[15.36]** $\ln\dfrac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$. **[15.37]** $2\left(\dfrac{1}{11}\sin^4 x-\dfrac{2}{7}\sin^2 x+\dfrac{1}{3}\right)\sqrt{\sin^3 x}+C$. **[15.38]** $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}|+C$. **[15.39]** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)+C$. **[15.40]** $\ln|\arcsin x|+C$. **[15.41]** $-e^{-x}(x+1)+C$. **[15.42]** $\dfrac{2^x(x\ln 2-1)}{\ln^2 2}+C$. **[15.43]** $(x^2-2x+2)e^x+C$. **[15.44]** $x(\ln x-1)+C$. **[15.45]** $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x-\dfrac{1}{\alpha+1}\right)+C$. **[15.46]** $x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. **[15.47]** $x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

[15.48] $x\arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x + C$. **[15.49]** $x\ln(x + \sqrt{4+x^2}) - \sqrt{4+x^2} + C$. **[15.50]** $\dfrac{x^2}{2}\ln\left|1+\dfrac{1}{x}\right| - \dfrac{1}{2}\ln|x+1| + \dfrac{x}{2} + C$. **[15.51]** $\left(\dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x + \dfrac{13}{3}\right)\ln(x+1) - \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{13}{3}x + C$. **[15.52]** $\dfrac{x}{5}\sin(5x-7) + \dfrac{1}{25}\cos(5x-7) + C$. **[15.53]** $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{8}\cos 2x + C$. **[15.54]** $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$. **[15.55]** $\dfrac{x}{2}\operatorname{tg} 2x + \dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x| - \dfrac{x^2}{2} + C$. **[15.56]** $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| - \cos x \cdot \ln\operatorname{tg} x + C$. **[15.57]** $\dfrac{x + (x^2+1)\operatorname{arcctg} x}{2} + C$. **[15.58]** $\dfrac{x^3}{3}\arcsin 2x + \dfrac{2x^2+1}{36}\sqrt{1-4x^2} + C$. **[15.59]** $\dfrac{x^4-1}{4}\operatorname{arctg} x - \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x}{4} + C$. **[15.60]** $-\dfrac{\arcsin x}{x} - \ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} + C$. **[15.61]** $(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$. **[15.62]** $-x - \sqrt{1-x^2}\arccos x + C$. **[15.63]** $4\sqrt{2-x} - 2\sqrt{2-x}\arcsin(x/2) + C$. **[15.64]** $\left(x^2 - \dfrac{20}{3}x + \dfrac{38}{9}\right) + C$. **[15.65]** $\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{x^2}{2}\right)\cos 2x + \dfrac{x}{2}\sin 2x + C$. **[15.66]** $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$. **[15.67]** $-\dfrac{8}{27}x^{-3/2}\left(\dfrac{9}{4}\ln^2 x + 3\ln x + 2\right) + C$. **[15.68]** $-\dfrac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x + \dfrac{3}{2}\ln^2 x + \dfrac{3}{2}\ln x + \dfrac{3}{4}\right) + C$. **[15.69]** $x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$. **[15.70a]** $\dfrac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C$. **[15.70b]** $\dfrac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C$. **[15.71a]** $\dfrac{(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))x}{2} + C$. **[15.71b]** $\dfrac{(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))x}{2} + C$. **[15.72]** $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C$. **[15.73]** $-x - \operatorname{ctg} x \cdot \ln(e\sin x) + C$. **[15.74]** $-x + \dfrac{1}{2}\ln(1 + e^{2x}) - e^{-x}\operatorname{arcctg} e^x + C$. **[15.75]** $2\sqrt{x+1}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + C$. **[15.76]** $x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$. **[15.77]** $\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{|(x-1)(x+3)^3|}{(x+2)^4} + C$. **[15.78]** $x + 3\ln(x^2 - 6x +$

$10)+8\operatorname{arctg}(x-3)+C$. **[15.79]** $\ln\left|\dfrac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$. **[15.80]** $\dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right|+C$. **[15.81]** $\dfrac{1}{15}\ln\dfrac{|(x-2)^7(3x-1)^3|}{(x+1)^{10}}+C$. **[15.82]** $\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{11}{2}\ln|x-2|+\dfrac{3}{2}\ln|x+2|+C$. **[15.83]** $x+3\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|+C$. **[15.84]** $\ln(x^2+6x+13)+\dfrac{5}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x+3}{2}+C$. **[15.85]** $\dfrac{x^2}{2}\ln|x-1|+\ln(2x^2+2x+1)+\operatorname{arctg}(2x+1)+C$.

[15.86] $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\ln(x^2-x+1)+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **[15.87]** $\ln|x|+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+\dfrac{1}{x+1}+C$. **[15.88]** $\ln\left|\dfrac{(x-1)^3}{(x-2)(x+2)^2}\right|+C$. **[15.89]** $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\dfrac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$. **[15.90]** $\dfrac{1}{60}\ln\dfrac{(x-3)^2|x+3|^3}{(x+3)^2|x-2|^3}+C$. **[15.91]** $\dfrac{3}{2}(x-1)^{-1}+\dfrac{1}{4}\ln|(x+1)(x-1)^3|+C$. **[15.92]** $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4}{3}x^3+6x^2+30x-\dfrac{27}{x-2}+72\ln|x-2|+C$. **[15.93]** $-(x-1)^{-2}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|+C$. **[15.94]** $\dfrac{x^{-4}}{4}+\ln|x-1|+C$. **[15.95]** $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **[15.96]** $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\right)+C$. **[15.97]** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}(x^3)+C$. **[15.98]** $-\dfrac{3x^3+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+\dfrac{3}{16}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|+C$. **[15.99]** $\dfrac{5}{2(x^2+1)}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+C$. **[15.100]** $\dfrac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\dfrac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C$. **[15.101]** $\dfrac{x}{4(x^4+1)}+\dfrac{3}{16\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\dfrac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{x^2-1}+C$. **[15.102]** $\dfrac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)+C$. **[15.103]** $\dfrac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\dfrac{1}{9}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\dfrac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **[15.104]** $\dfrac{3x^2-x}{4(x-1)(x^2+1)}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}+\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C$. **[15.105]** $-\dfrac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\dfrac{57}{8}\operatorname{arctg}x+C$.

[15.106] $\dfrac{2x^6-3x^2}{4(x^4-1)}+\dfrac{3}{8}\ln\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}+C$. **[15.107]** $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\operatorname{tg}x|+C$. **[15.108]** $\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$. **[15.109]** $\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}-2\operatorname{arctg}\sin x+C$. **[15.110]** $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+\dfrac{1}{2(1+\cos x)}+C$. **[15.111]** $\sin x-\dfrac{2}{\sin x}-6\operatorname{arctg}\sin x+C$. **[15.112]** $\dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{7}}+C$. **[15.113]** $\dfrac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\dfrac{4\operatorname{tg}(x/2)-1}{\sqrt{15}}+C$. **[15.114]** $\ln|\operatorname{tg}(x/2)+1|+C$. **[15.115]** $\dfrac{2}{3+9\operatorname{tg}(x/2)}+C$. **[15.116]** $\dfrac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{12}}+C$. **[15.117]** $-x+2\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{\operatorname{tg}(x/2)+1}\right|+C$. **[15.118]** $\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}\ln|2\cos x-\sin x-3|+\dfrac{6}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}+C$. **[15.119]** $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}(x/2)}+\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}(x/2)}\right|+C$. **[15.120]** $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\ln(\cos x+\sin x+\sqrt{2})-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)+C$. **[15.121]** $\dfrac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\dfrac{11}{8}\arcsin\dfrac{1-2x}{\sqrt{5}}+C$. **[15.122]** $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C$. **[15.123]** $\dfrac{2x^2+x+7}{6}\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}|+C$. **[15.124]** $\dfrac{x^2-14x+111}{3}\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+C$. **[15.125]** $\dfrac{2x-1}{4}\sqrt{3-4x+4x^2}+\dfrac{1}{2}\ln(2x-1+\sqrt{3-4x+4x^2})+C$. **[15.126]** $\dfrac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C$. **[15.127]** $\ln\left|\dfrac{x}{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}\right|+C$. **[15.128]** $\ln\left|\dfrac{x+1}{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}\right|+C$. **[15.129]** $\dfrac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}}+C$. **[15.130]** $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+\dfrac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{1+x}+C$. **[15.131]** $\pi/12$. **[15.132]** π. **[15.133]** $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{8\sqrt{3}}{27}$. **[15.134]** $7+2\ln 2$. **[15.135]** $\pi/4$. **[15.136]** $5\sqrt{2}/12$. **[15.137]** $2-\ln 2$. **[15.138]** $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

[15.139] $\pi^3 - 6\pi$. **[15.140]** π. **[15.141]** $2\ln^2 2 - 2\ln 2 + 3/4$. **[15.142]** $4/15$. **[15.143]** $4/3$. **[15.144]** $55/96$. **[15.145]** $2/3 + \ln 2 - \ln 3$. **[15.146]** $\frac{1}{2}\ln 3$. **[15.147]** $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{36}\ln 2$. **[15.148]** $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$. **[15.149]** $\ln 2$. **[15.150]** 64. **[15.151]** $\pi/4$. **[15.152]** $\pi/6$. **[15.153]** 2. **[15.154]** $1/4$. **[15.163]** а) второе; б) первое; в) первое; г) второе; д) второе. **[15.165]** $9/2$. **[15.166]** $4\ln 2 - 2/3$. **[15.167]** $7/12$. **[15.168]** $7/6$. **[15.169]** $1/2$. **[15.170]** $44/15$. **[15.171]** $1/3 + \ln 3$. **[15.172]** $1/2$. **[15.173]** 3. **[15.174]** $\frac{41}{2}\arcsin\frac{9}{41} + 20\ln\frac{4}{5}$. **[15.175]** $\sqrt{2} - 1$. **[15.176]** $\frac{9\pi}{4}\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\ln 2 - \frac{9}{2}\arcsin(1/3)$. **[15.177]** $6.5 - \ln 2$. **[15.178]** 32. **[15.179]** $16/3$. **[15.180]** 2. **[15.181]** 12.5. **[15.182]** $38/3$. **[15.183]** $5/4$. **[15.184]** 2. **[15.185]** $9/4$. **[15.186]** 9. **[15.187]** $(-6; 60)$; $(6; 12)$. **[15.188]** $(5; 5)$; $(-5; -55)$. **[15.189]** $t = 0.25$. **[15.190]** $p = -0.5$. **[15.191]** 18. **[15.192]** $(1/2; 5/4)$. **[15.193]** $(3/2; 2/3)$. **[15.194]** $p = -1$. **[15.195]** $k = 2$; $S = 32/3$. **[15.196]** 74. **[15.197]** $335/27$, интегрировать по y. **[15.198]** $25/3$. **[15.199]** $134/27$; интегрировать по y. **[15.200]** $\ln 3$. **[15.201]** $8a$. **[15.202]** $6a$. **[15.203]** $12\pi - 6\pi\ln 3$. **[15.204]** $16\pi/15$; $8\pi/3$. **[15.205]** $\pi^2/2$; $2\pi^2$. **[15.206]** $2\pi^2 r^2 a$. **[15.207]** $\pi/2$; 2π.

Искусство решать геометрические задачи чем-то напоминает трюки иллюзионистов: иногда, даже зная решение задачи, трудно понять, как можно было до него додуматься.

И.Д. Новиков

Глава 16

Планиметрия

16.1. Отношения отрезков и площадей

Отношения в треугольниках. Применяется теорема Фалеса или теоремы Чевы и Менелая как ее следствия.

16.1 [ШарГор]. В равнобедренном треугольнике ABC, где $AB = BC$, на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B.

16.2 [ШарГор]. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = AC$; точка K – середина стороны AB. В каком отношении прямая KN делит сторону BC?

16.3 [ШарГор]. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $AK : KB = 3 : 2$, а $AM : MC = 4 : 5$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC, делит отрезок BM.

16.4 [ШарГор]. На стороне AB треугольника ABC взята точка K, а на стороне BC – точки M и N так, что $AB = 4AK$, $CM = BN$, $MN = 2BN$. Найдите отношения $AO : ON$ и $KO : OM$, где O – точка пересечения прямых AN и KM.

16.5 [ШарГор]. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $AC = 2CN$. Точка M находится на стороне BC, причем $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?

16.6 [ШарГор]. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AC, а точка L на стороне BC расположена так, что $BL : LC = 2 : 5$. Прямая, проходящая через точку L параллельно стороне AB, пересекает отрезок BM в точке O, причем $BO : OM = 7 : 4$. Найдите отношение, в котором точка M делит сторону AC.

16.7 [ШарГор]**.** Точки A_1 и C_1 находятся на сторонах BC и AB треугольника ABC. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке M. В каком отношении прямая BM делит сторону AC, если $AC_1 : C_1B = 2 : 3$ и $BA_1 : A_1C = 1 : 2$?

16.8 [ШарГор]**.** В треугольнике ABC на стороне AC взяты точки P и Q так, что $AP < AQ$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $PQ = 3$. Найдите AC.

16.9 [ШарГор]**.** Точки K и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причем $AK = BK$ и $AN = 2NC$. В каком отношении отрезок KN делит медиану AM треугольника ABC ?

16.10 [ШарГор]**.** На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N и K так, что $AM : MB = 2 : 3$, $AK : KC = 2 : 1$, $BN : NC = 1 : 2$. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN ?

16.11 [ШарГор]**.** На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K, L и M так, что $AK : KB = 2 : 3$, $BL : LC = 1 : 2$, $CM : MA = 3 : 1$. В каком отношении отрезок KL делит отрезок BM ?

16.12 [НГУ, МФ, 1976]**.** В остроугольном треугольнике ABC через вершину B и середину высоты CD проведена прямая. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника ABC, если известно, что угол A равен α, а угол B равен β ?

16.13 [ШарГор]**.** В равнобедренном треугольнике ABC с тупым углом A, равным α, проведены высоты BM и CN. Найдите отношение площади четырехугольника $BMNC$ к площади треугольника ABC.

16.14 [ШарГор]**.** Точки M и N расположены на стороне BC треугольника ABC, а точка K – на стороне AC, причем $BM : MN : NC = 1 : 1 : 2$ и $CK : AK = 1 : 4$. Известно, что площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь четырехугольника $AMNK$.

16.15 [СУНЦ НГУ, 1996]**.** В треугольнике ABC, площадь которого равна S, точкиM и K – середины медиан AF и CG. Найти площадь треугольника BMK.

16.16 [МГУ, ФФ, 1999]**.** В треугольнике ABC взяты точка N на стороне AB и точка M на стороне AC. Отрезки CN и BM пересекаются в точке O, $AN : NB = 2 : 3$, $BO : OM = 5 : 2$. Найдите $CO : ON$.

16.17 [ЦыпПин]**.** В треугольнике ABC через основание D высоты BD параллельно стороне AB проведена прямая, пересекающая BC в точке K. Найти $BK : KC$, если $S_{DBK} : S_{ABC} = 3 : 16$.

16.18 [ЦыпПин]**.** На стороне AC треугольника ABC взята точка N, а на стороне BC – точка M так, что $CN : NA = 5$. Площади многоугольников NMC и $ANMB$ относятся как 5:6. Найти $CM : MB$.

16.19 [МГУ, геол, 1997]**.** В треугольнике ABC угол B прямой, $AB = 5$, $BC = 4$. Точка D лежит на стороне AC, M и N — точки пересечения медиан, соответственно, в треугольниках ABD и DBC. Найдите площадь треугольника BMN.

16.20 [МГУ, фил, 1999]**.** В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника $KCDL$ равна 5.

16.21a [МГУ, геол, 1978]**.** В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK : KB = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL : LB = 2 : 1$. Пусть Q – точка пересечения прямых AL и CK. Найти площадь треугольника ABC, если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.

16.21b [МГУ, геол, 1978]**.** В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K так, что $AK : KB = 2 : 3$, а на стороне AC – точка L так, что $AL : LC = 5 : 3$. Точка Q пересечения прямых CK и BL отстоит от прямой AB на расстоянии 1.5. Найти длину стороны AB.

16.21c [МГУ, геол, 1978]**.** В треугольнике ABC, на стороне AB взята точка L так, что $AL = 1$; $LB = 3$, а на стороне BC взята точка K, делящая эту сторону в отношении $BK : KC = 3 : 2$. Точка Q пересечения прямых AK и CL отстоит от прямой BC на расстоянии 1.5. Вычислить синус угла ABC.

16.21d [МГУ, геол, 1978]**.** В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K так, что $|AK| = 1$, $KC = 3$, а на стороне AB взята точка L так, что $|AL| : |LB| = 2 : 3$. Пусть Q – точка пересечения прямых BK и CL. Площадь треугольника AQC равна 1. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B.

16.22a' [МГУ, био, 1982]**.** Точки P и Q на стороне BC треугольника ABC выбраны так, что $BP : PQ : QC = \frac{2}{3} : 1 : 1$. Точка R на продолжении стороны AB этого треугольника за точку B выбрана так, что $AB : BR = 1 : 2$. Прямые AQ и AP пересекают прямую CR в точках S и T соответственно. Найти $S_{PQST} : S_{ABC}$.

16.22b' [МГУ, био, 1982]**.** Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $BP : PC = 1 : 2$ и $BQ : QC = 4 : 1$. Точка R расположена на продолжении стороны AC за точку C так, что $AC : CR = 2 : 1$, а точка L является серединой стороны AC. Прямые LQ и AP пересекают прямую BR в точках S и T соответственно. Найти $S_{PQST} : S_{ABC}$.

16.23' [ЦыпПин]**.** На продолжениях медиан AK, BL, и CM треугольника ABC взяты точки P, Q и R так, что $KP = \frac{1}{2}AK$; $LQ = \frac{1}{2}BL$ и $MR = \frac{1}{2}CM$. Найти S_{PQR}, если $S_{ABC} = 1$.

16.24’ [ЦыпПин]**.** Дан треугольник ABC, площадь которого равна 1. На медианах AK, BL и CN треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q, R так, что $\dfrac{AP}{PK} = 1$; $\dfrac{BQ}{QL} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{CR}{RN} = \dfrac{5}{4}$. Найти площадь треугольника PQR.

16.25’ [ШарГор]**.** На стороне CB треугольника ABC взята точка M, а на стороне CA – точка P. Известно, что $\dfrac{CP}{CA} = 2\dfrac{CM}{CB}$. Через точку M проведена прямая, параллельная CA, а через P – прямая, параллельная AB. Докажите, что построенные прямые пересекаются на медиане, выходящей из вершины C.

16.26’ [ШарГор]**.** Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, причем отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $\dfrac{AK}{KA_1} = \dfrac{AB_1}{B_1C} + \dfrac{AC_1}{C_1B}$.

16.27’. Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, причем отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $\dfrac{KA_1}{AA_1} + \dfrac{KB_1}{BB_1} + \dfrac{KC_1}{CC_1} = 1$ и $\dfrac{AK}{AA_1} + \dfrac{BK}{BB_1} + \dfrac{CK}{CC_1} = 2$.

Отношения в параллелограммах и трапециях. Чаще всего следует продлить уже имеющиеся параллельные отрезки до пересечения с прочими прямыми чертежа.

16.28 [ШарГор]**.** На сторонах AD и DC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $AN : AD = 1 : 3$, $DM : DC = 1 : 4$. Отрезки BM и CN пересекаются в точке O. Найдите отношение $OM : OB$.

16.29 [ШарГор]**.** В параллелограмме $ABCD$ точки E И F лежат соответственно на сторонах AB и BC, M – точка пересечения прямых AF и DE, причем $AE = 2BE$, $BF = 3CF$. Найдите отношение $AM : MF$.

16.30 [ЦыпПин]**.** A, B, C, D – последовательные вершины параллелограмма. Точки E, F, P, H лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD. $AE = \dfrac{1}{3}AB$; $BF = \dfrac{1}{3}BC$, а точки P и H делят пополам стороны, на которых они лежат. Найти $S_{EFPH} : S_{ABCD}$.

16.31а [НГУ, ест, 1985]**.** На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны соответственно точки M и N. Прямые BN и AM пересекаются в точке K, при этом $KN = 3BK$, $DN = 2CN$. Найти отношение $BM : MC$.

16.31b [НГУ, ест, 1985]. Точки M и N выбраны соответственно на основании BC и боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Прямые AM и BN пересекаются в точке K, причем $AK = 3KM$, $KN = 2BK$. Найти отношение $CN : ND$.

16.31c [НГУ, ест, 1985]. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ таковы, что $AD = 3BC$. На сторонах AB и CD выбраны соответственно точки M и N так, что $BM = 2AM$ и прямая MN делит площадь трапеции пополам. Найти отношение $CN : ND$.

16.32 [СУНЦ НГУ, 1996]. В параллелограмме $ABCD$, площадь которого равна S, точки F и G –середины сторон AB и BC соответственно, точки M и K – середины отрезков DF и DG. Найти площадь треугольника BMK.

16.33' [ШарГор]. В параллелограмме $ABCD$ площади S вершины A, B, C, D соединены с серединами сторон CD, AD, AB и BC соответственно. Найти площадь четырехугольника, образованного этими прямыми.

16.34' [ШарГор]. Каждая вершина параллелограмма площади S соединена с серединами противоположных ей сторон. Найти площадь восьмиугольника, образованного этими прямыми.

16.35 [ШарГор]. Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию. Найдите отрезок этой прямой между боковыми сторонами трапеции, если средняя линия трапеции равна $4/3$, а точка O делит диагональ трапеции в отношении 1:3.

16.36 [МГУ, геогр, 1998]. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ равна 48, а площадь треугольника AOB, где O – точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найдите отношение оснований трапеции $AD : BC$.

16.37 [ШарГор]. Дана трапеция $ABCD$ $(AD\|\|BC.)$ Точки P, M, Q, N – соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA. Докажите, что отрезки AQ, PD и MN пересекаются в одной точке.

16.38 [ШарГор]. Большее основание AD трапеции $ABCD$ равно a, меньшее основание $BC = b$. Диагональ AC разделена на три равные части и через ближайшую к A точку деления M проведена прямая, параллельная основаниям. Найти отрезок этой прямой, заключенный между диагоналями.

16.39 [ШарГор]. На диагоналях AC и BD трапеции $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $AM : MC = DN : NB = 1 : 4$. Найдите MN, если основания $AD = a$, $BC = b$ $(a > b)$.

16.40 [ШарГор]. На сторонах AB, BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K, M и L таким образом, что $AK : KB =$

$= 2 : 1$, $BM : MC = 1 : 1$, $AL : LD = 1 : 3$. Найдите отношение площадей треугольников KBL и BML.

16.41 [ЦыпПин]**.** В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

16.42a [НГУ, МФ, 2005]**.** В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах AB и CD расположены соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 3 : 1$, а прямые AN и MC параллельны. Известно, что площадь трапеции $AMCN$ составляет 65% от площади трапеции $ABCD$. Найти отношение $CN : ND$.

16.42b [НГУ, МФ, 2005]**.** В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах AB и CD расположены соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 3 : 2$, а прямые AN и MC параллельны. Известно, что площадь трапеции $AMCN$ составляет 54% от площади трапеции $ABCD$. Найти отношение $AD : BC$.

16.42c [НГУ, МФ, 2005]**.** В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах AB и CD расположены соответственно точки M и N так, что $AM : MB = DN : NC$, а прямые AN и MC параллельны. Известно, что площадь трапеции $AMCN$ составляет 40% от площади трапеции $ABCD$. Найти отношение $AD : BC$.

16.42d [НГУ, МФ, 2005]**.** В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах AB и CD расположены соответственно точки M и N так, что прямые AN и MC параллельны. Известно, $AD : BC = 3 : 2$, а площадь трапеции $AMCN$ составляет 70% от площади трапеции $ABCD$. Найти отношение $AM : MB$.

16.43* [МГУ, МФ, 1999]**.** В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках K и L, причем точка K лежит на основании AD.

a) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK — сторону BC?

b) Найдите отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

16.44a [НГУ, ест, 2000]**.** Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно, отрезки AN и FM пересекаются в точке P. Найти длину отрезка NP.

16.44b [НГУ, ест, 2000]**.** Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно, отрезки AN и EM пересекаются в точке P. Найти длину отрезка NP.

16.44c [НГУ, ест, 2000]. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Точки M и N – середины сторон BC и DE соответственно, отрезки AM и BN пересекаются в точке P. Найти длину отрезка NP.

16.44d [НГУ, ест, 2000]. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно, отрезки AN и EM пересекаются в точке P. Найти длину отрезка NP.

16.45a [СУНЦ НГУ, 2000]. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30; основание AD вдвое больше основания BC. Точка P - середина стороны AB, точка R лежит на стороне CD; $RD = 2RC$. Отрезки AR и DP пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника APQ.

16.45b [СУНЦ НГУ, 2000]. Площадь трапеции $ABCD$ равна 64; основание AD втрое больше основания BC. Точка K - середина стороны AB, точка L лежит на стороне CD; $CL = 2LD$. Отрезки AL и DK пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника ADQ.

16.46a [НГУ, МФ, 2002]. В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC – стороне AE, причем $AB : DE = 8 : 5$, $BC : AE = 2 : 3$. Найти площадь треугольника ACD, если площадь четырехугольника $BCDE$ равна 21.

16.46b [НГУ, МФ, 2002]. В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC – стороне AE, причем $AB : DE = 7 : 2$, $BC : AE = 3 : 4$. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$, если площадь треугольника ACD равна 22.

16.46c [НГУ, МФ, 2002]. В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC – стороне AE, причем $AB : DE = 9 : 4$, $BC : AE = 1 : 4$. Найти площадь треугольника ACD, если площадь пятиугольника $ABCDE$ равна 57.

16.46d [НГУ, МФ.2002]. В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC – стороне AE, причем $AB : DE = 7 : 5$, $BC : AE = 3 : 5$. Найти площадь четырехугольника $BCDE$, если площадь треугольника ACD равна 20.

Свойство биссектрисы треугольника.

16.47 [ШарГор]. Дан треугольник ABC; CD – биссектриса угла C; точка E лежит на BC, причем $DE \parallel AC$. Найдите DE, если $BC = a$ и $AC = b$.

16.48 [ШарГор]. В треугольнике ABC известно, что $AB = 15$, $BC = 12$, $AC = 18$. В каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису угла C?

16.49 [НГУ, МФ, 1976]. В треугольнике ABC проведены медиана BD и биссектриса AE, которые пересекаются в точке K. Прямая, проходящая через вершину C и точку K, пересекает сторону AB в точке F. Найти длину отрезков AF и FB, если известно, что $AB = c$, $AC = b$.

16.50 [ШарГор]**.** В треугольнике ABC стороны $AB = 15$ и $AC = 10$; AD – биссектриса угла A. Из точки D проведена прямая, параллельная AB, до пересечения с AC в точке E. Найдите AE, EC и DE.

16.51 [ШарГор]**.** В треугольнике ABC проведена биссектриса BE, которую центр O вписанной окружности делит в отношении $BO : OE = 2$. Найдите сторону AB, если $AC = 7$, $BC = 8$.

16.52 [ШарГор]**.** Биссектриса угла N треугольника MNP делит сторону MP на отрезки, равные 28 и 12. Найдите периметр треугольника MNP, если известно, что $MN - NP = 18$.

16.53 [ШарГор]**.** Медиана BK и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке P. Докажите равенство $\dfrac{PC}{PL} - \dfrac{AC}{BC} = 1$.

16.54 [ШарГор]**.** В треугольнике ABC биссектриса AP угла A делится центром O вписанной окружности в отношении $AO : OP = \sqrt{3} : 2\sin\frac{5\pi}{18}$. Найдите углы B и C, если известно, что угол A равен $\frac{5\pi}{9}$.

16.55a [НГУ, МФ, 2000]**.** В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB медиана AM пересекает биссектрису BN в точке K. Найти стороны треугольника ABC, если известно, что $BK = 3$, $KN = 2$.

16.55b [НГУ, МФ, 2000]**.** В прямоугольном треугольнике ABC точка M делит гипотенузу AC в отношении 1:3, считая от вершины A. Известно, что отрезок BM пересекает биссектрису AN в точке K так, что $AK = 3$, $KN = 1$. Найти стороны треугольника ABC.

16.55c [НГУ, МФ, 2000]**.** В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB точка N делит катет AC в отношении 2:1, считая от вершины A. Известно, что отрезок BN пересекает биссектрису AM в точке K так, что $AK = 9$, $KM = 4$. Найти стороны треугольника ABC.

16.56 [НГУ, МФ, 1976]**.** Медиана BD и биссектриса AE треугольника ABC пересекаются в точке F, причем длина отрезка AF в три раза больше длины отрезка FE. Длина медианы BD равна a, длина биссектрисы AE равна b. Найти площадь треугольника ABC.

Расчет отношений как этап решения.

16.57 [ШарГор]**.** В треугольнике ABC высота BD равна 6, медиана CE равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1. Найдите сторону AB.

16.58 [МГУ, ФФ, 1999]**.** В ромбе $ABCD$ высоты BP и BQ пересекают диагональ AC в точках M и N (M между A и N), $AM = p$, $MN = q$. Найдите PQ.

16.59a [ШарГор]. Высота BL ромба $ABCD$, опущенная на сторону AD, пересекает диагональ AC в точке E. Найдите AE, если известно, что $BL = 8$, $AL : LD = 3 : 2$.

16.59b [ШарГор]. Высота BK ромба $ABCD$, опущенная на сторону AD, пересекает диагональ AC в точке M. Найдите MD, если известно, что $BK = 4$, $AK : KD = 1 : 2$.

16.60 [НГУ, МФ, 1976]. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B перпендикулярна боковой стороне AD и пересекает ее в точке E. В каком отношении прямая BE делит площадь трапеции, если известно, что $AE = 2DE$?

16.61' [НГУ, МФ, 1976]. В трапеции $ABCD$ длина основания BC равна 12, длина боковой стороны CD равна 7 и угол BAD равен 60°. Известно, что точка пересечения биссектрис углов ABC и BCD лежит на основании AD. Найти площадь трапеции.

16.62 [ЦыпПин]. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 90°. Точка N лежит на основании BC, причем $BN : NC = 3 : 2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN параллельна боковой стороне AB и делит площадь трапеции пополам. Найти отношение $AB : BC$.

16.63 [ЦыпПин]. В ромбе $ABCD$ со стороной a угол при вершине A равен $\pi/3$. Точки E и F являются серединами сторон AB и CD соответственно. Точка K лежит на стороне BC, отрезки AK и EF пересекаются в точке M. Найти длину отрезка MK, если известно, что $S_{MKCF} = \dfrac{3}{8} S_{ABCD}$.

16.64 [ЦыпПин]. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, $\angle BAC = \angle CDB$. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K, образуя угол AKD, равный 30°. Найти площадь треугольника AKD, если площадь трапеции равна S.

16.65 [ЦыпПин]. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, а диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB. На продолжениях боковых сторон AB и CD за меньшее основание BC отложены отрезки BM и CN так, что получается новая трапеция $BMNC$, подобная трапеции $ABCD$. Найти площадь трапеции $ABCD$, если площадь трапеции $AMND$ равна S и сумма углов CAD и BDA равна 60°.

16.66a [МГУ, псих, 1982]. В параллелограмме $ABCD$, где $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 2$; $AD = 5$, биссектриса угла BAD пересекается с биссектрисой угла ABC в точке K, с биссектрисой угла CDA в точке L; а биссектриса угла BCD пересекается с биссектрисой угла CDA в точке M, с биссектрисой угла ABC в точке N. Найти $S_{KLMN} : S_{ABCD}$.

16.66b [МГУ, псих, 1982]. В трапеции $ABCD$, где $\angle BAD = 45°$; $\angle CDA = 60°$, основание AD имеет длину 15, а основание BC – длину 13, перпендикуляр к стороне AB, восставленный из ее середины M, пересекается с перпендикуляром к стороне CD, восставленным из ее середины N, в некоторой точке L. Найти $S_{MNL} : S_{ABCD}$.

16.67' [МГУ, геол, 1976]. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AD = 5$ и $AB = 4$ проведен отрезок EF, соединяющий точку E стороны BC с точкой F стороны CD. Точки E и F выбраны так, что $BE : EC = 1 : 2$, $CF : FE = 1 : 5$. Известно, что точка M пересечения диагонали AC с отрезком FE удовлетворяет условию $MF : ME = 1 : 4$. Найти диагонали параллелограмма.

16.68a [НГУ, ФФ, 1993]. Внутри ромба $ABCD$ со стороной a и углом BAD в $60°$ выбрана точка M так, что площади треугольников ADM, ABM, BCM и CDM пропорциональны числам 1, 2, 4 и 3 соответственно. Найти расстояние от точки M до вершины A.

16.68b [НГУ, ФФ, 1993]. Вне равностороннего треугольника ABC со стороной a выбрана точка M так, что отрезок AM пересекает сторону BC, а площади треугольников ABM, ACM и BCM пропорциональны числам 4, 1 и 2 соответственно. Найти длину отрезка AM.

16.68c [НГУ, ФФ, 1993]. Вне ромба $ABCD$ со стороной a и углом BAD в $60°$ выбрана точка M так, что отрезки AM и DM пересекают сторону BC, а площади треугольников ABM, BCM, CDM и ADM пропорционально числам 1, 2, 3 и 6 соответственно. Найти длину отрезка AM.

16.68d [НГУ, ФФ, 1993]. Внутри равностороннего треугольника ABC со стороной a выбрана точка M так, что площади треугольников ABM, ACM и BCM пропорциональны числам 1, 2 и 3 соответственно. Найти длину отрезка AM.

16.69 [МФТИ, 2001]. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 6$ и $AC = 2$, проведены медиана AA_1, высота BB_1 и биссектриса CC_1. Найдите площадь треугольника, образованного пересечением прямых: 1) BB_1, CC_1 и BC; 2) AA_1, BB_1 и CC_1.

16.70 [МГУ, ФФ, 2002]. В треугольнике ABC $AB = 14$, $BC = 6$, $AC = 10$. Биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O. Найдите OD.

16.71a [НГУ, ест, 2002]. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC биссектрисы AL и BH пересекаются в точке F. Известно, что площади треугольников ABF и BFL равны 20 и 8 соответственно. Найти площадь треугольника ABC.

16.71b [НГУ, ест, 2002]. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC биссектрисы AL и BH пересекаются в точке F. Известно, что $AF : FL = 7 : 4$. Найти отношение $BF : FH$.

16.71c [НГУ, ест, 2002]. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC биссектрисы AL и BH пересекаются в точке F. Известно, что $AF : FL = 5 : 4$ и $AC = 15$. Найти периметр треугольника ABC.

16.72* [ШарГор]. Прямая, проходящая через середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, пересекает стороны AB и DC соответственно в точках M и N. Доказать, что $S_{DMC} = S_{ABN}$.

16.2. Основания высот треугольника

16.73 [МГУ, экон, 1993]. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите площадь треугольника.

16.74 [МГУ, геол, 1993]. На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол 15°. Найдите углы треугольника ABC.

16.75 [МГ, экон, 1993]. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CH и AH_1. Известно, что $AC = 2$, площадь круга, описанного около треугольника HBH_1, равна $\pi/3$. Найдите угол между высотой CH и стороной BC.

16.76a [МГУ, МФ, 1978]. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

16.76b [МГУ, МФ, 1978]. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Вычислить длину стороны AC, если известно, что периметр треугольника ABC равен 15, периметр треугольника BPQ равен 9, а радиус окружности, описанной около треугольника BPQ, равен $9/5$.

16.76c [МГУ, МФ, 1978]. В остроугольном треугольнике ABC, длина стороны AC которого равна 6, на стороны BC и AB опущены высоты AP и CQ. Вычислить площадь четырехугольника $AQCP$, если известно, что площадь треугольника BPQ равна 1, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $9\sqrt{2}/4$.

16.3. Вычислительные задачи в треугольниках

16.77 [МГУ, АзАфр, 2002]**.** В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = 8$, $BC = 6$ и биссектриса $BD = 6$. Найдите длину медианы AE.

16.78a [НГУ, ест, 2004]**.** В остроугольном треугольнике ABC высоты AK и CL пересекаются в точке H. Известно, что $CH = 9$, $HL = 4$ и $AH : HK = 4 : 1$. Найти AC.

16.78b [НГУ, ест, 2004]**.** В остроугольном треугольнике ABC высоты AK и CL пересекаются в точке H. Известно, что $CH = 8$, $HL = 3$ и $AH : HK = 6 : 1$. Найти BL.

16.79a [НГУ, ест, 2006]**.** В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = 2\sqrt{10}$ угол между медианами AM и BN равен $\operatorname{arctg}(9/20)$. Найти площадь треугольника ABC.

16.79b [НГУ, ест, 2006]**.** В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB угол между медианами AM и BN равен $\operatorname{arctg}(3/17)$. Найти AB, если площадь треугольника ABC равна 8.

16.80a [СУНЦ НГУ, 2006]**.** В остроугольном треугольнике ABC высоты AM и CN пересекаются в точке H. Найти длины сторон AC и BC, если известно, что $AB = 9$, $CH = 5$, $HN = 2$.

16.80b [СУНЦ НГУ, 2006]**.** В остроугольном треугольнике ABC, площадь которого равна 70, высоты AM и CN пересекаются в точке H. Найти длины сторон AC и AC, если известно, что $AH : HM = 3 : 2$ и $BC = 14$.

16.81a [НГУ, МФ, 2007]**.** В остроугольном треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $BM = 9$, расстояние от точки C до прямой BM равно $8\sqrt{5}/3$, расстояние от точки M до прямой AB равно $3\sqrt{5}$. Найти сторону AC.

16.81b [НГУ, МФ, 2007]**.** В остроугольном треугольнике ABC, площадь которого равна $6\sqrt{10}$, проведена медиана BM. Известно, что расстояние от точки C до прямой BM равно $12\sqrt{10}/11$, а расстояние от точки M до прямой AB равно $\sqrt{10}$. Найти сторону AC.

16.82a [СУНЦ НГУ, 1994]**.** В равнобедренном треугольнике ABC (где $AB = BC$) точка M – середина стороны AB, точки K и L расположены на стороне BC так, что $BK = KL = LC = BC/3$. Найти стороны треугольника ABC, если $MK = \sqrt{3}$, $ML = \sqrt{5}$.

