МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
УНИВЕРСИТЕТА

**А. А. НИКИТИН, Ю. В. МИХЕЕВ,
И. Б. ЛЯПУНОВ**

ВАРИАНТЫ ВЫПУСКНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ СУНЦ НГУ

Издание второе, исправленное и дополненное

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК

2017

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
Н62

Н62 **Никитин, А. А.** Варианты выпускных экзаменов по математике СУНЦ НГУ: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. / А. А. Никитин, Ю. В. Михеев, И. Б. Ляпунов. — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017. — 92 с.

ISBN 978–5–4437–0661–0

Сборник содержит задачи выпускных экзаменов по математике, проводившихся в СУНЦ НГУ в 1991–2017 гг. Все задачи снабжены ответами. Данное учебное пособие предназначено для учащихся СУНЦ НГУ, оканчивающих школу, учителей старших классов, а также для всех, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
Н62

ISBN 978–5–4437–0661–0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое издание задачника содержит варианты выпускных экзаменов по математике СУНЦ НГУ за 1991–2017 гг. Расположение задач традиционное для такого рода изданий — по годам выпуска и вариантам. Ранее этот экзамен продолжительностью 5 часов проводился приемной комиссией НГУ по математике и его результаты использовались при зачислении в университет. В последние годы зачисление в университет проводится только по результатам ЕГЭ, однако сам экзамен сохранен и проводится коллективом кафедры математических наук ММФ и СУНЦ НГУ с сохранением наработанных традиций. Продолжительность экзамена с 2013 года изменена и составляет 3 часа 55 минут. Из-за различия в семинарских программах выпускникам физико-математического и химического профиля с 2016 года предлагались различные по составу задач и трудности варианты (11–14 и 21–24 сответственно). Задачи настоящего сборника представляют собой коллективный труд математиков более чем за четверть века, и позволяют составить представление о требованиях к подготовке выпускников СУНЦ НГУ по математике.

Сборник будет полезен как учащимся СУНЦ, оканчивающим школу, так и учителям старших классов, а также всем, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

Авторы выражают благодарность Алешину Владиславу Дмитриевичу за существенный вклад в подготовку рукописи к печати.

А. А. Никитин,
Ю. В. Михеев,
И. Б. Ляпунов

Р А З Д Е Л 1

ЗАДАЧИ ВЫПУСКНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ СУНЦ НГУ

1991 год (одногодичный поток)

Вариант 1

1. Указать все значения a, при которых уравнение

$$\log_{\sqrt{x}} a \cdot \left|\log_a \frac{x}{2}\right| = \log_{a^2} 2 \cdot \log_{\sqrt{x}} a - \log_a \sqrt{x}$$

имеет решение и найти все соответствующие решения.

2. Плоский угол боковой грани при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен φ. Найти величину угла между боковыми рёбрами и плоскостью основания.

3. Касательная к графику функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ такова, что абсцисса c точки касания принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. При каком значении c площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и прямой $x = 2$, будет наименьшей? Найти эту наименьшую площадь.

4. Доказать, что в прямоугольном треугольнике отрезки катетов, отсекаемые окружностями, построенными на проекциях катетов на гипотенузу, как на диаметрах, пропорциональны кубам катетов.

5. Решить уравнение

$$\sqrt{-\cos 4\left(x + \frac{3\pi}{8}\right) - \cos 2x} + \sin x + \cos x = 0.$$

Вариант 2

1. Указать все значения a, при которых уравнение

$$\log_a x + \log_{\sqrt{x}} a \cdot |a + \log_a x| = \log_x a$$

имеет решение и найти все соответствующие решения.

2. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен α. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

3. Касательная к графику функции $y = \dfrac{1}{x^2}$ такова, что абсцисса c точки касания принадлежит отрезку $[5, 9]$. При каком значении c площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и прямой $x = 4$, будет наименьшей? Найти эту наименьшую площадь.

4. На окружности через концы диаметра AB проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке K. Доказать, что

$$AC \cdot AK + BD \cdot BK = AB^2.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{2} + 4\cos^2 2x \cdot \cos 2\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)} + \sin 3x + \cos 3x = 0.$$

1992 год

Вариант 1

1. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}} > (3x-1)^{\log_{\frac{1}{4}}\left(-x^2+5x-1\right)}$.

2. Решить уравнение $\left(x^2 + 2x - 2\right) \cdot \cos x = |\cos x|$.

3. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 40$ средняя линия, параллельная основанию, пересекает вписанную в треугольник окружность в точках D и E. Длина хорды DE равна 12. Найти боковую сторону треугольника.

4. Определить все значения параметра a, при которых уравнение $(1-a)\,x^2 + 4x - (3a+8) = 0$ имеет два различных корня, каждый из которых больше -2.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точки E, F и G — середины рёбер AD, SB и SD соответственно. Определить объем пирамиды $SABCD$, если известно, что объем пирамиды $EFGC$ равен 3.

Вариант 2

1. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x+1}} > (2x+1)^{\log_{\frac{1}{27}}\left(-x^2+5x+5\right)}$.

2. Решить уравнение $\left(x^2+3x-3\right)\cdot|\mathrm{tg}\ x| = \mathrm{tg}\ x$.

3. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 48. Прямая, проходящая через середины боковых сторон, пересекает описанную около треугольника окружность в точках D и E. Длина хорды DE равна 74. Найти боковую сторону треугольника ABC.

4. Определить все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 - 4x + (3a - 11) = 0$ имеет два различных корня, каждый из которых меньше 2.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точки E, F, G и H — середины рёбер BC, CD, SA и SB соответственно. Определить объем пирамиды $SABCD$, если известно, что объем пирамиды $EFGH$ равен 2.

Вариант 3

1. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt[4]{4x+1}} > (4x+1)^{\log_{\frac{1}{16}}\left(-2x^2+6x+3\right)}$.

2. Решить уравнение $\left(x^2-6x+4\right)\cdot\cos\dfrac{x}{2} = \left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$.

3. В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 20$ средняя линия, параллельная основанию, пересекает вписанную в треугольник окружность в точках D и E. Длина хорды DE равна 8. Найти площадь треугольника.

4. Определить все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 - 6x + (2a + 17) = 0$ имеет два различных корня, каждый из которых больше –1.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точки E, F, G и H — середины рёбер

AB, AD, SA и SC соответственно. Определить объем пирамиды $SABCD$, если известно, что объем пирамиды $EFGH$ равен 3.

Вариант 4

1. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{2x-7}} > (2x-7)^{\log_{\frac{1}{9}}\left(-x^2+11x-24\right)}$.

2. Решить уравнение $\left(x^2-8x+15\right)\cdot\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

3. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 42. Прямая, проходящая через точку пересечения его медиан параллельно основанию, пересекает описанную около треугольника окружность в точках D и E. Длина хорды DE равна 44. Найти боковую сторону треугольника ABC.

4. Определить все значения параметра a, при которых уравнение $(1-a)\,x^2+6x+(19-2a)=0$ имеет два различных корня, каждый из которых меньше 1.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точки E, F, G и H — середины рёбер AD, BC, SA, SC соответственно. Определить объем пирамиды $SABCD$, если известно, что объем пирамиды $EFGH$ равен 2.