16.82b [СУНЦ НГУ, 1994]**.** В равнобедренном треугольнике ABC (где $AB = BC$) на боковой стороне BC выбраны точки M и K так, что.$BM = KC = BC/4$. Найти стороны треугольника ABC, если $AM = \sqrt{11}$, $CK = \sqrt{7}$.

16.83 [МГУ, почв, 1997]. В треугольнике ABC угол C равен $60°$, а биссектриса угла C равна $5\sqrt{3}$. Длины сторон AC и BC относятся как 5:2 соответственно. Найдите тангенс угла A и сторону BC.

16.84 [МГУ, экон, 1976]. В треугольнике ABC задана точка M на стороне AC, соединенная с вершиной B прямолинейным отрезком MB. Известно, что $AM = 6$, $MC = 2$, $\angle ABM = 60°$, $\angle MBC = 30°$. Найти площадь треугольника ABC.

16.85a [НГУ, МФ, 1991]. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3\sqrt{5}$, $AC = 6$, $BC = 3$ проведена биссектриса CH. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает отрезки AB, CH и BC в точках P, Q и R соответственно. Найти наименьшее возможное значение суммы площадей треугольников PHQ и CQR.

16.85b [НГУ, МФ, 1991]. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$ проведена медиана CM. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает отрезки AB, CM и BC в точках P, Q и R соответственно. Найти наименьшее возможное значение суммы площадей треугольников PMQ и CQR.

16.86a [НГУ, ест, 1981]. Дан правильный треугольник ABC со стороной 2. Через середину M стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке N и продолжение стороны BC в точке D. Площади треугольников AMN и NCD равны. Определить длину отрезка MN.

16.86b [НГУ, ест, 1981]. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = 1$, $\angle B = 120°$. Через середину D стороны AC проходит прямая, которая пересекает сторону BC в точке E и продолжение стороны AB в точке F. Площади треугольников BEF и DEC равны. Найти длину отрезка EF.

16.87a [НГУ, ест, 1992]. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC длина биссектрисы CL равна 12. Найти стороны треугольника, если известно, что $AB > AC$ и что прямая, параллельная CL и делящая площадь треугольника пополам, пересекает его по отрезку длиной $3\sqrt{10}$.

16.87b [НГУ, ест, 1992]. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC длина высоты CH равна $3\sqrt{14}$. Найти стороны треугольника, если известно, что $AB > AC$ и что прямая, параллельная CH и делящая площадь треугольника пополам, пересекает его по отрезку длиной $2\sqrt{21}$.

16.88a [НГУ, ест, 1997]. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AC и BC проведены высота BH и медиана AM, которые пересекаются в точке P. Определить длину стороны AB, если известно, что $BP = 5$, $PH = 1$.

16.88b [НГУ, ест, 1997]**.** В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине B проведены высота BH и медиана AM, которые пересекаются в точке P. Определить длину катета AB, если известно, что $BP = 10$, $PH = 2$.

16.89 [МГУ, хим, 2001]**.** В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найдите длину AD, если $CE = 2$.

16.90 [МГУ, геол, 2002]**.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса CD и прямая DE, перпендикулярная CD (точка E лежит на прямой AC.) Найдите площадь треугольника ABC, если $CE = 4$, $CA = 3$.

16.91a [СУНЦ НГУ, 2003]**.** Площадь прямоугольного треугольника ABC равна 18, а длина биссектрисы CK, исходящей из вершины прямого угла, равна 4. Найти периметр треугольника ABC.

16.91b [СУНЦ НГУ, 2003]**.** Сумма катетов AC и BC прямоугольного треугольника ABC равна 25, а длина биссектрисы CK равна $4\sqrt{2}$. Найти длину медианы CM треугольника ABC.

16.92a [НГУ, МФ, 2003]**.** В треугольнике ABC медиана AK, биссектриса BL и высота CM пересекаются в одной точке P. Найти площадь треугольника ABC, если $CP = 5$, $PM = 3$.

16.92b [НГУ, МФ, 2003]**.** В треугольнике ABC медиана AK, биссектриса BL и высота CM пересекаются в одной точке P. Найти площадь треугольника ABC, если $AB = 6$, $CP : PM = 3 : 2$.

16.93a [СУНЦ НГУ, 2006]**.** В остроугольном треугольнике ABC высоты AM и CN пересекаются в точке H. Найти длины сторон AC и BC, если известно, что $AB = 9$, $CH = 5$, $HN = 2$.

16.93b [СУНЦ НГУ, 2006]**.** В остроугольном треугольнике ABC, площадь которого равна 70, высоты AM и CN пересекаются в точке H. Найти длины сторон AC и AC, если известно, что $AH : HM = 3 : 2$ и $BC = 14$.

16.4. Вычислительные задачи в четырехугольниках

16.94 [Плеханов]**.** Высота трапеции равна 12, а диагонали – 15 и 20. Найти площадь трапеции.

16.95 [МГУ, МФ, 1980]**.** В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величины $40°$ и $50°$. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1.

16.96a [СУНЦ НГУ, 2000]. В трапеции боковые стороны равны 11 и 7, а расстояние между серединами диагоналей равно 7. Найти расстояние между серединами оснований трапеции.

16.96b [СУНЦ НГУ, 2000]. В трапеции боковые стороны равны 9 и 5, а расстояние между серединами оснований равно 6. Найти расстояние между серединами диагоналей трапеции.

16.97 [МГУ, хим, 1976]. В трапеции $ABCD$ с основанием AB величины углов DAB, BCD, ADC, ABD и ADB образуют арифметическую прогрессию (в том порядке, в котором они написаны] Найти расстояние от вершины C до диагонали BD, если высота трапеции равна h.

16.98 [ШарГор]. В выпуклом четырехугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L прямые, а угол при вершине M равен $\operatorname{arctg} 3$. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что сторона NL вдвое больше стороны LQ и на 5 больше стороны NM.

16.99a [НГУ, ест, 1999]. В прямоугольник со сторонами 6 и 8 вписан ромб площади 36 так, что на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине ромба. Найти длины диагоналей этого ромба.

16.99b [НГУ, ест, 1999]. В прямоугольник площади 34 вписан ромб с диагоналями $2\sqrt{5}$ и $4\sqrt{5}$ таким образом, что на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине ромба. Найти длины сторон прямоугольника.

16.100a [НГУ, МФ, 2007]. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами, равными 10, основание AD в четыре раза больше основания BC, а точка M пересечения биссектрис углов ABC и BAD лежит на стороне CD. Найти площадь этой трапеции.

16.100b [НГУ, МФ, 2006]. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла BAD при основании AD пересекает основание BC в точке M и продолжение стороны CD в точке K. Найти длину стороны CD, если известно, что $AB = 6$, $BC = 9$, $AM = 10$ и $MK = 2$.

16.100c [НГУ, МФ, 2007]. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 7$, $BC = 5$ точка M пересечения биссектрис углов ABC и BAD лежит на стороне CD. Найти площадь этой трапеции.

16.101a [НГУ, МФ, 1997]. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекают сторону BC в точках M и K соответственно, а отрезки AM и DK пересекаются в точке P. Найти длину стороны BC, если известно, что $AB = 15$ и $AP : PM = 3 : 2$.

16.101b [НГУ, МФ, 1997]. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках M и K соответственно, а продолжения отрезков BM и CKпересекаются в точке P. Найти длину стороны AD, если известно, что $AB = 12$ и $PM : MB = 1 : 4$.

16.102 [НГУ, МФ, 1989]**.** Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно 9 и 3. Точка E — середина боковой стороны AB, точка F — середина CD. Биссектриса угла BAD пересекает среднюю линию EF в точке P, биссектриса угла ADC — в точке Q. Известно, что отрезки EQ, PQ и PF равны. Найти площадь трапеции.

16.103a [НГУ, МФ, 1985]**.** В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов BAD и CDA пересекают сторону BC в точках M и N соответственно. Найти длину стороны AB, если известно, что $AM = 12$, $DN = 5$.

16.103b [НГУ, МФ, 1985]**.** В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M. Известно, что $AD = AB + BC = 10$, $AM = 8$. Найти длину отрезка DM.

16.104a* [НГУ, МФ, 1981]**.** В равнобедренной трапеции $ABCD$ длина основания AB равна 2, $\angle A = 60°$. Диагональ BD трапеции, биссектриса угла A и высота CK, опущенная из вершины C на основание AB, пересекаются в одной точке. Найти длину основания CD.

16.104b* [НГУ, МФ, 1981]**.** В трапеции $ABCD$ $AB = 2$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 30°$. Известно, что биссектрисы углов A и D трапеции и высота CM, опущенная вершины C на основание AB, пересекаются в одной точке. Найти площадь трапеции.

16.105a [НГУ, МФ, 1986]**.** Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD и диагоналями BD и AC. Известно, что $AC = 3$, $BD = 4$ и $\angle CAD = 2\angle BDA$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

16.105b [НГУ, МФ, 1986]**.** Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC. Известно, что $AD = 5$, $BC = 3$ и $\angle ACD = 2\angle BAC$. Найти длину боковой стороны трапеции.

16.106a [НГУ, МФ, 1989]**.** Основания AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 4. Перпендикуляр AP, опущенный из вершины A на сторону CD, делит среднюю линию трапеции пополам. Найти площадь трапеции.

16.106b [НГУ, МФ, 1989]**.** Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12, точки M и N – середины равных сторон AB и BC соответственно. Высота AH пересекает среднюю линию MN в точке E, причем $NE = 2ME$. Найти площадь треугольника ABC.

16.107 [НГУ, МФ, 1990]**.** Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ является биссектрисой острого угла A при основании AD. Перпендикуляр, проведенный к диагонали AC через ее середину, пересекает продолжение боковой стороны CD в точке E. Найти длину отрезка DE, если известно, что $AB = 25$, $AC = 40$.

16.108 [НГУ, ест, 1988]**.** Прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 3$, $BC = 1$ вписан в прямоугольник $AMNK$. Известно, что вершина C лежит на стороне MN, $MC : CN = 2 : 1$, а точка B лежит на стороне NK прямоугольника. Найти площадь треугольника ABK.

16.109 [НГУ, ест, 1988]**.** В прямоугольном треугольнике ABC катеты $AC = 2$, $BC = 3$. На прямую, проходящую через точку C, опущены перпендикуляры AH и BK. Известно, что точка H лежит между точками C и K, причем $CK = 3CH$. Найти площадь трапеции $AHBK$.

16.110 [НГУ, ест, 1994]**.** В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC образует со стороной AD угол в 30°. Точка K – середина стороны CD. Отрезки AK и BD пересекаются в точке E. Найти длину диагонали AC, если расстояние от точки E до прямой BC равно 1.

16.111 [НГУ, ест, 1995]**.** Через середину стороны ромба перпендикулярно этой стороне проводится прямая, которая пересекает противолежащую сторону и делит ромб на части, площади которых равны 12 и 27. Найти сторону ромба.

16.112a [НГУ, ест, 2000]**.** В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 10$, $BC = 6$ из середины M стороны AB опущен перпендикуляр MN на сторону CD, причем известно, что $CN : ND = 3 : 5$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

16.112b [НГУ, ест, 2000]**.** В равнобедренной трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как 5:3. Из середины M стороны AB опущен перпендикуляр MN на сторону CD, причем известно, что $MN = \sqrt{15}$, $CN : ND = 1 : 3$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

16.113’ [МГУ, геогр.2001]**.** Стороны ромба $EFGH$ являются гипотенузами равнобедренных прямоугольных треугольников EAF, FDG, GCH, HBE, причем все эти треугольники имеют общие внутренние точки с ромбом $EFGH$. Сумма площадей четырехугольника $ABCD$ и ромба $EFGH$ равна 12. Найдите GH.

16.114’ [МГУ, био, 1999]**.** На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка AD, если $BC = 2$, $GO = 7$, а $GF = 18$.

16.115 [МГУ, экон, 1999]**.** В трапеции $ABCD$ ($AB \| CD$) диагонали $AC = a$, $BD = 7a/5$. Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.

16.116 [МГУ, МФ, 2002]**.** Точка M лежит на боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Известно, что $\angle BCD = \angle CBD = \angle ABM = \arccos(5/6)$ и $AB = 9$. Найдите BM.

16.117 [НГУ, МФ, 2003]. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с углами в 60° при вершинах A и D расстояния от середин сторон BC и CD до прямой AC равны 3 и 9 соответственно. Найти площадь трапеции $ABCD$.

16.118 [НГУ, МФ, 2006]. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке M. Найти площадь трапеции $ABCD$, если известно, что угол AMB равен $\arccos(3/5)$, а средняя линия трапеции равна 4.

16.119 [МГУ, экон, 1970]. Квадрат $ABCD$ имеет площадь 1. Его сторона AD продолжена за точку D и на продолжении взята точка O на расстоянии 3 от точки D. Из точки O проведены два луча. Первый луч пересекает отрезок CD в точке M и отрезок AB в точке N, причем длина отрезка ON равна a. Второй луч пересекает отрезок CD в точке L и отрезок BC в точке K, причем угол BKL равен α. Найти площадь многоугольника $BKLMN$.

16.5. Простейшие расчеты с окружностями

Окружность — душа геометрии.
Познайте окружность, и вы не
только познаете душу геометрии,
но и возвысите душу свою.

И.Ф. Шарыгин

16.120 [МАИ, 1977]. В круге радиуса 12 длина хорды AB равна 6, а хорды BC – 4. Найдите длину хорды, соединяющей концы дуги AC.

16.121 [Говоров]. На сторонах AB и AC угла BAC, равного $2\pi/3$, как на диаметрах построены полуокружности. В общую часть двух образованных полукругов вписана окружность максимального радиуса. Найдите радиус этой окружности, если $AB = 4$, $AC = 2$.

16.122 [Говоров]. В окружности радиуса r проведена хорда длины $r/2$. Через один конец хорды проведена касательная к этой окружности, а через другой конец – секущая, параллельная касательной. Найти расстояние между касательной и секущей.

16.123 [Говоров]. Две окружности радиусов R и r касаются внешне в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB, где A и B – точки касания. Вычислите длины сторон треугольника ABC.

16.124 [Говоров]. Две окружности радиусов R и r $(R > r)$ касаются внешним образом. Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

16.125 [Говоров]. Две окружности радиусов R и r касаются внешне в точке A. На окружности радиуса r взята точка B, диаметрально противоположная точке A, и в этой точке построена касательная l. Найдите радиус окружности, касающейся двух данных окружностей и прямой l.

16.126 [Говоров]. Точки O_1 и O_2 – центры окружностей K_1 и K_2, касающихся внешне. Радиусы этих окружностей равны соответственно r_1 и r_2. На отрезке O_1O_2 как на диаметре построена окружность K_3. Вычислите радиус окружности, касающейся внешне окружностей K_1 и K_2 и внутренне – окружности K_3.

16.127 [ЛГУ, 1980]. Окружность радиуса r касается изнутри двух окружностей радиусов R_1 и R_2, причем центры всех трех окружностей лежат на одной прямой. Найдите радиус окружности, касающейся всех трех данных.

16.128 [МГУ, псих, 1980]. В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна 30°, а радиус описанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки C до точки касания вписанной окружности и катета AB.

16.129 [Говоров]. В прямоугольный треугольник вписан полукруг так, что его диаметр лежит на гипотенузе и центр его делит гипотенузу на отрезки длиной 15 и 20. Найдите длину дуги полуокружности, заключенной между точками касания ее с катетами.

16.130 [Говоров]. Из точки A к окружности с центром в точке N проведены две касательные, которые касаются окружности в точках B и M. Хорда BM пересекает отрезок NA в точке K. Известно, что $NK = \frac{4}{7}KA$; $AB = 4$. Найдите площадь треугольника BAK.

16.131 [Говоров]. В прямоугольном треугольнике на высоте CK как на диаметре построена окружность, которая пересекает катеты CA и CB соответственно в точках M и N. Известно, что $CM = 12$, $CN = 18$. Найдите CA и CB.

16.132 [НГУ, ест, 2003]. Окружность проходит через вершину A прямоугольника $ABCD$ и касается продолжений сторон BC и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $BM = 21$, $DN = 20$. Найти площадь прямоугольника $ABCD$.

16.6. Длины отрезков на секущих, хордах, касательных

16.133 [МГУ, псих, 1980]. В квадрат $ABCD$ со стороной a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E. Найдите длину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается с прямой AE.

16.134 [Говоров]**.** Круг радиуса 13 касается двух смежных сторон квадрата, длина стороны которого равна 18. На какие два отрезка делит круг каждую из двух других сторон квадрата?

16.135 [ЛГУ, 1980]**.** На катете AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбрана точка P так, что полуокружность, построенная на отрезке PC как на диаметре, касается гипотенузы AB. В каком отношении полуокружность делит отрезок PB?

16.136 [МГУ, экон, 1980]**.** В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2:3. Найдите длины сторон треугольника.

16.137a [НГУ, МФ, 2001]**.** В равнобедренном треугольнике ABC стороны $AB = BC = 8$, $AC = 4$. На стороне BC выбрана точка M так, что окружности, вписанные в треугольники ABM и ACM, касаются друг друга. Найти площади треугольников ABM и ACM.

16.137b [НГУ, МФ, 2001]**.** В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$, $AC = 4$ на гипотенузе BC выбрана точка M так, что окружности, вписанные в треугольники ABM и ACM, касаются друг друга. Найти площади треугольников ABM и ACM.

16.138a [СУНЦ НГУ, 1995]**.** Через концы гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC проведена окружность радиуса $\sqrt{65}$. Эта окружность пересекает катет AB в точке K, $AK = 14$; $BK = 1$; и эта окружность пересекает катет BC. Найти AC.

16.138b [СУНЦ НГУ, 1995]**.** Через концы гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC проводится окружность радиуса $\sqrt{85}$, которая пересекает продолжение катета AB в точке M и продолжение катета CB в точке K. Найти AC, если известно, что $AM = 18$, $BK = 5$.

16.139a [НГУ, МФ, 1977]**.** Окружности O_1 и O_2 касаются друг друга внешним образом в точке A; отрезок AB – диаметр O_1. Длины отрезков, отсекаемых окружностями на некоторой прямой, проходящей через точку B, равны 2, 3 и 4, считая от точки B. Найти радиусы окружностей.

16.139b [НГУ, МФ, 1977]**.** Окружности O_1, O_2, O_3 радиусов 1, 1 и 2 соответственно попарно касаются друга внешним образом. A – точка касания O_1 и O_3, B – точка касания O_2 и O_3. Через точку B проведена касательная к O_3. Пусть C – ближайшая к B точка пересечения этой касательной с окружностью O_1. Найти длину хорды, отсекаемой окружностью O_3 на прямой AC.

16.140 [НГУ, МФ, 1977]**.** Через вершину правильного треугольника со стороной, равной единице, проведена прямая, которая делит его на два треугольника. Найти радиусы окружностей, вписанных в каждый из получившихся треугольников, если известно, что один из этих радиусов в два раза больше другого.

16.141 [НГУ, МФ, 1977]**.** К окружности радиуса R проведены касательная и секущая под углом 60° друг к другу. Найти расстояние от центра окружности до точки пересечения касательной и секущей, если длина отрезка секущей, заключенной внутри круга, равна $\frac{8}{5}R$.

16.142* [МГУ, псих, 1997]**.** Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Через точку B на их общей касательной AB проведены проведены две прямые, одна из которых пересекает первую окружность в точках M и N, а другая вторую окружность в точках P и Q. Известно, что $AB = 6,\ BM = 9,\ BP = 5$. Найдите отношение площадей треугольников MNO и PQO, где O – точка пересечения прямых MP и NQ.

16.143a [МФТИ, 1991]**.** Отрезок AE является высотой равнобедренного треугольника ABC $(AB = AC)$. Окружность проходит через точки A, C, E и пересекает сторону AB в точке D так, что $AD : AB = 7 : 9$. Найти отношение длины окружности к периметру треугольника ABC.

16.143b [МФТИ, 1991]**.** Отрезок BE является биссектрисой прямоугольного треугольника ABC $\angle A = 90^\circ$. Окружность проходит через точки B, A, E и пересекает сторону BC в точке D так, что $BD : BC = 5 : 13$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади круга.

16.144a [НГУ, МФ, 1996]**.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вписанная окружность касается боковой стороны BC в точке Q, а отрезок AQ пересекает вписанную окружность в точке P. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $AC = 12$, $PQ = 5$.

16.144b [НГУ, МФ, 1996]**.** Равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC описана около окружности. Сторона CD касается этой окружности в точке Q, а отрезок AQ пересекает окружность в точке P. Найти радиус окружности, если известно, что $AP = 2$, $PQ = 7$.

16.145a [НГУ, ФФ, 1991]**.** В треугольнике ABC сторона $AB = 15$, окружность, проходящая через вершину C, касается стороны AB в точке L и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найти AC и BC, если известно, что $AP = 3$, $BQ = 2$ и CL является биссектрисой угла C.

16.145b [НГУ, ФФ, 1991]**.** Окружность, проходящая через вершину C треугольника ABC, касается стороны AB в точке L и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найти AC и BC, если известно, что $AP = 3$, $AL = 6$, $LB = 8$ и прямая PQ параллельна AB.

16.146a [НГУ, ФФ, 1992]**.** В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена высота AH, продолжение которой пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Найти площадь треугольника ABC, если $AH = 9$, $AD = 13$.

16.146b [НГУ, ФФ, 1992]**.** В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена высота AH, пересекающая описанную около треугольника окружность в точке D. Найти площадь треугольника ABC, если $AH = 18$, $DH = 7$.

16.147 [Созоненко]**.** Острый угол ABC ромба $ABCD$ имеет величину $60°$. Окружность проходит через центр ромба, касается прямой AB в точке B и пересекает сторону CD в точке E. Определить, в каком отношении точка E делит отрезок CD.

16.148a [НГУ, МФ, 2001]**.** В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $\arccos(1/3)$. Окружность, проходящая через вершины A, B и C, пересекает продолжение стороны AD в точке M и продолжение стороны CD в точке K. Известно, что $AM = 23$, $CK = 22$. Найти площадь параллелограмма.

16.148b [НГУ, МФ, 2001]**.** В параллелограмме $ABCD$ сторона BC в два раза больше стороны AB. Окружность, проходящая через вершины A, B и C, пересекает продолжение стороны AD в точке M и продолжение стороны CD в точке K. Известно, что $AM = 15$, $CK = 12$. Найти площадь параллелограмма.

16.149 [МГУ, МФ, 2001]**.** Через вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E, причем $BE = 9$. Найдите диагональ BD.

16.150 [МГУ, хим, 1998]**.** Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E, причем $CE = DE$. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке K. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника CKM, если $AB = 10$, $AE = 1$.

16.151 [МГУ, ФФ, 2002]**.** Окружность проходит через вершину B треугольника ABC, касается стороны AC в ее середине D и пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AB : BC = 3 : 2$. Найдите отношение площади треугольника AMD в площади треугольника DNC.

16.152a [НГУ, ест, 2003]**.** Хорда AD окружности пересекает два взаимно перпендикулярных радиуса этой окружности в точках B и C, причем точка B лежит между точками A и C. Найти радиус окружности, если $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 6$.

16.152b [НГУ, ест, 2003]**.** Хорда AD окружности пересекает два взаимно перпендикулярных радиуса этой окружности в точках B и C, причем точка B лежит между точками A и C. Известно, что $AB : BC : CD = 3 : 4 : 5$, а радиус окружности равен $3\sqrt{13}$. Найти длину хорды AD.

16.153a [НГУ, МФ, 1995]. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AB и BC окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти стороны треугольника ABC, если известно, что площади треугольников AMN и ABC равны $\sqrt{15}$ и $16\sqrt{15}$.

16.153b [НГУ, МФ, 1995]. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AB и BC окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найти стороны треугольника ABC, если известно, что площади треугольников AMN и BMN равны 2 и 3 соответственно.

16.154a [НГУ, МФ, 1975]. Дана окружность радиуса r. На расстоянии $2r$ от центра окружности выбрана точка A. Из этой точки проведены касательная и секущая, причем секущая равноудалена от центра окружности и от точки касания. Найти длину отрезка секущей, заключенного внутри круга.

16.154b [НГУ, МФ, 1975]. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен a, CE – высота, проведенная из вершины прямого угла. Известно, что расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник ACE, до катета BC в два раза больше радиуса этой окружности. Найти площадь треугольника ABC.

16.155 [НГУ, ест, 2007]. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой BC через вершины A и C проведена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Известно, что $AD = 5$, $CE = 13$, а радиус окружности равен $5\sqrt{10}/2$. Найти площадь треугольника ABC.

16.156 [СУНЦ НГУ, 2007]. Окружность пересекает стороны угла с вершиной P в точках A, B, C, D так, что точка A лежит между точками P и B, точка D лежит между точками P и C. Известно, что $PA = 2$, $PC = 8$, $\angle APD = 30^\circ$ и площадь четырехугольника $ABCD$ равна $45/2$. Найти длину отрезка AD.

16.157a [СУНЦ НГУ, 1992]. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 40$ средняя линия, параллельная основанию, пересекает вписанную в треугольник окружность в точках D и E. Длина хорды DE равна 12. Найти боковую сторону треугольника.

16.157b [СУНЦ НГУ, 1992]. В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 20$ средняя линия, параллельная основанию, пересекает вписанную в треугольник окружность в точках D и E. Длина хорды DE равна 8. Найти площадь треугольника.

16.158a [СУНЦ НГУ, 1997]. Около треугольника ABC со сторонами $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 7$ описана окружность. Через середины сторон

AB и BC проведена прямая, которая пересекает окружность в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

16.158b [СУНЦ НГУ, 1997]**.** Около треугольника ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 4$ и углом B, равном 60°, описана окружность. Через середину стороны BC перпендикулярно стороне AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

16.159a [СУНЦ НГУ, 2004]**.** В треугольнике ABC окружность радиуса $2\sqrt{6}$ с центром на стороне AC касается продолжения стороны AB в точке M и стороны BC в точке N. Известно, что $AM = 1$, $CN = 5$. Найти площадь треугольника ABC.

16.159b [СУНЦ НГУ, 2004]**.** В треугольнике ABC окружность радиуса $4\sqrt{2}$ с центром на стороне AC касается сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 2$, $CN = 7$. Найти площадь треугольника ABC.

16.160a [СУНЦ НГУ]**.** Окружность касается стороны AB параллелограмма $ABCD$, проходит через вершины C и D, а стороны AD и BC пересекает в точках M и N соответственно. Известно, что $BN = 16$, $CN = 2$, $AM = 9$. Найти длину отрезка DN.

16.160b [СУНЦ НГУ]**.** Окружность касается стороны AB параллелограмма $ABCD$, проходит через вершины C и D, а стороны AD и BC пересекает в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = 9$, $BN = 4$, $CN = 5$. Найти длину отрезка CM.

16.7. Углы в окружностях

16.161 [ШарГор]**.** Точки D и E делят стороны AC и AB правильного треугольника ABC в отношениях$AD : DC = BE : EA = 1 : 2$. Прямые BD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что угол AOC – прямой.

16.162 [МГУ, МФ, 1979]**.** Отрезок KL является диаметром некоторой окружности. Через его концы K и L проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках P и Q, лежащих по одну сторону от прямой KL. Найти радиус окружности, если $\angle PKL = \pi/3$ и точка пересечения прямых KP и QL находится от точек P и Q на расстоянии, равном 1.

16.163 [МГУ, МФ, 1997]**.** В треугольнике ABC длина AB равна 3, $\angle ACB = \arcsin\dfrac{3}{5}$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает отрезки AC и BC в точках M и L. Известно, что $\angle ABC = \angle CML$, $S_{ABML} = 2$, а длина LM равна 1. Найдите высоту треугольника KNC, опущенную из вершины C, и его площадь.

16.164 [МГУ, ВМК, 1979]. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB, пересекает сторону CD в точке M. Доказать, что EM – медиана треугольника CED и найти ее длину, если $AD = 8$, $AB = 4$ и $\angle CDB = \alpha$.

16.165* [МГУ, ФФ, 1993]. Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b. Найдите расстояние от точки C до хорды AB.

16.166a [НГУ, МФ, 1999]. На плоскости дан прямоугольник площади 45. Из некоторой точки M плоскости на диагонали прямоугольника опущены перпендикуляры MP и MQ. Известно, что $PQ = 7$. Доказать, что все такие точки M лежат на одной окружности, и найти ее радиус, если он в три раза меньше длины диагонали прямоугольника.

16.166b [НГУ, МФ, 1999]. На окружности радиуса 1 выбрана точка M. Из нее опущены перпендикуляры MP и MQ на диагонали некоторого вписанного в окружность прямоугольника. Известно, что $PQ = 1/\sqrt{2}$. Доказать, что все такие прямоугольники равны, и найти длины их сторон.

16.167a [НГУ, МФ, 1980]. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса R. Точка D лежит лежит на дуге BC, а хорды AD и BC пересекаются в точке M. Найти длину стороны BC, если угол BMD равен $120°$, $AB = R$, $BM : MC = 2 : 3$.

16.167b [НГУ, МФ, 1980]. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Прямые BC и AD пересекаются в точке K, углы CAD и ADB равны соответственно $120°$ и $30°$. Найти длину отрезка KC, если $KB : BC = 3 : 1$.

16.168a [НГУ, МФ, 1982]. Дан ромб $ABCD$. Окружность радиуса R описана около треугольника ABD и проходит через центр окружности, вписанной в треугольник CBD. Определить площадь ромба.

16.168b [НГУ, МФ, 1982]. Основания AB и CD равнобедренной трапеции $ABCD$ равны соответственно 2 и 1, точка M – середина стороны AB. Окружность, описанная около треугольника CDM, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник BCM. Определить площадь трапеции.

16.169a [НГУ, МФ, 1987]. Из точки A проведены к окружности радиуса R касательная AM и секущая, которая пересекает окружность в точках K и L. Известно, что L – середина отрезка AK, $\angle AMK = 60°$. Найти площадь треугольника AMK.

16.169b [НГУ, МФ, 1987]. В треугольнике ABC проведена медиана BD, $\angle ABC = 135°$. Окружность, описанная около треугольника BCD, касается прямой AB, ее радиус равен R. Найти площадь треугольника ABC.

16.170a [НГУ, МФ, 1993]**.** Через вершину A некоторого угла, равного 60°, проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках B и D, а его биссектрису – в точке C. Найти сумму длин отрезков AB и AD, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна 1.

16.170b [НГУ, МФ, 1993]**.** Через вершину A некоторого угла проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках B и D, а его биссектрису – в точке C. Найти величину угла BAD, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна 1, а сумма длин отрезков AB и AD равна 6.

16.171a [НГУ, МФ, 1994]**.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB вершины A, C, середина стороны BC и точка пересечения высот расположены на одной окружности. Найти углы треугольника ABC.

16.171b [НГУ, МФ, 1994]**.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB вершины A, C и точка пересечения высот расположены на одной окружности радиуса 5. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $AC = 6$.

16.172a [НГУ, ест, 1980]**.** Длина диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна $\sqrt{2}$. Углы ABC, ACD и DAC равны соответственно 105°, 42° и 63°. Найти площадь круга, описанного около треугольника ABD.

16.172b [НГУ, ест, 1980]**.** Длина диагонали BE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равна $\sqrt{2}$. Углы BAE, CED, BCD и CDE равны соответственно 135°, 25°, 100° и 100°. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

16.173a [НГУ, ест, 1988]**.** Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 5$, $BC = 12$ описана окружность. Точки M и N – середины меньших дуг AC и BC этой окружности, K – середина дуги AB, не содержащей точку C. Найти площадь четырехугольника $AMNK$.

16.173b [НГУ, ест, 1988]**.** Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 5$, $BC = 12$ описана окружность. Точки E и F – середины меньших дуг AC и BC этой окружности, M и K – точки пересечения хорды EF с катетами AC и BC. Найти площадь четырехугольника $AMKB$.

16.174a [НГУ, ФФ, 1986]**.** Окружности O_1 и O_2 радиусов 5 и 3 соответственно пересекаются в точках A и B, причем $AB = 4$. Известно, что центр окружности O_2 лежит вне круга O_1. Точка C – середина лежащей в круге O_1 дуги AB окружности O_2. Лучи AC и BC пересекают окружность O_1 в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

16.174b [НГУ, ФФ, 1986]**.** Окружности O_1 и O_2 радиусов 3 и 4 соответственно пересекаются в точках A и B, причем $AB = 2$. Известно, что центр окружности O_2 лежит вне круга O_1. Точка C – середина лежащей вне круга O_1 дуги AB окружности O_2. Лучи CA и CB пересекают окружность O_1 в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

16.175a [НГУ, ФФ, 1987]**.** Две окружности радиусов 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, которая пересекает окружности в точках C и D, причем точка B лежит между C и D; $CD = 8$. Найти площадь треугольника ACD.

16.175b [НГУ, ФФ, 1987]**.** Две окружности радиусов 5 и 3, расстояние между центрами которых равно 4, пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, которая пересекает окружности в точках C и D, причем точка B лежит между C и D. Известно, что отрезок AB является биссектрисой угла A треугольника ACD. Найти CD.

16.176a [НГУ, ФФ, 1996]**.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $BD = 7$, $CD = 8$, $BC < 4$, $\angle BAD = 120^\circ$. Определить угол CAD.

16.176b [НГУ, ФФ, 1996]**.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AB = 7$, $AC = 5$, $BC < 5$, $\angle ADC = 135^\circ$. Определить угол ADB.

16.177 [МГУ, МФ, 1980]**.** Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $BD \parallel AE$, $\angle CAE = 2\angle CEA$, $\angle CBD - \angle CDB = a$. Найти отношение периметра треугольника ACE к радиусу описанной около него окружности.

16.178 [МФТИ, 2001]**.** Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что точка C лежит на отрезке AD. Найдите AC, BC и радиус окружности R, если $BD = 5$, $\angle BAC = \arcsin(1/\sqrt{6})$, $\angle BDC = \arccos(5/21)$.

16.179 [МГУ, ФФ, 2001]**.** В трапеции $KLMN$ известно, что $LM \parallel KN$, $\angle KLM = \pi/2$, $LM = l$, $KN = k$, $MN = a$. Окружность проходит через точки M и N и касается прямой KL в точке A. Найдите площадь треугольника AMN.

16.180 [МГУ, псих, 2001]**.** В трапеции $BCDE$ основание $BE = 13$, основание $CD = 3$, $CE = 10$. На описанной около $BCDE$ окружности взята отличная от E точка A так, что $CA = 10$. Найдите длину отрезка BA и площадь пятиугольника $ABCDE$.

16.181 [МГУ, соц, 2001]**.** Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной около него окружности. Найдите отношение S_{ABC} и S_{ACD}, если известно, что диагональ BD делит AC в отношении 2:1 (считая от точки A), а $\angle BAC = 30^\circ$.

16.182 [МГУ, МФ, 1999]. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E. Найдите AE, если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

16.183 [МГУ, геол, 1998]. Четырехугольник $PQRS$ вписан в окружность. Диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $PS = 13$, $QM = 10$, $QR = 26$. Найдите площадь четырехугольника $PQRS$.

16.184 [МГУ, псих, 2002]. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Она пересекает сторону AB в точке E. На стороне BC взята точка G так, что отрезок AG пересекает окружность в точке F, причем отрезки EF и AC параллельны, $BG = 2GC$ и $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите GF.

16.185a [СУНЦ НГУ, 1998]. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках M, N и K соответственно. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 9, величина угла MKN равна $\arccos(1/3)$. Определить длину стороны AC.

16.185b [СУНЦ НГУ, 1998]. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках M, N и K соответственно. Известно, что $MN = 3$, а величина угла ABC равна $\arccos(1/8)$. Определить радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

16.186a* [МГУ, экон, 1977]. Рассматриваются всевозможные трапеции, вписанные в окружность радиуса R, такие, что центр окружности находится внутри трапеции, а одно из оснований равно $R\sqrt{3}$. Найти боковую сторону той из этих трапеций, которая имеет наибольшую площадь.

16.186b* [МГУ, экон, 1977]. Хорда AB равна радиусу окружности. Хорда CD, параллельная AB, проведена так, что площадь четырехугольника $ABCD$ максимальна. Найти угловую величину меньшей из дуг, стягиваемых хордой CD.

16.187* [МГУ, хим, 2002]. Из точки C проведены две касательные к окружности. Точки A и B – точки касания. На окружности взята произвольная точка M, отличная от A и B. Из точки M опущены перпендикуляры MN, ME, MD на стороны AB, BC, CA соответственно. Найдите площадь треугольника MNE, если $MN = 4$, $MD = 2$ и $\angle ACB = 120^\circ$.

16.188* [МГУ, ФФ, 1971]. В окружность вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$.) На дуге AD, не содержащей точек B и C, взята точка S. Точки P, Q, M, N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S соответственно на AD, BC, AB и CD (или их продолжения] Известно, что $SP = a$, $SQ = b$, $SN = c$. Найти отношение площади треугольника MQS к площади треугольника NQS.

16.189* [МГУ, ФФ, 1997]. В трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, $\angle ABC = 90°$. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD – в точке N. Известно, что $MC = a$, $BN = b$, а расстояние от точки D до прямой MC равно c. Найдите расстояние от точки A до прямой BN.

16.190* [МГУ, ФФ, 1978]. Дана окружность с диаметром AB. Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую окружность в точках C и D, а диаметр AB в точке E. На дуге CE, не содержащей точки D, взята точка M, отличная от точек C и E. Луч BM пересекает первую окружность в точке N. Известно, что $CN = a$, $DN = b$. Найти MN.

16.191' [МГУ, МФ, 1998]. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD делит пополам отрезок OH, где O – центр описанной окружности, H – точка пересечения высот. Известно, что $AC = 2$, $AD = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

16.8. Окружность и треугольник

16.192 [СУНЦ НГУ, 1991]. Доказать, что в прямоугольном треугольнике отрезки катетов, отсекаемые окружностями, построенных на проекциях катетов на гипотенузу как на диаметрах, пропорциональны кубам катетов.

16.193a [СУНЦ НГУ]. В треугольнике ABC биссектриса AE относится к радиусу вписанной окружности как $\sqrt{2} : (\sqrt{2} - 1)$. Найти углы B и C, если известно, что угол A равен $\pi/3$.

16.193b [СУНЦ НГУ]. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром вписанной окружности O в отношении $BO : OE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Найти острые углы треугольника ABC.

16.194. МФТИ, 1991] В равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$ вписана окружность. Прямая, параллельная стороне AB и касающаяся окружности, пересекает сторону AC в точке M такой, что $MC = \frac{2}{5}AC$. Найти радиус окружности, если периметр треугольника ABC равен 20.

16.195 [ЦыпПин]. Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника лежит на окружности, вписанной в этот треугольник. Найти острые углы треугольника.

16.196 [ЦыпПин]**.** Две окружности радиусов 5 и 3 касаются друг друга внутренним образом. Хорда большей окружности касается меньшей и делится точкой касания в отношении 3:1. Найти длину этой хорды.

16.197' [МГУ, геол, 1997]**.** Около треугольника ABC ($\hat{A} > \pi/2$) описана окружность с центром O. Точка F является серединой большей из дуг, стягиваемых хордой BC. Обозначим точку пересечения стороны BC с радиусом AO через E, а с хордой AF – через P. Пусть AH – высота треугольника ABC. Найти отношение площади четырехугольника $OEPF$ к площади треугольника APH, если известно, что радиус описанной окружности $R = 2\sqrt{3}$, $AE = \sqrt{3}$ и $EH = 3/2$.

16.198 [НГУ, МФ, 1978]**.** На плоскости заданы две окружности радиусов 3 и 1, расстояние между центрами которых равно $2\sqrt{2}$. Прямая l – общая касательная этих окружностей. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания и ближайшая к l точка пересечения окружностей.

16.199a [НГУ, МФ, 1979]**.** Угол ABC ромба $ABCD$ равен $60°$. Окружность проходит через центр ромба, касается прямой AB в точке B и пересекает сторону CD в точке E. Определить, в каком отношении точка E делит отрезок CD.

16.199b [НГУ, МФ, 1979]**.** В угол, равный $60°$, вписаны две пересекающиеся окружности. Касательные к окружностям, проходящие через их общую точку, образуют прямой угол. Найти радиусы окружностей, если длина их общей хорды равна a.

16.200a [НГУ, МФ, 1988]**.** Окружность O_1 радиуса 3 касается продолжения стороны AB угла ABC, ее центр лежит на стороне BC. Окружность O_2 радиуса 1 касается сторон угла ABC и окружности O_1. Найти угол ABC.

16.200b [НГУ, МФ, 1988]**.** Окружность O_1 радиуса 2 касается продолжения стороны AB угла ABC, ее центр лежит на стороне BC. Окружность O_2 радиуса 5 касается сторон угла ABC и окружности O_1. Найти угол ABC.

16.201* [ЦыпПин]**.** В треугольнике ABC угол B равен $\pi/4$, угол C равен $\pi/3$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает среднюю линию MN в точке F. Найти отношение $NF : FM$.

16.202* [МГУ, ФФ, 2001]**.** В треугольнике ABC известен угол: $\angle BAC = \pi/4$. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. На отрезках AN и CM как на диаметрах построены окружности. Их общая хорда пересекает отрезок MN в точке D, $MD : DN = \sqrt{3} : 1$. Найдите $\angle BCA$.

16.9. Окружность и четырехугольник

16.203a [СУНЦ НГУ, 1993]**.** В окружность радиуса $\sqrt{3}$ вписана трапеция площадью $\sqrt{3}$ с диагональю 2. Найти периметр трапеции.

16.203b [СУНЦ НГУ, 1993]**.** В окружность радиуса 3 вписана трапеция площадью $4\sqrt{3}$ с высотой 2. Найти боковую сторону трапеции.

16.204 [Говоров]**.** Около круга радиуса r описана прямоугольная трапеция, меньшая из сторон которой равна $3r/2$. Вычислите площадь этой трапеции.

16.205 [МГУ, ФФ, 1977]**.** Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{2/3}$. Найти углы трапеции.

16.206 [НГУ, МФ, 1979]**.** Найти радиус окружности, описанной вокруг равнобедренной трапеции с острым углом, вдвое меньшим тупого, если в эту трапецию можно вписать окружность радиуса r.

16.207 [МГУ, МФ, 1977]**.** Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно $5/11$. Найти длины оснований трапеции.

16.208 [Созоненко]**.** Длины оснований AB и CD трапеции $ABCD$ равны 5 и 3 соответственно, боковая сторона AD перпендикулярна основаниям. На отрезке CD как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали AC и BD в точках F и E соответственно. Известно, что длина отрезка BE в два раза больше длины отрезка DE. Определить, в каком отношении точка F делит отрезок AC.

16.209a [СУНЦ НГУ, 2001]**.** В окружность радиуса 7 вписана трапеция с диагональю 10. Известно, что расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции равно 5. Найти площадь трапеции.

16.209b [СУНЦ НГУ, 2001]**.** В окружность радиуса 13 вписана трапеция, диагонали которой перпендикулярны. Известно, что расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции равно $5\sqrt{2}$. Найти площадь трапеции.

16.210a [НГУ, МФ, 2004]**.** В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Боковые стороны AB и CD касаются окружности в точках M и N соответственно, причем $AM : MB = 2 : 1$ и $CN : ND = 2 : 9$. Найти отношение $AD : BC$ оснований трапеции.

16.210b [НГУ, МФ, 2004]**.** В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Отношение боковых сторон $AB : CD = 2 : 3$. Основание AD трапеции касается окружности в точке K такой, что $AK : KD = 1 : 2$. Найти отношение $AD : BC$ оснований трапеции.

16.211* [НГУ, МФ, 1974]**.** Из точки вне окружности проведены касательные и секущая, причем точки касания и точки пересечения секущей с окружностью являются вершинами некоторой трапеции. Найти отношение оснований трапеции, если известно, что угол между касательными равен $60°$.

16.212' [МГУ, геол, 1981]**.** Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке E. Найти длину отрезка BE, если известно, что диагональ BD является биссектрисой угла ABC и что $|BD| = 25$; $|CD| = 15$.

16.213 [НГУ, МФ.1978]**.** В окружность радиуса 3 с центром в точке O вписана трапеция. Определить площадь трапеции, если известно, что окружность радиуса 1 с центром в точке O касается одного из оснований трапеции и проходит через точку пересечения диагоналей.

16.214 [НГУ, МФ, 1979]**.** Угол ABC ромба $ABCD$ равен $60°$. Окружность проходит через центр ромба, касается прямой AB в точке B и пересекает сторону CD в точке E. Определить, в каком отношении точка E делит отрезок CD.

16.215a [НГУ, МФ, 1998]**.** В прямоугольнике $ABCD$ через вершину B перпендикулярно диагонали AC проведена прямая, которая пересекает сторону AD в точке M и диагональ AC в точке K. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMK и BKC, равны соответственно 7 и 9. Определить радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

16.215b [НГУ, МФ, 1998]**.** В прямоугольнике $ABCD$ через вершину B перпендикулярно диагонали AC проведена прямая, которая пересекает продолжение стороны AD в точке M и диагональ AC в точке K. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM и AMK, равны соответственно 12 и 9. Определить радиус окружности, вписанной в треугольник BCK.

16.216a [НГУ, МФ, 1978]**.** Длины оснований AB и CD трапеции $ABCD$ равны 5 и 3 соответственно, боковая сторона AD перпендикулярна основаниям. На отрезке CD как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали AC и BD в точках F и E соответственно. Известно, что длина отрезка BE в два раза больше длины отрезка DE. В каком отношении точка F делит отрезок AC?

16.216b [НГУ, МФ, 1978]**.** Радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, равен R. Диагонали AC и BD трапеции делятся точкой их пересечения E в отношении $1 : 3$, считая от меньшего основания CD. Угол DEC равен $60°$. Найти площадь трапеции.

16.217 [НГУ, ест, 1976]. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 60°. Окружность, проходящая через точки A, B и D, пересекает сторону CD в середине. Найти площадь параллелограмма, если радиус окружности равен R.

16.218 [НГУ, ест, 1977]. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а длина его диагонали BD равно 10. На плоскости выбрана точка O, удаленная от вершин B и D на одинаковое расстояние, равное 13. Найти расстояние от точки O до ближайшей вершины прямоугольника.

16.219 [НГУ, ест, 1978]. В трапеции $ABCD$ угол DAB при основании AB равен 45°. Известно, что окружность радиуса R с центром в точке C касается диагонали BD и продолжений сторон AB и AD трапеции. Найти площадь трапеции.

16.220 [НГУ, ест, 1978]. В трапеции $ABCD$ основания AB и CD имеют длины 5 и 3 соответственно, боковая сторона AD перпендикулярна основаниям. На основании CD как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали AC и BD в точках F и E. Известно, что E – середина отрезка BD. Определить, в каком отношении точка F делит отрезок AC.

16.221 [НГУ, ест, 1982]. Боковая сторона AD трапеции $ABCD$ перпендикулярна основаниям AB и CD, $AB = 3$, $CD = 1$. Окружность, построенная на стороне BC как на диаметре, касается стороны AD. Найти площадь трапеции.

16.222a [НГУ, МФ, 2002]. Две окружности радиусов 3 и 2 касаются друг друга внешним образом. Трапеция $ABCD$ расположена так, что ее основания AB и CD являются диаметрами этих окружностей. Найти BC и AD, если известно, что площадь трапеции равна $25\sqrt{3}/2$.

16.222b [НГУ, МФ, 2002]. Две окружности касаются друг друга внешним образом. Трапеция $ABCD$ расположена так, что ее основания AB и CD являются диаметрами этих окружностей. Известно, что $BC : AD = 1 : 2$ и что площади треугольников ABC и ACD равны $12\sqrt{7}$ и $4\sqrt{7}$ соответственно. Найти радиусы окружностей.

16.223 [МГУ, геол, 1970]. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 39$, $BC = 26$ и боковые стороны $AB = 5$, $CD = 12$. Найти радиус окружности, которая проходит через точки A и B и касается стороны CD или ее продолжения.

16.224 [МГУ, соц, 1998]. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина стороны AD равна 4, длина стороны CD равна 7, $\cos ADC = 1/2$, $\sin BCA = 1/3$. Найдите сторону BC, если известно, что окружность, описанная около треугольника ABC, проходит также и через точку D.

16.225 [МГУ, био, 1976]. Дана трапеция $ABCD$, сторона AB которой перпендикулярна основаниям BC и AD. На стороне AB как на диаметре построена окружность радиуса $\sqrt{6}$, которая касается стороны CD.

Другая окружность радиуса $\sqrt{2}$ касается сторон AD и CD и пересекается с первой окружностью имея с ней общую хорду длины $\sqrt{6}$. Центры обеих окружностей расположены по разные стороны от общей хорды. Найти площадь трапеции $ABCD$.

16.226 [МГУ, геол, 1976]**.** В параллелограмме $ABCD$ известны длины стороны $AB = \sqrt{2}$ и диагонали $BD = 2$. Окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке B пересекается со второй окружностью радиуса 1, проходящей через точки A и C. Известно, что касательные, проходящие через одну из точек пересечения окружностей, взаимно перпендикулярны. Найти диагональ AC.

16.227 [МГУ, МФ, 2001]**.** В трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD = 30$ диагонали пересекаются в точке E, а углы AED и BCD равны. Окружность радиуса 17, проходящая через точки C, D и E, пересекает основание AD в точке F и касается прямой BF. Найдите высоту трапеции и ее основания.

16.228' [МГУ, МФ, 1971]**.** В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найти его площадь, если радиус описанной около него окружности равен R, и $AB = 2 \cdot BC$.

16.229* [МГУ, МФ, 1970]**.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r, касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину A с серединой F стороны CD, а центр второй окружности находится на отрезке, соединяющем вершину C с серединой E стороны AB. Первая окружность касается сторон AB, AD и CD; вторая окружность касается сторон AB, BC и CD. Найти AC.

16.230' [МГУ, геогр, 1999]**.** В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Точки L и M являются, соответственно, серединами сторон BC и AD. Отрезок LM содержит точку K. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность. Найдите радиус этой окружности, если $AB = 3$, $AC = \sqrt{13}$ и $LK : KM = 1 : 3$.

16.231 [МГУ, псих, 1999]**.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон AB и CD равны, соответственно, 9 и 4, $AC = 7$, $BD = 8$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

16.232' [МГУ, МФ, 2002]**.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка X лежит на его стороне AD, причем $BX \| CD$ и $CX \| BA$. Найдите BC, если $AX = \frac{3}{2}$ и $DX = 6$.

16.233' [МГУ, ВМК, 1971]**.** Центры трех окружностей различных радиусов расположены на одной прямой, а центр четвертой находится на расстоянии d от этой прямой. Найти радиус четвертой окружности, если известно, что каждая из этих окружностей касается трех других.

16.10. Задачи на координатной плоскости

16.234 [МГУ, экон, 2001]**.** На координатной плоскости заданы точки $A(0;2)$, $B(1;7)$, $C(10;7)$ и $D(7;1)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где E – точка пересечения прямых AC и BD.

16.235a [НГУ, МФ, 2002]**.** Параллелограмм $ABCD$ расположен на плоскости так, что его диагонали AC и BD лежат на прямых, заданных в прямоугольной системе координат Oxy уравнениями $y = x$ и $y = -2x$ соответственно, а сторона AB содержит точку с координатами (4;1] Какое наименьшее значение может принимать площадь параллелограмма $ABCD$?

16.235b [НГУ, МФ, 2002]**.** Треугольник ABC расположен на плоскости так, что сторона AC и медиана BO лежат на прямых, заданных в прямоугольной системе координат Oxy уравнениями $x = -3y$ и $y = 2x$ соответственно, а сторона AB содержит точку с координатами (-3;8] Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника ABC ?

16.236 [МГУ, ВМК, 1999]**.** На координатной плоскости $(x;y)$ проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = 4 - (2 - \sqrt{3})x$, пересекает ее в точках A и B. Найдите сумму длин отрезка AB и меньшей дуги AB.

16.11. Двусмысленности

16.237 [МГУ, экон, 1976]**.** В треугольнике ABC известны стороны $AB = 40$, $BC = 35$. Кроме того, угол BAC равен $60°$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, где BD – биссектриса угла ABC.

16.238a [НГУ, ест, 1988]**.** Площадь тупоугольного треугольника ABC равна $24\sqrt{5}$, его медианы AN и CM пересекаются под углом $\alpha = \arccos(2/3)$, $AN - CM = 3$. Найти стороны треугольника ABC.

16.238b [НГУ, ест, 1988]**.** Площадь тупоугольного треугольника ABC равна $9\sqrt{7}$, его медианы ANи CM пересекаются под углом $\alpha = \arccos(3/4)$, $AN : CM = 3 : 2$. Найти стороны треугольника ABC.

16.239 [МГУ, МФ, 1993]**.** В треугольнике PQR медиана, проведенная из вершины Q, имеет длину $\frac{3}{4}\sqrt{21}$. Окружности с центрами в вершинах P и R радиусами 5 и 1 соответственно касаются друг друга, а вершина Q лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей. Найдите площадь S треугольника PQR, если известно, что $S < 7$.

16.240a [СУНЦ НГУ, 1993]**.** В окружность радиуса 3 вписана трапеция площади $4\sqrt{3}$ с высотой 2. Найти боковую сторону трапеции.

16.240b [СУНЦ НГУ, 1993]**.** В окружность радиуса 13 вписана трапеция с боковой стороной 10 и диагональю 20. Найти площадь трапеции.

16.241 [НГУ, МФ, 1998]**.** Задан квадрат $ABCD$ со стороной 3 и построены две окружности: первая имеет радиус 1 и касается сторон AD и AB, вторая – с центром в вершине C и радиусом 3. Найти радиус третьей окружности, которая касается стороны AD и двух данных окружностей.

16.242 [МГУ, ВМК, 1978]**.** Около треугольника AMB описана окружность, центр которой удален от стороны AM на расстояние 10. Продолжение стороны AM за вершину M отсекает от касательной к окружности, проведенной через вершину B, отрезок CB, равный 29. Известно, что $\angle ACB = \operatorname{arctg}(20/21)$. Найти площадь треугольника CMB.

16.243a [НГУ, ест, 1984]**.** Два ромба $ABCD$ и $AMNK$, имеющие общую вершину A, расположены так, что стороны AB и AM образуют угол в 30°. Известно, что углы при вершине A каждого ромба равны 60°, площадь пересечения ромбов равна $5\sqrt{3}$, а площадь их объединения равна $23\sqrt{3}$. Найти площадь каждого из ромбов.

16.243b [НГУ, ест, 1984]**.** Два равнобедренных прямоугольных треугольника ABC и AMN, имеющих общую вершину A, расположены так, что катеты AB и AM образуют угол в 45°. Угол при вершине A в каждом из треугольников прямой. Известно, что площадь пересечения треугольников равна 49, а площадь их объединения равна 213. Найти площадь каждого из треугольников.

16.244a [НГУ, ФФ, 1999]**.** Дан остроугольный равнобедренный треугольник. Известно, что медиана, проведенная к боковой стороне, имеет длину 6 и образует с ней угол $\arccos(13/20)$. Найти стороны треугольника.

16.244b [НГУ, ФФ, 1999]**.** Дан тупоугольный равнобедренный треугольник площади $3\sqrt{15}$. Известно, что медиана, проведенная к боковой стороне, имеет длину 6. Найти стороны треугольника.

16.245 [МГУ, ВМК, 2001]**.** В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 17. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

16.246 [НГУ, МФ, 1979]**.** В окружность вписан четырехугольник, длина наименьшей стороны которого равна единице. Длины двух любых сторон этого четырехугольника, имеющих общую вершину, отличаются на единицу. Найти радиус окружности.

16.247 [Созоненко]. Трапеция $ABCD$ описана около окружности. Известно, что боковая сторона AB делится точкой касания на два отрезка. Длина одного из отрезков равна $\sqrt{3}$, длина другого отрезка равна $3\sqrt{3}$, угол между боковыми сторонами трапеции равен 30°. Найти длину каждой из боковых сторон трапеции.

16.248a [НГУ, МФ, 1983]. Расстояние между центрами окружностей O_1 и O_2 равно $5r$, их радиусы равны соответственно r и $7r$. Хорда окружности O_2 касается окружности O_1 и делится точкой касания в отношении 1:6. Найти длину этой хорды.

16.248b [НГУ, МФ, 1983]. Расстояние между центрами окружностей O_1 и O_2 равно $10r$, их радиусы равны соответственно $5r$ и $6r$. Прямая, пересекающая окружность O_1 в точках A и B, касается окружности O_2 в точке C, причем $AB = 2BC$. Найти длину хорды AB.

16.249a [НГУ, МФ, 1984]. Косинус угла между боковыми сторонами AD и BC трапеции $ABCD$ равен $4/5$. В трапецию вписана окружность, причем сторона AD делится точкой касания на отрезки длины 1 и 4. Определить длину боковой стороны BC трапеции.

16.249b [НГУ, МФ, 1984]. Сумма внутренних углов при основании AD трапеции $ABCD$ равна 135°. В трапецию вписана окружность, причем боковая сторона AB делится точкой касания на отрезки длины $\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$. Определить длину боковой стороны CD трапеции.

16.250a [НГУ, ФФ, 1988]. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина стороны AB. Известно, что биссектриса угла C параллелограмма делит треугольник AMD на две части равной площади. Найти длину стороны AD, если $CD = 4$.

16.250b [НГУ, ФФ, 1988]. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина стороны CD. Известно, что биссектриса угла C параллелограмма делит треугольник AMD на две части равной площади. Найти длину стороны BC, если $AB = 4$.

16.251 [МГУ, геол, 2001]. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части длиной 5 и 7. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника.

16.252 [НГУ, ест, 1989]. В остроугольном треугольнике ABC медианы BM, CN и высота AH равны соответственно 4, 5 и 6. Найти площадь треугольника ABC.

16.253 [МГУ, геогр, 2002]. В треугольнике PQR точка T лежит на стороне PR, $\angle QTR = \angle PQR$, $PT = 8$, $TR = 1$. Найдите: а) сторону PR; б) угол QPR, если радиус описанной около треугольника PQT окружности равен $3\sqrt{3}$.

16.254 [проб.ЕГЭ, 2012]**.** Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 150 см, косинус угла при основании равен $\frac{7}{8}$. Найдите радиус окружности, касающейся вписанной окружности этого треугольника и двух его сторон.

16.255 [Ларин, 2012]**.** В описанной около окружности равнобокой трапеции основания относятся как 3:5. Из вершины меньшего основания опущена высота на большее основание; точка H – основание высоты. Из точки H опущен перпендикуляр HE на боковую сторону трапеции. В каком отношении точка E делит боковую сторону?

16.256 [Ларин, 2012]**.** Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $2 : 3$. Найдите отношение $CK : KF$.

16.257 [Ларин, 2012]**.** В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, $\angle BAC = \angle CDB$. Продолжения сторон AB и DC пересекаются в точке K, образуя угол, равный 30°. Найдите площадь треугольника AKD, если площадь трапеции равна 60.

16.258 [Ларин, 2012]**.** Дан треугольник ABC с основанием $AB = \sqrt{3}/2$ и высотой $CH = \sqrt{6}/3$. Известно что $AH : HB = 2 : 1$. В угол BAC вписана окружность, центр которой лежит на высоте CH. Найти радиус этой окружности.

16.259 [СУНЦ НГУ, 2013]**.** Дан ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 48$ и $BD = 14$. Проведена окружность радиусом $7\sqrt{2}/2$ с центром в точке пересечения диагоналей ромба. Прямая, проходящая через вершину B, касается этой окружности и пересекает прямую CD в точке M. Найдите длину отрезка CM.

16.260 [демо ЕГЭ, 2013]**.** Дана окружность радиуса 2 с центром O. Хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем $\angle CDA = 120^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если $OD = 3$.

16.261 [демо ЕГЭ, 2013]**.** Окружности с центрами O и B радиуса OB пересекаются в точке C. Радиус OA окружности с центром O перпендикулярен OB, причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой OB. Окружность S_1 касается меньших дуг AB и OC этих окружностей, а также прямой OA, а окружность S_2 касается окружности с центром B, прямой OA и окружности S_1. Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

16.262 [демо ЕГЭ, 2013]**.** Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом 60°. На двух его сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами 120° при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами.

16.263 [демо ЕГЭ, 2013]. Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке C. Известно, что $AC = 3$. Найдите BC.

16.264 [демо ЕГЭ, 2013]. Окружности S_1 и S_2 радиусов R и r $(R > r)$ соответственно касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M. Найдите BM, если известно, что $AB = a$.

16.265 [демо ЕГЭ, 2013]. Точка O – центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что $\angle OAK = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.

16.266 [Ларин, 2013]. Стороны KM и MN треугольника KMN равны соответственно 30 и 25, а его высота MH равна 24. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники KMH и MNH.

16.267 [Ларин, 2013]. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 12 и 16 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 6. Средняя линия трапеции равна 9. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите длину медианы MK в треугольнике BMC.

16.268 [Ларин, 2013]. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC Известны длины сторон: $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 10$, $AD = 21$. Найдите радиус окружности, касающейся двух сторон этой трапеции и диагонали.

16.269 [Ларин, 2013]. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, синус угла B равен $120/169$, радиус описанной окружности равен 169. Найдите радиус вписанной окружности.

16.270 [Ларин, 2013]. Дан треугольник ABC, $AB = 18$, $BC = 18$ и $CA = 24$. Точка T делит сторону BC в отношении 1:2. Найдите расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник ABC до центра окружности, вписанной в треугольник ABT.

16.271 [демо ЕГЭ, 2014]. На окружности радиуса 20 с центром в вершине C треугольника ABC взята точка P. Известно, что $AB = 25$, $AC = 15$, $BC = 20$, а треугольники APC и BPC равновелики. Найдите расстояние от точки P до прямой AB, если известно, что оно меньше 25.

16.12. Ответы

[16.1] 1 : 2. **[16.2]** 2 : 1 от B. **[16.3]** 18/7. **[16.4]** 1 : 2; 1 : 8. **[16.5]** 1 : 9 от B. **[16.6]** 22/27. **[16.7]** 1:3 от A. **[16.8]** 10. **[16.9]** 4 : 3. **[16.10]** 6 : 7 от A. **[16.11]** 1 : 1. **[16.12]** $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$. **[16.13]** $4\sin^4(\alpha/2)$. **[16.14]** 13/20. **[16.15]** $3S/8$. **[16.16]** 5/2. **[16.17]** 3 или 1/3. **[16.18]** 6 : 5. **[16.19]** 20/9. **[16.20]** 15. **[16.21a]** 7/4. **[16.21b]** 4. **[16.21c]** $\sin\angle ABC = 11/16$. **[16.21d]** 3/2. **[16.22a]** 5/8. **[16.22b]** 9/40. **[16.23]** 25/16. **[16.24]** 1/12. **[16.28]** 1 : 2. **[16.29]** 4 : 5. **[16.30]** 37/72. **[16.31a]** 3 : 8. **[16.31b]** 3 : 1. **[16.31c]** 4 : 3. **[16.32]** $5S/32$. **[16.33]** $S/5$. **[16.34]** $S/6$. **[16.35]** 1. **[16.36]** 3. **[16.38]** $\dfrac{2a-b}{3}$. **[16.39]** $\dfrac{4a-b}{5}$. **[16.40]** 1/6. **[16.41]** $\dfrac{1}{2}(a-b)^2\sin\alpha$. **[16.42a]** 3 : 2. **[16.42b]** 3 : 2. **[16.42c]** 4 : 1. **[16.42d]** 3 : 1. **[16.43]** a) 1 : 1, 5 : 9; b) 5 : 21. **[16.44a]** $7\sqrt{13}/26$. **[16.44b]** $9\sqrt{13}/26$. **[16.44c]** $9\sqrt{13}/22$. **[16.44d]** $7\sqrt{7}/22$. **[16.45a]** 10/3. **[16.45b]** 144/13. **[16.46a]** 14. **[16.46b]** 51. **[16.46c]** 32. **[16.46d]** 31. **[16.47]** $\dfrac{ab}{a+b}$. **[16.48]** 2 : 1. **[16.49]** $AF = \dfrac{bc}{b+c}$; $BF = \dfrac{c^2}{b+c}$. **[16.50]** 6; 4; 6. **[16.51]** 6. **[16.52]** 85. **[16.54]** $\pi/18$, $7\pi/18$. **[16.55a]** $AB = 5\sqrt{3}$; $BC = 5\sqrt{3}/2$; $AC = 15/2$. **[16.55b]** $AB = 3$; $AC = 24$; $BC = 9\sqrt{7}$. **[16.55c]** $AB = 78$; $BC = 17\sqrt{7}/4$; $AC = 39/4$. **[16.56]** $3ab/4$. **[16.57]** $2\sqrt{145}/3$. **[16.58]** $q(2p+q)/(p+q)$. **[16.59a]** $3\sqrt{5}$. **[16.59b]** 3. **[16.60]** 7 : 8. **[16.61]** $54\sqrt{3}$. **[16.62]** 4/5. **[16.63]** $MK = a\sqrt{13}/6$. **[16.64]** 3/2. **[16.65]** $4S/5$. **[16.66a]** $9S/20$. **[16.66b]** $7\sqrt{3}/6$. **[16.67]** $BD = \sqrt{37}$; $AC = \sqrt{45}$. **[16.68a]** $a\sqrt{7}/5$. **[16.68b]** $a\sqrt{21}/3$. **[16.68c]** $a\sqrt{43}/4$. **[16.68d]** $a\sqrt{7}/6$. **[16.69]** $3\sqrt{35}/7$; $4\sqrt{35}/105$. **[16.70]** $\sqrt{7}$. **[16.71a]** 70. **[16.71b]** 8 : 3. **[16.71c]** 135. **[16.73]** 195. **[16.74]** 60°; 75°; 45°.

[16.75] 30°. **[16.76a]** $9/2$. **[16.76b]** $24/5$. **[16.76c]** 8. **[16.77]** $\sqrt{190}/2$. **[16.78a]** $\sqrt{397}$. **[16.78b]** $11/\sqrt{15}$. **[16.79a]** $18/5$. **[16.79b]** $\sqrt{34}$. **[16.80a]** $\sqrt{53}$; $\sqrt{98}$ или наоборот. **[16.80b]** $\sqrt{116}$; $\sqrt{200}$ или наоборот. **[16.81a]** 14. **[16.81b]** 7. **[16.82a]** $AC = 2\sqrt{3}$; $AB = BC = 6$. **[16.82b]** $AC = 2\sqrt{2}$; $AB = BC = 4$. **[16.83]** $\sqrt{3}/4$; 7. **[16.84]** $8\sqrt{3}$. **[16.85a]** $3/2$. **[16.85b]** 4. **[16.86a]** $\sqrt{13}/3$. **[16.86b]** $\sqrt{7}/3$. **[16.87a]** 10, 40, 40. **[16.87b]** 12, $12\sqrt{2}$, $12\sqrt{2}$. **[16.88a]** $2\sqrt{10}$. **[16.88b]** $6\sqrt{5}$. **[16.89]** 1. **[16.90]** $9\sqrt{15}/4$. **[16.91a]** $9\sqrt{2} + \sqrt{10}$. **[16.91b]** $5\sqrt{17}/2$. **[16.92a]** 60. **[16.92b]** $3\sqrt{5}$. **[16.93a]** $\sqrt{53}$; $\sqrt{98}$ или наоборот. **[16.93b]** $\sqrt{116}$; $\sqrt{200}$ или наоборот. **[16.94]** 150. **[16.95]** 5 и 3. **[16.96a]** 6. **[16.96b]** $\sqrt{17}$. **[16.97]** $h/\sqrt{2}$. **[16.98]** 600. **[16.99a]** $3\sqrt{6}$; $4\sqrt{6}$. **[16.99b]** $2\sqrt{17}$; $\sqrt{17}$. **[16.100a]** $5\sqrt{91}$. **[16.100b]** $6\sqrt{3}$. **[16.100c]** $6\sqrt{143}$. **[16.101a]** 18. **[16.101b]** 30. **[16.102]** $6\sqrt{55}$. **[16.103a]** $13/2$. **[16.103b]** 6. **[16.104a]** $4-2\sqrt{3}$. **[16.104b]** $40\sqrt{3}/81$. **[16.105a]** $14\sqrt{5}/9$. **[16.105b]** $2\sqrt{3}$. **[16.106a]** 24. **[16.106b]** $12\sqrt{15}$. **[16.107]** $350/11$. **[16.108]** $63/26$. **[16.109]** $14/5$. **[16.110]** 3. **[16.111]** $13/2$. **[16.112a]** $16\sqrt{31}$. **[16.112b]** $4\sqrt{15}$. **[16.113]** $2\sqrt{3}$. **[16.114]** $22/7$; точки F, O, G – на одной прямой. **[16.115]** $\dfrac{42\sqrt{51}}{625}a^2$. **[16.116]** 15; $ADB \sim MCB$; $BM/AB = 5/3$. **[16.117]** $168\sqrt{3}$. **[16.118]** 8. **[16.119]** $1+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha(1+3\operatorname{tg}\alpha)^2 - \frac{7}{8}\sqrt{a^2-16}$. **[16.120]** $\sqrt{35}\pm\sqrt{15}$. **[16.121]** $(3-\sqrt{7})/2$. **[16.122]** $r/8$. **[16.123]** $2\sqrt{Rr}$; $2R\sqrt{r/(R+r)}$; $2r\sqrt{R/(R+r)}$. **[16.124]** $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$; $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2}$. **[16.125]** $r(r+R)/R$; $r+R$. **[16.126]** $\dfrac{r_1r_2}{2(r_1+r_2)}$. **[16.127]** R_1-r; R_2-r; $\dfrac{r(R_1-r)(R_2-r)}{R_1R_2-r^2}$. **[16.128]** $\dfrac{1}{2}\sqrt{24-6\sqrt{3}}$. **[16.129]** 6π. **[16.130]** $16\sqrt{7}/11$. **[16.131]** $CA = 39$; $CB = 26$. **[16.132]** 72. **[16.133]** $2a/\sqrt{5}$. **[16.134]** $1; 17$. **[16.135]** $\dfrac{1}{4(3-2\sqrt{2})}$. **[16.136]** 9, 12, 15.

[16.137a] $\sqrt{15}$; $3\sqrt{15}$. **[16.137b]** $12/5$; $18/5$. **[16.138a]** $5\sqrt{10}$. **[16.138b]** $3\sqrt{34}$. **[16.139a]** $\frac{1}{4}\sqrt{30}$; $\frac{5}{4}\sqrt{30}$. **[16.139b]** $\frac{4}{9}\sqrt{6}$. **[16.140]** $\frac{1}{16}(3\sqrt{3} - \sqrt{11})$; $\frac{1}{8}(3\sqrt{3} - \sqrt{11})$. **[16.141]** $\frac{14\sqrt{3}}{15}R$. **[16.142]** $625/121$. **[16.143a]** $3\pi/8$. **[16.143b]** $\frac{216}{65\pi}$. **[16.144a]** $\frac{108\sqrt{15}}{11}$. **[16.144b]** $\sqrt{14}$. **[16.145a]** $AC = 27,\ BC = 18$. **[16.145b]** $AC = 12,\ BC = 16$. **[16.146a]** $135/2$. **[16.146a]** $675/4$. **[16.147]** $\sqrt{3} : 1$. **[16.148a]** $120\sqrt{2}$. **[16.148b]** $18\sqrt{15}$. **[16.149]** $34/9$. **[16.150]** $27/4$. **[16.151]** $4/9$. **[16.152a]** $\sqrt{53}$. **[16.152b]** $12\sqrt{3}$. **[16.153a]** 16; 16; 8. **[16.153b]** $2\sqrt{5}$ 5; 5. **[16.154a]** $2r\sqrt{\frac{10}{13}}$. **[16.154b]** $\frac{3a^2}{8}$. **[16.155]** 150. **[16.156]** $\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$. **[16.157a]** 56. **[16.157b]** $40\sqrt{6}$. **[16.158a]** $\frac{\sqrt{265}}{2}$. **[16.158b]** $\sqrt{19}$. **[16.159a]** $36\sqrt{6}$. **[16.159b]** $50\sqrt{2}$. **[16.160a]** 30. **[16.160b]** 11. **[16.162]** 1. **[16.163]** $1/2$; $3/4$. **[16.164]** $EM = 2\sqrt{4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + 3}$. **[16.165]** $\sqrt{ab}$. **[16.166a]** $10/7$. **[16.166b]** $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. **[16.167a]** $\frac{5}{\sqrt{7}}R$. **[16.167b]** $4R\sqrt{\frac{3}{43}}$. **[16.168a]** $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$. **[16.168b]** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **[16.169a]** $\frac{3}{8}(\sqrt{15} - \sqrt{3})R^2$. **[16.169b]** $\frac{R^2}{2}(1 + \sqrt{3})$. **[16.170a]** $2\sqrt[4]{3}$. **[16.170b]** $60°$. **[16.171a]** $\angle A = \angle B = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\angle C = \pi - 2\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **[16.171b]** $432/25$. **[16.172a]** $2\pi(2 - \sqrt{3})$. **[16.172b]** 1. **[16.173a]** $117/2$. **[16.173b]** 28. **[16.174a]** $\frac{4}{3}(\sqrt{21} + \sqrt{5})$. **[16.174b]** $\frac{1}{2}(\sqrt{15} + \sqrt{8})$. **[16.175a]** $384/25$. **[16.175b]** $16/\sqrt{5}$. **[16.176a]** $\arccos(-1/7)$. **[16.176b]** $\arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$. **[16.177]** $\frac{1}{2(\sin a + \sin 2a + \sin 3a)}$. **[16.178]** $AC = 32\sqrt{3/35}$; $BC = 4\sqrt{6/5}$; $R = 3\sqrt{7/10}$. **[16.179]** $\frac{a}{2}\sqrt{kl}$. **[16.180]** 3; $4098/61$. **[16.181]** $7/8$. **[16.182]** 24. **[16.183]** 319. **[16.184]** $\sqrt{2}/2$. **[16.185a]** $8\sqrt{2}$. **[16.185b]** 2. **[16.186a]** $2R\sin(2\pi/9)$. **[16.186b]** $5\pi/9$. **[16.187]** 8. **[16.188]** $\frac{ab}{c}$;

доказать, что треугольники SPN и SMQ подобны. **[16.189]** bc/a. **[16.190]** $\sqrt{ab}$. **[16.191]** $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. **[16.193a]** $\angle C = 105^\circ$; $\angle B = 15^\circ$. **[16.193b]** 15°; 75° или $\pi/12$, $5\pi/12$. **[16.194]** $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **[16.195]** $\dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\dfrac{4}{\sqrt{6}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **[16.196]** 8. **[16.197]** 22. **[16.198]** $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **[16.199a]** $\sqrt{3} : 1$. **[16.199b]** $\dfrac{a}{3}(\sqrt{7}+1)$; $\dfrac{a}{3}(\sqrt{7}-1)$. **[16.200a]** $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{3}$. **[16.200b]** $\pi + \arcsin\dfrac{3}{7} - \arcsin\dfrac{5}{7} = 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{10}+\sqrt{6})$. **[16.201]** $\sqrt{3}$. **[16.202]** $\pi/3$. **[16.203a]** $4\sqrt{3}$. **[16.203b]** 3. **[16.204]** $9r^2/2$. **[16.205]** $\angle BAD = \angle CDA = \pi/4$; $\angle BCD = \angle ABC = \dfrac{3\pi}{4}$. **[16.206]** $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}r$. **[16.207]** 1; 7. **[16.208]** 9 : 20 от C. **[16.209a]** $8\sqrt{6}$. **[16.209b]** 288. **[16.210a]** 3 : 1. **[16.210b]** 4 : 1. **[16.211]** $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. **[16.212]** 16. **[16.213]** $100\sqrt{2}/9$. **[16.214]** $\sqrt{3} : 1$. **[16.215a]** 12. **[16.215b]** 7. **[16.216a]** 9 : 20. **[16.216b]** $\dfrac{12\sqrt{3}}{13}R^2$. **[16.217]** $R^2\sqrt{3}$. **[16.218]** $\sqrt{\dfrac{269}{5}}$. **[16.219]** $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)R^2$. **[16.220]** 5 : 9. **[16.221]** $4\sqrt{3}$. **[16.222a]** $\sqrt{21}$; $\sqrt{31}$. **[16.222b]** 2; 6. **[16.223]** 25/2. **[16.224]** $\dfrac{\sqrt{37}(2\sqrt{6}-1)}{3\sqrt{3}}$. **[16.225]** $\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}(\sqrt{3}-1)}$. **[16.226]** $AC = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **[16.227]** 450/17; 255/8; 960/17. **[16.228]** $\dfrac{8}{5}R^2$, записать систему уравнений относительно. центральных углов. **[16.229]** $2\sqrt{5}r$; доказать: $ABCD$ – прямоугольник. **[16.230]** 3/2; использовать, что $AD \| BC$. **[16.231]** $1820\sqrt{21}/341$. **[16.232]** 3; $ABX \sim BXC \sim XCD$. **[16.233]** $d/2$; записать в координатах , выразить d и радиус через r_1, r_2 **[16.234]** 36. **[16.235a]** 72; можно доказать, что площадь максимальна, когда отрезок делится пополам. **[16.235b]** 168. **[16.236]** $\dfrac{2\pi}{3}+4\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **[16.237]** $r = \frac{20}{9}\sqrt{3}(4-\sqrt{7})$ или $r = 4(2\sqrt{3}-\sqrt{7})$.