1993 год

Вариант 1

1. Две автомашины выехали одновременно из пункта A в одном направлении со скоростями 40 км/ч и 50 км/ч. Третья машина выехала из пункта A на полчаса позже и догнала вторую машину через полтора часа после того, как обогнала первую машину. Найти скорость третьей машины.

2. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{7}{4}-\sqrt{3}\ \operatorname{tg} x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{\cos x}$.

3. В окружность радиуса 25 вписана трапеция с боковой стороной 30 и площадью 1080. Найти основания трапеции.

4. Решить неравенство $\log_{7-2x}\left(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{4x-5}{2x-6}\right) > 0$.

5. Квадрат $ABCD$ со стороной a лежит в основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что существует шар, касающийся граней трехгранного угла пирамиды с вершиной C, причем эти точки касания расположены в плоскости, проходящей через середину ребра SC и точку M на AC такую, что $3 \cdot AM = MC$. Найти объем пирамиды $SABCD$.

Вариант 2

1. Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в одном направлении со скоростями 10 км/ч и 12 км/ч. Третий велосипедист выехал из пункта A на полчаса позже, догнал первого велосипедиста, а еще через 15 км догнал и второго. Найти скорость третьего велосипедиста.

2. Решить уравнение $\sqrt{7+4\sqrt{3}\ \operatorname{ctg} x} = \sqrt{3}\cos x + \dfrac{2}{\sin x}$.

3. В окружность радиуса 13 вписана трапеция с боковой стороной 10 и диагональю 20. Найти площадь трапеции.

4. Решить неравенство $\dfrac{1+\log_{x+1}(x-3)}{\log_{x+1} 3} < \log_3(2x-3)$.

5. Квадрат $ABCD$ со стороной a лежит в основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что существует шар, касающийся граней трехгранного угла пирамиды с вершиной A, причем эти точки касания расположены в плоскости, проходящей через середины рёбер SB, SD и CD. Найти объем пирамиды $SABCD$.

Вариант 3

1. Два пешехода вышли одновременно из пункта A в одном направлении со скоростями 4 км/ч и 4,5 км/ч. Третий пешеход вышел из пункта A позже, через 48 минут догнал первого пешехода, а еще через 5 км догнал и второго. Найти скорость третьего пешехода.

2. Решить уравнение $\sqrt{2-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\ \operatorname{tg} x} = \sin x - \dfrac{\sqrt{5}}{4\cos x}$.

3. В окружность радиуса $\sqrt{3}$ вписана трапеция площадью $\sqrt{3}$ с диагональю 2. Найти периметр трапеции.

4. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}(x+4)}\left(\log_2 \dfrac{2x-1}{x+3}\right) < 0$.

5. Квадрат $ABCD$ со стороной a лежит в основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что существует шар, касающийся граней трехгранного угла пирамиды с вершиной C, причем эти точки касания расположены в плоскости, проходящей через вершину S и середины рёбер AB и AD. Найти объем пирамиды $SABCD$.

Вариант 4

1. Два мотоциклиста выехали одновременно из пункта A в одном направлении. Третий мотоциклист выехал из пункта A на 15 минут позже со скоростью 60 км/ч, догнал первого мотоциклиста, а еще через 45 минут догнал и второго. Найти скорости первого и второго мотоциклистов, если второй ехал на 10 км/ч быстрее первого.

2. Решить уравнение $\sqrt{8+2\sqrt{5}\,\operatorname{ctg} x} = 2\cos x + \dfrac{\sqrt{5}}{2\sin x}$.

3. В окружность радиуса 3 вписана трапеция площадью $4\sqrt{3}$ с высотой 2. Найти боковую сторону трапеции.

4. Решить неравенство $\dfrac{1+\log_{(3-2x)}(-2x-1)}{\log_{(3-2x)} 0,1} > \log_{0,1}(1-4x)$.

5. Квадрат $ABCD$ со стороной a лежит в основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что существует шар, касающийся граней трехгранного угла пирамиды с вершиной B, причем эти точки касания расположены в плоскости, проходящей через вершину D и середину ребра SB. Найти объем пирамиды $SABCD$.

1994 год

Вариант 1

1. В каком отношении парабола $x = 2y^2$ делит площадь квадрата со стороной 6, центром в начале координат и сторонами, параллельными осям координат.

2. Числа α, β и $\alpha+\beta$ являются корнями уравнения

$$x^2+(\alpha-\beta)\,x-\beta=0.$$

Найти корни этого уравнения.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) на боковых сторонах AB и BC выбраны точки M и K так, что

$$AM:MB=BK:KC=2:1.$$

Найти стороны треугольника ABC, если $AK=2$, $CM=3$.

4. Решить уравнение:

$$\sin^6 x+2\sin^4 x+8\cos^2 x=2\cos^6 x+5\cos^4 x+3.$$

5. В основании пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB=2\sqrt{3}$, $AC=4$ и $\angle BCA=60^\circ$. Объем пирамиды равен $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, а длина медианы DM грани DCB равна 1. Найти боковые рёбра пирамиды.

Вариант 2

1. В каком отношении парабола $y=2x^2$ делит площадь квадрата со стороной 4, центром в начале координат и сторонами, параллельными осям координат.

2. Числа $\alpha-\beta$ и $\alpha+\beta$ являются корнями уравнения

$$x^2+\alpha\beta x+\alpha+2=0.$$

Найти корни этого уравнения.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) точка M — середина стороны AB, точки K и L расположены на стороне BC так, что $BK=KL=LC=\dfrac{BC}{3}$. Найти стороны треугольника ABC, если $MK=\sqrt{3}$, $ML=\sqrt{5}$.

4. Решить уравнение: $\sin^6 x+2\cos^2 x-1=\cos^6 x$.

5. В основании пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со сторонами $BC=2$, $AC=2\sqrt{2}$ и $\angle BAC=45^\circ$. Объем пирамиды равен $\dfrac{4}{3}$, а длина биссектрисы DL грани ADC равна 2. Найти боковые рёбра пирамиды.

Вариант 3

1. В каком отношении парабола $3y = -x^2$ делит площадь квадрата со стороной 2, центром в начале координат и сторонами, параллельными осям координат.

2. Числа $\alpha - \beta$ и $2\alpha\beta$ являются корнями уравнения

$$x^2 + (2\beta - \alpha)\,x - \beta + 1 = 0.$$

Найти корни этого уравнения.

3. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ на боковой стороне BC выбраны точки M и K так, что $BM = KC = \dfrac{BC}{4}$. Найти площадь треугольника ABC, если $AM = \sqrt{11}$, $AK = \sqrt{7}$.

4. Решить уравнение: $1 + \cos^6 x + 2\cos^4 x = \sin^6 x + 4\cos^2 x$.

5. В основании пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$ с углом $\angle ABC = 120°$ и основанием $AC = \sqrt{3}$. Объем пирамиды равен $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$, $DC = BC$. Найти боковые рёбра пирамиды.

Вариант 4

1. В каком отношении парабола $4x = -y^2$ делит площадь квадрата со стороной 4, центром в начале координат и сторонами, параллельными осям координат.