[16.238a] $AC = 6$, $AB = 2\sqrt{105}$, $BC = 4\sqrt{21}$. **[16.238b]** $AB = 2\sqrt{58}$, $BC = 2\sqrt{43}$, $AC = 4$. **[16.239]** $3\sqrt{5}/2$; возможны три картинки. **[16.240a]** 3. **[16.240b]** 24000/169. **[16.241]** $\dfrac{1}{3}$; 1; $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$. **[16.242]** $S = 210$; $S = 10\dfrac{347-60\sqrt{22}}{7}$. **[16.243a]** $16\sqrt{3}$ и $12\sqrt{3}$. **[16.243b]** 162 и 100. **[16.244a]** 10; 10; $\sqrt{22}$. **[16.244b]** $2\sqrt{15}$; $2\sqrt{6}$; $2\sqrt{6}$. **[16.245]** 192/17 или 1728/25. **[16.246]** $\sqrt{7/3}$ или $\sqrt{5}/2$. **[16.247]** $4\sqrt{3}6$ или $4\sqrt{3}$, 12. **[16.248a]** $7r\sqrt{3}$ или $\dfrac{7r}{6}\sqrt{143}$. **[16.248b]** $2r\sqrt{21}$ или $6r$. **[16.249a]** 4 или 100/7. **[16.249b]** 40 или 40/7. **[16.250a]** $\sqrt{33}-1$. **[16.250b]** $7+\sqrt{17}$. **[16.251]** a) 16/3; центр вне; b) $8\sqrt{5}/3$; центр внутри. **[16.252]** $8 \pm 2\sqrt{7}$. **[16.253]** а) 3; б) $\pi/3 \pm \arccos(5/6)$. **[16.254]** 10 или 90. **[16.255]** 1:15 или 1:3. **[16.256]** 10/7 или 17/23. **[16.257]** 90 или 30. **[16.258]** $\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{6}$ или $\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{11}-3)}{2}$. **[16.259]** 425/31 или 775/17. **[16.260]** $2\sqrt{21}-9$ или $3+2\sqrt{3}$. **[16.261]** $\dfrac{7\pm2\sqrt{6}}{6}$. **[16.262]** $\sqrt{13/3}$ или $\sqrt{19/3}$. **[16.263]** 2 или 6. **[16.264]** $a\sqrt{1\pm\dfrac{r}{R}}$. **[16.265]** $2 \pm \dfrac{4}{3}\sqrt{2}$. **[16.266]** $3\sqrt{10}$ или $2\sqrt{2}$. **[16.267]** $\sqrt{42}/2$ или $5\sqrt{42}/2$. **[16.268]** $\dfrac{8(2\sqrt{97}-1)}{3}$ и $\dfrac{56(31-2\sqrt{97})}{191}$. **[16.269]** 80 или 24. **[16.270]** $\sqrt{65}-\sqrt{5}$ или $\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{73}-7)}{2}$. **[16.271]** 7.2 или 12.

Геометрия - это искусство хорошо рассуждать на плохо выполненных чертежах.

Н. Абель

Глава 17

Стереометрия

17.1. Афинные задачи

В этих задачах ключевую роль играют отношения коллинеарных отрезков. Они могут решаться как в классическом подходе, так и с помощью векторной техники.

17.1 [ШарГор]**.** Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N, K — середины ребер AB, BC и DD_1 соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNK. В каком отношении эта плоскость делит ребро CC_1 и диагональ DB_1?

17.2 [Яковлев]**.** На ребрах AA_1, CC_1, C_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены соответственно точки M, N, P так,что $|AM| : |AA_1| = |C_1N| : |C_1C| = |C_1P| : |C_1D_1|$. Построить точку Q пересечения плоскости MNP с прямой BC и найти отношение $|BQ| : |BC|$.

17.3 [Яковлев]**.** Плоскость пересекает боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно в точках M, N, P и Q, причем $|AM| : |AA_1| = m$, $|BN| : |BB_1| = n$, $|CP| : |CC_1| = p$. Найти отношение $|DQ| : |DD_1|$.

17.4 [ШарГор]**.** Плоскость проходит через середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$ и делит ребро BD в отношении $1 : 3$. В каком отношении эта плоскость делит ребро AC?

17.5 [Яковлев]**.** В призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы основания ABC пересекаются в точке M, а диагонали граней AA_1C_1C и BB_1C_1C – соответственно в точках N и P. Плоскость MNP пересекает прямые B_1C_1 и CC_1 в точках K и L соответственно. Построить сечение призмы этой плоскостью и найти отношения $|B_1K| : |B_1C_1|$ и $|C_1L| : |CC_1|$.

17.6 [Яковлев]**.** Через вершину C тетраэдра $ABCD$ и середины ребер AD и BD проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость разделит отрезок MN, где M и N – соответственно середины ребер AB и CD.

17.7 [Яковлев]**.** В тетраэдре $ABCD$ через середину M ребра AD, вершину C и точку N ребра BD такую, что $|BN| : |ND| = 2 : 1$, проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость разделяет отрезок KL, где K и L – соответственно середины ребер AB и CD?

17.8 [Яковлев]**.** Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. На ребре SD взята точка L так, что $|SL| : |LD| = 2$, точка K – середина ребра SB. Построить сечение пирамиды плоскостью AKL и определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро SC.

17.9 [Яковлев]**.** Основанием пирамиды $SABCD$ служит трапеция $ABCD$. Отношение длин оснований AD и BC этой трапеции равно 2. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину D и середины ребер SA и SB. Определить, в каком отношении сечение делит ребро SC.

17.10 [Яковлев]**.** Через середины M и N соответственно ребер AA_1 и C_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение, параллельное диагонали BD основания. Построить сечение и определить, в каком отношении оно делит диагональ A_1C параллелепипеда.

17.11 [ШарГор]**.** Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки A_1 и C параллельно прямой BC_1. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB?

17.12 [ШарГор]**.** Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точки пересечения медиан треугольников A_1BD и CB_1D_1 и делится ими на три равные части.

17.13 [ШарГор]**.** На ребрах AB, BC и AD тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, N и M соответственно, причем $AK : KB = BN : NC = 2 : 1$, $AM : MD = 3 : 1$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K, M и N. В каком отношении эта плоскость делит ребро CD?

17.14 [ШарГор]**.** Дан тетраэдр $ABCD$. Точки M, N и K лежат на ребрах AD, BC и DC соответственно, причем $AM : MD = 1 : 3$, $BN : NC = 1 : 1$, $CK : KD = 1 : 2$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB?

17.15 [ШарГор]**.** Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Точки M, N и K лежат на ребрах AS, BS и SC соответственно, причем $AM : MS = 1 : 2$, $BN : NS = 1 : 3$, $CK : KS = 1 : 1$. Постройте сечение пирамиды плоскостью MNK. В каком отношении эта плоскость делит ребро SD?

17.16 [ШарГор]**.** Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, в основании которой – параллелограмм $ABCD$. Через середину ребра AB проведена плоскость, параллельная прямым AC и SD. В каком отношении эта плоскость делит ребро SB.

17.17 [Яковлев]. Плоскость пересекает ребра AB, AC, CC_1 и BB_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ соответственно в точках K, L, M и N. Площади фигур AKL, CLM и $CMNB$ равны соответственно 1/6, 1/12 и 1/2 площади той грани, в которой каждая из них находится. Найти отношение площади треугольника BKN к площади грани AA_1B_1B.

17.18 [Яковлев]. Рассматриваются сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостями, параллельными скрещивающимся диагоналям AB_1 и BC_1 граней AA_1B_1B и BB_1C_1C. Указать сечение с максимальной площадью.

17.19 [Яковлев]. Плоскость пересекает ребра AB, AC, DC и DB тетраэдра соответственно в точках M, N, P и Q, причем $|AM| : |MB| = m$, $|AN| : NC| = n$, $|DP| : |PC| = p$. Найти отношение $|DQ| : |QB|$.

17.20 [Яковлев]. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N – середины боковых ребер BB_1 и CC_1. Через точку O пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, пересекающая прямые MN и AB_1 соответственно в точках P и Q. Найти отношение $|PQ| : |OQ|$.

17.21 [Яковлев]. В тетраэдре $ABCD$ проведены медианы AM и DN граней ACD и ADB, и на этих медианах взяты соответственно точки E и F так, что $EF \parallel BC$. Найти отношение $|EF| : |BC|$.

17.22 [Яковлев]. В призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы оснований ABC и $A_1B_1C_1$ пересекаются соответственно в точках O и O_1. Через середину отрезка OO_1 проведена прямая, параллельная прямой CA_1. Найти длину отрезка этой прямой, лежащего внутри призмы, если $|CA_1| = a$.

17.23 [ШарГор]. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки M и N так, что отрезки MN и A_1C параллельны. Найдите отношение этих отрезков.

17.24 [ШарГор]. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N – середины боковых ребер AA_1 и CC_1 соответственно. На отрезках CM и AB_1 расположены соответственно точки E и F так, что $EF \parallel BN$. Найдите отношение $EF : BN$.

17.25 [ШарГор]. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на прямых AC и BA_1 взяты точки K и M так, что $KM \parallel DB_1$. Найдите отношение $KM : DB_1$.

17.26 [ШарГор]. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребрах AD, A_1D_1 и B_1C_1 взяты соответственно точки M, L и K, причем $B_1K = \dfrac{1}{3}A_1L$, $AM = \dfrac{1}{2}A_1L$. Известно, что $KL = 2$. Найдите длину отрезка, по которому плоскость KLM пересекает параллелограмм $ABCD$.

17.27 [Яковлев]**.** Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Через середину отрезка SO проведена прямая, параллельная медиане BM грани SAB. Найти длину отрезка этой прямой, лежащего внутри пирамиды, если $|BM| = a$.

17.28 [Яковлев]**.** На ребре AD и диагонали A_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки M и N так, что прямая MN параллельна плоскости BDC_1 и $|AM| : |AD| = 1 : 5$. Найти отношение $|CN| : |CA_1|$.

17.29 [Шар-11]**.** В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведены два сечения. Первое сечение проходит через ребро AB и середину ребра CC_1, а второе – через ребро A_1B_1 и середину ребра CB. Найдите отношение длины отрезка линии пересечения этих сечений, заключенного внутри призмы, к длине ребра AB.

17.30a [НГУ, ФФ, 1999]**.** В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точка K делит делит ребро CD в отношении $3 : 1$, считая от вершины C. Точка L лежит на луче AS так, что $AL : AS = 5 : 3$. Через точки K, L и точку пересечения диагоналей основания проведена плоскость. В каком отношении она делит ребро BS?

17.30b [НГУ, ФФ, 1999]**.** В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точка E делит делит ребро CD в отношении $1 : 2$, считая от вершины C. Точка F лежит на луче BS так, что $BF : BS = 6 : 5$. Через точки E, F и середину ребра AS проведена плоскость. В каком отношении она делит отрезок AC ?

17.30c [НГУ, ФФ, 1999]**.** Для данного тетраэдра $ABCD$ на лучах AC и BD выбраны соответственно точки K и L так, что $AK : AC = 7 : 5$, $BL : BD = 4 : 3$. Через точки K, L и середину ребра CD проведена плоскость. В каком отношении она делит ребро AB ?

17.31a [СУНЦ НГУ, 2000]**.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M лежит на ребре A_1C_1; $A_1M = \dfrac{1}{3}A_1C_1$. Точка P лежит на ребре BC; $CP = \dfrac{1}{3}BC$. В каком отношении делит ребро BB_1 сечение, проходящее через точки M и P параллельно прямой A_1B ?

17.31b [СУНЦ НГУ, 2000]**.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M лежит на ребре A_1C_1; $A_1M = \dfrac{5}{6}A_1C_1$. Точка N лежит на ребре AB; $AN = \dfrac{1}{3}AB$. В каком отношении делит ребро C_1B_1 сечение, проходящее через точки M и N параллельно прямой AB_1 ?

17.32a* [НГУ, МФ, 2001]. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой отношение основания AB к основанию CD равно 2:3. Точки K, L, M и N лежат на ребрах SA, SB, SC и SD соответственно. Известно, что $SM = MC$, $SK : KA = 3 : 2$, отрезки KN и LM параллельны. Найти длину отрезка KN, если $LM = 5$.

17.32b* [НГУ, МФ, 2001]. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой отношение основания AD к основанию BC равно 3:4. Точки K, L, M и N лежат на ребрах SA, SB, SC и SD соответственно. Известно, что $SL = LB$, $SN : ND = 2 : 3$, отрезки KL и NM параллельны. Найти длину отрезка KL, если $NM = 3$.

17.32c* [НГУ, МФ, 2001]. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой отношение основания AB к основанию CD равно 4:5. Точки K, L, M и N лежат на ребрах SA, SB, SC и SD соответственно. Известно, что $SK = KA$, $SM : MC = 4 : 3$, отрезки KN и LM параллельны. Найти длину отрезка KN, если $LM = 10$.

17.33a* [НГУ, МФ, 1999]. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой основание AD относится к BC как $2 : 3$. Точки L и N – середины ребер AD и CD соответственно, площадь треугольника SLN равна 63. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, которая параллельна плоскости SLN и делит ребро BC в отношении $2 : 1$, считая от вершины B.

17.33b* [НГУ, МФ, 1999]. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой основание AD в три раза больше BC. Точки M и K – середины ребер AD и CD соответственно, площадь треугольника SMK равна 135. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, которая параллельна плоскости SMK и делит ребро AB в отношении $2 : 1$, считая от вершины A.

17.33c* [НГУ, МФ, 1999]. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой основание AD относится к BC как $3 : 2$. Точки L и M – середины ребер BC и CD соответственно, площадь треугольника SLM равна 96. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, которая параллельна плоскости SLM и делит ребро AD в отношении $1 : 2$, считая от вершины A.

17.34a' [НГУ, МФ, 2002]. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точки M, N, F, G – середины ребер A_1B_1, CC_1, AD и CD соответственно. Плоскости FB_1D_1 и GB_1D_1 пересекают отрезок MN в точках K и L соответственно. Найти отношение $MK : KL : LN$.

17.34b’ [НГУ, МФ, 2002]**.** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точки M, N, F – середины ребер AB, B_1C_1 и DD_1 соответственно. Плоскости A_1BD и A_1BF пересекают отрезок MN в точках K и L соответственно. Найти отношение $MK : KL : LN$.

17.34c’ [НГУ, МФ, 2002]**.** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точки M, N и F – середины ребер BB_1, AD и C_1D_1 соответственно. Плоскости B_1AC и ACF пересекают отрезок MN в точках K и L соответственно. Найти отношение $MK : KL : LN$.

17.35 [МГУ, псих, 1971]**.** Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. На продолжении ребер AB и BB' соответственно отложены отрезки AM и $B'N$ длины $AM = 0.5 \cdot AB$ и $B'N = 2 \cdot B'B$ ($BM = 1.5 \cdot AB$; $BN = 3 \cdot BB'$] Где на ребре CC' должна находиться точка P для того, чтобы в сечении куба плоскостью, проведенной через точки M, N и P был четырехугольник?

17.36a [НГУ, ест, 2006]**.** В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 на ребрах AA_1, A_1C_1, BC и AB выбраны соответственно точки M, N, K и L так, что $AM = MA_1$, $A_1N = NC_1$, отрезки MK и NL пересекаются в точке P и $MP = PK$. Найти отношение $NP : PL$.

17.36b [НГУ, ест, 2006]**.** В треугольной пирамиде $SABC$ на ребрах SA, SC, BC и AB выбраны соответственно точки M, N, K и L так, что $SM = AM$, $CN = 2SN$, отрезки MK и NL пересекаются в точке P и $MP = PK$. Найти отношение $NP : PL$.

17.37a [НГУ, МФ, 2007]**.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M – середина ребра AB; точка N расположена на ребре SC так, что $SN : NC = 1 : 3$. Известно, что площадь боковой грани SAC равна 16. Найти площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α, которая проходит через точки M и N и параллельна прямой AC.

17.37b [НГУ, МФ, 2007]**.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и N расположены соответственно на ребрах SA и BC так, что $AM : MS = 1 : 3$, $CN : NB = 1 : 5$. Известно, что площадь боковой грани SAC равна 48. Найти площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α, которая проходит через точки M и N и параллельна прямой AC.

17.2. Метрические задачи на сечениях

Везде, куда ни кинь, лежат углы прямые;
их множество открыл великий Пифагор.

Г. Александров

17.38 [Яковлев]**.** Точки O и O_1 – центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На отрезке OO_1 взята точка S так,что $|O_1S| : |OS| = 1 : 3$. Через эту точку проведено сечение куба, параллельное его диагонали AC_1 и диагонали BD основания. Найти площадь сечения, если ребро куба имеет длину a.

17.39 [Яковлев]**.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через вершину B_1 проведено сечение, перпендикулярное диагонали CA_1 боковой грани AA_1C_1C. Найти площадь сечения, если: а) $|AB| = |AA_1| = a$; б) $|AB| = 2a$, $|AA_1| = a$.

17.40 [Яковлев]**.** Среди всех сечений куба, проходящих через его диагональ, указать то, которое имеет наименьшую площадь. Найти эту площадь, если ребро куба имеет длину a.

17.41a [НГУ, ест, 2007]**.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 9 проведена плоскость α параллельно диагонали AB_1 грани AA_1B_1B. При пересечении плоскости α с кубом получается трапеция с основаниями $8\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$. Найти площадь этой трапеции.

17.41b [НГУ, ест, 2007]**.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $5\sqrt{2}$ проведена плоскость α параллельно диагонали BC_1 грани BB_1C_1C. При пересечении плоскости α с кубом получается трапеция с основаниями 8 и 6. Найти площадь этой трапеции.

17.42 [ШарГор]**.** В основании правильной треугольной пирамиды лежит треугольник площади S, площадь боковой грани равна Q. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противоположного ребра.

17.43 [НГУ, ест, 1975]**.** В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит треугольник ABC, в котором $AB = BC = a$, $\angle ABC = 90°$. Высота призмы равна a. На ребре AB выбрана точка D так, что $2BD = AD$. Через точки C и D параллельно AC' проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.

17.44a [НГУ, ест, 1975]**.** Основанием прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ служит треугольник ABC, в котором $AB = a$, $AC = 2a$, $\angle BAC = 120°$. Высота призмы равна a. Найти площадь сечения призмы плоскостью, которая делит пополам двугранный угол с ребром AB.

17.44b [НГУ, ест, 2006]**.** В основании прямоугольного параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Высота параллелепипеда равна 3. Через диагональ BD проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания. Найти площадь получившегося сечения.

17.45 [НГУ, ест, 1975]**.** На ребре BC правильного тетраэдра $SABC$ выбрана точка D так, что $CD = 2BD$. Через точки A и D перпендикулярно плоскости ABC проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения, если ребро тетраэдра равно $3a$.

17.46a [НГУ, ест, 2000]**.** На отрезке A_1C в единичном кубе с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 расположена точка K. Прямая D_1K пересекает плоскость грани $ABCD$ в точке L, а прямая BK – плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ в точке M. В каком отношении точка K делит отрезок A_1C, если $LM = 3\sqrt{3}$?

17.46b [НГУ, ест, 2000]**.** В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равны $\sqrt{3}$. Точка K расположена на отрезке BC_1. Прямая D_1K пересекает плоскость грани $ABCD$ в точке L, а прямая AK – плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ в точке M. В каком отношении точка K делит отрезок BC_1, если $LM = 9\sqrt{5}/10$?

17.47 [ШарГор]**.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. На лучах C_1C, C_1B_1 и C_1D_1 отложены соответственно отрезки C_1M, C_1N и C_1K, равные $\frac{5}{2}a$. Постройте сечение этого куба плоскостью, проходящей через точки M, N, K, и найдите площадь полученного сечения.

17.48a [НГУ, ест, 1992]**.** Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 10. Точки P, Q и R лежат на лучах DD', DA и DC соответственно. Найти площадь сечения куба плоскостью PQR, если $DP = DQ = DR = 21$.

17.48b [НГУ, ест, 1992]**.** Дана прямая треугольная призма $ABCA'B'C'$ с основанием ABC, в которой $AB = 4$, $AC = A'A = 2$, $AB \perp AC$. Точки K и L лежат на лучах $A'C'$ и $B'B$ соответственно, $A'K = 4$, $B'L = 3$. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки K и L параллельно прямой AB.

17.48c [НГУ, ест, 1992]**.** В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD перпендикулярны, $AD = BD = \sqrt{2}$, $AC = BC = AB = 2$. Точка K лежит на луче CA, $KC = 4$, а точка M вместе с точками D, C и серединой AB образуют прямоугольник. Найти площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки M и K параллельно AB.

17.48d [НГУ, ест, 1992]**.** Квадрат $ACC'A'$ является боковой гранью прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$. Точка M лежит на луче $A'C'$, $A'M = 3$, $AC = AB = 2$, угол CAB – прямой. Найти периметр сечения призмы плоскостью, проходящей через точки M и B параллельно прямой AB'.

17.49a [СУНЦ НГУ, 1999]**.** В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром 1 точка K лежит на ребре CB, $CK = 1/3$; точка L лежит на ребре AB, $AL = 1/4$. Найти площадь сечения, проходящего через прямую AK параллельно прямой DL.

17.49b [СУНЦ НГУ, 1999]**.** В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания ABC равна 3, высота равна $2\sqrt{6}$. Точка K лежит на ребре BC, $CK = 1$. Найти площадь сечения призмы плоскостью, которая проходит через AK и параллельна прямой A_1B.

17.50 [МГУ, ФФ, 2001]**.** В правильной треугольной пирамиде $SKLM$, все ребра которой равны $8a$, на ребре SK взята точка A так, что $SA : AK = 1 : 3$. Через точку A проведена плоскость, параллельная ребру SM и высоте KN треугольника KLM. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью.

17.51 [МГУ, геол, 2002]**.** В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с длиной ребра, равной 1, на вертикальном ребре AA' и на горизонтальном ребре AB взяты точки M и N соответственно, при этом $AM = \frac{1}{3}$, $AN = \frac{3}{4}$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная диагонали AC нижнего основания куба. Чему равна площадь получившегося сечения?

17.52a [НГУ, ест, 1979]**.** Ребра AB, AC и AD треугольной пирамиды $ABCD$ попарно перпендикулярны, а их длины равны 1. Точки M и N лежат на ребрах AB и CD соответственно, причем $AM = 1/3$, $DN = \sqrt{2}/3$. Точка F – середина биссектрисы DE в треугольнике BDC. Через F проходит прямая l, параллельная отрезку MN. Найти длину части прямой l, заключенной внутри пирамиды.

17.52b [НГУ, ест, 1979]**.** Плоскости двух квадратов $ABCD$ и ABC_1D_1 перпендикулярны. Длина их общей стороны AB равна 1. Точки P, Q, R – середины отрезков AD, C_1D_1, CC_1 соответственно. Через точку R проходит прямая l, параллельная отрезку PQ. Найти длину части прямой l, заключенной внутри призмы ADD_1BCC_1.

17.52c [НГУ, ест, 1979]**.** Правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ являются основаниями прямой треугольной призмы с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Точки M и N – середины AA_1 и B_1C_1 соответственно. Через середину L ребра AC проходит прямая l, параллельная отрезку MN. Найти длину части прямой l, заключенной внутри призмы, если длины всех ребер призмы равны 1.

17.53a [НГУ, ест, 1978]**.** Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' DD'; точка N – середина ребра AB, точка M – середина ребра BB', O – точка пересечения диагоналей грани $BCC'B'$. Через точку O проведена прямая, пересекающая прямые AM и CN в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ, если длина ребра куба равна 1.

17.53b [НГУ, ест, 1978]**.** Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' DD'; точка N – середина ребра AB, точка M – середина ребра BB', O – точка пересечения диагоналей грани $BCC'B'$. Через точку O проведена прямая, пересекающая прямые AM и CN в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ, если длина ребра куба равна 1.

17.54a [НГУ, ест, 1988]**.** Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC равны 1. Призма $AKLA_2K_2L_2$ с боковыми ребрами AA_2, KK_2, LL_2 симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно точки A. Точка E принадлежит отрезку AK, $AE : EK = 1 : 3$, точка F принадлежит отрезку K_2L_2, $K_2F : FL_2 = 3 : 5$. Найти длину отрезка, который получается при пересечении прямой EF и призмы $ABCA_1B_1C_1$.

17.54b [НГУ, ест, 1988]**.** Квадрат $ABCD$ со стороной 3 лежит в основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами, равными 1. Параллелепипед $AKLMA_2K_2L_2M_2$ с боковыми ребрами AA_2, KK_2, LL_2, MM_2 симметричен $ABCDA_1B_1C_1D_1$ относительно точки A. Точка E принадлежит отрезку AM, $AE = 1$. Точка F выбрана на отрезке L_2M_2 так, что $L_2F = 1$. Найти длину отрезка, который получается при пересечении прямой EF и параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

17.55 [НГУ, МФ, 1976]**.** Прямоугольный параллелепипед с высотой, равной a, имеет в основании прямоугольник со сторонами a и $a\sqrt{3}$. Через одну из диагоналей основания проведена плоскость, составляющая угол $30°$ со второй диагональю основания. Найти площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью.

17.56 [НГУ, МФ, 1976]**.** Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC',DD'. Длина ребра куба равна a. Через диагональ куба BD' проведена плоскость, образующая угол $30°$ с плоскостью $BB'D'D$. Найти площадь получившегося сечения.

17.57a [НГУ, МФ, 1978]**.** Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является равнобедренная трапеция $ABCD$. Длина основания CD трапеции равна 1, а длины всех остальных ребер пирамиды равны 2; CM – высота боковой грани SBC; KL – средняя линия треугольника SCD, параллельная стороне CD. Через точку A проходит прямая, пересекающая прямые KL и CM в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

17.57b [НГУ, МФ, 1978]**.** В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' лежит правильный треугольник ABC. Все ребра призмы имеют длину 1; MN – средняя линия грани $BCC'B'$, параллельная ребру BC. Через центр треугольника ABC проходит прямая, пересекающая прямые AB' и MN в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

17.58a' [НГУ, ФФ, 1997]**.** В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые ребра пирамиды равны $\sqrt{6}$. Через середину L ребра AB и вершину C проведена плоскость α, которая перпендикулярна грани SAD и пересекает ребро SD в точке M. Определить отношение $SM : MD$.

17.58b' [НГУ, ФФ, 1997]**.** В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 2. Через середину L ребра AD и вершину B проведена плоскость α, которая перпендикулярна плоскости SAD и пересекает ребро SA в точке M. Определить отношение $SM : MA$.

17.58c' [НГУ, ФФ, 1997]**.** В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые ребра пирамиды равны $\sqrt{5}$. Через середину L ребра AD и вершину C проведена плоскость α, которая перпендикулярна плоскости SBC и пересекает ребро SB в точке M. Определить отношение $SM : MB$.

17.59 [МГУ, МФ, 1982]**.** Дана треугольная пирамида $ABCD$ с вершиной D, грани которой ABD и ACD –прямоугольные треугольники, ребро AD перпендикулярно медиане основания AK и $AD = AK$. Сечением пирамиды плоскостью, не проходящей через середины ребер AD и BC является равнобочная трапеция $EFGH$ с основаниями EF и GH, причем точка E делит ребро BD пополам, а точка G лежит на ребре AC и $AG = 3 \cdot GC$. Найти отношение площади трапеции $EFGH$ к площади грани BCD.

17.60 [МГУ, геогр, 1982]**.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ длина ребра AB равна 4, длина ребра AD равна 6, длина ребра AA' равна 8. Точка K, лежащая на ребре AA', удалена от вершины A на 4. Расстояние от точки L ребра DD' до вершины D равно 2. Точка M лежит на отрезке $B'C$, длина MC вдвое больше длины $B'M$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K, L, M.

17.61 [МГУ, био, 1984]**.** В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ со стороной a. Длина диагонали AC ромба равна $1.5a$. Основание высоты пирамиды совпадает с центром ромба и ее длина в 1.5 раза больше длины AC. Через точку A и середину ребра SC проведена секущая плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол 45°. Какова площадь сечения пирамиды этой плоскостью и сколько таких плоскостей можно построить ?

17.62 [МГУ, геогр, 1984]**.** Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Найти площадь этого сечения, если длина бокового ребра равна 4, а угол между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равен $\pi/3$.

17.63 [МГУ, экон, 1986]. В пирамиде $SABC$ ребра SC, BC и AC равны соответственно $\frac{\sqrt{93}}{6}$, 3 и 4. Известно, что угол ABC тупой, ребро SC перпендикулярно к плоскости основания ABC, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\frac{8}{\sqrt{15}}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S, точку пересечения медиан треугольника ABC и центр окружности, вписанной в этот треугольник.

17.64a [НГУ, МФ, 2006]. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребра основания ABC равны 2. Точки M и N – середины ребер SA и BC соответственно, а точка K расположена на ребре AC так, что $AK = 3CK$. Окружность, проходящая через точки M, N, K, пересекает ребро SB. Найти длину бокового ребра пирамиды $SABC$.

17.64b [НГУ, МФ, 2006]. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 6. Точки M, N и K – середины ребер SB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки A, M и N, пересекает ребро SC. Найти длину бокового ребра пирамиды $SABCD$.

17.3. Углы и расстояния в пространстве

17.65a [МГУ, ФФ, 1997]. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ – прямоугольник, $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Найдите SD.

17.65b [МГУ, ФФ, 1997]. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7,8,9. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту пирамиды.

17.66 [Шар-11]. $ABCD$ – прямоугольник. В вершинах A, B и C к плоскости прямоугольника восставлены перпендикуляры и на них взяты точки K, M и P так, что $AK = 7$, $BM = 5$, $CP = 3$, причем точки K и M находятся по одну сторону от плоскости $ABCD$, а точка P – по другую. Плоскость, проходящая через K, M и P, пересекает перпендикуляр, восставленный к плоскости $ABCD$ в вершине D, в точке S. Найдите DS.

17.67 [Шар-11]. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Определите двугранные углы между соседними боковыми гранями этой пирамиды.

17.68 [Шар-11]. В правильной четырехугольной пирамиде угол между боковым ребром и плоскостью основания равен углу между боковым ребром и плоскостью боковой грани, не содержащей это ребро. Найдите этот угол.

17.69 [НГУ, ест, 1980]. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'; длина ребра куба равна 1. Точка P находится внутри куба и равноудалена от ребер AA', AB, $A'D'$. Найти длину отрезка BP, если $C'P = 1$.

17.70 [Яковлев]. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. На прямой BC_1 взята точка M так, что прямые DA_1, AB_1 и D_1M параллельны одной плоскости. Найти длину отрезка D_1M.

17.71 [ШарГор]. Два противоположных ребра треугольной пирамиды равны a, два других противоположных ребра равны b, а два оставшихся ребра равны c. Найдите косинус угла между ребрами, равными a.

17.72 [ШарГор]. Найдите угол между прямыми AC и BD, если $AC = 6$, $BD = 10$, а расстояние между серединами AD и BC равно 7.

17.73a [СУНЦ НГУ, 1991]. Плоский угол боковой грани при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен φ. Найти величину угла между боковыми ребрами и плоскостью основания.

17.73b [СУНЦ НГУ, 1991]. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен α. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

17.74 [Яковлев]. Плоскость равнобедренного треугольника образует с плоскостью α, проходящей через его основание, угол φ. Угол при вершине треугольника равен ψ. Найти угол между боковой стороной и плоскостью α.

17.75 [Яковлев]. Дан прямоугольник, длины сторон которого равны 1 и 2. Через меньшую сторону прямоугольника проведена плоскость α, составляющая с диагональю прямоугольника угол φ. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью прямоугольника.

17.76 [Яковлев]. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника расположены соответственно в разных гранях двугранного угла и составляют с его ребром острые углы φ и ψ соответственно. Найти величину двугранного угла.

17.77 [Яковлев]. Стороны AB и AC равностороннего треугольника расположены соответственно в гранях α и β двугранного угла величины φ. Сторона AB образует с ребром двугранного угла острый угол ψ. Определить угол между плоскостью ABC и плоскостью β.

17.78* [Шар-11]. Три двугранных угла тетраэдра, не прилежащих к одной вершине, равны $\dfrac{\pi}{2}$. Оставшиеся три двугранных угла равны между собой. Найдите эти углы.

17.79* [Шар-11]**.** Проекция прямоугольного треугольника на обе грани двугранного угла величиной α являются правильными треугольниками со стороной 1. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника.

17.80. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания $ABCDEF$ равна 1, высота равна 3. Найти угол между прямой AB_1 и плоскостью CFD_1.

17.81. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1 точка K – центр грани BCC_1B_1. Найти расстояние между прямыми AK и B_1D.

17.82 [Яковлев]**.** В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD имеют длину a, остальные ребра – длину b. Найти расстояние между прямыми AB и CD.

17.83. В пирамиде $SABC$ основанием является правильный треугольник ABC со стороной 1. Ребра SA перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Точка M– середина ребра SC, точка N – середина ребра AB. Найти расстояние между прямыми BM и CN.

17.84a [НГУ, ест, 1989]**.** В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 2$. Все боковые ребра пирамиды равны 3, точка M – середина AS. Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость α. Определить угол между плоскостью α и плоскостью SAC.

17.84b [НГУ, ест, 1989]**.** В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза BC которого равна 1, $\angle ABC = 60^\circ$. Ребра AD, BD, CD имеют длину $\sqrt{13}/4$, точка M – середина ребра CD. Через прямую BM под углом 45° к плоскости ABC проведена плоскость, пересекающая ребро AC в некоторой точке N. Найти отношение $AN : NC$.

17.85a. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 2, боковые рёбра имеют длину 3. Точка M – середина ребра SB. Найти расстояние от точки D до плоскости, проходящей через точки A, C, M.

17.85b. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 1, боковые рёбра имеют длину 2. Точки M и N – середины ребер AB и BC соответственно. Найти расстояние от точки D до плоскости, проходящей через точки S, M, N.

17.86a. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания $AD = 3$, $AB = 2$, высота $AA_1 = 4$. Точки P и Q – середины рёбер B_1C_1 и AB соответственно. Найти угол между плоскостью, проходящей через точки A_1, P, Q и прямой AC.

17.86b. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания $AD = 3$, $AB = 2$, высота $AA_1 = 4$. Точки K и L – середины рёбер AB и B_1C_1 соответственно. Найти угол между плоскостью, проходящей через точки A_1, K, L и прямой AD.

17.87 [Яковлев]. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной длины a. Грань SAB перпендикулярна плоскости основания, высоты граней SAC и SBC из вершины S равны соответственно $\sqrt{5}a$ и $\sqrt{2}a$. Найти высоту пирамиды.

17.88 [Яковлев]. Основанием пирамиды $SABCD$ является равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $|AB| = |BC| = a$, $|AD| = 2a$. Плоскости граней SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания пирамиды. Найти высоту пирамиды, если высота грани SAD из вершины S равна $2a$.

17.89 [Яковлев]. Площадь правильного треугольника равна S. Его ортогональной проекцией на плоскость является равнобедренный треугольник с углом при вершине величиной α. Найти площадь этой проекции, если: а) $\alpha > \pi/3$; б) $\alpha < \pi/3$.

17.90 [Яковлев]. Из точки A плоскости проведены по разные ее стороны отрезки AM и AN. Каждый из отрезков имеет длину a и образует с плоскостью угол α. Угол между проекциями этих отрезков на плоскость равен β. Определить длину отрезка MN.

17.91 [Яковлев]. В плоскости расположен отрезок AB длины a. Из точек A и B проведены перпендикуляр AM и наклонная BN к плоскости (по одну ее сторону), причем $|AM| = |BN| = \dfrac{3}{2}a$, $|MN| = 2a$, $\angle ABN = 90^\circ$. Найти угол между прямой MN и плоскостью.

17.92 [Яковлев]. В пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, $|AC| = |CB|$, $|AS| = |AB| = a$. Через середину ребра AC проведена плоскость, перпендикулярная ребру SB. Найти расстояние от вершины C до этой плоскости.

17.93 [Яковлев]. Каждый плоский угол трехгранного угла имеет величину $\pi/3$. Внутри угла расположена точка, удаленная от двух граней угла на расстояние a, а от третьей – на расстояние $3a$. Найти расстояние от этой точки до вершины угла.

17.94 [Яковлев]. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка E – середина ребра AD. Одно ребро правильного тетраэдра лежит на прямой ED_1, другое на прямой, проходящей через точку A_1 и пересекающей прямую BC в точке R. Найти: а) $|BR|$; б) длину ребра тетраэдра.

17.95 [Яковлев]. Два правильных тетраэдра $ABCD$ и $MNPQ$ расположены так, что плоскости BCD и NPQ совпадают, вершина M лежит на высоте AO первого тетраэдра, а плоскость MNP проходит через центр грани ABC и середину ребра BD. Найти отношение длин ребер тетраэдров.

17.96 [Шар-11]. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной a, боковые ребра AM и BM также равны a, боковые ребра CM и DM имеют длину b. На грани CDM как на основании во внешнюю сторону построена треугольная пирамида $CDMN$, боковые ребра которой имеют длину a. Найдите расстояние между прямыми AD и MN.

17.97a' [НГУ, МФ, 1996]. В основании правильной пирамиды $SABCD$ с боковыми ребрами длиной 5 лежит квадрат со стороной 6. Все грани другой пирамиды $TSAB$ равны между собой. Найти расстояние между прямыми TA и SC, если известно, что пирамиды расположены по разные стороны от их общей грани.