2. Числа $2\beta - \alpha$ и $\alpha\beta + 1$ являются корнями уравнения

$$x^2 + (\alpha + \beta - 1)\,x - 6\beta^2 = 0.$$

Найти корни этого уравнения.

3. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ на боковых сторонах AB и BC выбраны точки M и K так, что $AM : MB = 2 : 1$, $BK = KC$. Найти стороны треугольника ABC, если $MK = \sqrt{5}$, $CM = 2\sqrt{6}$.

4. Решить уравнение: $-1 + \sin^6 x + 2\cos^4 x - \cos^6 x = 2\sin^4 x$.

5. В основании пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $AC = 3\sqrt{2}$ и $\angle ABC = 45°$. Объем пирамиды равен $9\sqrt{2}$, $DB = BC$. Найти боковые рёбра пирамиды.

1995 год

Вариант 1

1. Решить уравнение $\log_4 4x + \log_{2x} 2 = \dfrac{7}{3}$.

2. Решить уравнение $\dfrac{1}{\cos^2 x} + 4\cos 2x = 5$.

3. Через концы гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC проводится окружность радиуса $\sqrt{65}$ которая пересекает катет AB в точке K и пересекает катет BC. Найти AC, если известно, что $AK = 14$, $KB = 1$.

4. Найти, при каких значениях a числа $3+a$, $4+a$, $6-a$ могут быть длинами сторон остроугольного треугольника.

5. В пирамиде $ABCD$ двугранный угол при ребре AB составляет $60°$. К ребру AB из вершин C и D проводятся перпендикуляры соответственно CM и DN. Найти длину ребра CD, если известно, что $CM = 4$, $DN = 3$ и $MN = 1$.

Вариант 2

1. Решить уравнение $\log_2 4x - \log_{2x} 4 = \dfrac{10}{3}$.

2. Решить уравнение $\operatorname{tg}^2 x = 1 - 3\cos 2x$.

3. Через концы гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC проводится окружность радиуса $\sqrt{85}$, центр которой находится внутри треугольника и которая пересекает продолжение катета AB в точке M, а продолжение катета CB в точке K. Найти AC, если известно, что $AM = 18$, $BK = 5$.

4. Найти, при каких значениях a числа $2+3a$, $2+4a$, $2+5a$ могут быть длинами сторон тупоугольного треугольника.

5. В пирамиде $ABCD$ двугранный угол при ребре AB составляет $135°$. К ребру AB из вершин C и D проводятся перпендикуляры соответственно CM и DN. Найти длину ребра CD, если известно, что $CM = \sqrt{2}$, $MN = 5$, а высота пирамиды, проведенная из вершины D, равна $\sqrt{2}$.

Вариант 3

1. Решить уравнение $\log_4 2x + \log_{4x} 2 = \dfrac{4}{3}$.

2. Решить уравнение $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 5\cos 2x + 6$.

3. Через концы гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC проводится окружность радиуса $\sqrt{85}$, которая пересекает катет AB в точке K и катет BC в точке M. Найти AC, если известно, что $AK = 12$, $BM = 5$.

4. Найти, при каких значениях a числа $1+a$, $2+a$, $3-a$ могут быть длинами сторон остроугольного треугольника.

5. В пирамиде $ABCD$ двугранный угол при ребре AB составляет 120°. К ребру AB из вершин C и D проводятся перпендикуляры соответственно CM и DN. Найти длину отрезка MN, если известно, что $CM = 6$, $DN = 5$ и $CD = \sqrt{95}$.

Вариант 4

1. Решить уравнение $\log_2 8x - \log_{2x} 4 = \dfrac{13}{3}$.

2. Решить уравнение $1 + 5\cos 2x = \operatorname{ctg}^2 x$.

3. Через концы гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC проводится окружность радиуса $\sqrt{65}$, центр которой находится внутри треугольника и которая пересекает продолжение катета AB в точке M. Найти AC, если известно, что $AM = 16$, $BM = 1$.

4. Найти, при каких значениях a числа $2a+3$, $2a+4$, $a+5$ могут быть длинами сторон тупоугольного треугольника.

5. В пирамиде $ABCD$ двугранный угол при ребре AB составляет 45°. К ребру AB из вершин C и D проводятся перпендикуляры соответственно CM и DN. Найти длину отрезка MN, если известно, что $CM = 6$, $CD = \sqrt{59}$, а высота пирамиды, проведенная из вершины D, равна 7.

1996 год

Вариант 1

1. Решить систему $\begin{cases} x^{\log_y 9} = 2, \\ y^{\log_2 x} = 3 \cdot \sqrt{y}. \end{cases}$

2. Решить уравнение $2\sin 2x - 5\sin x - 5\cos x + 4 = 0$.

3. В параллелограмме $ABCD$, площадь которого равна S, точки F и G — середины сторон AB и BC соответственно, точки M и K — середины отрезков DF и DG. Найти площадь треугольника BMK.

4. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $2x = p + \ln x$ имеет решение.

5. В основании пирамиды с вершиной S лежит квадрат $ABCD$. Биссекториальная плоскость двугранного угла пирамиды при ребре AD пересекает ребро SB в точке M. Найти SM, если известно, что $AD = BM = 2$, $AS = DS = \sqrt{2}$.

Вариант 2

1. Решить систему $\begin{cases} x^{\log_y 3} = 2 \cdot \sqrt{x}, \\ y^{\log_2 x} = 9. \end{cases}$

2. Решить уравнение $\sin 2x - 4\sin x + 4\cos x - 3 = 0$.

3. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, точки M и K — середины медиан AF и CG. Найти площадь треугольника BMK.

4. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $3x = p + e^x$ имеет решение.

5. В пирамиде $ABCD$ ребро AB перпендикулярно рёбрам BD и AC. Биссекториальная плоскость двугранного угла пирамиды при ребре AB пересекает ребро CD в точке K. Найти CK, если известно, что $AB = 1,\ BD = 2,\ AC = 3,\ DK = \dfrac{4}{5}$.

1997 год

Вариант 1

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $2x^2+(4a-1)\,x+8a+1=0$ и $x^2+(2a-1)\,x+5a+1=0$ имеют хотя бы один общий корень.

2. Решить уравнение $\log_{\sin 2x}\left(\operatorname{ctg} x - \sin x + \dfrac{1}{\sin x}\right) = 1.$

3. Около треугольника ABC со сторонами $AB=8$, $BC=6$, $AC=7$ описана окружность. Через середины сторон AB и BC проведена прямая, которая пересекает окружность в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

4. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}-2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2x-11}-2}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ рёбра основания $ABCD$ равны 2, боковые рёбра равны $\sqrt{17}$. Через вершину A и середину M ребра SB проведена плоскость α, которая образует двугранный угол в 45° с плоскостью ASB. Определить расстояние от вершины S до плоскости α.

Вариант 2

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+(2a-1)\,x+1-3a=0$ и $2x^2+(4a-3)\,x+1-4a=0$ имеют хотя бы один общий корень.

2. Решить уравнение $\log_{\cos x}(1-\cos 2x-2\sin x)=2.$

3. Около треугольника ABC со сторонами $AB=5$, $BC=4$ и углом B, равным 60°, описана окружность. Через середину стороны BC перпендикулярно стороне AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

4. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{4-2x}-1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{5-3x}-1}$.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра основания ABC равны 3, боковые рёбра равны 8. Через вершину A и середину M ребра BB_1 проведена плоскость α, которая образует двугранный угол в 15° с плоскостью AA_1B_1B. Определить расстояние от вершины A_1 до плоскости α.

Вариант 3

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $2x^2+(4a+5)\,x+a-12=0$ и $x^2+(2a+1)\,x+2a-6=0$ имеют хотя бы один общий корень.

2. Решить уравнение $\log_{\cos 2x}(\sin 6x+\sin 2x+2\cos 2x)=1$.

3. Около треугольника ABC со сторонами $AB=9$, $BC=6$, $AC=\dfrac{15}{2}$ описана окружность. Через точку пересечения медиан треугольника параллельно стороне AC проведена прямая, которая пересекает окружность в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

4. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}-2}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}-2}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ рёбра основания $ABCD$ равны 2, боковые рёбра равны $\sqrt{34}$. Через вершину D и середину M ребра SB проведена плоскость α, которая образует двугранный угол в 30° с плоскостью SBD. Определить расстояние от вершины S до плоскости α.

Вариант 4

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+(2a+1)\,x+2a=0$ и $2x^2+(4a-1)\,x+10a+3=0$ имеют хотя бы один общий корень.

2. Решить уравнение $\log_{\sin x}\left(\dfrac{1+\cos x-2\cos 2x}{2}\right)=2$.

3. Около треугольника ABC со сторонами $AB=5$, $BC=8$ и углом B, равным 60°, описана окружность. Через середину стороны BC перпендикулярно биссектрисе угла ABC проведена прямая, которая пересекает окружность в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

4. Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{2x-6}-1}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{3x-10}-1}$.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ рёбра основания ABC равны 16, боковые рёбра равны $2\sqrt{41}$. Через вершину A и середину M ребра SB проведена плоскость α, которая образует двугранный угол в 60° с плоскостью ASB. Определить расстояние от середины N ребра AS до плоскости α.

1998 год

Вариант 1

1. Решить неравенство $\dfrac{\log_2 2x}{\log_3 2x} \geqslant \log_x 5$.

2. Решить уравнение $\dfrac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.

3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках M, N и K соответственно. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 9, величина угла MKN равна $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$. Определить длину стороны AC.

4. Найти все значения параметра a, при которых окружность $x^2 + y^2 = 1$ и парабола $y = 4x^2 + a$ касаются. (*Кривые касаются, если у них существует хотя бы одна общая точка, в которой совпадают касательные прямые, проведенные к каждой из заданных кривых.*)

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания ABC равна 6, высота призмы равна $4\sqrt{3}$. Два шара одинакового радиуса касаются друг друга, один из них касается всех граней призмы с общей вершиной A_1, а другой — всех граней с общей вершиной B. Определить радиус шаров.

Вариант 2

1. Решить неравенство $\dfrac{\log_{0,5}\left(\dfrac{x}{4}\right)}{\log_5\left(\dfrac{x}{4}\right)} \leqslant \log_x 10$.

2. Решить уравнение $\dfrac{1}{\sin x} = \sqrt{3}\cos x + \sin x + \operatorname{ctg} x$.

3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках M, N и K соответственно. Известно, что $MN = 3$, а величина угла ABC равна $\arccos\left(\frac{1}{8}\right)$. Определить радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Найти все значения параметра a, при которых окружность $x^2 + y^2 = 1$ и парабола $y = 3x^2 + a$ касаются. (*Кривые касаются, если у них существует хотя бы одна общая точка, в которой* *совпадают касательные прямые, проведенные к каждой из заданных кривых.*)

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания ABC равна $7\sqrt{3}$, высота призмы равна 7. Два шара касаются друг друга, один из них касается всех граней призмы с общей вершиной A, а другой — всех граней с общей вершиной B_1. Известно, что радиус первого шара в 4 раза больше радиуса второго. Определить радиусы шаров.

Вариант 3

1. Решить неравенство $\dfrac{\log_5\left(\dfrac{x}{5}\right)}{\log_{10}\left(\dfrac{x}{5}\right)} \geqslant \log_x 0{,}5$.

2. Решить уравнение $\dfrac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x + \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках M, N и K соответственно, её радиус равен $\sqrt{2}$. Известно, что величина угла BAC равна $\arcsin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$. Определить длину отрезка MK.

4. Найти все значения параметра a, при которых окружность $x^2 + y^2 = 1$ и парабола $y = 2x^2 + a$ касаются. (*Кривые касаются, если у них существует хотя бы одна общая точка, в которой совпадают касательные прямые, проведенные к каждой из заданных кривых.*)

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания ABC равна $5\sqrt{3}$, высота призмы равна 7. Два шара касаются друг друга, один из них касается всех граней призмы с общей вершиной B, а другой — всех граней с общей вершиной C_1. Известно, что радиус первого шара на 2 меньше радиуса второго. Определить радиусы шаров.

Вариант 4

1. Решить неравенство $\dfrac{\log_{0,2} 3x}{\log_3 3x} \leqslant \log_x 0{,}5$.

2. Решить уравнение $\dfrac{1}{\sin x} - \sqrt{3}\cos x = \sin x - \operatorname{ctg} x$.

3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках M, N и K соответственно. Величина угла KMN равна $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ сторона AB равна 8. Определить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра a, при которых окружность $x^2 + y^2 = 1$ и парабола $y = x^2 + a$ касаются. (*Кривые касаются, если у них существует хотя бы одна общая точка, в которой совпадают касательные прямые, проведенные к каждой из заданных кривых.*)

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания ABC равна 15, высота призмы равна $7\sqrt{3}$. Два шара касаются друг друга, один из них касается всех граней призмы с общей вершиной C, а другой — всех граней с общей вершиной A_1. Известно, что расстояние между центрами шаров равно $4\sqrt{3}$. Определить радиусы шаров.

1999 год

Вариант 1

1. Решить неравенство $2x - 4 \leqslant \sqrt{3x^2 - 6x - 9}$.

2. Решить уравнение $5 \cdot x^{\lg 2} = 2 \cdot 4^{\lg x} - 3$.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как $5 : 3$. Из середины M стороны AB опущен перпендикуляр MN на сторону CD, причем известно, что $MN = \sqrt{15}$, $CN : ND = 1 : 3$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

4. Решить уравнение $0{,}9 + 0{,}1 \cdot \sin x - \sin^2 x + \cos^3 x = 0$.

5. В пирамиде $SABC$ ребро SB перпендикулярно грани ABC. Известно, что $AB = BC = 6$, $AC = 10$ и что существует сфера, касающаяся всех рёбер пирамиды. Найти объем пирамиды $SABC$.

Вариант 2

1. Решить неравенство $3x - 1 \leqslant \sqrt{5x^2 + 10x - 15}$.

2. Решить уравнение $2 \cdot x^{\lg 9} = 3^{1 + \lg x} + 2$.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ и $BC = 8$ из середины M стороны AB опущен перпендикуляр

MN на сторону CD, причем известно, что $MN = 7\sqrt{2}$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

4. Решить уравнение $1{,}7 - 2{,}7 \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin^3 x = 0$.