17.97b' [НГУ, МФ, 1996]. Две правильные пирамиды $SABC$ и $TABC$ расположены по разные стороны от общей грани ABC. Точка M – середина ребра SB. Найти расстояние между прямыми AM и CT, если $AB = 8,\ SA = 5,\ TA = 6$.

17.98 [МГУ, МФ, 1992]. На прямой p в пространстве последовательно расположены точки A, B и C такие, что $AB = 27$ и $BC = 18$. Найти расстояние между прямыми p и q, если расстояния от точек A, B и C до прямой q равны 17, 10 и 8 соответственно.

17.99 [МГУ, псих, 1992]. В тетраэдре $ABCD$ на ребре AB взята точка K, на ребре AC – точка L, на ребре BD – точка N, на ребре CD – точка M. Точки E и G – середины ребер AD и BC соответственно. Прямые EG, KM, LN пересекаются в одной точке. Найти площадь четырехугольника $KLMN$, если $AK : KB = 5,\ AD = 9,\ BC = 8$, а угол между скрещивающимися прямыми AD и BC

17.100 [Шар-11]. В пространстве заданы три прямые и плоскость. Известно, что все углы между каждыми двумя прямыми, а также углы между каждой из этих прямых и плоскостью равны между собой. Найти эти углы.

17.101a [НГУ, МФ, 1983]. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Все ребра призмы имеют одинаковую длину. Плоскость α перпендикулярна прямой BC_1, плоскость β параллельна прямой AA_1. Определить наименьший возможный угол между плоскостями α и β.

17.101b [НГУ, МФ, 1983]. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 все ребра имеют одинаковую длину, все плоские углы при вершине A равны 60°. Плоскость α перпендикулярна прямой A_1B_1, плоскость β параллельна прямой AA_1. Определить наименьший возможный угол между плоскостями α и β.

17.102a [НГУ, МФ, 1996]. В пирамиде $ABCD$ ребро BD перпендикулярно ребрам AB и CD. Найти угол между прямыми AB и CD, если известно, что $BD : CD : PQ : AB = 3 : 4 : 5 : 6$, где P и Q – середины ребер CD и AB соответственно.

17.102b [НГУ, МФ, 1996]. В пирамиде $ABCD$ точки P и Q лежат на ребрах AD и BC так, что $AP : PD = BQ : QC = 1 : 2$. Найти угол между прямыми AB и DC, если известно, что $AB = DC = 2 \cdot PQ$.

17.103a [НГУ, ФФ, 1998]. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, ребра которого имеют длину 1, точка M – середина ребра BC. Точка P на прямой $A'C'$ и точка Q на прямой $B'M$ выбираются так, что прямая PQ параллельна плоскости $AA'B'B$. Определить длину наименьшего из всех возможных отрезков PQ.

17.103b [НГУ, ФФ, 1998]. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, ребра которого имеют длину 2, точка M – середина ребра $A'D'$. Точка P на прямой $B'D$ и точка Q на прямой BM выбираются так, что прямая PQ параллельна плоскости $CC'D'D$. Определить длину наименьшего из всех возможных отрезков PQ.

17.104' [НГУ, МФ, 1977]. В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, катеты AB и AC которого равны a. Боковые ребра AA', BB', CC' образуют с плоскостью основания углы в $60°$, а диагональ BC' боковой грани $CBB'C'$ перпендикулярна ребру AC. Найти объем призмы, если длина диагонали BC' равна $a\sqrt{6}$.

17.105a [НГУ, ФФ, 1987]. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB, BC и BD взаимно перпендикулярны и имеют длину 2. Через точки M и N – середины ребер AC и BD соответственно – проведена плоскость, которая пересекает ребро AB и образует равные двугранные углы с плоскостями граней ABC и ABD. Найти величины этих углов.

17.105b [НГУ, ФФ, 1987]. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания ABC равна 4, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны $\sqrt{3}$. Через точки M и N – середины ребер AC и A_1B_1 – проведена плоскость, пересекающая ребро AB и образующая с плоскостями граней ABC и AA_1B_1B равные углы.Найти величины этих углов.

17.106a [НГУ, ФФ, 1994]. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра $AB = AC = BD = 5$, $AD = BC = \sqrt{10}$. Угол между гранями ABD и ABC равен $60°$. Найти длину ребра CD.

17.106b [НГУ, ФФ, 1994]. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра $AC = BD = 5$, $AD = BC = 4$, $AB = 3$, угол между гранями ABD и ABC равен $60°$. Найти длину ребра DC.

17.107a [НГУ, МФ, 2000]. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребра основания ABC равны 3, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны 4. Отрезок AB_1 проектируется перпендикулярно на некоторую плоскость, проходящую через прямую A_1C. Какое наименьшее значение может иметь длина проекции?

17.107b [НГУ, МФ, 2000]**.** В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 3, боковые ребра равны 5. Ребро AB проектируется перпендикулярно на некоторую плоскость, проходящую через прямую SC. Какое наименьшее значение может иметь длина проекции?

17.108 [МГУ, МФ, 1970]**.** Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1. Отрезок BD есть высота треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти расстояние между точками S и E.

17.109a [НГУ, МФ, 2006]**.** В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка M – середина ребра CC_1. Точка N расположена в плоскости основания $ABCD$ так, что прямая A_1N параллельна плоскости BDM и перпендикулярна прямой AB_1. Найти длину отрезка A_1N.

17.109b [НГУ, МФ, 2006]**.** В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка N расположена в плоскости основания $ABCD$ так, что прямая B_1N параллельна плоскости ACD_1 и перпендикулярна прямой BC_1. Найти длину отрезка B_1N.

17.110a [НГУ, МФ, 2004]**.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длина ребра равна 1. Точки K, L и M принадлежат ребрам BC, AB и A_1B_1 соответственно, причем $BK = \dfrac{1}{3}$, $AL = \dfrac{3}{4}$, $A_1M = \dfrac{1}{4}$. Прямая l пересекает прямые CD, C_1K, B_1D_1 и LM в четырех различных точках P, Q, R, S соответственно. Найти длину отрезка PS.

17.110b [НГУ, МФ, 2004]**.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длина ребра равна 1. Точки K, L и M принадлежат ребрам A_1B_1, A_1D_1 и AD соответственно, причем $A_1K = \dfrac{1}{2}$, $A_1L = \dfrac{1}{3}$, $AM = \dfrac{2}{3}$. Прямая l пересекает прямые BK, A_1C_1, LM и CD в четырех различных точках P, Q, R, S соответственно. Найти длину отрезка PS.

17.111a [НГУ, МФ, 2005]**.** В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 точка M – середина ребра A_1C_1. Через точки A и M проводится плоскость α, которая пересекает ребро BC в точке N. Известно, что расстояния от вершин B_1 и C до плоскости α равны. В каком отношении точка N делит ребро BC ?

17.111b [НГУ, МФ, 2005]**.** В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 точки K и L – середины ребер AA_1 и BC соответственно.Через точки C_1 и L проводится плоскость α, которая пересекает ребро A_1B_1 в точке N. Известно, что расстояния от точек B_1 и K до плоскости α равны. В каком отношении точка N делит ребро A_1B_1 ?

17.112a [НГУ, МФ, 2005]**.** В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AC и BD имеют длину 1, все остальные ребра длины 2. Из вершин A и B проведены высоты AH и BK к граням BCD и ACD соответственно. Найти расстояние между прямыми AH и BK.

17.112b [НГУ, МФ, 2005]**.** В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AB = BC = 4$; $AC = 5$, длины остальных ребер $BD = 3$, $AD = CD = 5$. Из вершин B и C проведены высоты BH и CK к граням ACD и ABD соответственно. Найти расстояние между прямыми BH и CK.

17.113a [НГУ, МФ, 2007]**.** В треугольной пирамиде $SABC$ грань ABC – равносторонний треугольник, сторона которого равна 2. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC и $SA = \sqrt{2}$. На ребре SB точка M выбрана так, что при перпендикулярном проектировании прямой SB на плоскость ACM получается прямая, параллельная AC. Найти отношение $SM : MB$.

17.113b [НГУ, МФ, 2007]**.** В треугольной пирамиде $SABC$ грань ABC – прямоугольный треугольник с катетами $AC = \sqrt{3}$, $BC = 1$, ребро SA перпендикулярно плоскости ABC и $SA = 2$. На ребре SB точка M выбрана так, что при перпендикулярном проектировании прямой SB на плоскость ACM получается прямая, параллельная AC. Найти длину отрезка SM.

17.114a [НГУ, ест, 2001]**.** В пирамиде $ABCD$ ребра AB, BC, CD попарно перпендикулярны. Известно, что расстояние между серединами ребер AD и BC равно 1, а расстояние между серединами ребер AB и CD равно 7. Найти длину ребра BC.

17.114b [НГУ, ест, 2001]**.** В пирамиде $ABCD$ ребра AB, BC, CD попарно перпендикулярны. Известно, что $BC = 5$, а расстояние между серединами ребер AD и BC равно 6. Найти длину ребра AD.

17.115a [НГУ, ест, 2006]**.** В основании прямоугольного параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $BC = 2$. Боковые ребра AA', BB', CC', DD' имеют длину 1. Через диагональ BD' проведена плоскость, перпендикулярная плоскости $BB'D'D$. Найти расстояние от точки A до проведенной плоскости.

17.115b [НГУ, ест, 2006]**.** В кубе с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' DD' на ребре CC' выбрана точка E так, что $CE = 2C'E$. Через диагональ $B'D'$ верхнего основания и точку E проведена плоскость. Найти расстояние от точки A от проведенной плоскости, если ребро куба равно 1.

17.116a [СУНЦ НГУ, 2004]**.** В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами

$AB = 4$, $BC = 3$, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 имеют длину 2. Через вершину A и середину M ребра CC_1 проведена плоскость, пересекающая ребро BB_1 в точке K и ребро CD в точке L. Известно, что углы MAK и MAL равны. Найти длину отрезка DL.

17.116b [СУНЦ НГУ, 2004]**.** В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$, $BC = 3$, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 имеют длину 4. Через вершину B и середину M ребра DD_1 проведена плоскость, пересекающая ребро AA_1 в точке K и ребро CD в точке L. Известно, что углы MBK и MBL равны. Найти длину отрезка DL.

17.117a [НГУ, МФ, 2006]**.** В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 4, боковые ребра равны $4\sqrt{2}$. Точка M на ребре BC выбрана так, что угол между плоскостями ASM и ASB равен $30°$. Найти расстояние от точки D до плоскости ASM.

17.117b [НГУ, МФ, 2006]**.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребра основания ABC равны 6, боковые ребра равны 4. Точка M на ребре BC выбрана так, что угол между плоскостями ASM и ASB равен $60°$. Найти расстояние от точки C до плоскости ASM.

17.118a [НГУ, МФ, 2006]**.** В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка M – середина ребра CC_1. Точка N расположена в плоскости основания $ABCD$ так, что прямая A_1N параллельна плоскости BDM и перпендикулярна прямой AB_1. Найти длину отрезка A_1N.

17.118b [НГУ, МФ, 2006]**.** В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка N расположена в плоскости основания $ABCD$ так, что прямая B_1N параллельна плоскости ACD_1 и перпендикулярна прямой BC_1. Найти длину отрезка B_1N.

17.119* [МФТИ, 2001]**.** Тело $ABCD$, имеющее форму правильного тетраэдра, поставлено гранью ABC на плоскую поверхность. Точка F – середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $2AB = BS$ и точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным.

17.120 [МГУ, геол, 1985]**.** Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром длины 4. На середине ребра BC взята точка M, а на ребре $A'D'$ на расстоянии 1 от вершины A' взята точка N. Найти длину кратчайшего пути между точками M и N по поверхности куба.

17.121 [МГУ, био, 1982]**.** В правильную четырехугольную пирамиду $SACD$ вписан куб. Четыре вершины одной из граней куба лежат на основании $ABCD$ пирамиды. Вершины противоположной грани куба лежат на боковых ребрах пирамиды. Известно, что $SA = SB = a$. Найти объем куба.

17.122 [НГУ, МФ, 2006]. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребра основания ABC равны 2. Точки M и N – середины ребер SA и BC соответственно, а точка K расположена на ребре AC так, что $AK = 3CK$. Окружность, проходящая через точки M, N, K, пересекает ребро SB. Найти длину бокового ребра пирамиды $SABC$.

17.123* [Яковлев]. Точка M – середина бокового ребра AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямые BD, MD_1 и A_1C попарно перпендикулярны. Найти высоту параллелепипеда, если $|BD| = 2a$, $|BC| = \dfrac{3}{2}a$, $|A_1C| = 4a$.

17.124* [Яковлев]. Прямая пересекает грани γ_1 и γ_2 двугранного угла соответственно в точках A и B и составляет с плоскостью грани γ_1 угол $\pi/6$, а с плоскостью грани γ_2 – угол $\arcsin 0.7$. Величина двугранного угла равна $\pi/3$. Найти угол между прямой AB и ребром двугранного угла.

17.125* [Яковлев]. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AB, AC и BD прямые. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, имеет длину a, а другой – длину $a\sqrt{6}$. Найти длину наибольшего ребра тетраэдра.

17.126* [Шар-11]. На плоское зеркало под углом α падает луч света. Зеркало поворачивается на угол β вокруг проекции луча на зеркало. На какой угол отклонится отраженный луч?

17.4. Ортогональное проектирование

17.127 [Шар-11]. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде проведено сечение через диагонали оснований и сечение, проходящее через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания. Угол между секущими плоскостями равен α. Найдите отношение площадей сечений.

17.128 [Шар-11]. В правильном тетраэдре точки M и N являются серединами противоположных ребер. Проекция тетраэдра на плоскость, параллельную MN, представляет собой четырехугольник площади S, один из углов которого равен 60°. Найдите площадь поверхности тетраэдра.

17.129 [МГУ, экон, 1966]. Доказать, что сумма квадратов длин проекций ребер единичного куба на плоскость не зависит от взаимного расположения куба и плоскости и равна 8.

17.130 [МГУ, экон, 1966]. Двугранный угол между плоскостями P и Q равен α. В плоскости P лежит квадрат со стороной 1. Доказать, что периметр проекции квадрата на плоскость Q наибольший, когда диагональ квадрата параллельна плоскости Q.

17.131 [МГУ, экон, 1966]. Двугранный угол между плоскостями P и Q равен α. В плоскости P лежит правильный треугольник со стороной 1. Доказать, что сумма квадратов длин проекций сторон этого треугольника на плоскость Q не зависит от его расположения в плоскости P.

17.132a [МГУ, МФ, 1969]. Прямоугольные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Медиана AD треугольника ABC равна $\sqrt{9/8}$. Найти BC.

17.132b [МГУ, МФ, 1969]. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами, равными 1. Найти периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон имеет длину $\sqrt{3/2}$.

17.133 [МГУ, ВМК, 1970]. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы при вершине S являются острыми и равны: $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$. Известны боковые ребра: $SA = a$, $SB = b$. Вычислить площадь проекции грани ASB на плоскость грани ASC.

17.134 [МГУ, био, 1998]. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC (C – вершина прямого угла] Все боковые грани наклонены к основанию под одинаковым углом, равным $\arcsin\dfrac{5}{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если SO – высота пирамиды, $AO = 1$, $BO = 3\sqrt{3}$.

17.135a [НГУ, ест, 2001]. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка M – середина ребра A_1D_1. Найти площадь ортогональной проекции грани AA_1B_1B на плоскость BC_1M.

17.135b [НГУ, ест, 2001]. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка M – середина ребра CC_1. Найти площадь ортогональной проекции грани BB_1C_1C на плоскость BD_1M.

17.136a* [МФТИ, 1990]. В основании пирамиды $SABC$ лежит остроугольный равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC$, а площадь равна 2. Ребро SA является высотой пирамиды. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$ на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB. Наибольшая из площадей таких проекций равна 2.5, а наименьшая – $3/\sqrt{5}$. Найти объем пирамиды.

17.136b* [МФТИ, 1990]. В треугольной пирамиде $SABC$ площадь основания ABC равна 7, а углы ABC, ASB и двугранный угол при ребре AB являются прямыми. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$

на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB. Наибольшая из площадей таких проекций равна 14, а наименьшая – $4\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды.

17.5. Аналитика в координатном пространстве

Система координат в этих задачах полагается прямоугольной декартовой.

17.137. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-1;3;2), B(4;0;5), C(1;2;4).

17.138. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(2;2;4) и прямую $\{x = 1 - 3t; y = 2 + 2t; z = -1 + 3t\}$.

17.139. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{2}$ и параллельной оси Oy.

17.140. Составить параметрические уравнения прямой, заданной системой линейных уравнений: $\{x + 4y - 2z = 6; 3x - y + z = 1\}$.

17.141. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(0;3;2) перпендикулярно прямой $\{2x + y - 3z = 0; 3y + z = 1\}$.

17.142. Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью MNK, где A=(0;5;2), B=(-2;4;1), M=(-3;0;4), N=(4;1;6), K=(5;-2;4).

17.143. Найти координаты проекции точки M(3;0;5) на плоскость $-x + 2y + 3z = -16$.

17.144. Найти координаты точки, симметричной точке K(1; -2; 3) относительно плоскости $2x + y - z = 6$.

17.145. Найти координаты проекции точки N(1;3;-2) на прямую $\{x = -2 + 2t; y = 1 + t; z = 3 + 3t\}$.

17.146. Найти расстояние от точки M(3;-2;1) до прямой $\{x = 1 - 2t; y = 3t; z = 4 + 2t\}$.

17.147. Выяснить, пересекаются ли прямые $\{x = 5 + t; y = 1 + 3t; z = 4 + t\}$ и $\{x = t; y = 4 - 3t; z = -4 + 2t\}$. И если да, то найти точку пересечения и написать уравнение проходящей через них плоскости.

17.148. Найти расстояние между прямыми $\{x = -2 + 3t; y = 2 + t; z = 4 - 2t\}$ и $\{x = 5 + t; y = -5 + 3t; z = 1 - t\}$.

17.149. Найти расстояние между плоскостями $3x - y + 4z = 5$ и $6x - 2y + 8z = 15$.

17.150. Найти расстояние между прямыми $\{x - 3y + 9z = -8; 3x - 6y + 15z = -15\}$ и $\{4x - y - 8z = 26; 8x - 7y + 4z = -58\}$.

17.151. Составить уравнения проекции прямой $\{x = -3 + 2t; y = 1 + 4t; z = 2 - 3t\}$ на плоскость $3x + y + z = 10$.

17.152. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\{5x-2y+z=4; 3x+3y-z=6\}$ и через точку $M(-1;2;3)$.

17.153. Написать уравнения биссекторных плоскостей между плоскостями $4x+y+z=11$ и $2x-8y-2z=13$.

17.154'. Определить, в остром или тупом угле двугранном угле между плоскостями $x+y+2z=7$ и $3x-y+4x=-2$ лежит точка $M(1;1;1)$.

17.155'. Составить уравнение биссекторной плоскости острого двугранного угла между плоскостями $5x-3y=11$ и $8x-6y+6z=7$.

17.156. Уравнение одной из сторон некоторого угла на плоскости $2x+9y=-6$, уравнение биссектрисы $4x+y=-12$. Составить уравнение другой стороны угла.

17.157. На плоскости имеется треугольник с вершинами $A(5;1)$, $B(-2;4)$, $C(1;-2)$.

а) Составить уравнение высоты проведённой из вершины A.

б) Найти длину высоты, проведённой из вершины B.

в) Найти координаты основания высоты, проведённой из вершины C.

17.158. Найти объём тетраэдра, ограниченного плоскостями $\{3x-16y-33z=-25\}$, $\{8x-23y-29z=-47\}$, $\{7x+2y-18z=-19\}$, $\{-12x+5y+14z=-18\}$.

17.159. Найти расстояние между прямыми $\{5x-4y+3z=0; -x+8y-6z=18\}$ и $\{3x-4y-6z=-2; -x+4y+10z=18\}$.

17.160. Найти расстояние от точки $M(1;5;4)$ до прямой $\{7x+6y+9z=-2; 2x-15y-3z=5\}$.

17.161. Найти координаты точки, симметричной точке $A(2;3;-2)$ относительно прямой $\{-x+2y-3z=-18; 3x-3y+4z=36\}$.

17.162. Найти координаты точки, симметричной точке $C(4;2;-1)$ относительно плоскости, проходящей через точку $A(-2;1;4)$ и прямую $\dfrac{x-10}{7}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

17.163. Найти расстояние от точки $N(2;6)$ до прямой, являющейся биссектрисой угла A треугольника ABC, где $A(-3;1)$, $B(4;0)$, $C(0;4)$.

17.164. Даны три вершины параллелограмма ABCD: $A(5;-2;6)$, $B(7;-1;4)$, $D(4;3;5)$. Найти координаты вершины C и угол между диагоналями параллелограмма.

17.165. Даны три вершины параллелограмма MNPQ: $M(4;-1;3)$, $N(2;2;0)$, $P(5;3;2)$. Найти координаты вершины Q и площадь параллелограмма.

17.166. На плоскости даны уравнения двух сторон прямоугольника: $x+4y=9$ и $4x-y=2$, а также координаты точки пересечения его диагоналей $(3;4)$. Составить уравнения двух других сторон.

17.167. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, если известны уравнения его гипотенузы $\dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ и координаты вершины прямого угла C$(0;-2;3)$.

17.168. Составить уравнения прямой, проходящей через точку M$(3;4;0)$ и пересекающей прямые $\{x=5+5t;\ y=-2-3t;\ z=4+2t\}$ и $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-13}{5}=\dfrac{z+6}{1}$.

17.169. Найти координаты оснований общего перпендикуляра, проведённого между прямыми $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z}{1}$ и $\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-3}{2}$.

17.170. Составить уравнения проекции прямой $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-12}{3}$ на плоскость x + 8y + z =1.

17.171. Доказать, что прямые $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-5}{4}$ и $\{x=2t+2;\ y=3t+7; z=-2t+1\}$ лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости.

17.172. Вычислить расстояние между прямыми $\{2x+2y-z=12;\ x-y-z=24\}$ и $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-7}{4}$.

17.173. Найти проекцию точки C$(-4;3;-2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y-5}{13}=\dfrac{z+3}{-4}$ и $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{13}=\dfrac{z+3}{-4}$.

17.174. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$ перпендикулярно к плоскости $-x+3y+2z=5$.

17.175. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку M$(-4;3;-2)$ параллельно плоскости $\{-3x+3y-2z=7\}$ и пересекает прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+4}{-2}$.

17.176. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $\{-3x+3y+12z=5\}$ и $\{9x+3y-4z=7\}$, и при этом пересекает прямые $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$ и $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$.

17.177. Составить уравнения прямой, проходящей через точку M$(4;-2;1)$, пересекающей ось Oy и параллельной плоскости $y-3z=5$.

17.178. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку N$(3;2;1)$, параллельной прямой $x = 2y = 3z$ и отсекающей на осях Ox и Oy равные отрезки.

17.179. Найти объём тетраэдра, образованного плоскостями координат и плоскостью, проходящей через точку $(-1;4;9)$, которая отсекает на осях координат равные отрезки.

17.180. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и равноудалённой от точек $(3;2;10)$ и $(-2;3;0)$.

17.181. Даны две точки A$(2;1;-3)$, B$(4;1;-2)$ и плоскость $2x+y+5z = 4$. Установить, пересекает ли плоскость отрезок AB, его продолжение за точку A или его продолжение за точку B.

17.182*. Через прямую $\dfrac{x-5}{-1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-2}{0}$ провести такую плоскость, чтобы острый угол между линиями её пересечения с координатными плоскостями Oxz и Oyz был равен $\pi/3$.

17.183*. Найти координаты центра и радиус шара, вписанного в тетраэдр, образованный координатными плоскостями и плоскостью $2x - 10y - 11z = 76$.

17.184*. Найти координаты центра и радиус шара, вписанного в тетраэдр с вершинами $(-1;3;0)$, $(5;0;6)$, $(3;7;-2)$, $(-2;5;2)$.

17.185. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(0;4;7)$, отстоящей от оси Ox на расстояние $2\sqrt{13}$ и образующей с осью Ox угол $\arccos(3/\sqrt{22})$.

17.186*. Внутри треугольника, высекаемого на плоскости Oyz плоскостями $\{4x+y-8z=5\}$, $\{2x-y+2z=7\}$, $\{-3y+4z=15\}$ найти точку, равноудалённую от этих плоскостей.

17.187*. Первая прямая проходит через точки с координатами $(6,1,3)$ и $(14,3,1)$. Вторая прямая проходит через точки с координатами $(1,4,3)$ и $(5,6,5)$. Третья прямая проходит через точку с координатами $(3,3,3)$ и пересекает первую и вторую прямую. Найти координаты точки пересечения первой и третьей прямой.

17.188*. Даны две противоположные вершины квадрата $A = (15,6,12)$, $C = (17,2,4)$ и точка $E = (19,38,4)$ лежащая в той же плоскости, что и квадрат. Найти координаты двух оставшихся вершин.

17.189*. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(1;1;-3)$ перпендикулярно к плоскости $2x-5y-5z=6$ и образующей с плоскостью $4x+8y-z=10$ угол $\pi/4$.

17.190*. Показать, что три плоскости $\{x - 3y + 4z = 7\}$, $\{2x+y-3z=3\}$ и $\{4x-5y+5z=9\}$ образуют призму и составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения первых двух плоскостей и параллельной третьей плоскости.

17.191*. Составить уравнения биссектрисы тупого угла между прямой $\{y-2z=5; 4x-z=14\}$ и её проекцией на плоскость $y+z=-1$.

17.192*. На плоскости даны координаты вершин A(2; 1) и B(−1; −2) треугольника ABC, а также уравнения биссектрисы BM: $\{x-2y=5\}$ и биссектрисы AL: $\{x=2\}$. Найти координаты вершины C.

17.193. Найти точку пересечения высот треугольника ABC: A(−1; −2; 6), B(−1; −2; −5), C(2; 7; 4).

17.6. Аналитика в многогранниках

17.194 [Яковлев]**.** Точка K — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямыми: а) BK и BC_1; б) BK и AD_1; в) BK и A_1C_1.

17.195 [Шар-11]**.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, в котором $AB=2$, $AD=AA_1=1$. Найдите угол между диагональю BD_1 и плоскостью, проходящей через D, C_1 и A_1.

17.196 [Шар-11]**.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a, точка K – середина ребра DD_1. Найдите угол и расстояние между прямыми CK и A_1D.

17.197 [Яковлев]**.** Точка M – середина ребра CD правильного тетраэдра $ABCD$. Найти угол между прямыми AM и BC.

17.198. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ имеют одинаковую длину. Найти угол между прямыми: а) AM и BN, где M и N – середины ребер SB и SC соответственно; б) SP и BN, где P – середина ребра AB.

17.199 [Яковлев]**.** На диагоналях граней D_1A, A_1B, B_1C, C_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки M, N, P, Q так, что $|D_1M|:|D_1A|=|BN|:|BA_1|=|B_1P|:|B_1C|=|DQ|:|DC_1|=\lambda$, а прямые MN и PQ перпендикулярны. Найти λ.

17.200 [Яковлев]**.** Ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют длину a. На диагоналях D_1A и A_1B взяты соответственно точки M и N так, что $|D_1M|:|D_1A|=|NB|:|A_1B|=1:3$. Найти расстояние от вершины C до прямой MN.

17.201a [НГУ, ФФ, 1993]**.** В треугольной пирамиде $SABC$ ребра AB, AC, AS взаимно перпендикулярны и $AB=1$, $AC=2$, $AS=4$. Точки K и L – середины ребер BS и AC. Найти угол между прямой KL и плоскостью BSC.

17.201b [НГУ, ФФ, 1993]**.** В треугольной пирамиде $SABC$ ребра AB, AC, AS взаимно перпендикулярны и $AB = 3$, $AC = 1$, $AS = \sqrt{3}$ Найти угол между медианой BK грани ABC и плоскостью BSC.

17.202 [Яковлев]**.** В правильном тетраэдре $ABCD$ проведены высоты DE и BF граней ABD и BDC. В каком отношении разделены отрезки DE и BF основаниями их общего перпендикуляра?

17.203 [Яковлев]**.** Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на прямых AB_1 и BC_1, перпендикулярные прямой AC_1. Найти наименьшую длину таких отрезков.

17.204' [Яковлев]**.** Длины ребер AB и BC прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно a и $2a$. Известно, что существует прямая, пересекающая прямые AA_1, BC и C_1D_1 и образующая с ними равные углы. Найти длину ребра AA_1 (найти все решения).

17.205 [Яковлев]**.** Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна a. Точка E – середина ребра CD, точка F – середина высоты BL грани ABD. Отрезок MN с концами на прямых AD и BC пересекает прямую EF и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

17.206 [МФТИ, 1996]**.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6, точки M и N — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка K расположена на ребре DC так, что $|DK| = 2|KC|$. Найдите:

1) расстояние от точки N до прямой AK;
2) расстояние между прямыми MN и AK;
3) расстояние от точки A_1 до плоскости MNK.

17.207 [МИЭМ, 1997]**.** В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 1 и высота равна $\sqrt{8}$. Точка N лежит на ребре SD и делит это ребро в отношении $DN : NS = 1 : 2$, точка M – середина ребра AS. Найдите расстояние от вершины D до плоскости, проходящей через точки M и N параллельно ребру DC.

17.208a [НГУ, ест, 1977]**.** В основании параллелепипеда лежит параллелограмм $ABCD$, в котором острый угол A равен $60°$, а длины сторон AB и BC – соответственно a и $2a$. Боковые ребра AA', BB', CC', DD' перпендикулярны плоскости основания, а их длины равны a. Через вершины A, B' и D' проведена плоскость. Найти расстояние от вершины C до этой плоскости.

17.208b [НГУ, ест, 1977]**.** В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, длины катетов AB и AC которого равны соответственно $3a$ и $4a$. Ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания и имеет длину a. Через середины ребер AB, SC и точку, лежащую на ребра AC и удаленную от вершины A на расстояние a, проведена плоскость. Определить двугранный угол, образованный этой плоскостью и плоскостью основания.

17.209’ [Шар-11]. Найдите угол и расстояние между двумя скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра с ребром a.

17.210 [Шар-11]. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через ребро AA_1 проведена плоскость, образующая равные углы с прямыми BC_1 и B_1D. Найдите эти углы.

17.211’ [Шар-11]. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки P, K, L – середины ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка Q – центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка.

17.212 [Шар-11]. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M – центр грани ABB_1A_1, точка N лежит на ребре B_1C_1, точка L – середина A_1B_1, точка K – основание перпендикуляра, опущенного из N на BC_1. В каком отношении точка N делит ребро B_1C_1, если $\angle LMK = \angle MKN$?

17.213a [ЦыпПин]. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. На ребре BC взята точка E так, что длина отрезка BE равна $1/4$. На ребре C_1D_1 взята точка F так, что FD_1 $=2/5$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины A_1 до плоскости α.

17.213b [ЦыпПин]. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. На ребре AB взята точка E так, что длина отрезка BE равна $2/5$. На ребре CC_1 взята точка F так, что FC $=2/3$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины A до плоскости α.

17.214a [ЦыпПин]. Длина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ равна 1. На ребре MM_1 взята точка A так, что длина отрезка AM равна $3/5$. На ребре K_1N_1 взята точка B так, что K_1B $=1/3$. Через центр куба и точки A и B проведена плоскость α. Точка P – проекция вершины N на плоскость α. Найти длину отрезка BP.

17.214b [ЦыпПин]. Длина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ равна 1. На ребре KL взята точка A так, что длина отрезка AL равна $3/4$. На ребре MM_1 взята точка B так, что MB $=3/5$. Через центр куба и точки A и B проведена плоскость α. Точка P – проекция вершины N на плоскость α. Найти длину отрезка BP.

17.215a [ЦыпПин]. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длина гипотенузы AB которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и его длина равна 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

17.215b [ЦыпПин]**.** Основанием пирамиды $HPQR$ является равносторонний треугольник PQR, длина стороны которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро HR перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 1. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра QR, а другая проходит через точку R и середину ребра PQ.

17.216 [ЦыпПин]**.** Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости AA_1B_1B.

а) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BC_1 такую, что $|BM| : |BC_1| = 1 : 3$. Найти его длину.

б) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

17.217 [ЦыпПин]**.** Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, а боковое ребро – длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали основания BD и боковом ребре SC, параллельные плоскости грани SAD. Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

17.218a [НГУ, МФ, 1995]**.** В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{7}$, $BC = 1$. Точка M – середина ребра AB. Найти объем параллелепипеда, если известно, что отрезки MC_1 и B_1D образуют равные углы с плоскостью A_1BCD_1.

17.218b [НГУ, МФ, 1995]**.** В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{7}$, $BC = 1$. Точка M – середина ребра AB, точка N – середина ребра B_1C_1. Найти объем параллелепипеда, если известно, что отрезки MC_1 и CN образуют равные углы с плоскостью A_1BCD_1.

17.219a [НГУ, МФ, 1997]**.** В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC, стороны которого равны $2\sqrt{3}$, боковые ребра пирамиды равны 4. Точки M и K – середины ребер SB и BC соответственно. На прямой MK выбирается произвольным образом точка P. Найти наименьшую возможную величину угла PAB.

17.219b [НГУ, МФ, 1997]**.** В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 12$, $BC = 8$, ребро SA перпендикулярно плоскости основания ABC и $SA = 6$. Точки M и K – середины ребер AC и SB соответственно. На прямой MK выбирается произвольным образом точка P. Найти наименьшую возможную величину угла PAB.

17.220 [Шар-11]**.** $ABCD$ – правильный тетраэдр с ребром 1. Точка M – середина AB, K – точка на BC такая, что $BK = 2CK$. Найдите расстояние от точки K до середины DM.

17.221 [Шар-11]. В основании правильной треугольной призмы лежит треугольник ABC со стороной a. На боковых ребрах взяты точки A_1, B_1 и C_1, удаленные от плоскости основания соответственно на расстояния $\frac{a}{2}$, a, $\frac{3}{2}a$. Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.

17.222 [Шар-11]. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точки M и N являются соответственно серединами ребер A_1B_1 и AA_1. Проекция отрезка BM на прямую C_1N равна $\frac{a}{2\sqrt{5}}$. Определите высоту призмы.

17.223a' [НГУ, МФ, 1997]. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 3$, боковые ребра AA', BB' CC' DD' равны 4. Точки P и Q – середины ребер $A'B'$ и CC' соответственно. На прямой $B'C'$ выбрана точка M так, что расстояния от точек P и Q до прямой AM равны. Определить длину отрезка $B'M$.

17.223b' [НГУ, МФ, 1997]. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 8$, боковые ребра AA', BB' CC' DD' равны 8. Точка M – середина ребра $C'D'$. На прямой AA' выбрана точка P так, что расстояния от точек B' и D до прямой MP равны. Определить длину отрезка AP.

17.224 [Яковлев]. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. На прямой BC_1 взята точка M так, что прямые D_1M, DA_1, AB_1 параллельны одной плоскости. Найти: а) расстояние от точки M до прямой AB_1; б) площадь сечения куба плоскостью MD_1B_1.

17.225 [Яковлев]. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $|AD| : |DC| = n$. В каком отношении общий перпендикуляр прямых AA_1 и B_1D делит отрезки AA_1 и B_1D?

17.226* [Яковлев]. Длина каждого ребра параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a, все плоские углы при вершине A имеют величину $\pi/3$. Определить расстояние между прямыми AC и DB_1.

17.227a [НГУ, ест, 1982]. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, плоскости граней SAB и ABC перпендикулярны, $SA = SB$, высота пирамиды равна 1. На ребре SA выбрана точка M так, что $AM = 2SM$, точка N – середина ребра SC. Плоскость α проходит через точки B, M и N. Найти расстояние от точки A до плоскости α.

17.227b [НГУ, ест, 1982]. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = 4$. Боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину, ее высота равна $12/5$. Плоскость α проходит через прямую SA параллельно диагонали BD основания. Найти расстояние от вершины C до плоскости α.

17.228 [НГУ, ест, 1983]**.** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит квадрат $ABCD$ со стороной 3, боковые ребра AA_1, BB_1 CC_1, DD_1 равны 5. Равносторонний треугольник расположен в пространстве так, что одна его вершина совпадает с вершиной C параллелепипеда, а две другие лежат на прямых BB_1 и C_1D_1 соответственно. Найти длину медианы треугольника.

17.229a [НГУ, ест, 1986]**.** Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, равна 1, длины боковых ребер AA_1, BB_1, CC_1 равны 2.Плоскость α проходит через вершины A, B и C_1; плоскость β проходит через вершины B_1, C и точку M – середину ребра AA_1. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Найти угол между прямой l и плоскостью основания ABC.

17.229b [НГУ, ест, 1986]**.** Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 1, ее высота равна 2.Плоскость α проходит через вершины A, S и середину M ребра BC, плоскость β проходит через вершину B и точки K и L – середины ребер AS и CS. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Найти угол между прямой l и плоскостью основания $ABCD$.

17.230a [НГУ, ест, 1993]**.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ ребра $AB = 2$, $AD = 4$, $AA' = \sqrt{14}$. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка $C'D'$ на плоскость $A'MC$, где M – середина ребра AD.

17.230b [НГУ, ест, 1993]**.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ ребра $AB = 1$, $AD = 2$, $AA' = 3$. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка $A'C$ на плоскость BDC'.

17.231a [НГУ, ест, 1994]**.** Пусть $ABCD$ – правильная треугольная пирамида, все ребра которой равны 1. На луче AB выбрана точка M ($AM > AB$) так, что косинус угла, образованного прямыми AC и DM, равен $1/4$. Найти BM.

17.231b [НГУ, ест, 1994]**.** В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Все ребра пирамиды равны 1. На луче AD выбрана точка M так, что косинус угла, образованного прямыми SM и DC, равен $1/3$. Найти AM.

17.232 [НГУ, ест, 1997]**.** Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$, $BC = 9$; боковые ребра AA', BB', CC', DD' имеют длину 3. На диагонали $A'C$ параллелепипеда выбрана точка P так, что угол между векторами $\vec{AD}$ и $\vec{AP}$ равен $\operatorname{arctg}(2\sqrt{2}/3)$. Найти отношение $A'P : PC$.

17.233 [НГУ, ест, 1997]. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, точка D – середина ребра SB. Через середины K и L отрезков SA и CD проведена прямая, которая пересекает плоскость основания ABC в точке M. Найти расстояние от точки M до вершины A.