5. В пирамиде $SABC$ ребро SB перпендикулярно грани ABC. Известно, что $SB = AC = 8$, $AB = BC$ и что существует сфера, касающаяся всех рёбер пирамиды. Найти объем пирамиды $SABC$.

Вариант 3

1. Решить неравенство $2x + 5 \leqslant \sqrt{3x^2 + 24x + 21}$.

2. Решить уравнение $2 \cdot \left(4^{\lg x} - 3\right) = 11 \cdot x^{\lg 2}$.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 10$, $BC = 6$ из середины M стороны AB опущен перпендикуляр MN на сторону CD, причем известно, что $CN : ND = 3 : 5$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

4. Решить уравнение $1{,}9 + 2{,}9 \cdot \sin x + \sin^2 x - \cos^3 x = 0$.

5. В пирамиде $SABC$ ребро SB перпендикулярно грани ABC. Известно, что $AB = BC = 3$, $SB = 4$ и что существует сфера, касающаяся всех рёбер пирамиды. Найти объем пирамиды $SABC$.

Вариант 4

1. Решить неравенство $3x - 2 \leqslant \sqrt{5x^2 + 20x - 60}$.

2. Решить уравнение $5 + 9 \cdot 3^{\lg x} = 2 \cdot x^{\lg 9}$.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как $3 : 1$. Из середины M стороны AB опущен перпендикуляр MN на сторону CD так, что $CN = 3$, $ND = 5$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

4. Решить уравнение $0{,}85 - 0{,}15 \cdot \cos x - \cos^2 x + \sin^3 x = 0$.

5. В пирамиде $SABC$ ребро SB перпендикулярно грани ABC. Известно, что $SA = SC = 5$, $AC = 6$ и что существует сфера, касающаяся всех рёбер пирамиды. Найти объем пирамиды $SABC$.

2000 год

Вариант 1

1. Решить уравнение $\cos x + \dfrac{2}{\cos x} = 5\sin x$.

2. Решить неравенство $\log_x\left(\frac{5}{2} - x\right) \leqslant \log_{\left(\frac{5}{2} - x\right)} x$.

3. В трапеции боковые стороны равны 9 и 5, а расстояние между серединами оснований равно 6. Найти расстояние между серединами диагоналей трапеции.

4. Окружность расположена выше графика функции $y = 5x^2$ за исключением единственной общей точки — начала координат. Найти наибольший радиус такой окружности. Система координат Oxy — прямоугольная.

5. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма с основанием ABC, боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, причем все рёбра призмы равны 2. Пусть точка M — середина ребра CC_1. Найти минимально возможный радиус сферы, касающейся прямых A_1C и BM.

Вариант 2

1. Решить уравнение $\sin x - \dfrac{2}{\sin x} = 3\cos x$.

2. Решить неравенство $\log_{\left(\frac{9}{4} - x\right)}(2x) \leqslant \log_{2x}\left(\frac{9}{4} - x\right)$.

3. В трапеции боковые стороны равны 11 и 7, а расстояние между серединами диагоналей равно 3. Найти расстояние между серединами оснований трапеции.

4. Известно, что график функции $y = ax^2$, $a < 0$, расположен выше некоторой окружности радиуса 2, за исключением единственной общей точки — начала координат. Найти наименьшее значение параметра a. Система координат Oxy — прямоугольная.

5. Пусть $SABCD$ — правильная пирамида, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота пирамиды равна 5. Пусть точка M — середина ребра SC. Найти минимально возможный радиус сферы, касающейся прямых SA и BM.

Вариант 3

1. Решить уравнение $\cos x - \dfrac{3}{\cos x} = 5\sin x$.

2. Решить неравенство $\log_x\left(\frac{9}{2} - 2x\right) \leqslant \log_{\left(\frac{9}{2} - 2x\right)} x$.

3. В трапеции диагонали равны 11 и 5, а расстояние между серединами боковых сторон равно 7. Найти расстояние между серединами оснований трапеции.

4. Окружность расположена ниже графика функции $y = -3x^2$ за исключением единственной общей точки — начала координат. Найти наибольший радиус такой окружности. Система координат Oxy — прямоугольная.

5. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма с основанием ABC, боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, причем все рёбра призмы равны 1. Найти минимально возможный радиус сферы, касающейся прямых AB_1 и BC.

Вариант 4

1. Решить уравнение $\sin x + \dfrac{1}{\sin x} = 3\cos x$.

2. Решить неравенство $\log_x\left(\frac{17}{4} - x\right) \leqslant \log_{\left(\frac{17}{4} - x\right)} x$.

3. В трапеции диагонали равны 9 и 7, а расстояние между серединами оснований равно 2. Найти длину средней линии трапеции.

4. Известно, что график функции $y = ax^2$, $a > 0$, расположен ниже некоторой окружности радиуса 4, за исключением единственной общей точки — начала координат. Найти наибольшее значение параметра a. Система координат Oxy — прямоугольная.

5. Пусть $SABC$ — правильный тетраэдр, все рёбра которого равны 1. Пусть точка M — середина ребра SB. Найти минимально возможный радиус сферы, касающейся прямых AM и BC.

2001 год

Вариант 1

1. Алеша задумал два натуральных числа, умножил их сумму на 7, а затем вычел из полученного числа произведение задуманных чисел. Оказалось, что результат этих действий на 43 меньше квадрата одного из задуманных чисел. Какие числа задумал Алеша?

2. Решить неравенство $\sqrt{\log_2 4x \cdot \log_2 8x} > \sqrt{3}\log_2 2x$.

3. В окружность радиуса 7 вписана трапеция с диагональю 10. Известно, что расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции равно 5. Найти площадь трапеции.

4. Найти, при каких значениях параметра α не существует ни одной пары (x, y), удовлетворяющей системе уравнений

$$\begin{cases} x(\cos\alpha - 1) + y\sin\alpha = \sin 2\alpha, \\ x\sin\alpha + y(\cos\alpha + 1) = \cos 2\alpha. \end{cases}$$

5. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ и $BC = 2\sqrt{3}$ является основанием пирамиды $SABCD$. Все боковые рёбра пирамиды равны между собой, а её высота равна 3. Сфера касается граней $ABCD$, SBC, SCD, SAD пирамиды. Плоскость α, проходящая через прямую AB, но не содержащая точку C, касается той же сферы. В каком отношении плоскость α делит ребро SC?

Вариант 2

1. Боря задумал два натуральных числа, вычел из большего меньшее, умножил эту разность на 5, а затем прибавил к полученному числу квадрат большего из задуманных чисел. Оказалось, что результат этих действий на 59 больше произведения задуманных чисел. Какие числа задумал Боря?

2. Решить неравенство $\sqrt{\log_3 3x \cdot \log_3 27x} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}\log_3 9x$.

3. В окружность радиуса 13 вписана трапеция, диагонали которой перпендикулярны. Известно, что расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции равно $5\sqrt{2}$. Найти площадь трапеции.

4. Найти, при каких значениях параметра α существует бесконечно много пар (x, y), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha = 2\cos 2\alpha, \\ x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha = 1 + \cos\alpha. \end{cases}$$

5. Прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 6$ является основанием пирамиды $SABCD$. Все боковые рёбра пирамиды равны между собой, а её высота равна 4. Сфера касается граней $ABCD$, SAB, SBC, SCD пирамиды. Плоскость α, проходящая через прямую AD и перпендикулярная грани SBC, касается той же сферы. Найти объем пирамиды $SABCD$.

Вариант 3

1. Вася задумал два натуральных числа, умножил их сумму на 8, а затем вычел из полученного числа квадрат одного из задуманных чисел. Оказалось, что результат этих действий на 47 меньше произведения задуманных чисел. Какие числа задумал Вася?

2. Решить неравенство $\sqrt{\log_2 2x \cdot \log_2 8x} > \sqrt{6}\log_2 \dfrac{x}{2}$.

3. В окружность вписана трапеция с диагональю 12, у которой одно основание в 5 раз больше другого. Известно, что расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции равно 5. Найти радиус окружности.

4. Найти, при каких значениях параметра α существует бесконечно много пар (x, y), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\,(\sin\alpha + 1) = \cos 2\alpha, \\ x\,(\sin\alpha - 1) + y\cos\alpha = \sin 2\alpha. \end{cases}$$

5. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 8$ является основанием пирамиды $SABCD$. Все боковые рёбра пирамиды равны между собой, а её высота равна $4\sqrt{3}$. Сфера касается граней $ABCD$, SBC, SCD, SAD пирамиды. Плоскость α, проходящая через прямую AB, но не содержащая точку C, касается той же сферы. Найти угол между плоскостью α и основанием пирамиды.

Вариант 4

1. Гена задумал два натуральных числа, вычел из большего меньшее, умножил эту разность на 6, а затем прибавил к полученному числу произведение задуманных чисел. Оказалось, что результат этих действий на 53 больше квадрата меньшего из задуманных чисел. Какие числа задумал Гена?

2. Решить неравенство $\sqrt{\log_3 \dfrac{x}{3} \cdot \log_3 27x} > \dfrac{\sqrt{3}}{2} \log_3 3x$.

3. В окружность вписана трапеция, диагонали которой перпендикулярны и равны $12\sqrt{2}$. Известно, что расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции равно 8. Найти радиус окружности.

4. Найти, при каких значениях параметра α не существует ни одной пары (x, y), удовлетворяющей системе уравнений

$$\begin{cases} x \sin\alpha - y \cos\alpha = 2\cos 2\alpha, \\ x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha = 1 + \sin\alpha. \end{cases}$$

5. Прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 2\sqrt{2}$ является основанием пирамиды $SABCD$. Все боковые рёбра пирамиды равны между собой, а её высота равна 4. Сфера касается граней $ABCD$, SAB, SBC, SCD пирамиды. Плоскость α проходит через прямую AD, касается той же сферы и образует с основанием угол, равный углу между гранями SAD и SBC. Найти объем пирамиды $SABCD$.

2002 год

Вариант 1

1. Решить уравнение $\dfrac{5\sin x - 3\cos 2x}{\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)} = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. Решить уравнение

$$\log_4^2(2x-3)+\log_{(x+5)}^2 4=\log_4^2(x+5)+\log_{(2x-3)}^2 4.$$

3. Вокруг прямоугольника $ABCD$ описана окружность. Точка M расположена на дуге BC этой окружности и удалена от прямых AD, AB и BC на расстояния 21, 7 и 5 соответственно. Найти радиус окружности.

4. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-4)\,x\leqslant 2-a$ имеет решения и каждое решение удовлетворяет условию $|x|\geqslant 3$.

5. В правильном тетраэдре $SABC$ точка M — середина ребра BC, точка K на ребре SA расположена так, что $SK:KA=1:3$. Через точки M и K параллельно прямой AB проводится плоскость α. Найти отношение объемов частей, на которые плоскость α делит тетраэдр $SABC$.

Вариант 2

1. Решить уравнение $\dfrac{5\cos 2x+7\cos x}{\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}=\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right).$

2. Решить уравнение

$$\log_3^2(2x+1)+\log_{(x+4)}^2 3=\log_3^2(x+4)+\log_{(2x+1)}^2 3.$$

3. В окружность радиуса $\sqrt{65}$ вписан прямоугольник $ABCD$. Точка M расположена на дуге BC этой окружности и удалена от прямых AB и BC на расстояния 1 и 3 соответственно. Найти площадь прямоугольника.

4. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-1)\,x\geqslant a+1$ имеет решения и каждое решение удовлетворяет условию $|x|\geqslant 2$.

5. В правильном тетраэдре $SABC$ точка M — середина ребра SA, точка K на ребре BC расположена так, что $CK:KB=1:2$. Через точки M и K параллельно прямой SB проводится плоскость α. Найти отношение объемов частей, на которые плоскость α делит тетраэдр $SABC$.

Вариант 3

1. Решить уравнение $\dfrac{3\cos 2x + 7\sin x}{\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)} = -2\operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. Решить уравнение

$$\log_5^2(3-2x) + \log_{(6-x)}^2 5 = \log_5^2(6-x) + \log_{(3-2x)}^2 5.$$

3. Вокруг прямоугольника $ABCD$ описана окружность. Точка M расположена на дуге AB этой окружности и удалена от прямых AD, AB и BC на расстояния 7, 3 и 15 соответственно. Найти радиус окружности.

4. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-3)\,x \geqslant a-1$ имеет решения и каждое решение удовлетворяет условию $|x| \geqslant 3$.

5. В правильном тетраэдре $SABC$ точка M — середина ребра AC, точка K на ребре SB расположена так, что $BK : KS = 1 : 2$. Через точки M и K параллельно прямой BC проводится плоскость α. Найти отношение объемов частей, на которые плоскость α делит тетраэдр $SABC$.

Вариант 4

1. Решить уравнение $\dfrac{5\cos 2x - 9\cos x}{\operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)} = 2\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. Решить уравнение

$$\log_6^2(5-2x) + \log_{(4-x)}^2 6 = \log_6^2(4-x) + \log_{(5-2x)}^2 6.$$

3. В окружность радиуса $5\sqrt{5}$ вписан прямоугольник $ABCD$. Точка M расположена на дуге AD этой окружности и удалена от прямых BC и CD на расстояния 7 и 1 соответственно. Найти площадь прямоугольника.

4. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-3)\,x \leqslant 1-a$ имеет решения и каждое решение удовлетворяет условию $|x| \geqslant 2$.

5. В правильном тетраэдре $SABC$ точка M — середина ребра AB, точка K на ребре SC расположена так, что $SK : KC = 1 : 3$.

Через точки M и K параллельно прямой SA проводится плоскость α. Найти отношение объемов частей, на которые плоскость α делит тетраэдр $SABC$.

2003 год

Вариант 1

1. Алеша и Боря одновременно побежали по кольцевой дорожке с места старта в противоположных направлениях (каждый с постоянной скоростью). Когда Алеша пробежал 200 метров, они в первый раз встретились, а когда Алеша пробежал первый круг, Боре осталось пробежать 250 метров до конца второго круга. Найти длину дорожки.

2. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=4\operatorname{ctg}x-\sqrt{3}$.