17.234a [НГУ, МФ, 1983]. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Плоскость α перпендикулярна прямой A_1C_1, плоскость β параллельна прямой CD_1. Определить наименьший возможный угол между плоскостями α и β

17.234b [НГУ, МФ, 1983]. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ имеют равную длину. Плоскость α перпендикулярна прямой AS, плоскость β параллельна прямой CD. Определить наименьший возможный угол между плоскостями α и β.

17.235a [НГУ, МФ, 1986]. Точки M и N – соответственно середины ребер AC и SB правильного тетраэдра $SABC$. Ребра тетраэдра равны 1. На прямых AS и CN выбраны точки P и Q так, что прямая PQ параллельна прямой BM. Найти длину отрезка PQ.

17.235b [НГУ, МФ, 1986]. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ имеют длину 1. Точки M и N – середины ребер AB и SC соответственно. На прямых AS и BN выбраны точки P и Q так, что прямая PQ параллельна прямой CM. Найти длину отрезка PQ.

17.236a [НГУ, МФ, 1989]. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Через прямую $B'C$ проведена плоскость, пересекающая ребро AB и составляющая угол в 60° с прямой $A'B$. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB ?

17.236b [НГУ, МФ, 1989]. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания, его длина также равна 1. Через прямую SB проведена плоскость, которая пересекает ребро AD и составляет острый угол 60° с прямой AC. В каком отношении эта плоскость делит ребро AD?

17.237a [НГУ, МФ, 1990]. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $2a$, боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, его длина $4a$. Точки M и N – середины боковых ребер SB и SC, точка K – середина ребра AB. Отрезок PQ, концы которого лежат на прямых MN и CK, пересекается с прямой SA в точке O и делится этой точкой пополам. Найти длину отрезка PQ.

17.237b [НГУ, МФ, 1990]. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA', BB', CC' все ребра имеют длину a, точки M и N – середины ребер $A'B'$ и $B'C'$.

Отрезок PQ, концы которого лежат на прямых AA' и MN, пересекается с прямой BC в точке O и делится этой точкой пополам. Найти длину отрезка PQ.

17.238a [НГУ, ФФ, 1989]**.** В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, все ребра пирамиды имеют длину 1. Точки M и N – середины ребер SD и CD соответственно. Найти расстояние между прямыми AN и BM.

17.238b [НГУ, ФФ, 1989]**.** В основании прямой треугольной призмы лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ее боковые ребра AA', BB', и CC' равны 2. Точки K и L – середины ребер AB и CC' соответственно. Найти расстояние между прямыми KL и $A'C$.

17.239 [МГУ, ВМК, 2002]**.** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$ и $AA_1 = 2$. Найдите угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и B_1C_1.

17.240a' [СУНЦ НГУ, 2015]**.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины ребер $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 4$. Точка M лежит на ребре DC, причем $DM = 2$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A и M под углом $\operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$ к плоскости ABC.

17.240b' [СУНЦ НГУ, 2015]**.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины ребер $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 8/5$. Точка M – середина ребра DC. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A и M под углом $\operatorname{arctg}(4/3)$ к плоскости ABC.

17.241a [СУНЦ НГУ, 2014]**.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания ABC равна 1, высота равна 2. Точка M –середина ребра AC, точка N – середина ребра BB_1. Плоскость, проходящая через точки A, C_1, N пересекается с прямой B_1M в точке P. Найти расстояние от точки P до плоскости A_1BM.

17.241b [СУНЦ НГУ, 2014]**.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания ABC равна 1, высота равна 3. Точка M –середина ребра B_1C_1. Точка K лежит на ребре AC, $KC = 1/3$. Точка N – середина ребра BB_1. Плоскость, проходящая через точки A_1, K, N пересекается с прямой AM в точке P. Найти расстояние от точки P до плоскости A_1BM.

17.7. Отношение объемов многогранников

17.242 [Шар-11]**.** В каком отношении делит объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра C_1D_1 и центр грани BCC_1B_1.

17.243 [Шар-11]**.** В каком отношении делит объем треугольной пирамиды $ABCD$ плоскость, проходящая через вершину A и середины медиан треугольников ABC и ABD, выходящих из вершины B?

17.244 [Шар-11]**.** В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На ребре SA взята точка M так, что $SM = 2AM$. Через M и середины ребер SB и SD проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

17.245 [Шар-11]**.** В каком отношении делит объем тетраэдра $ABCD$ плоскость, проходящая через точку M на ребре AB такую, что $AM = \dfrac{1}{3}AB$, и через середины медиан треугольников ABC и ABD, выходящих из вершины A. ?

17.246 [Шар-11]**.** В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведены две плоскости: одна проходит через вершины A, B и C_1, а другая – через вершины A_1, B_1 и C. Эти плоскости разделили призму на четыре части. Объем меньшей из этих частей равен V. Найдите объем призмы.

17.247 [Шар-11]**.** В каком отношении делит объем треугольной пирамиды плоскость, параллельная двум ее скрещивающимся ребрам и делящая одно из других ребер в отношении $2 : 1$?

17.248 [Шар-11]**.** Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер треугольной пирамиды с объемом V.

17.249* [Шар-11]**.** Дана правильная треугольная пирамида объемом V. Точка O – середина ее высоты, опущенной на основание. Найти объем общей части данной пирамиды и пирамиды, симметричной данной относительно точки O.

17.250 [НГУ, МФ, 1977]**.** В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Через середины ребер AB, AD и SC проведена плоскость. Найти отношение объемов частей, на которые эта плоскость делит пирамиду.

17.251a [СУНЦ НГУ, 2002]**.** В правильном тетраэдре $SABC$ точка M — середина ребра BC, точка K на ребре SA расположена так, что $SK : KA = 1 : 3$. Через точки M и K параллельно прямой AB проводится плоскость α. Найти отношение объемов частей, на которые плоскость α делит тетраэдр $SABC$.

17.251b [СУНЦ НГУ, 2002]**.** В правильном тетраэдре $SABC$ точка M — середина ребра SA, точка K на ребре BC расположена так, что $CK : KB = 1 : 2$. Через точки M и K параллельно прямой SB проводится плоскость α. Найти отношение объемов частей, на которые плоскость α делит тетраэдр $SABC$.

17.251c [СУНЦ НГУ, 2002]**.** В правильном тетраэдре $SABC$ точка M — середина ребра AC, точка K на ребре SB расположена так, что BK :

$KS = 1 : 2$. Через точки M и K параллельно прямой BC проводится плоскость α. Найти отношение объемов частей, на которые плоскость α делит тетраэдр $SABC$.

17.252 [Шар-11]. Внутри правильной треугольной пирамиды расположена вершина трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, а биссектрисы плоских углов проходят через вершины основания пирамиды. В каком отношении поверхность этого угла делит объем пирамиды, если каждая грань пирамиды разделена ею на две равновеликие части?

17.253a [НГУ, МФ, 1997]. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S и основанием $ABCD$ заданы точки E, F, G и H – середины ребер AB, AD, SA и SC соответственно. Определить объем треугольной пирамиды $EFGH$, если известно, что объем данной пирамиды $ABCD$ равен 24.

17.253b [СУНЦ НГУ, 1992]. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точки E, F и G – середины ребер AD, SB и SD соответственно. Определить объем пирамиды $SABCD$, если известно, что объем пирамиды $EFGC$ равен 3.

17.253c [СУНЦ НГУ, 1992]. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точки E, F, G, H – середины ребер BC, CD, SA и SB соответственно. Определить объем пирамиды $SABCD$, если известно, что объем пирамиды $EFGH$ равен 2.

17.254 [Шар-11]. Докажите, что если плоскость проходит через середины двух противоположных ребер тетраэдра, то она делит его на две части равных объемов.

17.255a [МГУ, МФ, 1978]. Дана пирамида $ABCD$. Через середины K и N ребер AB и CD пирамиды проведена плоскость, пересекающая ребра BC и AD соответственно в точках L и M. Найти объем пирамиды $ABCD$, если площадь треугольника MNK равна 3, отношение объемов пирамид $ACDL$ и $ABCD$ равно 0.9, а расстояние от вершины D до плоскости $KLMN$ равно 3.

17.255b [МГУ, МФ, 1978]. Дана пирамида $ABCD$. Через середины K и M ребер AB и CD пирамиды проведена плоскость, пересекающая ребра BC и AD соответственно в точках L и N. Расстояние от вершины B до этой плоскости равно 2. Диагонали четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке Q, причем $KQ : QM = 0.2$. Вычислить площадь четырехугольника $KLMN$, если известно, что объем пирамиды $BKMC$ равен 12.

17.256a [НГУ, МФ, 2001]. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины ребер равны 4. Точка K лежит на ребре BC, причем $KC = 1$. Плоскость α, проходящая через точки A и K, пересекает ребро DD_1. Площадь сечения куба плоскостью α равна $25/2$. Найти отношение объемов частей куба, на которые его делит плоскость α.

17.256b [НГУ, МФ, 2001]**.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины ребер $AA_1 = 7/3$, $AB = 4$, $AD = 6$. Точка K – середина ребра BC. Плоскость α, проходящая через точки D и K, пересекает ребро AA_1 и делит параллелепипед на две части, отношение объемов которых равно 1:3. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью α.

17.257 [МГУ, почв, 1998]**.** На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки E и F такие, что $AE = 2A_1E$, $CF = 2C_1F$. Через точки B, E и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношение объема части, содержащей точку B_1, к объему всего куба.

17.258 [МИЭМ, 2001]**.** В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 9. Боковые ребра пирамиды равны $5\sqrt{3}$. На ребре AB взята точка D так, что $AD = 3$. Через точки C, D проведена плоскость α, перпендикулярная плоскости основания пирамиды. Требуется: а) найти объем пирамиды $SABC$; б) определить, в каком отношении плоскость α делит объем пирамиды.

17.259a [НГУ, МФ, 1976]**.** Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC',DD'. На диагонали BD' куба выбрана точка F так, что $BF = 2FD'$. Через вершину A, точку F и середину ребра CC' проведена плоскость. Найти отношение объемов частей, на которые эта плоскость делит куб.

17.259b [НГУ, МФ, 1976]**.** В основании прямоугольного параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$, $BC = 4$. Высота параллелепипеда равна $10/3$. Через диагональ AC основания проведена плоскость под углом 45° к ребру BC. Найти отношение объемов частей, на которые эта плоскость делит параллелепипед.

17.260a [НГУ, МФ, 1988]**.** В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны 1. Точки K и L -середины ребер AB и B_1C_1, точки M и N – середины ребер A_1B_1 и AC соответственно. Через прямые KL и MN проведены параллельные плоскости. Найти объем части призмы, содержащейся между этими плоскостями.

17.260b [НГУ, МФ, 1988]**.** В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = BC = 1$, все боковые ребра равны 2. Точка K – середина ребра AC, точка L - середина ребра SB. Через прямые SK и CL проведены параллельные плоскости. Найти объем части пирамиды, содержащейся между этими плоскостями.

17.261 [МГУ, геол, 1974]**.** Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CD взята точка K так, что $KD : KC = 3 : 4$. На ребре SC взята точка L так, что $SL : LC = 2 : 1$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проведенная через точки K, B и L ?

17.262 [МГУ, экон, 1973]**.** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с площадью основания S и высотой h. Через вершину A_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость, пересекающая боковое ребро BB_1 в точке B_2, боковое ребро CC_1 в точке C_2 и боковое ребро DD_1 в точке D_2. Найти объем той части параллелепипеда, которая расположена под секущей плоскостью, если известно, что $CC_2 = c$.

17.263a [НГУ, МФ.1985]**.** Через вершину A правильного тетраэдра $ABCD$ параллельно ребру CD проведена плоскость β, которая делит тетраэдр на две части равных объемов. Найти расстояние от вершины B до плоскости β, если ребро тетраэдра равно 1.

17.263b [НГУ, МФ.1985]**.** В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом A в 60° и стороной 2, высота призмы равна $\sqrt{3}$. Через вершину C параллельно диагонали BD основания проходит плоскость β, которая пересекает ребро AA_1 и делит призму на две части, объемы которых относятся как 1:2. Найти расстояние от вершины A до плоскости β.

17.264* [Шар-11]**.** Правильный тетраэдр объема V повернут около прямой, соединяющей середины двух его скрещивающихся ребер, на угол α $(0 < \alpha < \pi)$. Найдите объем общей части данного тетраэдра и повернутого.

17.265* [Шар-11]**.** Ребро куба и ребро правильного тетраэдра лежат на одной прямой, середины противоположных им ребер куба и тетраэдра совпадают. Найдите объем общей части куба и тетраэдра, если ребро куба равно a.

17.8. Вычисление объемов многогранников

17.266 [Шар-11]**.** Пусть S и P – площади двух граней тетраэдра, a – длина их общего ребра, α – двугранный угол между ними. Докажите, что объем тетраэдра V может быть найден по формуле $V = \dfrac{2SP\sin\alpha}{3a}$.

17.267 [Шар-11]**.** Пусть a и b – длины двух противоположных ребер тетраэдра, d – расстояние между ними, φ – угол между ними. Докажите, что объем тетраэдра V может быть найден по формуле $V = \dfrac{1}{6}abd\sin\varphi$.

17.268 [Шар-11]**.** Найдите объем треугольной пирамиды, в основании которой лежит треугольник со сторонами 3, 4, 5, а двугранные углы при основании равны 60°.

17.269 [Шар-11]. В основании пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$. Ребро SD является высотой пирамиды. Найдите объем пирамиды, если известно, что $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$, $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$.

17.270' [Шар-11]. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 3, ребро SA равно 5. Найдите объем пирамиды, если известно, что боковые грани пирамиды равновелики.

17.271 [Шар-11]. Ребро куба равно 1. Найдите объем треугольной пирамиды, три вершины которой находятся в центрах трех смежных граней куба, а четвертая вершина – в вершине куба, не принадлежащей этим граням.

17.272 [Шар-11]. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите объем общей части двух треугольных пирамид ACB_1D_1 и A_1C_1BD.

17.273' [Шар-11]. Дан куб с ребром 1. Найти объем общей части трех четырехугольных призм, таких, что вершины каждой призмы расположены в серединах сторон двух противоположных граней куба.

17.274* [МГУ, МФ, 1971]. Все грани треугольной пирамиды – равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найти объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно единице.

17.275 [МГУ, АзАфр, 1999]. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом $\pi/8$. Каждое боковое ребро равно $\sqrt{6}$ и наклонено к плоскости основания под углом $5\pi/13$. Определите объем пирамиды.

17.276 [Шар-11]. В основании треугольной пирамиды лежит правильный треугольник со стороной 1. Боковые грани наклонены к плоскости основания под равными углами. Одно боковое ребро равно $\sqrt{7}$, а два других меньше его. Найдите объем пирамиды.

17.277 [Шар-11]. Среди пирамид, все ребра которых равны a, найдите объем той пирамиды, которая имеет наибольшее число ребер.

17.278 [Шар-11]. Высота усеченной пирамиды равна h, площадь среднего сечения равна S. В каких пределах может меняться объем этой пирамиды?

17.279 [Шар-11]. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 сторона верхнего основания равна 1, а сторона нижнего основания равна 7. Плоскость, проходящая через ребро B_1C_1 перпендикулярно плоскости AD_1C, делит пирамиду на две части равного объема. Найдите объем пирамиды.

17.280 [МГУ, ВМК, 1998]. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD. На отрезке SD взята точка K так, что $SK : KD = 1 : 2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\pi/6$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $4/\sqrt{13}$. Найдите объем пирамиды.

17.281' [МФТИ, 1989]**.** Точка D является серединой ребра BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. На боковой грани AA_1C_1C взята точка E, а на основании ABC – точка F так, что прямые EB_1 и FD параллельны. Какой наибольший объем может иметь призма $ABCA_1B_1C_1$, если $EB_1 = 1$, $FD = 3/4$, $EF = 1/(2\sqrt{3})$?

17.282a [НГУ, МФ, 1998]**.** Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равны 1. Точка M находится в плоскости грани SAD и равноудалена от вершин S, C и D. Найти объем пирамиды $SMAB$.

17.282b [НГУ, МФ, 1998]**.** В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' все ребра имеют длину 2. Точка K – середина ребра AA', точка M находится в плоскости грани $AA'C'C$ и равноудалена от точек K, B' и C'. Найти объем пирамиды $MBCK$.

17.283a [НГУ, ест, 1998]**.** В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания. Точка M выбрана на ребре SC так, что $SM = 3MC$. Известно, что прямая BM образует угол 30° с плоскостью ASB, $BM = 3\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды $SABC$.

17.283b [НГУ, ест, 1998]**.** В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' точки M и K – середины отрезков $A'B'$ и $A'C$ соответственно. Известно, что прямая MK образует угол 45° с плоскостью $AA'B'B$, $MK = 3$. Найти объем призмы $ABCA'B'C'$.

17.284a [НГУ, ест, 1999]**.** В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 4, боковые ребра равны $\sqrt{33}$. Точки M, N, K – середины ребер AB, BS, BC соответственно. Найти объем пирамиды $MNKCS$.

17.284b [НГУ, ест, 1999]**.** В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основания $ABCD$ равны 2, боковые ребра равны $3\sqrt{3}$. Точки M и N – середины ребер AB и AS соответственно. Найти объем пирамиды $DMNSB$.

17.285 [НГУ, ест, 1977]**.** Дан правильный тетраэдр $SABC$ с ребром длины 1. Точки D, E и F лежат соответственно на ребрах AS, BS, CS, причем $AD = BE = \dfrac{1}{3}$, $CF = \dfrac{2}{3}$. Найти объем пирамиды $DEFG$, где G — точка пересечения медиан треугольника ABC.

17.286 [НГУ, ест, 1988]. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 3$, $AC = 4$, боковые ребра пирамиды равны 5. На луче AC выбраны точки M и N так, что $AM = 1$, $AN = 6$; на луче BS выбраны точки P и Q так, что $BP = 1$, $BQ = 3$. Найти объем пирамиды $MNPQ$.

17.287 [НГУ, ест, 1991]. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Точка P – середина ребра SB. Найти объем пирамиды, если известно, что прямые AP и SC перпендикулярны.

17.288a [НГУ, МФ, 1988]. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, $AB = 5$, $BC = 2$. Известно, что $SB = 4$, $SA = 3$, $SC = x$, $SD = y$. Определить, при каких значениях x и y объем пирамиды достигает наибольшей величины, и вычислить его.

17.288b [НГУ, МФ, 1988]. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 4 и острым углом A в $60°$. Известно, что $SA = 2$, $SB = 4$, $SC = x$, $SD = y$. Определить, при каких значениях x и y объем пирамиды достигает наибольшей величины, и вычислить его.

17.289a [НГУ, МФ, 1991]. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2. Точки P и Q – середины ребер SA и SB соответственно. Найти объем пирамиды, если известно, что прямые CP и AQ перпендикулярны.

17.289b [НГУ, МФ, 1991]. В основании правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной длины 4. Найти объем призмы, если известно, что прямые AB' и CA' перпендикулярны.

17.290 [НГУ, ФФ, 1992]. В основании прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1. Прямая l проходит через точку A параллельно BC'. На прямой l выбрана точка P так, что P и A' лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти максимально возможный объем пирамиды $PABC$, если $PQ = \sqrt{3}$, а точка Q лежит на прямой BC.

17.291 [НГУ, ест, 2003]. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые ребра пирамиды равны 3. Точки M и N расположены соответственно на ребрах SA и SD так, что $SM : MA = SN : ND = 2 : 1$. Через точки M и N перпендикулярно плоскости SBC проведена плоскость, пересекающая ребра SC и SB в точках K и L. Найти объем пирамиды $SMNKL$.

17.292* [МГУ, экон, 2001]. Равные кубы A и B, имеющие общую вершину, расположены так, что ребро куба A лежит на диагонали куба

B, а ребро куба B лежит на диагонали куба A. Найдите объем общей части этих кубов, если длина их ребер равна 1.

17.9. Сферы с многогранниками

17.293 [Шар-11]. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите радиус шара, проходящего через вершины C, C_1 и касающегося прямых AB и AD.

17.294 [Шар-11]. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите радиус шара, проходящего через середины ребер AA_1, BB_1 и через вершины A и C_1.

17.295a [НГУ, МФ, 1994]. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, где $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, длина ребра равна 1. Точка Q – центр грани $A'B'C'D'$. Найти радиус сферы, проходящей через точки B, D, C', Q.

17.295b [НГУ, МФ, 1994]. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, где $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, длина ребра равна 1. Точка K лежит на луче CA, $CK = 2\sqrt{2}$, M и N – середины ребер $D'C'$ и $B'C'$ соответственно. Найти радиус сферы, проходящей через точки M, N, A, K.

17.296a [НГУ, ест, 1980]. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'; длина ребра куба равна 1. Сфера касается ребер AA', $A'D'$, AB и пересекает ребро CC' в точке M такой, что $CM = 1/3$. Найти радиус сферы.

17.296b [НГУ, ест, 1980]. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'; длина ребра куба равна 1. Каждая из двух сфер одинакового радиуса $R = \sqrt{3}/2$ касается ребра AB основания и боковых ребер AA' и CC'. Найти расстояние между центрами этих сфер.

17.297 [МГУ, ФФ, 1999]. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1)$ $AB = BC = 2a$, $AA_1 = a$. Плоскость сечения проходит через точки B_1 и D параллельно прямой AC. Найдите радиус шара, касающегося этого сечения и трех граней параллелепипеда с общей вершиной B.

17.298a [НГУ, ФФ, 1991]. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' длины ребер равны 5. Точки K и L расположены соответственно на ребрах $B'C'$ и CD так, что $B'K : KC' = DL : LC = 1 : 2$. Центр шара, касающегося плоскостей $ABCD$ и $ABB'A'$, лежит на отрезке KL. Найти радиус шара.

17.298b [НГУ, ФФ, 1991]. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA', BB', CC' длины всех ребер равны 6. Точки P и Q расположены соответственно на ребрах BC и $A'C'$ так, что $BP : PC = A'Q : QC' = 1 : 2$. Центр шара, касающегося плоскостей $ABB'A'$ и $ACC'A'$, лежит на отрезке PQ. Найти радиус шара.

17.299 [Шар-11]**.** В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной a, высота параллелепипеда равна b. Найдите радиус сферы, проходящей через концы стороны AB основания и касающейся плоскостей граней параллелепипеда, параллельных AB.

17.300 [Яковлев]**.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F – середины ребер AA_1 и A_1D_1 соответственно, $AB = a$. Найти радиусы сфер, проходящих через точки E и F и касающихся плоскостей BB_1C_1C и DD_1C_1C.

17.301' [МГУ, хим, 1999]**.** В сферу радиуса $\sqrt{3}$ вписан параллелепипед, объем которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

17.302 [МГУ, геол, 1999]**.** Сфера радиуса $\sqrt{41}$ проходит через вершины B, C, C_1 и через середину ребра A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь поверхности этого куба.

17.303 [Шар-11]**.** Дан правильный тетраэдр $ABCD$ в ребром a. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины C и D и середины ребер AB и AC.

17.304 [Шар-11]**.** В тетраэдре $ABCD$ дано: $\angle ABC = \angle BAD = 90°$, $AB = a$, $DC = b$, угол между ребрами AD и BC равен α. Найдите радиус описанного шара.

17.305a [НГУ, МФ, 1980]**.** Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна 1. Сфера касается ребер AS, AC, AB и проходит через середину BC. Найти радиус сферы, если известно, что ее центр лежит внутри тетраэдра.

17.305b [НГУ, МФ, 1980]**.** Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна 1. Точка O – центр шара радиуса $\sqrt{2}$, касающегося лучей AS, AC, AB. Найти длину отрезка OK, где K – середина SC.

17.306 [МГУ, почв, 1982]**.** Длина высоты SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 1, а длины сторон основания ABC равны $2\sqrt{6}$. Точки M и N – середины отрезков AC и AB. Вычислить радиус сферы, вписанной в пирамиду $SAMN$.

17.307 [Яковлев]**.** В пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине S прямые. Доказать, что вершина S, точка пересечения медиан треугольника ABC и центр описанной около пирамиды сферы лежат на одной прямой.

17.308 [Шар-11]**.** Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, причем одно из них имеет длину a и равно сумме двух других. Найдите радиус шара, касающегося основания пирамиды и продолжений ее боковых граней.

17.309 [Шар-11]. Найти величину двугранного угла между соседними боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что радиус вписанного в нее шара в три раза меньше стороны основания.

17.310 [Шар-11]. Найдите радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, пять ребер которой равны 2, а одно ребро равно 1.

17.311 [Яковлев]. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды имеют длину a. Найти радиус сферы, проходящей через центры боковых граней и касающейся сторон основания пирамиды.

17.312 [ЦыпПин]. Дана пирамиды $SABCD$, основанием которой служит ромб $ABCD$. Сторона основания равна a, $SA = SC = a$, $SB = SD$, $\angle BCD = 2\alpha$. Определить радиус вписанного шара.

17.313 [МГУ, ФФ, 1999]. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S боковое ребро SA равно b. Сфера радиуса $b/2$ касается плоскости SAC в точке C и проходит через точку B. Найдите $\angle ASC$.

17.314 [Яковлев]. В тетраэдре $ABCD$ грань ABC – прямоугольный треугольник, где $\angle BCA = 90^\circ$, ребро AD перпендикулярно плоскости ABC, $|AD| = |BC| = 3$, $|AC| = 4$. Найти радиус сферы, вписанной в тетраэдр.

17.315 [МГУ, ФФ, 2002]. В пирамиде $SBCD$ каждое ребро равно 3. На ребре SB взята точка A так, что $SA : AB = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SACD$.

17.316 [Яковлев]. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб с диагоналями AC и BD, $|AC| = 8$, $|BD| = 6$; ребро SA перпендикулярно плоскости основания и его длина равна 2. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду.

17.317 [МГУ, МФ, 1974]. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро DC равно 9, и $BD = AD$. Ребро AC перпендикулярно грани ABD. Сфера радиуса 2 касается грани ABC, ребра DC, а также грани DAB в точке пересечения ее медиан. Найти объем пирамиды.

17.318 [МГУ, экон, 1999]. В треугольной пирамиде $SABC$ угол $\angle ACB = \alpha$, ребро $SC = d$ является диаметром сферы, пересекающей ребра SA и SB в их серединах. Найдите объем пирамиды, если $\angle SAC = \angle SBC = \beta$, причем $\beta < \pi/4$.

17.319* [МГУ, МФ, 1999]. Четырехугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке H, причем SH – высота пирамиды. Найдите ребра CS и CD, если $CH = 4$, $AS = 3\frac{3}{4}$, $AD = 3$ и $AB = BS$.

17.320 [МГУ, МФ, 1973]**.** В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD имеют площади p и q и образуют между собой угол α. Найти площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро AB и центр вписанного в пирамиду шара.

17.321 [МГУ, псих, 1973]**.** Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S – ее вершина] Сторона основания этой пирамиды равна a, высота пирамиды равна $a\sqrt{7/2}$. Пусть E – середина стороны основания AB, пусть также F – середина SB и G – середина SC. Найти расстояние от центра шара, описанного около пирамиды $SABCD$, до плоскости, проведенной через точки E, F, G, H, где H – середина CD.

17.322 [Шар-11]**.** В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 3$, $BC = 4$. Высота пирамиды равна 3 и проходит через середину BC. Найдите радиус наибольшего шара, который может поместиться внутри этой пирамиды.

17.323 [Шар-11]**.** В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма со стороной основания a. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр сферы и сторону основания призмы.

17.324 [ЦыпПин]**.** Правильный треугольник со стороной a лежит в плоскости P. Средними линиями он разделен на 4 треугольника, и на трех из них, примыкающих к вершинам, построены как на основаниях три правильные треугольные пирамиды с высотой a (все три – по одну сторону плоскости P] Найти радиус шара, лежащего между пирамидами и касающегося как плоскости P, так и всех трех пирамид.

17.325 [ЦыпПин]**.** В треугольной пирамиде $SABC$ грань SAC перпендикулярна грани ABC, $SA = SC = 1$, а угол при вершине B треугольника ABC прямой. Шар касается плоскости основания ABC в точке B, а грани SAC – в точке S. Найти радиус шара.

17.326a [НГУ, МФ, 1995]**.** В пирамиде $ABCD$ ребра AC, BC, DC попарно перпендикулярны и равны 4. Точка N – середина ребра AB, а точка M расположена на ребре AD так, что $AM : MD = 3$. Шар с центром на прямой CN касается ребра AD в точке M. Найти радиус шара.

17.326b [НГУ, МФ, 1995]**.** В пирамиде $ABCD$ ребра DA, AB, BC попарно перпендикулярны и равны 3. Точка M расположена на ребре BD так, что $DM : MB = 1 : 2$. Шар с центром на прямой AC касается ребра BD в точке M. Найти радиус шара.

17.327a [НГУ, МФ, 1993]**.** Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$, $BC = 3$. Точка N лежит на луче AC, $AN = 6$. Шар радиуса 4 касается лучей BA и BC, а его центр равноудален от точек A и N. Найти расстояние от центра шара до точки A.

17.327b [НГУ, МФ, 1993]. Пусть ABC – прямоугольный треугольник с катетами $AB = 3$, $BC = 4$. Точка M расположена на луче BA так, что $BM = 8$. Найти радиус шара, который касается лучей CA и CB, если расстояния от центра шара до точки B и до точки M равны 10.

17.328a [НГУ, МФ, 1982]. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1. Точка M – середина ребра CD, точка N – середина ребра BC, точка P принадлежит ребру AB, причем $AP = 3BP$. Сфера касается плоскостей ABC и ACD, а точки ее касания с плоскостями лежат соответственно на прямых PN и AM. Найти радиус сферы.

17.328b [НГУ, МФ, 1982]. Параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AD = 1$, является основанием параллелепипеда. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны основанию и равны $\sqrt{3}$. Точка M выбрана на ребре CD так, что $DM = 2CM$. Сфера касается плоскостей $ABCD$ и AA_1D_1D, причем точки ее касания с плоскостями лежат соответственно на прямых BM и AD_1. Найти радиус сферы.

17.329 [НГУ, ест, 1987]. В пирамиде $ABCD$ ребро DC перпендикулярно плоскости основания ABC, $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 3$, $DC = \sqrt{13}$, $\angle ACB = 60^\circ$. Центр сферы радиуса 5 находится в вершине D. Найти длину линии пересечения сферы с основанием ABC.

17.330a [НГУ, ест, 1990]. В основании прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $4/\sqrt{3}$, высота призмы равна 3. Пусть K – точка пересечения диагоналей боковой грани $BB'C'C$. Сфера, центр которой принадлежит призме, касается граней ABC, $AA'B'B$, $AA'C'C$ и прямой $A'K$. Найти радиус сферы.

17.330b [НГУ, ест, 1990]. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ является квадрат $ABCD$ со стороной 1, боковые ребра AA', BB', CC', DD' имеют длину 4. Сфера, центр которой лежит внутри параллелепипеда, касается граней $ABCD$, $AA'B'B$, $AA'D'D$ и прямой $A'C$. Найти радиус сферы.

17.331a [НГУ, МФ, 1979]. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной длины 2. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания, длина SA равна 3. На продолжениях ребер AB и SB выбраны соответственно точки M и N так, что B лежит на отрезке AM и на отрезке SN. Шар касается плоскостей граней трехгранного угла с ребрами BC, BM, BN и плоскости SAC. Найти радиус шара.

17.331b [НГУ, МФ, 1979]. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $AD = \sqrt{6}$. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания, его длина равна 1. Шар, центр которого находится вне пирамиды, касается отрезков SB, SC и плоскостей SAD и $ABCD$. Найти радиус шара.

17.332a [СУНЦ НГУ, 2006]. В призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1; CC_1 основание ABC – равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{15}$. Сфера радиуса $\sqrt{6}$, центр которой лежит внутри призмы, проходит через вершины A, B, C, A_1, B_1 и середину ребра A_1C_1. Найти длину бокового ребра данной призмы.

17.332b [СУНЦ НГУ, 2006]. В призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1; CC_1 основание ABC – прямоугольный треугольник с катетами $AC = 3\sqrt{6}$; $BC = 3\sqrt{2}$. Сфера радиуса $\sqrt{22}$, центр которой лежит внутри призмы, проходит через вершины A, B, C, B_1, C_1 и середину ребра A_1B_1. Найти угол между боковым ребром и основанием призмы.

17.333 [Шар-11]. Дана треугольная пирамида $SABC$. Шар радиусом R касается плоскости ABC в точке C и ребра SA в точке S. Прямая BS вторично пересекает шар в точке, диаметрально противоположной точке C. Найдите объем пирамиды $SABC$, если $BC = a$, $SA = b$.

17.334 [МГУ, хим, 1985]. Основанием пирамиды служит ромб, длина стороны которого равна 2, а величина острого угла равна $\frac{\pi}{4}$. Шар, радиус которого равен $\sqrt{2}$, касается плоскости каждой боковой грани пирамиды в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Доказать, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания пирамиды. Найти объем пирамиды.

17.335a [НГУ, ест, 1978]. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC с стороной длины 1. Ребро SC пирамиды перпендикулярно плоскости основания, его длина равна 1. Центр сферы, касающейся ребер SA, AB и AC, лежит в плоскости SBC. Найти радиус сферы.

17.335b [НГУ, ест, 1978]. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC с стороной длины 1. Ребро SC пирамиды перпендикулярно плоскости основания, его длина равна 1. Определить радиус сферы, касающейся плоскости основания и боковых ребер SA, SB и SC.

17.336a [НГУ, ФФ, 1996]. Основания усеченной пирамиды параллельны между собой, являются правильными треугольниками, а их периметры относятся как 17:2. Сфера с центром, расположенным в плоскости большего основания, касается другого основания и всех остальных граней пирамиды. Найти углы, образованные боковыми ребрами пирамиды с большим основанием, если известно, что все эти углы одинаковы.

17.336b [НГУ, ФФ, 1996]**.** Основания усеченной пирамиды параллельны между собой и являются правильными треугольниками. Меньшее из оснований лежит в диаметральной плоскости сферы, касающейся другого основания и продолжений всех остальных граней пирамиды. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостями оснований один и тот же угол, равный 60°. Найти отношение периметров оснований.

17.337a [СУНЦ НГУ, 1993]**.** В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ – квадрат $ABCD$ со стороной a. Известно, что существует шар, касающийся граней трехгранного угла пирамиды с вершиной C, причем эти точки касания расположены в плоскости, проходящей через середину ребра SC и точку M на AC такую, что $3 \cdot AM = MC$. Найти объем пирамиды $SABCD$.

17.337b [СУНЦ НГУ, 1993]**.** В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ – квадрат $ABCD$ со стороной a. Известно, что существует шар, касающийся граней трехгранного угла пирамиды с вершиной A, причем эти точки касания расположены в плоскости, проходящей через середины ребер SB, SD и CD. Найти объем пирамиды $SABCD$.

17.338a [НГУ, СУНЦ, 2001]**.** В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{6}/2$, $BC = 2\sqrt{3}$. Все боковые ребра пирамиды равны между собой, а ее высота равна 3. Сфера касается граней $ABCD$, SBC, SCD, SAD пирамиды. Плоскость α, проходящая через прямую AB, но не содержащая точку C, касается той же сферы. В каком отношении плоскость α делит ребро SC?

17.338b [НГУ, СУНЦ, 2001]**.** В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 6$. Все боковые ребра пирамиды равны между собой, а ее высота равна 4. Сфера касается граней $ABCD$, SAB, SBC, SCD пирамиды. Плоскость α, проходящая через прямую AD и перпендикулярная грани SBC, касается той же сферы. Найти объем пирамиды $SABCD$.

17.339a [НГУ, МФ, 2002]**.** В сферу радиуса 3 вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок CD – диаметр этой сферы. Известно, что $AD = 2\sqrt{6}$. Найти объем призмы.

17.339b [НГУ, МФ, 2002]**.** В сферу вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок BD – диаметр этой сферы, точка M –середина ребра CC_1. Известно, что $BM = 2\sqrt{6}$, $DM = 4$. Найти объем призмы.

17.340a [НГУ, МФ, 1975]. В основании треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной a. Ребро AA' перпендикулярно ребру BC и образует угол в 60° с плоскостью основания. Призма такова, что в нее можно вписать шар. Найти объем призмы.

17.340b [НГУ, МФ, 1975]. В основании прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = a$, $AC = 2a$. Высота призмы равна $a/2$. Найти радиус шара, касающегося ребра $B'C'$ и граней $AA'B'B$, $AA'C'C$, ABC.

17.341 [НГУ, МФ, 1975]. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной a. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Известно, что плоскость, проведенная через вершину A параллельно BC и касающаяся вписанного шара, перпендикулярна грани SBC. Найти объем пирамиды.

17.342a [НГУ, МФ, 1998]. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота SH пирамиды равна $2\sqrt{2}$. Через вершину S проведена плоскость, которая касается вписанной в пирамиду $SABCD$ сферы и пересекает ребра BC и CD в точках M и N. Известно, что $MN = 5/6$. Определить: а) площадь треугольника SMN; б) объем пирамиды $SMNC$.

17.342b [НГУ, МФ, 1998]. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, высота SH пирамиды равна $\sqrt{22}/3$. Через вершину S проведена плоскость, которая касается вписанной в пирамиду $SABC$ сферы и пересекает ребра AB и AC в точках M и N. Известно, что площадь треугольника SMN равна $7/12$. Определить: а) длину отрезка MN; б) объем пирамиды $SAMN$.

17.343* [МГУ, ВМК, 2002]. Рассматриваются всевозможные параллелепипеды с четырьмя ребрами длины 4 и остальными ребрами длины 3, в которые можно вписать шар. Найдите максимальное значение радиуса такого шара.

17.344* [Шар-11]. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC со стороной a. Проекцией призмы на плоскость основания является трапеция с боковой стороной AB и площадью, в два раза большей площади основания. Радиус сферы, проходящей через вершины A, B, A_1, C_1, равен a. Найдите объем призмы.

17.10. Равенство касательных, отрезки на хордах и секущих

17.345 [Шар-11]**.** $ABCD$ – правильный тетраэдр с ребром 1. Найдите радиус шара, касающегося ребра AB в его середине, а также ребер AC и CD.