3. Площадь прямоугольного треугольника ABC равна 18, а длина биссектрисы CK, исходящей из вершины прямого угла, равна 4. Найти периметр треугольника ABC.

4. Решить неравенство $\log_{x-1}\left(3-2\sqrt{2}\right)\leqslant\log_{\frac{2x-1}{4}}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5. В плоскости α лежит квадрат $ABCD$ со стороной 10. Два шара радиусов 4 и 7, центры которых лежат по одну сторону от α, касаются плоскости α в точках A и B соответственно. Плоскость β, отличная от α, проходит через точку D и касается обоих шаров. Найти угол между плоскостями α и β.

Вариант 2

1. Боря и Ваня одновременно побежали по кольцевой лыжной трассе с места старта в противоположных направлениях (каждый с постоянной скоростью). В первый раз после старта они встретились через 6 минут, а когда Боря пробежал первый круг, Ване до конца второго круга осталось бежать 5 минут. За какое время Ваня пробегает полный круг?

2. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\operatorname{ctg}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Сумма катетов AC и BC прямоугольного треугольника ABC равна 25, а длина биссектрисы CK равна $4\sqrt{2}$. Найти длину медианы CM треугольника ABC.

4. Решить неравенство $\log_{x-2}\left(4+2\sqrt{3}\right) \geqslant \log_{\frac{x-1}{3}}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

5. В плоскости α лежит квадрат $ABCD$ со стороной 15. Два шара радиусов 3 и 1, центры которых лежат по разные стороны от α, касаются плоскости α в точках A и B соответственно. Плоскость β, отличная от α, проходит через точку D и касается обоих шаров так, что их центры лежат по разные стороны от β. Найти угол между плоскостями α и β.

Вариант 3

1. Ваня и Гена одновременно побежали по кольцевой дорожке с места старта в противоположных направлениях (каждый с постоянной скоростью). Второй раз после старта они встретились тогда, когда Ване осталось пробежать 150 метров до конца первого круга, а когда Ваня пробежал первый круг, Гене осталось пробежать 200 метров до конца второго круга. Найти длину дорожки.

2. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-8\operatorname{ctg}x$.

3. Площадь прямоугольного треугольника ABC равна 6, а биссектриса CK, проведенная из вершины прямого угла, равна $\dfrac{12}{5}$. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности.

4. Решить неравенство $\log_{x-3}\left(9-4\sqrt{5}\right) \leqslant \log_{\frac{x-1}{5}}\left(\sqrt{5}-2\right)$.

5. В плоскости α лежит квадрат $ABCD$ со стороной 15. Два шара радиусов 6 и 14, центры которых лежат по одну сторону от α, касаются плоскости α в точках B и C соответственно. Плоскость β, отличная от α, проходит через точку A и касается обоих шаров. Найти угол между плоскостями α и β.

Вариант 4

1. Гена и Алеша одновременно побежали по кольцевой лыжной трассе с места старта в противоположных направлениях (каждый с постоянной скоростью). Второй раз после старта они встретились через 24 минуты, а когда Гена пробежал первый круг, Алеше до конца второго круга осталось бежать 10 минут. За какое время Алеша пробегает полный круг?

2. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Сумма катетов AC и BC прямоугольного треугольника ABC равна 16, а длина биссектрисы CK равна $3\sqrt{2}$. Найти длину гипотенузы AB.

4. Решить неравенство $\log_{x-4}\left(6+2\sqrt{5}\right) \geqslant \log_{\frac{x-2}{5}}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

5. В плоскости α лежит квадрат $ABCD$ со стороной 20. Два шара радиусов 12 и 9, центры которых лежат по разные стороны от α, касаются плоскости α в точках B и D соответственно. Плоскость β, отличная от α, проходит через точку C и касается обоих шаров так, что их центры лежат по разные стороны от β. Найти угол между плоскостями α и β.

2004 год

Вариант 1

1. На координатной плоскости заданы парабола $y = x^2 + 3x + 4$ и точки $A(-3;-2)$, $B\,(-5;-4)$. Точка M на параболе выбирается так, что площадь треугольника AMB наименьшая из всех возможных. Найти площадь этого треугольника.

2. Найти все общие корни уравнений

$$\log_x(12x-5) + \log_{x+2}\left(x^2+6\right) = 2 \text{ и}$$
$$\log_{x+2}\left(x^2+6\right) + \log_x(2x+1) = 1.$$

3. В треугольнике ABC окружность радиуса $2\sqrt{6}$ с центром на стороне AC касается продолжения стороны AB в точке M и стороны BC в точке N. Известно, что $AM = 1$, $CN = 5$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin 4x \cos 3x} = \frac{1}{\sin 2x \cos x} + \frac{1}{\cos 3x \sin 2x}.$$

5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 3$, боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 имеют длину 2. Через вершину A и середину M ребра CC_1 проведена плоскость, пересекающая ребро BB_1 в точке K и ребро CD в точке L. Известно, что углы MAK и MAL равны. Найти длину отрезка DL.

Вариант 2

1. На координатной плоскости заданы парабола $y = x^2 - 4x + 5$ и точки $A(-2; 3)$, $B\,(0; -1)$. Точка M на параболе выбирается так, что площадь треугольника AMB наименьшая из всех возможных. Найти площадь этого треугольника.

2. Найти все общие корни уравнений

$$\log_{x+1}(2x+3) + \log_{x+2}\left(x^2+2\right) = 1 \text{ и}$$
$$\log_{x+2}\left(x^2+2\right) + \log_{x+1}(10x+6) = 2.$$

3. В треугольнике ABC окружность радиуса $4\sqrt{2}$ с центром на стороне AC касается сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 2$, $CN = 7$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin x \cos 2x} + \frac{1}{\sin 3x \cos 4x} = \frac{1}{\cos 2x \sin 3x}.$$

5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$, $BC = 3$, боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 имеют длину 4. Через вершину B и середину M ребра DD_1 проведена плоскость, пересекающая ребро AA_1 в точке K и ребро CD в точке L. Известно, что углы MBK и MBL равны. Найти длину отрезка DL.

Вариант 3

1. На координатной плоскости заданы парабола $y = -x^2 - 2x + 1$ и точки $A(-3; 0)$, $B\,(-1; 4)$. Точка M на параболе выбирается так, что площадь треугольника AMB наименьшая из всех возможных. Найти площадь этого треугольника.

2. Найти все общие корни уравнений

$$\log_x(15x-4)+\log_{x+3}\left(x^2+11\right)=2 \text{ и}$$
$$\log_{x+3}\left(x^2+11\right)+\log_x(3x+2)=1.$$

3. В треугольнике ABC окружность с центром O на стороне AC касается продолжения стороны AB в точке M и стороны BC в точке N. Известно, что $CN=7$, $AM=1$ и $OA=4$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos x\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}+\frac{1}{\cos 3x\cos 4x}=0.$$

5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 имеют длину 3. Через вершину B_1 и середину M ребра AD проведена плоскость, пересекающая ребро BC в точке K и ребро AA_1 в точке L. Известно, что углы MB_1K и MB_1L равны. Найти длину отрезка AL.