17.346 [Шар-11]**.** Точка K — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка L лежит на ребре BC. Отрезок KL касается шара, вписанного в куб. В каком отношении отрезок KL делится точкой касания?

17.347 [Шар-11]**.** $ABCD$ – правильный тетраэдр с ребром a. Пусть M — центр грани ADC, N – середина ребра BC. Найдите радиус шара, вписанного в трехгранный угол A и касающегося прямой MN.

17.348 [Яковлев]**.** В пирамиде $SABC$ ребро SC составляет с плоскостью основания угол $60°$. Вершины A, B, C и середины всех боковых ребер лежат на сфере радиуса r. Найти высоту пирамиды.

17.349 [Яковлев]**.** Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ имеет длину a. Сфера, вписанная в трехгранный угол с вершиной A, касается плоскости, проведенной через середины ребер AB, AD и BC. Найти радиус сферы.

17.350* [МГУ, МФ, 1993]**.** Точки P, Q; R и S расположены в пространстве так, что середины отрезков SQ и PR лежат на сфере с радиусом a, а отрезки PS, PQ, QR и SR делятся сферой на три части в отношении 1:2:1 каждый. Найдите расстояние от точки P до прямой QR.

17.351* [НГУ, МФ, 1977]**.** В основании треугольной призмы лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной a. Боковые ребра AA', BB', CC' перпендикулярны прямой BC и образуют углы $60°$ с плоскостью основания. Известно, что существует сфера, касающаяся всех боковых ребер и ребер $A'C'$, $A'B'$, BC. Найти объем призмы.

17.352a [НГУ, ФФ, 1988]**.** В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием $BC = 8$ и медианой $AM = 6$, точка P – середина медианы AM. Сфера касается боковых ребер AA_1, BB_1, CC_1 призмы и касается плоскости ABC в точке P. Найти радиус сферы.

17.352b [НГУ, ФФ, 1988]**.** В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 2, точка M – середина ребра BC. Сфера касается боковых ребер AA_1, BB_1, CC_1 призмы и касается плоскости ABC в точке M. Найти радиус сферы.

17.353 [Яковлев]**.** В правильной пирамиде $SABCD$ сторона основания имеет длину 8, боковое ребро – длину 9. Сфера касается плоскости основания пирамиды в точке A и касается прямой SB. Найти радиус этой сферы (все решения!).

17.354 [Яковлев]. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 4a$, $BC = BB_1 = a$. Сфера, вписанная в трехгранный угол с вершиной B, касается диагонали AC_1. Определить радиус сферы (все решения!).

17.355 [МГУ, геол, 2001]. Сфера с диаметром $AD = \sqrt{3}$ касается плоскости треугольника ABC в точке A. Отрезки BD и CD пересекают сферу в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка MN, если $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{5}$, а $\angle BDC = \pi/3$.

17.356 [Яковлев]. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. На диагоналях AC и B_1D_1 граней куба взяты соответственно точки E и F так, что вписанная в куб сфера делит отрезок EF на три части, отношение длин которых равно 3:7:2, считая от точки E. Найти длину отрезка EF.

17.357 [МГУ, псих, 1994]. Длины боковых ребер SA и SB четырехугольной пирамиды $SABCD$ относятся как $\sqrt{7} : \sqrt{11}$. Через точки A, B, D проведена сфера, пересекающая ребра SA, SB, SD в точках A_1, B_1, D_1 соответственно, причем $AA_1 : A_1S = 1 : 3$. Через точки B, C, D, D_1 проведена еще одна сфера, пересекающая боковое ребро SB в точке E. Найдите отношение $SE : B_1B$.

17.358a* [МГУ, МФ, 1979]. Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC, в котором $\angle A = \pi/2$, $\angle C = \pi/6$, $BC = 2\sqrt{2}$. Длины ребер AD, BD, CD равны между собой. Сфера радиуса 1 касается ребер AD, BD, продолжения ребра CD за точку D и плоскости ABC. Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки A к сфере.

17.358b* [МГУ, МФ, 1979]. Основанием пирамиды является $PQRS$ является прямоугольный треугольник PQR, в котором гипотенуза QR равна 2 и катет PQ равен 1. Длины ребер PS, QS, RS равны между собой. Сфера радиуса $\sqrt{2}/2$ касается ребра RS, продолжений ребер PS, QS за точку S и плоскости PQR. Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки Q к сфере.

17.359* [МГУ, геогр, 1999]. В пространстве заданы три луча DA, DB и DC, имеющие общее начало D, так, что $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90°$. Сфера пересекает луч DA в точках A_1 и A_2, луч DB в точках B_1 и B_2, луч DC в точках C_1 и C_2. Найдите площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площади треугольников DA_1B_1, DA_1C_1, DB_1C_1 и DA_2B_2 равны соответственно $15/2$, 10, 6 и 40.

17.11. Взаимодействие сфер с прямыми и плоскостями

17.360a [МГУ, геол, 1980]. На сфере радиуса 11 расположены точки A, A_1, B, B_1, C, C_1. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M, отстоящей от центра сферы на расстоянии $\sqrt{59}$. Найти длину отрезка AA_1, если известно, что длина отрезка BB_1 равна 18, а точка M делит отрезок CC_1 в отношении $(8+\sqrt{2}):(8-\sqrt{2})$.

17.360b [МГУ, геол, 1980]**.** Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, концы которых лежат на сфере радиуса 10, попарно перпендикулярны и пересекаются в точке M. Длина отрезка AA_1 равна 12, длина отрезка BB_1 равна 18. Найти расстояние от центра сферы до точки M, если известно, что $CM : MC_1 = 11/3$.

17.361 [Шар-11]**.** Два равных треугольника KLM и KLN имеют общую сторону KL, $\angle KLM = \angle LKN = \dfrac{\pi}{3}$, $KL = a$, $LM = KN = 6a$. Плоскости KLM и KLN взаимно перпендикулярны. Шар касается отрезков LM и KN в их серединах. Найдите радиус шара.

17.362 [Яковлев]**.** Точки A и B лежат в разных гранях прямого двугранного угла, точка A удалена от ребра этого угла на расстояние $3a$, точка B – на расстояние $4a$. Найти наименьший радиус сферы, касающейся граней угла и прямой AB.

17.363a [НГУ,МФ, 1992]**.** В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с основанием ABC длины всех ребер равны 1. Точки M и N – середины ребер $A'C'$ и CC' соответственно. Найти минимально возможный радиус шара, касающегося плоскостей граней $AA'B'B$, ABC и прямой MN.

17.363b [НГУ,МФ, 1992]**.** Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром длины 1. Прямая l лежит в плоскости ACD и проходит через точку C перпендикулярно AC. Найти минимально возможный радиус шара, касающегося плоскостей граней двугранного угла при ребре AB и прямой l.

17.364 [НГУ, ест, 1975]**.** Через вершину A треугольника ABC проведена прямая m, перпендикулярная плоскости этого треугольника. Шар радиуса r касается всех сторон треугольника и прямой m. Найти расстояние от точки A до центра шара, если известно, что $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$.

17.365 [НГУ, ест, 1976]**.** Шар радиуса R касается всех граней трехгранного угла, плоские углы при вершине которого равны 60°, 60° и 90°. Найти расстояние от вершины угла до центра шара.

17.366a [СУНЦ НГУ, 2000]**.** Пусть $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма с основанием ABC, боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, причем все ребра призмы равны 2. Пусть точка M – середина ребра CC_1. Найти минимально возможный радиус сферы, касающейся прямых A_1C и BM.

17.366b [СУНЦ НГУ, 2000]**.** Пусть $SABCD$ – правильная пирамида, в основании которой квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота пирамиды равна 5. Пусть точка M – середина ребра SC. Найти минимально возможный радиус сферы, касающейся прямых SA и BM.

17.367 [Яковлев]**.** В прямой двугранный угол вписана сфера радиуса r. Прямая касается сферы в точке K и пересекает грани угла в точках A и B так, что $AK : KB = 3 : 2$. Каждая из точек A и B удалена от ребра двугранного угла на расстояние $3r$. Найти длину отрезка AB.

17.368 [Шар-11]**.** Два одинаковых шара касаются между собой и граней двугранного угла величины α. Пусть A – точка касания одного из шаров с гранью двугранного угла, B – точка касания другого шара с другой гранью. В каком отношении отрезок AB делится точками пересечения с поверхностями этих шаров?

17.369a [СУНЦ НГУ, 2003]**.** В плоскости α лежит квадрат $ABCD$ со стороной 10. Два шара радиусов 4 и 7, центры которых лежат по одну сторону от плоскости α, касаются плоскости α в точках A и B соответственно. Плоскость β, отличная от α, проходит через точку D и касается обоих шаров. Найти угол между плоскостями α и β.

17.369b [СУНЦ НГУ, 2003]**.** В плоскости α лежит квадрат $ABCD$ со стороной 15. Два шара радиусов 3 и 1, центры которых лежат по разные стороны от плоскости α, касаются плоскости α в точках A и B соответственно. Плоскость β, отличная от α, проходит через точку D и касается обоих шаров так, что их центры лежат по разные стороны от β. Найти угол между плоскостями α и β.

В следующих задачах надо провести плоскость через линию центров параллельно касательной

17.370 [Шар-11]**.** На прямой l расположены центры шаров радиусами 1, 2, 5, причем шар радиуса 2 касается двух других внешним образом. Прямая p касается всех трех шаров. Найдите угол и расстояние между прямыми l и p.

17.371 [Шар-11]**.** Два шара радиусами 1 и 3 касаются друг друга внешним образом. Через точку M, расположенную на расстоянии 3 от центра меньшего шара, проведены две прямые, касающиеся обоих шаров. Найдите угол между касательными, если известно, что одна из них образует угол 45° с прямой, проходящей через центры шаров.

17.372a [НГУ, МФ, 2003]**.** Даны две сферы радиусов 1 и 5 с центрами A и B. Прямая касается этих сфер в точках C и D. Известно, что $AB = 4\sqrt{3}$, $CD = 4$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

17.372b [НГУ, МФ, 2003]**.** Даны две сферы радиусов 2 и 5 с центрами A и B. Прямая касается этих сфер в точках C и D. Известно, что $CD = 6$, а угол между прямыми AB и CD равен $\arccos\frac{6}{7}$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

17.12. Комбинации сфер

17.373 [Шар-11]**.** Три шара касаются плоскости данного треугольника в вершинах треугольника и касаются между собой. Найдите радиусы этих шаров, если стороны треугольника равны a, b и c.

17.374 [Шар-11]**.** Два шара одного радиуса и два другого расположены так, что каждый шар касается трех других и данной плоскости. Найти отношение радиуса большего шара к радиусу меньшего.

17.375 [Шар-11]**.** Два шара касаются плоскости P в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами шаров равно 10. Третий шар касается двух данных шаров, а его центр O лежит в плоскости P. Известно, что $AO = OB = 2\sqrt{10}$, $AB = 8$. Найти радиус третьего шара.

17.376 [ЦыпПин]**.** В куб с ребром a вписан шар. Определить радиус другого шара, касающегося трех граней куба и первого шара.

17.377 [ЦыпПин]**.** Три шара радиуса r касаются нижнего основания правильной треугольной призмы, причем каждый шар касается двух других шаров и двух боковых граней призмы. Четвертый шар касается каждого из этих трех шаров, всех боковых граней призмы и ее верхнего основания. Найти высоту призмы.

17.378 [ЦыпПин]**.** Внутри правильного тетраэдра с ребром a расположены четыре равные сферы так, что каждая касается трех других сфер и трех граней тетраэдра. Найти радиусы этих сфер.

17.379 [ЦыпПин]**.** В двугранный угол 60° вписан шар радиуса R. Найти радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры обоих шаров, образует с ребром двугранного угла угол 45°.

17.380 [Шар-11]**.** Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположены два шара радиусами $2R$ и $3R$, касающиеся друг друга внешним образом, причем один шар вписан в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A, а другой – в трехгранный угол с вершиной в точке B. Найдите длину ребра этого тетраэдра.

17.381a [СУНЦ НГУ, 1998]**.** В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ сторона основания ABC равна $7\sqrt{3}$, высота призмы равна 7. Два шара касаются друг друга, один из них касается всех граней призмы с общей вершиной A, а другой – всех граней с общей вершиной B'. Известно, что радиус первого шара в 4 раза больше радиуса второго. Определить радиусы шаров.

17.381b [СУНЦ НГУ, 1998]**.** В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ сторона основания ABC равна $5\sqrt{3}$, высота призмы равна 7. Два шара касаются друг друга, один из них касается всех граней призмы с общей вершиной B, а другой – всех граней с общей вершиной C'. Известно, что радиус первого шара на 2 меньше радиуса второго. Определить радиусы шаров.

17.382 [Яковлев]**.** Сферы S_1 и S_2 радиуса $2r$ и сферы S_3 и S_4 радиуса r расположены так, что каждая из сфер касается трех других. Сферы S_1 и S_3 касаются в точке A, сферы S_2 и S_4 – в точке B. В каком отношении сферы S_3 и S_4 разделяют отрезок AB?

17.383a [НГУ, ест, 1981]**.** Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1. Шар радиуса $\sqrt{6}/4$ касается граней трехгранного угла с вершиной A, другой шар радиуса $\sqrt{6}/12$ касается граней трехгранного угла с вершиной B, ребрами которого являются продолжения отрезков AB, CB, DB за вершину B. Определить расстояние между центрами шаров.

17.383b [НГУ, ест, 1981]**.** В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 1, боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания угол в $60°$. Шар радиуса $\sqrt{3}/12$ касается граней трехгранного угла с вершиной A, другой шар радиуса $\sqrt{3}/4$ касается граней трехгранного угла с вершиной B. Определить расстояние между центрами шаров.

17.384a [НГУ, ест, 1984]**.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, с ребром 1. Две сферы одинакового радиуса касаются друг друга, причем центр первой сферы совпадает с вершиной D, а центр второй сферы расположен внутри куба и она касается ребер трехгранного угла с вершиной A_1. Определить радиус сфер.

17.384b [НГУ, ест, 1984]**.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, с ребром 1. На ребре AD как на диаметре построена сфера. Вторая сфера, лежащая внутри куба, касается первой сферы и граней трехгранного угла с вершиной A_1. Определить радиус второй сферы.

17.385 [МФТИ, 2001]**.** Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом и каждый касается внутренним образом сферы радиуса R. При каком соотношении между r и R это возможно? Найдите радиус наименьшего из шаров, касающихся трех шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом.

17.386 [МГУ, экон, 2001]**.** Центры двенадцати шаров равных радиусов совпадают с серединами ребер правильной шестиугольной пирамиды. Найдите величину двугранного угла при ребре основания пирамиды, если известно, что шар, вписанный в пирамиду, касается всех двенадцати шаров.

17.387 [МГУ, МФ, 1999]**.** Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найдите расстояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

17.388 [МГУ, МФ, 2002]. Три сферы, радиусы которых соответственно равны $\sqrt{6}$, 1 и 1, попарно касаются друг друга. Через прямую, содержащую центры A и B второй и третьей сфер, проведена плоскость γ так, что центр O первой сферы удален от этой плоскости на расстояние 1. Найдите угол между проекциями прямых OA и OB на плоскость γ и сравните его с $\arccos(4/5)$.

17.389 [МГУ, ВМК, 1972]. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом $45°$. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

17.390a [НГУ, МФ, 2004]. Три шара лежат на плоском столе, касаясь его в вершинах прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 72$ и $AC = 48$. Радиусы первых двух шаров, касающихся стола в точках A и B, равны соответственно 32 и 8. На отрезке AB существует такая точка D, что если третий шар покатится от точки C по прямой CD, то он пройдет между первым и вторым шарами и коснется каждого из них. Найти радиус третьего шара.

17.390b [НГУ, МФ, 2004]. Три шара радиусов 45, 20 и 9 лежат на плоском столе, касаясь его соответственно в вершинах A, B и C прямоугольного треугольника ABC с катетом $AC = 90$ и гипотенузой BC. На отрезке AB существует такая точка D, что если третий шар прокатится от точки C по прямой CD, то он пройдет между первым и вторым шарами и коснется каждого из них. Найти длину катета AB.

17.13. Задачи в сфере

17.391 [Шар-11]. Отрезок AB единичной длины, являющийся хордой сферы радиуса 1, расположен под углом $\frac{\pi}{3}$ к диаметру CD этой сферы. Расстояние от конца C диаметра до ближайшего к нему конца A хорды AB равно $\sqrt{2}$. Определите величину отрезка BD.

17.392 [Шар-11]. Две вершины тетраэдра расположены на поверхности сферы радиуса $\sqrt{10}$, две другие вершины – на поверхности сферы радиуса 2, концентрической с первой. Какой наибольший объем таких тетраэдров?

17.393 [Шар-11]. Каков наибольший объем тетраэдра $ABCD$, все вершины которого лежат на поверхности сферы радиуса 1, а ребра AB, BC, CD и DA видны из центра сферы под углом $60°$?

17.394 [Яковлев]. На сфере радиуса r расположены три окружности радиуса $r/2$ так, что каждая из них имеет с каждой из двух других по одной общей точке. Найти радиус окружности, лежащей на этой сфере и имеющей из трех данных окружностей по одной общей точке.

17.395 [МГУ, МФ, 1997]**.** В шаре радиусом 7 через точку S проведены три равные хорды AA', BB', CC' так, что $AS = 8$, $A'S = 3$, $BS > B'S$, $CS > C'S$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

17.396 [МГУ, МФ, 1997]**.** Вокруг пирамиды $ABCD$ описана сфера. Вторая сфера радиуса 1 касается первой внутренним образом в точке D, а также касается плоскости ABC. Известно, что $AD = 3$, $\cos\angle BAC = 4/5$, $\cos\angle BAD = \cos\angle CAD = 1/\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды $ABCD$.

17.397* [МГУ, МФ, 1985]**.** На плоскости α, проходящей через центр шара радиуса R, задана окружность с центром O_1 и радиусом r_1, расположенная внутри шара. Все точки этой окружности соединены прямыми с точкой A, принадлежащей шару и удаленной от плоскости α на расстояние R. Множество отличных от A точек пересечения этих прямых с поверхностью шара является окружностью радиуса r_2, плоскость которой образует угол φ с плоскостью α. Найти расстояние между точками A и O_1.

17.14. Цилиндры и конусы с многогранниками

17.398 [Шар-11]**.** Радиус основания цилиндра равен 1, а высота равна $\sqrt{2}$. Две вершины правильного треугольника расположены на границе одного основания цилиндра, а одна вершина – на границе другого основания. Найдите сторону правильного треугольника.

17.399 [Шар-11]**.** В основании треугольной пирамиды лежит треугольник, одна сторона которого равна 1.04, все боковые ребра равны 2. Около пирамиды описан конус так, что вершины основания лежат на окружности основания конуса, а вершина конуса совпадает с вершиной пирамиды. Найдите угол в осевом сечении конуса, если площадь осевого сечения конуса равна 1.

17.400 [Шар-11]**.** Высота конуса равна диаметру его основания. В конус вписан куб, четыре вершины которого расположены на основании конуса, а другие четыре – на его боковой поверхности. Найдите отношение объемов куба и конуса.

17.401 [Шар-11]**.** В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB = AC = 2$, $\angle BAC = 30°$. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC. Известно, что существует конус, вершина которого совпадает с точкой A, а основание вписано в треугольник SBC. Найдите объем пирамиды.

17.402 [ЦыпПин]**.** Образующая конуса равна l и образует с высотой конуса угол α. Через две образующие конуса, угол между которыми равен β, проведена плоскость. Найти расстояние от этой плоскости до центра шара, вписанного в конус.

17.403 [Шар-11]**.** Две противоположные вершины куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные лежат на боковой поверхности цилиндра. Найдите отношение объемов цилиндра и куба.

17.404' [Шар-11]**.** Основанием пирамиды $ABCD$ является правильный треугольник ABC со стороной 12. Ребро BD перпендикулярно плоскости основания и равно $10\sqrt{3}$. Все вершины этой пирамиды лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого пересекает ребро BD и плоскость ABC. Определите радиус цилиндра.

17.405 [Шар-11]**.** Внутри конуса расположен куб так, что одно ребро куба лежит на диаметре основания конуса, а вершины, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности конуса, центр куба лежит на высоте конуса. Найдите отношение объема конуса к объему куба.

17.406 [Яковлев]**.** Грани двугранного угла, имеющего величину α, касаются боковой поверхности конуса. Угол между ребром двугранного угла и осью конуса равен β. Найти угол раствора конуса.

17.407a' [Яковлев]**.** В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах BC и CD прямые. Длина одного из ребер тетраэдра в три раза больше длины не пересекающегося с ним ребра. Вершина конуса совпадает с одной из вершин тетраэдра, окружность основания конуса описана около одной из граней. Найти угол в осевом сечении конуса.

17.407b' [Яковлев]**.** В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AB и BD прямые, $\angle ACD = \alpha$. Вершина конуса совпадает с одной из вершин тетраэдра, окружность основания конуса вписана в одну из граней. Найти угол в осевом сечении конуса.

17.408 [Яковлев]**.** Все вершины правильной пирамиды $SABCD$ лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости SAB. Найти радиус цилиндра, если $|AB| = a$.

17.409 [Яковлев]**.** В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания имеет длину a, боковое ребро – длину $\frac{5}{2}a$. Одно основание цилиндра лежит в плоскости SAB, другое – вписано в сечение пирамиды. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

17.410 [НГУ, МФ, 1978]**.** Дан прямой круговой конус высоты H с углом 30° между осью и образующей. Правильный тетраэдр $ABCD$ помещен в конус так, что его ребро AB параллельно оси конуса, вершина A лежит на основании, а остальные вершины – на боковой поверхности конуса. Найти длину ребра тетраэдра.

17.411 [Яковлев]**.** В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина каждого ребра равна a. Вершины A и A_1 лежат на боковой поверхности цилиндра, плоскость BB_1C_1C касается этой поверхности. Ось цилиндра параллельна прямой B_1C. Найти радиус цилиндра.

17.412 [Яковлев]**.** Прямая касается боковой поверхности цилиндра, если она лежит в касательной плоскости и имеет с поверхностью цилиндра одну общую точку. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. Цилиндр, ось которого параллельна прямой BD_1, расположен так, что прямые AA_1, BC и C_1D_1 касаются его боковой поверхности. Найти радиус цилиндра (все решения!).

17.413a [Яковлев]**.** Точки $A(1;2;-2)$, $B(4;2;-2)$, $C(3;4;-2)$ лежат на окружности основания конуса, высота которого равна 3. Найти координаты вершины конуса и площадь сечения конуса плоскостью $z=0$.

17.413b [Яковлев]**.** Точки $A(1;2;-1)$, $B(-2;2;-1)$, $C(-2;2;3)$ лежат на окружности основания конуса, точка $M\ (0;6;5/3)$ на его боковой поверхности. Найти площадь полной поверхности конуса.

17.414 [Яковлев]**.** Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a, точки M и N – середины ребер AA_1 и A_1B_1 соответственно. Плоскость D_1MN касается боковой поверхности конуса, осью которого служит прямая CC_1, а центром основания – точка C. Найти объем этого конуса.

17.415 [Яковлев]**.** Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – прямоугольный треугольник с катетами $AB=8$, $BC=6$. Гипотенуза AC является диаметром основания конуса, вершина которого лежит на ребре A_1B_1. Ребро AB пересекает боковую поверхность конуса в точке M так, что $|AM|=5$. Определить объем конуса.

17.416 [Яковлев]**.** Радиус меньшего основания усеченного конуса равен $3r$, радиус большего основания – $7r$. Вершины S и A правильной пирамиды $SABC$ лежат на окружности меньшего основания конуса, вершины B и C основания ABC пирамиды лежат на окружности большего основания конуса. Найти объем пирамиды $SABC$.

17.417 [Яковлев]**.** Основание конуса лежит в плоскости грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а вершина S конуса лежит на луче OO_1, где O и O_1 – центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно. Диагональ AB_1 касается боковой поверхности конуса. В каком отношении точка касания делит отрезок AB_1, если $|SO|=2|OO_1|$?

17.418a [МФТИ, 1991]**.** Конус расположен внутри треугольной пирамиды $SABC$ так, что плоскость его основания совпадает с плоскостью одной из граней пирамиды, а три другие грани касаются его боковой поверхности. Найти объем пирамиды, если длина образующей конуса равна 1, $\angle ABS=\pi/2$, $\angle BSC=\pi/12$, $\angle SCB=\pi/4$.

17.418b [МФТИ, 1991]**.** Конус расположен внутри треугольной пирамиды $SABC$ так, что плоскость его основания совпадает с плоскостью одной из граней пирамиды, а три другие грани касаются его боковой поверхности. Найти объем пирамиды, если длина образующей конуса равна 1, $\angle BAC = \pi/2$, $\angle SBA = \pi/6$, $\angle ASB = \pi/4$.

17.419a [МФТИ, 1991]**.** В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основанием является трапеция $ABCD$ $BC \parallel AD$, $BC = \frac{4}{5}AD$, $\angle ASD = \angle CDS = \pi/2$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований цилиндра, высота которого равна 2, а радиус основания равен 5/3. Найти объем пирамиды.

17.419b [МФТИ, 1991]**.** В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основанием является параллелограмм $ABCD$, $\angle BSC = \angle ASB = \pi/2$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований усеченного конуса, высота которого равна 4/3, а радиусы оснований равны 1/2 и 5/6. Найти объем пирамиды.

17.420 [МГУ, ВМК, 1970]**.** В прямом круговом конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α, а угол между их проекциями на плоскость основания равен β. Вычислить угол между биссектрисами углов OSA и OSB, где точка O является центром круга, служащего основанием конуса.

17.421 [МГУ, хим, 1982]**.** Конус лежит на горизонтальной поверхности П, касаясь ее боковой поверхностью. Площадь основания конуса равна S_1, а площадь его боковой поверхности равна S_2. На какой высоте над плоскостью П находится наивысшая точка конуса ?

17.422 [МГУ, геол, 1983]**.** Конус с образующей длины 3 вращается вокруг оси – прямой, перпендикулярной высоте и проходящей через вершину. Площадь сечения полученного тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения, равна 6π. Найти угол наклона образующей конуса к его основанию.

17.15. Комбинации с конусами и цилиндрами

17.423 [ЦыпПин]**.** Определить угол при вершине в осевом сечении конуса, описанного около четырех равных шаров, расположенных так, что каждый касается трех других.

17.424a [Шар-11]**.** Три равных конуса имеют общую вершину, касаются одной плоскости и касаются между собой. Найти угол в осевом сечении каждого из конусов.

17.424b [Шар-11]**.** n равных конусов имеют общую вершину. Каждый касается двух других по образующей, и все они касаются одной плоскости. Найти угол в осевом сечении каждого из конусов.

17.425 [ЦыпПин]**.** На основании конуса лежат три шара радиуса r. На них лежит четвертый шар того же радиуса. Каждый из этих четырех шаров касается боковой поверхности конуса и трех других шаров. Найти высоту конуса.

17.426 [МГУ, ФФ, 1993]**.** На плоскости лежат два шара с радиусами r и цилиндр с радиусом R $(R > r)$. Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найдите радиус шара, большего, чем данные, касающегося обоих шаров, цилиндра и плоскости.

17.427 [Шар-11]**.** Осевое сечение конуса является правильным треугольником. Через ось конуса проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Рассмотрим два шара, каждый из которых касается этих двух плоскостей, плоскости основания конуса и его боковой поверхности, только один касается ее изнутри, а другой – снаружи. Найдите отношение радиусов этих шаров.

17.428 [ЦыпПин]**.** В конус вписан шар радиуса r. Найти объем конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстояние d.

17.429 [ЦыпПин]**.** В усеченный конус, у которого радиусы нижнего и верхнего оснований равны R и r, вписан шар. Найти радиус второго шара, который касается первого шара, боковой поверхности усеченного конуса и верхнего основания.

17.430 [ЦыпПин]**.** Цилиндр описан около шара радиуса R. Точка C расположена на его оси и удалена на $3R/4$ от нижнего основания. Через эту точку проведена плоскость P, имеющая с окружностью нижнего основания только одну общую точку. В шар вписан конус, основание которого лежит в плоскости P, а вершина расположена выше этой плоскости. Найти объем этого конуса.

17.431 [ЦыпПин]**.** Конус имеет радиус основания r и угол α в осевом сечении. Два одинаковых шара радиуса R касаются друг друга, боковой поверхности конуса (извне) и плоскости основания конуса. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат центры шаров и центр основания конуса.

17.432 [ЦыпПин]**.** В цилиндр с радиусом основания $r = 1$ и высотой $H = 12/(3+2\sqrt{3}\,)$ вписаны три одинаковых шара так, что шары касаются верхнего основания цилиндра, его боковой поверхности и попарно — друг друга. Найти объем конуса, основание которого совпадает с нижним основанием цилиндра и который касается всех трех шаров.

17.433 [Яковлев]**.** Высота цилиндра равна $3r$. Внутри цилиндра расположены три сферы радиуса r так, что каждая сфера касается двух других и боковой поверхности цилиндра (т.е. имеет с этой поверхностью одну общую точку] Две сферы касаются нижнего основания цилиндра, а третья сфера – верхнего основания. Найти радиус цилиндра.

17.434 [демо ЕГЭ, 2004]**.** Сфера радиуса 2 касается плоскости в точке А. В этой же плоскости лежит основание конуса. Прямая, проходящая через центр основания конуса (точку С) и точку сферы, диаметрально противоположную точке А, проходит через точку М. Точка М является точкой касания сферы и конуса (их единственная общая точка] Найдите высоту конуса, если АС $= 1$.

17.435 [МГУ, хим, 1971]**.** Три одинаковых конуса, радиусы основания которых равны r и составляют $3/4$ их высоты, расположены по одну сторону от плоскости P, а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждых двух из этих конусов касаются. Найти радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости P, так и всех трех конусов.

17.436 [Шар-11]**.** Три шара касаются попарно между собой, касаются плоскости основания конуса и боковой поверхности конуса. Центры шаров находятся вне конуса. Найдите угол в осевом сечении конуса, если известно, что точка касания каждого шара с поверхностью конуса делит соответствующую образующую пополам.

17.437a* [МГУ, ФФ, 1980]**.** Даны два одинаковых конуса с общей вершиной K, у каждого из них высота равна h, а радиус основания R. Эти конусы расположены по разные стороны от плоскости α так, что только по одной образующей каждого конуса (KM для одного конуса и KL для другого) принадлежит плоскости α. Известно, что $\angle MKL = \beta$. Найти величину угла между образующей KM и плоскостью основания другого конуса.

17.437b* [МГУ, ФФ, 1980]**.** Даны два одинаковых пересекающихся конуса с общей вершиной B, у каждого из них величина угла между высотой и образующей равна β. Эти конусы расположены по одну сторону от плоскости α так, что только по одной образующей каждого конуса (BC для одного конуса и BD для другого) принадлежит плоскости α. Известно, что величина угла между высотами конусов равна β. Найти величину угла между линией пересечения плоскостей оснований конусов и плоскостью α.

17.438* [МГУ, ФФ, 1965]**.** Два равных конуса имеют общую вершину и касаются по общей образующей. Угол осевого сечения каждого из конусов равен 2α. Найти двугранный угол между двумя плоскостями, каждая из которых касается обоих конусов, но не проходит через их общую образующую.

17.439 [МГУ, ФФ, 1970]**.** Три конуса имеют общую вершину и каждый из них касается внешним образом двух других. Вычислить углы между линиями касания боковых поверхностей этих конусов, если у первого конуса угол между осью и образующей равен α, у второго — β, у третьего — γ.

17.440* [МГУ, ФФ, 1970]**.** Два конуса имеют общую вершину. Угол между осью и образующей первого конуса равен α, а его образующая является осью второго конуса, у которого угол между осью и образующей равен β, причем $\beta < \alpha$. Вычислить угол между двумя лучами, по которым пересекаются боковые поверхности этих конусов.

17.441* [МГУ, МФ, 1961]**.** На плоскости стоят конус и вертикальный штатив (отрезок] Радиус основания конуса равен 1, высота конуса 2. Основание штатива отстоит от центра основания конуса на 2, высота штатива 4. На вершине штатива помещен точечный источник света. Найти площадь тени, отбрасываемой на плоскость конусом (не считая площади его основания).

17.442* [Шар-11]**.** n равных шаров радиуса R касаются боковой поверхности изнутри и плоскости основания конуса, причем каждый шар касается двух соседних; n шаров радиуса $2R$ расположены аналогичным образом, касаясь боковой поверхности с внешней стороны. Найдите радиус шара, вписанного в конус.

17.443 [Шар-11]**.** Конус и цилиндр имеют равные основания и равные высоты. Их основания принадлежат одной плоскости и касаются друг друга. Два равных шара, радиус каждого из которых равен радиусу основания конуса (и цилиндра), касаются между собой, боковых поверхностей конуса и цилиндра и плоскости, содержащей другое основание цилиндра и вершину конуса. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

17.444 [МГУ, МФ, 1976]**.** Три шара, среди которых имеются два одинаковых, касаются плоскости P и, кроме того, попарно касаются друг друга. Вершина прямого кругового конуса принадлежит плоскости P, а ось конуса перпендикулярна этой плоскости. Все три шара лежат вне конуса, причем каждый из них касается некоторой образующей конуса. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью P, если известно, что в треугольнике с вершинами в точках касания шаров с плоскостью один из углов равен 150°.

17.445 [МГУ, экон, 1971]**.** На плоскости лежит шар радиуса R. Эту же плоскость пересекает прямой круговой цилиндр радиуса r, причем образующие цилиндра перпендикулярны к плоскости. Центр шара удален от оси цилиндра на расстояние ρ $(\rho > R + r]$ Найти минимально возможный радиус шара, который бы касался одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.

17.16. Поверхности и объемы круглых тел

17.446. Найти объем тела, полученного при вращении единичного куба вокруг его диагонали.

17.447 [Шар-11]**.** Найдите объем общей части n одинаковых цилиндров радиуса r , оси которых расположены в одной плоскости и проходят через одну точку, причем угол между двумя соседними осями равен $\frac{\pi}{n}$.

17.448 [Шар-11]**.** Найдите объем тела, полученного при вращении правильного треугольника со стороной a вокруг прямой, параллельной плоскости треугольника и такой, что ее проекция на плоскость содержит какую-либо высоту треугольника.

17.449 [Яковлев]**.** Сфера касается всех ребер куба. Найти объем части куба, лежащей внутри сферы, если ребро куба равно a.

17.450 [Яковлев]**.** Сфера касается всех боковых ребер правильной четырехугольной призмы и ее оснований. Найти отношение площади части сферы, лежащей вне призмы, к площади полной поверхности призмы.

17.451 [Яковлев]**.** Ребро правильного тетраэдра имеет длину a. Высота тетраэдра является диаметром сферы. Какова площадь части поверхности тетраэдра, лежащей внутри сферы?

17.452 [Яковлев]**.** В правильной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC имеет длину a, боковое ребро – длину $2a/3$. Сфера касается всех ребер этой пирамиды. Найти площадь части сферы, лежащей вне пирамиды.

17.453 [Яковлев]**.** Треугольник ABC площади S расположен в одной плоскости с прямой l. Точка пересечения медиан треугольника удалена от l на расстояние d. Доказать, что объем фигуры, полученной вращением треугольника вокруг прямой l, равен $2\pi dS$.

17.454 [Шар-11]**.** Докажите, что плоскость, пересекающая боковую поверхность цилиндра, но не пересекающая его оснований, делит ось цилиндра, боковую поверхность и объем в одинаковом отношении.

17.455 [Шар-11]**.** Определите полную поверхность призмы, описанной вокруг шара, если площадь ее основания равна S.

17.456 [Шар-11]**.** Найдите объем тела, получающегося при вращении прямоугольного треугольника с катетами a и b вокруг его гипотенузы.

17.457 [Шар-11]**.** Найдите объем тела, получающегося при вращении прямоугольника со сторонами 1 и 2 вокруг его диагонали.

17.458 [Шар-11]**.** ABC – правильный треугольник со стороной 3; M и K – точки на BA и CA такие, что $BM = CK = 1$. Найдите объем тела, полученного при вращении треугольника ABC вокруг прямой MK.

17.459 [Шар-11]**.** Докажите, что отношение объемов сферы и описанного около нее усеченного конуса равно отношению их полных поверхностей.

17.460 [Шар-11]**.** Сфера проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани куба. Найдите отношение объемов шара и куба.

17.461 [Шар-11]**.** Какое наименьшее значение может принимать отношение объема конуса к объему цилиндра, описанных вокруг одного и того же шара?

17.462 [Шар-11]**.** Основания цилиндра и конуса расположены в одной плоскости, а шар касается этой же плоскости, причем высота цилиндра равна высоте конуса и равна диаметру шара. Объемы всех трех тел равны между собой. Как относятся их полные поверхности?

17.463 [Шар-11]**.** Осевым сечением цилиндра является квадрат, а осевым сечением конуса – правильный треугольник, равновеликий квадрату. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.

17.464 [Шар-11]**.** Из круга вырезан сектор с центральным углом $90°$. Из двух получившихся частей склеены два конуса (боковые поверхности] Найдите отношение объемов этих конусов.

17.465 [Шар-11]**.** Полная поверхность треугольной пирамиды в 5 раз больше поверхности вписанного в нее шара. Найти отношение объема пирамиды к объему шара.

17.466' [Шар-11]**.** На поверхности сферы радиуса 2 расположены три попарно касающиеся друг друга окружности радиуса $\sqrt{2}$. Часть поверхности сферы, расположенная вне окружностей, представляет собой два криволинейных треугольника. Найдите площади этих треугольников.

17.467' [Шар-11]**.** Центр сферы α лежит на поверхности сферы β. Отношение поверхности сферы β, лежащей внутри сферы α, ко всей поверхности сферы α равно $\frac{1}{5}$. Найдите отношение радиусов сфер α и β.

17.468' [МГУ, ФФ, 1965]**.** Правильная пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной a, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину пирамиды параллельно одной из сторон основания. Вычислить объем тела вращения, если плоский угол при вершине равен α.

17.469' [Яковлев]**.** Угол между смежными боковыми гранями правильной треугольной пирамиды равен $\frac{3\pi}{4}$. Сфера с центром в вершине пирамиды касается основания пирамиды. Какая часть сферы находится внутри пирамиды?

17.470 [Яковлев]**.** Две сферы с центрами O_1 и O_2 пересечены плоскостью, перпендикулярной отрезку O_1O_2 и проходящей через его середину. Эта плоскость делит первую сферу на части, отношение площадей которых равно $m : 1$, а вторую сферу – на части, отношение площадей которых равно $n : 1$ $(m > 1,\ n > 1]$ Найти отношение радиусов этих сфер.

17.471 [Яковлев]**.** В конус вписана сфера. Плоскость, проходящая через вершину конуса, делит его боковую поверхность на части, отношение площадей которых равно 1:2. Сферу эта плоскость делит на части, отношение площадей которых равно 1:5. Найти угол раствора конуса.

17.472 [МГУ, псих, 1972]**.** Известно, что AB, AC, AD, DE, DF – ребра куба. Через вершины E, F и середины ребер AB и AC проведена плоскость P. Какую часть объема шара, вписанного в куб, составляет объем меньшей из двух частей, на которые этот шар делится плоскостью P.

17.473 [МГУ, ФФ, 1985]**.** Сфера с центром в точке S проходит через вершины основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Отношение площади полной поверхности пирамиды к площади поверхности сферы равно a. Найти величину угла ASB и указать все значения, которые может принимать a в условии задачи.

17.17. Ответы

[17.1] $1 : 5$; $3 : 7$. **[17.2]** $1 : 2$. **[17.3]** $m - n + p$. **[17.4]** $1 : 3$. **[17.5]** $2 : 3$, $1 : 1$. **[17.6]** $2 : 1$ от M. **[17.7]** $3 : 1$ от K. **[17.8]** $2 : 3$ от S. **[17.9]** $2 : 1$ от S. **[17.10]** $3 : 7$ от A_1. **[17.11]** $1 : 1$. **[17.13]** $4 : 3$ от D. **[17.14]** $2 : 3$ от A. **[17.15]** $6 : 7$ от S. **[17.16]** $1 : 3$ от B. **[17.17]** $2 : 9$. **[17.18]** Сечение, проходящее через середину ребра AB. **[17.19]** $mp : n$. **[17.20]** $3 : 4$. **[17.21]** $1 : 3$. **[17.22]** $2a/3$. **[17.23]** $1/3$. **[17.24]** $1/4$. **[17.25]** $1 : 3$. **[17.26]** $3/2$. **[17.27]** $3a/4$. **[17.28]** $3 : 5$. **[17.29]** $3/5$. **[17.30a]** $5 : 6$ от B. **[17.30b]** $AL : LC = 3 : 7$. **[17.30c]** $7 : 8$. **[17.31a]** $1 : 2$ от B_1. **[17.31b]** $4 : 5$ от C_1. **[17.32a]** 4. **[17.32b]** 5. **[17.32c]** 7. **[17.33a]** 42. **[17.33b]** 12. **[17.33c]** 16. **[17.34a]** $10 : 4 : 21$. **[17.34b]** $7 : 1 : 20$. **[17.34c]** $7 : 3 : 4$. **[17.35]** P совпадает либо с C, либо с C'. **[17.36a]** $3 : 1$. **[17.36b]** $5 : 3$. **[17.37a]** 10. **[17.37b]** 19. **[17.38]** $\dfrac{7\sqrt{6}}{16}\,a^2$. **[17.39]** а) $\dfrac{\sqrt{6}}{8}\,a^2$;

б) $\dfrac{3\sqrt{15}}{8}\,a^2$. **[17.40]** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\,a^2$. **[17.41a]** $15\sqrt{22}$. **[17.41b]** $7\sqrt{51}$. **[17.42]** $\dfrac{\sqrt{15S^2+9Q^2}}{12}$. **[17.43]** $a^2\sqrt{14}/12$. **[17.44a]** $a^2\dfrac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}$. **[17.44b]** $10\sqrt{3}-25/4$. **[17.45]** $\dfrac{3}{8}a^2\sqrt{42}$. **[17.46a]** $1:(3\pm\sqrt{8})$. **[17.46b]** $\sqrt{5}:2$; $2:\sqrt{5}$. **[17.47]** $a^2\sqrt{3}/8$. **[17.48a]** $81\sqrt{3}/2$. **[17.48b]** $5/9$. **[17.48c]** $\dfrac{\sqrt{13}}{12}$. **[17.48d]** $\dfrac{10+2\sqrt{19}}{3}$. **[17.49a]** $\dfrac{5\sqrt{3}}{36}$. **[17.49b]** $\dfrac{\sqrt{195}}{4}$. **[17.50]** $(13+2\sqrt{3})a$. **[17.51]** $31\sqrt{113}/288$. **[17.52a]** $\sqrt{6}/4$. **[17.52b]** $\sqrt{6}/4$. **[17.52c]** $1/2$. **[17.53a]** $\sqrt{14}/3$. **[17.53b]** $\sqrt{21}/8$. **[17.54a]** $\sqrt{91}/24$. **[17.54b]** $3/2$. **[17.55]** $3a^2\sqrt{2}/4$. **[17.56]** $a^2\sqrt{6}/2$. **[17.57a]** $\sqrt{30}/6$. **[17.57b]** $\sqrt{57}/4$. **[17.58a]** $7:4$. **[17.58b]** $3:2$. **[17.58c]** $1:2$. **[17.59]** $5\sqrt{10}/32$. **[17.60]** 28. **[17.61]** $\dfrac{3\sqrt{14}}{16}a^2$. **[17.62]** $5\sqrt{2}$. **[17.63]** $\sqrt{3}$. **[17.64a]** $2\sqrt{3}$. **[17.64b]** $2\sqrt{6}$. **[17.65a]** $\sqrt{11}$. **[17.65b]** $21\sqrt{15}/10$. **[17.66]** 1. **[17.67]** $\arccos(2-\sqrt{5})$. **[17.68]** $\operatorname{arctg}(\sqrt{3/2})$. **[17.69]** 1. **[17.70]** $a\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **[17.71]** $\dfrac{|c^2-b^2|}{a^2}$. **[17.72]** 60°. **[17.73a]** $\alpha=\arccos\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$. **[17.73b]** $\varphi=2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin(\alpha/2)}$. **[17.74]** $\arcsin\left(\sin\varphi\cdot\cos\dfrac{\psi}{2}\right)$. **[17.75]** $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sin\varphi\right)$. **[17.76]** $\arccos(\pm\operatorname{ctg}\varphi\cdot\operatorname{ctg}\psi)$. **[17.77]** $\arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi\cdot\sin\psi\right)$. **[17.78]** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **[17.79]** $\dfrac{1}{2}\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}+6}$, если $0<\alpha\leqslant\arccos\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{2}\sqrt{3\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}+6}$, если $\pi-\arccos\dfrac{1}{3}\leqslant\alpha\leqslant\pi$; при других α решения нет. **[17.80]** $\arcsin(3/\sqrt{130})$. **[17.81]** $1/\sqrt{14}$. **[17.82]** $\sqrt{b^2-a^2/2}$. **[17.83]** $2/5$. **[17.84a]** $\operatorname{arctg}(4/\sqrt{5})$. **[17.84b]** $1:2$. **[17.85a]** $\sqrt{14}/3$. **[17.85b]** $\dfrac{3\sqrt{14}}{2\sqrt{29}}$. **[17.86a]** $\arcsin\dfrac{6}{5\sqrt{13}}$. **[17.86b]** $\arcsin\dfrac{16}{\sqrt{409}}$.

[17.87] $a\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **[17.88]** a. **[17.89]** а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}S\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$; б) $\sqrt{3}S\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **[17.90]** $2a\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\dfrac{\beta}{2}}$. **[17.91]** $\pi/6$. **[17.92]** $a/(4\sqrt{2}\,)$. **[17.93]** $3\sqrt{3}a$. **[17.94]** а) $2a$; б) $2a/\sqrt{15}$. **[17.95]** $(4+3\sqrt{6})\ :\ 19$. **[17.96]** $\dfrac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}$. **[17.97a]** $\dfrac{3}{2}\sqrt{7}$. **[17.97b]** $\dfrac{4\sqrt{11}}{3}$. **[17.98]** 8. **[17.99]** $5\sqrt{2}$. **[17.100]** $\arccos\left((\sqrt{7}-1)/3\right)$. **[17.101a]** $\pi/4$. **[17.101b]** $\pi/6$. **[17.102a]** $\arccos(1/4)$. **[17.102b]** $\arccos(11/16)$. **[17.103a]** $2/\sqrt{5}$. **[17.103b]** $\sqrt{10}/5$. **[17.104]** $\sqrt{6}\,a^3/2$ или $\sqrt{15}\,a^3/4$. **[17.105a]** $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$. **[17.105b]** $\operatorname{arctg}\sqrt{13}$. **[17.106a]** $3\sqrt{2}$. **[17.106b]** 5. **[17.107a]** 23/10. **[17.107b]** 9/10. **[17.108]** $\sqrt{5-2\sqrt{6}\sin\varphi}/2$. **[17.109a]** $\sqrt{11}$. **[17.109b]** $\sqrt{6}$. **[17.110a]** $\sqrt{429}/8$. **[17.110b]** $\sqrt{213}/8$. **[17.111a]** $2:1$ от C. **[17.111b]** $4:3$ от B_1. **[17.112a]** 3/2. **[17.112b]** 7/10. **[17.113a]** $3:2$. **[17.113b]** $8\sqrt{2}/5$. **[17.114a]** $4\sqrt{3}$. **[17.114b]** 13. **[17.115a]** $1/\sqrt{30}$. **[17.115b]** $4/\sqrt{11}$. **[17.116a]** 1. **[17.116b]** 3. **[17.117a]** $13\sqrt{14}/14$. **[17.117b]** $15\sqrt{21}/28$. **[17.118a]** $\sqrt{11}$. **[17.118b]** $\sqrt{6}$. **[17.119]** Отрезки SP и PF, где $P\in BC$, $PB=\dfrac{2}{5}BC$.; сделать развертку . **[17.120]** $\sqrt{61}$. **[17.121]** $a^3/(\sqrt{2}+1)^3$. **[17.122]** $2\sqrt{3}$. **[17.123]** $2\sqrt{2}a$. **[17.124]** $\arcsin(\sqrt{13}/5)$. **[17.125]** $3a$. **[17.126]** $2\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$. **[17.127]** $2\cos\alpha$. **[17.128]** $2S\sqrt{2}$. **[17.132a]** $\sqrt{3/2}$. **[17.132b]** $2\sqrt{6}$. **[17.133]** $\dfrac{ab(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)}{2\sin\beta}$. **[17.134]** 91/25. **[17.135a]** 2/3. **[17.135b]** $1/\sqrt{6}$. **[17.136a]** $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$. **[17.136b]** $\dfrac{7}{3}\sqrt{\dfrac{21}{2}}$. **[17.137]** $-3x-4y+z=-7$. **[17.138]** $5x+9y-z=24$. **[17.139]** $-2x+z=5$. **[17.140]** $x=2t$; $y=4-7t$; $z=5-13t$. **[17.141]** $5x-y+3z=3$.

[17.142] $(-158; -74; -77)$. **[17.143]** $(5; -4; -3)$. **[17.144]** $(7; 1; 0)$. **[17.145]** $(3; 1/2; 3/2)$. **[17.146]** $\sqrt{33/17}$. **[17.147]** Пересекаются. Общая точка (3; -5; 2). Плоскость 9x-y-6z=20. **[17.148]** $108/\sqrt{138}$. **[17.149]** $5/\sqrt{104}$. **[17.150]** $\sqrt{651/26}$. **[17.151]** $-7x + 11y + 10z = 51$; $3x + y + z = 10$.. **[17.152]** $-21y + 8z = -18$. **[17.153]** $6x + 10y + 4z = 9$ и $10x - 6y = 35$. **[17.154]** В остром угле. **[17.155]** $6x - 4y + 2z = -5$. **[17.156]** $6x - 7y = -18$. **[17.157]** (а). x-2y=3. (б). 2. (в). (57/58; 115/58). **[17.158]** 59/6. **[17.159]** $64/\sqrt{181}$. **[17.160]** $\sqrt{850/19}$. **[17.161]** $(12; -5; 8)$. **[17.162]** $(6; -6; 5)$. **[17.163]** $\sqrt{10}$. **[17.164]** (6;4;3); $\cos\phi = 12/\sqrt{299}$. **[17.165]** (7;0;5), $\sqrt{227}$. **[17.166]** $4x - y = 14$; $x + 4y = 29$. **[17.167]** $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-3}{7}$; $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y+2}{-8} = \dfrac{z-3}{1}$. **[17.168]** $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z}{2}$. **[17.169]** $(1; 3; 1), (4; 1; -1)$. **[17.170]** $\dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-6}{-15}$. **[17.171]** $16x - 2y + 13z = 31$. **[17.172]** 25. **[17.173]** $(-3; 2; -5)$. **[17.174]** $13x - y + 8z = 9$. **[17.175]** $\dfrac{x+4}{9} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+2}{-6}$. **[17.176]** $x = 2 + 4t$; $y = -3 - 8t$; $z = -1 + 3t$. **[17.177]** $\dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$. **[17.178]** $2x + 2y - 9z = 1$. **[17.179]** 288. **[17.180]** $10x - z = 0$ и $5x - z = 0$. **[17.181]** Продолжение за точку B. **[17.182]** $x + y + z = 11$ или $x + y - z = 7$. **[17.183]** Центр (2;-2;-2), радиус 2. **[17.184]** Центр (0;4;1), радиус 1. **[17.185]** Четыре прямых $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-7}{3}$; $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-7}{-3}$; $\dfrac{x}{15} = \dfrac{y-4}{18} = \dfrac{z-7}{-1}$; $\dfrac{x}{15} = \dfrac{y-4}{-18} = \dfrac{z-7}{1}$. **[17.186]** $(0; -64/9; -8/9)$. **[17.187]** $(10; 1; 2)$. **[17.188]** $(1; 20; -4), (-3; -12; 12)$. **[17.189]** $y - z = 4$ и $20x + 7y + z = 24$. **[17.190]** $2x - 5y + 5z = 9$. **[17.191]** $x - 3 = -y + 1 = z + 2$. **[17.192]** $(5; -3)$.

[17.193] $(-4; -11; 4)$. **[17.194]** а) $\arccos(1/\sqrt{10})$; б) $\arccos(1/\sqrt{10})$; в) $\arccos\sqrt{2/5}$. **[17.195]** $\arcsin\sqrt{2/3}$. **[17.196]** $\arccos(1/\sqrt{10})$; $a/3$. **[17.197]** $\arccos(1/(2\sqrt{3}))$. **[17.198]** а) $\arccos(1/6)$; б) $\arccos(5/6)$. **[17.199]** $1/\sqrt{2}$. **[17.200]** $\sqrt{10}\,a/3$. **[17.201a]** $\arcsin(4/21)$. **[17.201b]** $\arcsin(\sqrt{3}/13)$. **[17.202]** $3 : 2$, считая от вершин D и B. **[17.203]** $\sqrt{2}\,a/3$. **[17.204]** a; $3a$. **[17.205]** $\sqrt{23}\,a/6$. **[17.206]** $6\sqrt{17/13}$; $18/\sqrt{53}$; $66/\sqrt{173}$. **[17.207]** $4\sqrt{2}/9$. **[17.208a]** $\sqrt{2}\,a$. **[17.208b]** $\operatorname{arctg}(\sqrt{13}/6)$. **[17.209]** $\arccos\frac{1}{6}$, $a\sqrt{\frac{2}{35}}$ и $\arccos\frac{2}{3}$, $a\frac{\sqrt{10}}{10}$; два взаимных расположения медиан. **[17.210]** $\arcsin\frac{\sqrt{6}\pm 1}{5}$. **[17.211]** $a\frac{\sqrt{14}}{3}$. **[17.212]** $\frac{B_1N}{NC_1} = \sqrt{2} + 1$. **[17.213a]** $\frac{6}{\sqrt{170}}$. **[17.213b]** $\frac{3}{\sqrt{170}}$. **[17.214a]** $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1121}{170}}$. **[17.214b]** $\sqrt{551/850}$. **[17.215a]** $\pi/3$; $2/\sqrt{3}$. **[17.215b]** $\pi/4$; $1/\sqrt{3}$. **[17.216]** а) $a\sqrt{5}/3$; б) $a\sqrt{5}/5$. **[17.217]** $a\sqrt{2/8}$. **[17.218a]** $2\sqrt{7}$. **[17.218b]** $7/2$. **[17.219a]** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; есть и простое классическое решение. **[17.219b]** $\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$. **[17.220]** $\frac{\sqrt{55}}{12}$. **[17.221]** $\pi/4$. **[17.222]** $\frac{a}{2\sqrt{5}}$ или a. **[17.223a]** 2 или 10. **[17.223b]** 1 или 16. **[17.224]** а) $\frac{\sqrt{38}}{4}a$; б) $\frac{\sqrt{11}}{6}a^2$. **[17.225]** $n^2 : 1$, считая от A и D. **[17.226]** $\frac{a}{\sqrt{10}}$. **[17.227a]** $1/\sqrt{2}$. **[17.227b]** $12\sqrt{2}/5$. **[17.228]** $3\sqrt{30}/2$. **[17.229a]** $\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{58}} = \arcsin 4\sqrt{74}$. **[17.229b]** $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{13}}$. **[17.230a]** $3/2$. **[17.230b]** $\frac{\sqrt{362}}{7}$. **[17.231a]** $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$. **[17.231b]** $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$. **[17.232]** $1 : 2$. **[17.233]** $\sqrt{7}$. **[17.234a]** $\pi/6$; есть и хорошее классическое решение. **[17.234b]** $\pi/6$. **[17.235a]** $1/\sqrt{3}$. **[17.235b]** $\sqrt{5}/3$. **[17.236a]** $1 : 1$. **[17.236b]** $1 : 1$. **[17.237a]** $2a\sqrt{14}$. **[17.237b]** $a\sqrt{29}/2$. **[17.238a]** $2\sqrt{2/91}$.

[17.238b] $\sqrt{3/115}$. **[17.239]** $\arccos\dfrac{29}{7\sqrt{19}}$. **[17.240a]** $21/2$ или 6. **[17.240b]** $5/2$ или 5. **[17.241a]** $1/\sqrt{17}$. **[17.241b]** $3/(2\sqrt{37})$. **[17.242]** $1 : 1$. **[17.243]** $1 : 8$. **[17.244]** $2 : 13$. **[17.245]** $1 : 2$. **[17.246]** $12V$. **[17.247]** $20 : 7$. **[17.248]** $V/2$. **[17.249]** $2V/9$. **[17.250]** $1 : 1$. **[17.251a]** $11 : 21$. **[17.251b]** $11 : 7$. **[17.251c]** $23 : 13$. **[17.252]** $V_{out} : V_{in} = 3 : 11$. **[17.253a]** 3. **[17.253b]** 16. **[17.253c]** 32. **[17.255a]** $40/3$; использовать результат предыдущей задачи. **[17.255b]** 6. **[17.256a]** $139/21$. **[17.256b]** $39/2$. **[17.257]** $25/72$. **[17.258]** 81; $1 : 3$. **[17.259a]** $25 : 47$. **[17.259b]** $7 : 17$. **[17.260a]** $5\sqrt{3}/12$. **[17.260b]** $\sqrt{14}/18$. **[17.261]** $169 : 792$. **[17.262]** $\dfrac{1}{2}(c + h)S$. **[17.263a]** $\sqrt{\dfrac{2(11+4\sqrt{2})}{89}}$. **[17.263b]** $\sqrt{\dfrac{6}{5}}$. **[17.264]** $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{(1+\operatorname{tg}(\alpha/2))^2}V$. **[17.265]** $a^3\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. **[17.268]** $2\sqrt{3}$. **[17.269]** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **[17.270]** $\dfrac{3}{4}\sqrt{66}$ или $3\sqrt{3}$. **[17.271]** $1/12$. **[17.272]** $1/6$. **[17.27]** $1/4$. **[17.274]** $2/3$. **[17.275]** $\sqrt{3}\sin\dfrac{10\pi}{13}\cos\dfrac{5\pi}{13}$. **[17.276]** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **[17.277]** $\dfrac{5+\sqrt{5}}{24}a^3$, пятиугольная. **[17.278]** от Sh до $\dfrac{4}{3}Sh$. **[17.279]** $\dfrac{38\sqrt{5}}{5}$. **[17.280]** 216. **[17.281]** $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$. **[17.282a]** $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. **[17.282b]** $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$. **[17.283a]** $\dfrac{16\sqrt{42}}{3}$. **[17.283b]** 36. **[17.284a]** 5. **[17.284b]** $5/2$. **[17.285]** $\sqrt{2}/81$. **[17.286]** $5\sqrt{3}/2$. **[17.287]** 72. **[17.288a]** $x = 2\sqrt{5}$; $y = \sqrt{13}$; $V_{max} = 8$. **[17.288b]** $x = \sqrt{46}$; $y = 3\sqrt{2}$; $V_{max} = 4\sqrt{5}$. **[17.289a]** $\sqrt{14}/3$. **[17.289b]** $8\sqrt{6}$. **[17.290]** $\sqrt{3}/8$. **[17.291]** $\dfrac{7\sqrt{7}}{27}$. **[17.292]** $\dfrac{2}{3}(2 - \sqrt{3})$. **[17.293]** $\dfrac{\sqrt{25 \pm 16\sqrt{2}}}{2}$. **[17.294]** $\sqrt{\dfrac{7}{8}}$. **[17.295a]** $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$. **[17.295b]** $\dfrac{\sqrt{257}}{8}$. **[17.296a]** $\sqrt{5}/3$. **[17.296b]** $\sqrt{3/2}$. **[17.297]** $\dfrac{4-2\sqrt{2}}{3}a$. **[17.298a]** 3.

[17.298b] $\sqrt{3}$. **[17.299]** $a + b - \sqrt{2ab - \dfrac{a^2}{4}}$. **[17.300]** $\dfrac{5 \pm \sqrt{7}}{4}a$. **[17.301]** 24; экстремальный случай. **[17.302]** 384. **[17.303]** $\dfrac{a\sqrt{22}}{8}$. **[17.304]** $\dfrac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{b^2 - a^2\cos^2\alpha}$. **[17.305a]** $\sqrt{2}/4$. **[17.305b]** $\sqrt{11}/2$. **[17.306]** $\dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}}$. **[17.308]** $a/2$. **[17.309]** $\pi - \arccos(25/169)$. **[17.310]** $\dfrac{\sqrt{11}}{4\sqrt{3} + \sqrt{15}}$. **[17.311]** $\dfrac{3a}{4\sqrt{2}}$. **[17.312]** $\dfrac{a\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1 + \cos^2\alpha} + \cos\alpha}$. **[17.313]** $\arccos\dfrac{\sqrt{13} - 1}{4}$. **[17.314]** 2/3. **[17.315]** $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$. **[17.316]** 4/5. **[17.317]** 36. **[17.318]** $\dfrac{d^3}{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2 2\beta}$. **[17.319]** 5; 16/3; $AHB \sim DAB$. **[17.320]** $\dfrac{2pq\cos(\alpha/2)}{p+q}$. **[17.321]** $a\sqrt{\dfrac{3}{70}}$. **[17.322]** $\dfrac{6 - 3\sqrt{2}}{2}$. **[17.323]** $\dfrac{2a}{3}\sqrt{4R^2 - a^2}$. **[17.324]** $a/6$. **[17.325]** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **[17.326a]** $\sqrt{22}$. **[17.326b]** 3. **[17.327a]** 5. **[17.327b]** 6. **[17.328a]** $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$. **[17.328b]** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **[17.329]** $\pi/\sqrt{3}$. **[17.330a]** 4/5. **[17.330b]** 1/2. **[17.331a]** $\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$. **[17.331b]** $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **[17.332a]** $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$. **[17.332b]** $\operatorname{arctg}\sqrt{6}$. **[17.333]** $\dfrac{Ra^3\sqrt{4b^2 - a^2}}{6(4R^2 + a^2)}$. **[17.334]** $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. **[17.335a]** $\dfrac{1}{4}\sqrt{30 - 18\sqrt{2}}$. **[17.335b]** $\dfrac{2}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$. **[17.336a]** $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{15}$. **[17.336b]** $1 + \dfrac{1}{\sqrt{13}}$. **[17.337a]** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **[17.337b]** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **[17.338a]** $SM : MC = 5 : 3$. **[17.338b]** $48\sqrt{10}/5$. **[17.339a]** $6\sqrt{15}$. **[17.339b]** 36. **[17.340a]** $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{13} - 2)a^3}{12}$. **[17.340b]** $\dfrac{7a}{18}$. **[17.341]** $\dfrac{3a^3}{32}$. **[17.342a]** $\dfrac{5}{4}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$. **[17.342b]** $\dfrac{7}{10}$; $\dfrac{\sqrt{66}}{90}$. **[17.343]** 1. **[17.344]** $\dfrac{3a^3}{8}$ или $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{4}$. **[17.345]** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **[17.346]** $\dfrac{4}{5}$ от K. **[17.347]** $\dfrac{5\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{48}a$. **[17.348]** $\sqrt{3}r$. **[17.349]** $\dfrac{\sqrt{3} \pm 1}{4\sqrt{2}}a$. **[17.350]** $a\sqrt{3.9}$. **[17.351]** $\dfrac{3a^3}{64}(8 \pm \sqrt{3})$.

[17.352a] $3\sqrt{2}$. **[17.352b]** $\sqrt{\dfrac{3(1+2\sqrt{3})}{11}}$. **[17.353]** $\dfrac{40}{7}$, $\dfrac{104}{7}$. **[17.354]** $\dfrac{a}{2}$, $2a$. **[17.355]** $3/4$. **[17.356]** $\sqrt{\dfrac{3}{2}}a$. **[17.357]** $21/23$. **[17.358a]** $\sqrt{3}-1$. **[17.358b]** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. **[17.359]** $50\sqrt{2}$. **[17.360a]** 20; отрезки взять за оси координат. **[17.360b]** $\sqrt{67}$. **[17.361]** $\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{137}{3}}$. **[17.362]** a. **[17.363a]** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}+2\sqrt{7}}$. **[17.363b]** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+\sqrt{11}}$. **[17.364]** $r\sqrt{5}/2$. **[17.365]** $R\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. **[17.366a]** $\sqrt{30}/20$. **[17.366b]** $5\sqrt{6}/18$. **[17.367]** $\dfrac{15}{2\sqrt{2}}r$. **[17.368]** $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} : \sin^2\dfrac{\alpha}{2} : \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. **[17.369a]** $2\,\mathrm{arctg}\,(1/2) = \arccos(3/5)$. **[17.369b]** $2\,\mathrm{arctg}\,(1/3) = \arccos(4/5) = 2\arccos(3/\sqrt{10})$. **[17.370]** $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **[17.371]** $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{3}$. **[17.372a]** $8/3$. **[17.372b]** 6. **[17.373]** $2+\sqrt{3}$. **[17.374]** 4; 10 (внешнее и внутреннее касание). **[17.375]** $\dfrac{1}{4}a(\sqrt{3}-1)^2$. **[17.376]** $\dfrac{1}{3}r\left(6+\sqrt{3}+\sqrt{27+12\sqrt{3}}\right)$. **[17.377]** $\dfrac{a}{2(1+\sqrt{6})}$. **[17.378]** $\dfrac{a}{2(1+\sqrt{6})}$. **[17.379]** $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1}R$ или $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}R$. **[17.380]** $(5\sqrt{6}+\sqrt{22})R$. **[17.381a]** 4; 1. **[17.381b]** 1; 3. **[17.382]** $1:2:1$. **[17.383a]** $\sqrt{2}$. **[17.383b]** $8\sqrt{3}/3$. **[17.384a]** $\dfrac{2}{5}(\sqrt{7}-\sqrt{2})$. **[17.384b]** $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **[17.385]** $R \geqslant r\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $\dfrac{R(R-r-\sqrt{R^2-2Rr-r^2/3}}{r-\sqrt{R^2-2Rr-r^2/3}+R}$. **[17.386]** $\arccos(6-\sqrt{33})$. **[17.387]** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{31}{5}}$. **[17.388]** $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; рассмотреть внутр.-внеш. касание. **[17.389]** $\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{6}$. **[17.390a]** 9. **[17.390b]** 75. **[17.391]** 1. **[17.392]** $6\sqrt{2}$. **[17.393]** $1/12$. **[17.394]** $\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}r$. **[17.395]** 8. **[17.396]** $18/5$. **[17.397]** $\dfrac{r_1}{r_2}\cdot$

$\sqrt{2R^2 - r_2^2 + 2R\cos\varphi\sqrt{R^2 - r_2^2}}$. **[17.398]** 2. **[17.399]** 150°. **[17.400]** $\dfrac{12(5\sqrt{2}-7)}{\pi}$. **[17.401]** $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}$. **[17.402]** $l\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\dfrac{\beta}{2}} \times \dfrac{(\cos\alpha - \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,(\pi/4 - \alpha/2))}{\cos(\beta/2)}$. **[17.403]** $2\pi/\sqrt{3}$. **[17.404]** $5\sqrt{6}/2$ или $20\sqrt{3}/\sqrt{17}$. **[17.405]** $\dfrac{\pi\sqrt{2}(53-7\sqrt{3})}{48}$. **[17.406]** $2\arcsin\left(\sin\beta\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **[17.407a]** $\arccos(-1/71)$. **[17.407b]** $2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{\sin(\alpha/2)}$. **[17.408]** $a/\sqrt{3}$. **[17.409]** $\pi a^2\sqrt{23}/9$. **[17.410]** $\left(4/\sqrt{6}-1\right)H$. **[17.411]** $7a/(8\sqrt{3})$. **[17.412]** один цилиндр, где $R = a/(3\sqrt{3})$; три цилиндра, где $R = a/\sqrt{3}$. **[17.413a]** вершина $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2};1\right)$, $S_{\text{сеч}} = \dfrac{5\pi}{18}$. **[17.413b]** $\dfrac{45\pi}{2}$. **[17.414]** $\dfrac{32}{15}a^3$. **[17.415]** $25\sqrt{\dfrac{5}{3}}\pi$. **[17.416]** $16\sqrt{3}R^3$. **[17.417]** 1 : 2. **[17.418a]** 2/3. **[17.418b]** $\dfrac{2}{3\sqrt[4]{3}}$. **[17.419a]** 2. **[17.419b]** 8/39. **[17.420]** $\cos x = 1 - \sin\dfrac{\beta}{2}\cdot(\sin\dfrac{\beta}{2} - \sqrt{\sin^2\dfrac{\beta}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}})$. **[17.421]** $2\sqrt{\dfrac{S_1}{\pi}}\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)^2}$. **[17.422]** $\pi/6$. **[17.423]** $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **[17.424a]** $\arccos\dfrac{1}{7}$. **[17.424b]** $2\arcsin\dfrac{\mathrm{tg}\,(\pi/n)}{\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}^2\,(\pi/n)}}$. **[17.425]** $\dfrac{r(3+2\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$. **[17.426]** $\left(\dfrac{2R\sqrt{r} + r\sqrt{3R+r}}{2(R-r)}\right)^2$. **[17.427]** $\dfrac{9+4\sqrt{6}}{5}$. **[17.428]** $\dfrac{\pi r^2(r+\sqrt{r^2+(d-r)^2})^3}{3(d-r)^2}$. **[17.429]** $\sqrt{\dfrac{R}{r}}(\sqrt{R+r} - \sqrt{R})^2$. **[17.430]** $\dfrac{48}{125}\pi R^3$. **[17.431]** $R\left[r + R\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi+\alpha}{4}\right)\right]$. **[17.432]** $\dfrac{4\pi}{9}$. **[17.433]** $\dfrac{(3\sqrt{2}+4)r}{4}$. **[17.434]** 4/15. **[17.435]** $\dfrac{2}{3}r(2\sqrt{3} - 3)$. **[17.436]** 60°. **[17.437a]** $\arcsin\left(\cos\beta\cdot\dfrac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$. **[17.437b]** $\arccos\left(2\sin\dfrac{\beta}{2}\right)$. **[17.438]** $2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}\right) = 2\arcsin(\mathrm{tg}\,\alpha)$.

[17.439] $\cos x = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \dfrac{\cos(\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\beta)}$. **[17.440]** $\cos(x/2) = (\cos\beta - \cos^2\alpha)/\sin\alpha$. **[17.441]** $(3\sqrt{3}-\pi)/3$. **[17.442]** $R\dfrac{4\sin^2(\pi/n)+1-\sqrt{1-8\sin^2(\pi/n)}}{4\sin^2(\pi/n)}$ при $n \geqslant 9$; при $n=9$ еще и $R\dfrac{4\sin^2(\pi/9)+1+\sqrt{1-8\sin^2(\pi/9)}}{4\sin^2(\pi/9)}$. **[17.443]** $\pi - 4\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **[17.444]** $\cos\alpha = 1/7$. **[17.445]** $x_{\min} = (\sqrt{R+\rho-r}-\sqrt{R})^2$. **[17.446]** $\pi/\sqrt{3}$; интегрирование. **[17.447]** $\dfrac{8}{3}nr^3\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2n}$; интегрирование. **[17.448]** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$; интегрирование. **[17.449]** $\dfrac{\pi(15-8\sqrt{2})}{12}a^3$. **[17.450]** $\dfrac{\pi(18\sqrt{2}-20)}{31}$. **[17.451]** $\dfrac{6\sqrt{3}+4\pi}{27}a^2$. **[17.452]** $\dfrac{\pi(2\sqrt{7}-3)}{3\sqrt{7}}a^2$. **[17.455]** $6S$. **[17.456]** $\dfrac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. **[17.457]** $\dfrac{103}{240}\pi\sqrt{5}$. **[17.458]** 3π. **[17.460]** $41\pi\sqrt{41}/384$. **[17.461]** $4/3$. **[17.462]** $(\sqrt{6}+1)/3 : (\sqrt{3}+1)/2 : 1$. **[17.463]** $3\sqrt[4]{3}/4$. **[17.464]** $3\sqrt{21/5}$. **[17.465]** 5. **[17.466]** $\pi(3\sqrt{2}-4)$ и $\pi(9\sqrt{2}-4)$. **[17.467]** $\sqrt{5}$. **[17.468]** $\dfrac{1}{12}\pi a^3\left[1+2\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)\right]$. **[17.469]** $15/16$. **[17.470]** $\dfrac{(n+1)(m-1)}{(n-1)(m+1)}$. **[17.471]** $\arccos(-1/6)$. **[17.472]** $7/27$. **[17.473]** $\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\dfrac{2\pi a-1}{\sqrt{2}}$, $0<a<\dfrac{1}{\pi}$.

Источники

Книги и сайты

Вавилов-1 — Вавилов В. В. и др. Задачи по математике. Алгебра: Справочное пособие. М.: Наука, 1987.

Вавилов-2 — Вавилов В. В. и др. Задачи по математике. Уравнения и неравенства: Справочное пособие. М.: Наука, 1987.

Вавилов-3 — Вавилов В. В. и др. Задачи по математике. Начала анализа: Справочное пособие. М.: Наука, 1990.

Галкин — Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами. Челябинск: Взгляд, 2005.

Говоров — Говоров В. М. и др. Сборник конкурсных задач по математике. М.: Наука, 1983.

Горн — Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. М.; Илекса; Харьков: Гимназия, 2002.

Демид — Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, АСТ, 2003.

Звавич — Звавич Л. И., Аверьянов Д. И., Смирнова В. К. Экзаменационные задачи для школьников и абитуриентов. М.: Дрофа, 1996.

Квант — "Квант". Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов. http://www.kvant.info.

Кудр — Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическом у анализу. М.: Наука, 1984. Т. 1.

Кудр-2 — Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическом у анализу. М.: Наука, 1984. Т. 2.

Кузнецов — Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике. СПб: Лань, 2005.

Ларин — Сайт для подготовки к ЕГЭ. http://www.alexlarin.net.

Моденов — Сборник задач по математике с анализом решений. М.: Советская наука, 1959.

Прасолов — Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М.: МЦНМО, 2011.

Потапов — Потапов М. К., Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В. Конкурсные задачи по математике. М.: Столетие, 1995.

Созоненко — Жафяров А. Ж., Созоненко Р. С. Сборник подготовительных задач по математике для поступающих в вузы. Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1972.

Трен — Симонов А. Я. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике. М.: Просвещение, 1991.

ФадСом — Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1972.

ЦыпПин — Цыпкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике. М.: Наука, 1989.

Чуваков — Чуваков В. П. Задача С6. Теория чисел на ЕГЭ. Югорский физико-математический лицей, 2011.

Шар-10 — Шарыгин И. Ф. Сборник задач по математике с решениями. 10 класс. М.: Астрель, АСТ, 2001.

Шар-11 — Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. Факультативный курс по математике. Решение задач. 11 класс. М.: Просвещение, 1991.

ШарГор — Шарыгин И. Ф., Гордин Р. К. Сборник задач по геометрии. М.: Астрель, АСТ, 2001.

ШЧЯ — Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. М.: Наука, 1965.

Яковлев — Пособие по математике для поступающих в вузы / Под ред. Г. Н. Яковлева. М.: Наука, 1982.

Учебные заведения

ЛГУ — Ленинградский государственный университет.

МАИ — Московский авиационный институт.

МГУ — Московский государственный университет. (Факультеты: МФ — механико-математический; ФФ — физический, ВМК — вычислительной математики и кибернетики; хим — химический; био — биологический; геол — геологический; геогр — географический; экон — экономический; почв — почвоведения; фил — филологический; соц — социологии; менедж — менеджмента; госупр — государственного управления; АзАфр — факультет для студентов из стран Азии и Африки).

МИФИ — Московский инженерно-физический институт.

МИЭМ — Московский институт электроники и математики.

МФТИ — Московский физико-технический институт.

НГУ — Новосибирский государственный университет. (Факультеты: МФ — механико-математический; ФФ — физический; ест — естественных наук).

Плеханов — Институт народного хозяйства им. Г. В. Плеханова.

СУНЦ НГУ — Специализированный учебно-научный центр НГУ (Новосибирская физматшкола).

Учебное издание

Воронин Владислав Владимирович,
Воронина Татьяна Александровна

Задачи по математике для практических занятий в физико-математической школе

Верстка *Д. В. Нечаев*

Подписано в печать 01.08.2016 г.
Заказ №

Формат $60 \times 84/16$
Усл. печ. л. 23,9
Уч.-изд. л. 29,3
Тираж 300 экз.

Редакционно-издательский центр НГУ
630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2