Вариант 4

1. На координатной плоскости заданы парабола $y=-x^2+x+2$ и точки $A(2;3)$, $B(4;1)$. Точка M на параболе выбирается так, что площадь треугольника AMB наименьшая из всех возможных. Найти площадь этого треугольника.

2. Найти все общие корни уравнений

$$\log_{x+1}(3x+5)+\log_{x+3}\left(x^2+5\right)=1 \text{ и}$$
$$\log_{x+3}\left(x^2+5\right)+\log_{x+1}(12x+9)=2.$$

3. В треугольнике ABC окружность с центром O на стороне AC касается сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $AM=4$, $CN=1$ и $CO=7$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin 2x \sin 3x} + \frac{1}{\sin 3x \sin 4x} = \frac{1}{\sin x \sin 2x}.$$

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Через вершину A и середину M ребра CC_1 проведена плоскость, пересекающая ребро BB_1 в точке K и ребро CD в точке L. Известно, что углы MAK и MAL равны. Найти длину отрезка CL, если ребро куба равно 8.

2005 год

Вариант 1

1. В арифметической прогрессии сумма первых пятидесяти членов в 4 раза больше суммы первых двадцати членов. Известно, что прогрессия содержит только натуральные числа, и что один из первых десяти её членов равен 123. Найти десятый член заданной прогрессии.

2. Решить уравнение $\dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos 2x} = 3\sin x$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC больше боковой стороны. Окружность с центром в точке C и радиусом CA пересекает продолжение стороны AB в точке M и луч CB в точке N. Известно, что $BM = 5$, $BN = 2$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство $(\log_x 2) \cdot \log_2 3 \geqslant \left(\log_{\sqrt{x}} 2\right) \cdot \log_{2x^3} 3$.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ рёбра основания ABC равны $2\sqrt{3}$, боковые рёбра равны $4\sqrt{3}$. Найти радиус сферы, которая касается луча AS и плоскости ABC в точке C.

Вариант 2

1. В арифметической прогрессии сумма первых сорока членов в 3 раза больше суммы первых двадцати членов. Известно, что прогрессия содержит только натуральные числа, и что один из первых десяти её членов равен 92. Найти тридцатый член заданной прогрессии.

2. Решить уравнение $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\cos 2x} = 4\sin x$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC меньше боковой стороны. Окружность с центром в точке C и радиусом CA пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $BM = 16$, $BN = 12$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство $(\log_x 3) \cdot \log_3 \dfrac{1}{10} \leqslant \left(\log_{\sqrt{x}} 3\right) \cdot \log_{3x^2} \dfrac{1}{10}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ рёбра основания $ABCD$ равны 2, боковые рёбра равны $2\sqrt{5}$. Точка M — середина ребра CD. Найти радиус сферы, которая касается луча BS и плоскости $ABCD$ в точке M.

Вариант 3

1. В арифметической прогрессии сумма первых тридцати членов в 5 раз больше суммы первых десяти членов. Известно, что прогрессия содержит только натуральные числа, и что один из первых десяти её членов равен 111. Найти двадцатый член заданной прогрессии.

2. Решить уравнение $\dfrac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos 2x} = 5\cos x$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC больше боковой стороны. Окружность с центром в точке C и радиусом CA пересекает продолжение стороны AB в точке M и продолжение стороны BC за точку C в точке N. Известно, что $BM = 7$, $BN = 21$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство $(\log_x 2) \cdot \log_2 5 \geqslant \left(\log_{\sqrt[3]{x}} 2\right) \cdot \log_{2x^2} 5$.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра основания ABC равны 1, боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1 равны $\sqrt{2}$. Найти радиус сферы, которая касается луча AC_1 и плоскости ABC в середине M ребра BC.

Вариант 4

1. В арифметической прогрессии сумма первых сорока членов в 7 раз больше суммы первых десяти членов. Известно, что прогрессия содержит только натуральные числа, и что один из первых десяти её членов равен 99. Найти двадцатый член заданной прогрессии.

2. Решить уравнение $\dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\cos 2x} = 6\cos x$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC меньше боковой стороны. Окружность с центром в точке C и радиусом CA пересекает сторону AB в точке M и продолжение стороны BC в точке N. Известно, что $BM = 6$, $BN = 12$. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство $(\log_x 3)\cdot\log_3 \dfrac{1}{5} \leqslant \left(\log_{\sqrt[3]{x}} 3\right)\cdot\log_{3x^3}\dfrac{1}{5}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ рёбра основания $ABCD$ равны 4, боковые рёбра равны 8. Найти радиус сферы, которая касается луча AS и плоскости $ABCD$ в точке D.

2006 год

Вариант 1

1. Мальчик и девочка, вместе войдя в парк, отправились по двум различным дорожкам к фонтану и достигли его одновременно. Девочка прошла весь путь длиной 160 метров с постоянной скоростью. Мальчик преодолел путь длиной 294 метра, причем в течение первой минуты он бежал по прямолинейному участку дорожки со скоростью в 2,4 раза большей, чем скорость девочки, а оставшуюся часть пути до фонтана он прошел со скоростью 90 метров в минуту. Найти скорость девочки.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log_2(4x+5)\cdot\log_{(4x+5)}3}{\log_4(3x+4)} \leqslant 1$.

3. В остроугольном треугольнике ABC, площадь которого равна 45, высоты AM и BN пересекаются в точке H. Найти длины сторон AB и BC, если известно, что $BH = 8$, $HN = 2$.

4. Решить уравнение $\dfrac{\sin 9x + \sin x}{\cos 12x - \cos 4x} = \dfrac{\cos 12x + \cos 4x}{\sin 9x - \sin x}$.

5. В призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 основание ABC — равносторонний треугольник со стороной 6. Сфера радиуса $\sqrt{13}$, центр которой лежит внутри призмы, проходит через вершины A, B, C, A_1, C_1 и середину ребра A_1B_1. Найти угол между боковым ребром и основанием призмы.

Вариант 2

1. Из пункта A в пункт B одновременно по двум различным дорогам выехали два велосипедиста. Первый велосипедист проехал весь путь длиной 19,2 километра с постоянной скоростью и прибыл в пункт B на 24 минуты раньше второго. Второй велосипедист преодолел путь длиной 28 километров, причем в течение первого часа он двигался по прямолинейному участку дороги со скоростью первого велосипедиста, а остаток пути до пункта B он ехал со скоростью 20 километров в час. Найти скорость первого велосипедиста.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log_9(7-6x)\cdot\log_{(7-6x)}4}{\log_3(6-5x)} \leqslant 1.$

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AM и CN пересекаются в точке H. Найти длины сторон AC и BC, если известно, что $AB=9$, $CH=5$, $HN=2$.

4. Решить уравнение $\dfrac{\cos 10x+\cos 6x}{\sin 5x-\sin x}=\dfrac{\sin 5x+\sin x}{\cos 10x-\cos 6x}.$

5. В призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 основание ABC — равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{15}$. Сфера радиуса $\sqrt{6}$, центр которой лежит внутри призмы, проходит через вершины A, B, C, A_1, B_1 и середину ребра A_1C_1. Найти длину бокового ребра данной призмы.

Вариант 3

1. Из пункта A одновременно по двум различным дорогам выехали два автомобиля и прибыли в пункт B одновременно. Первый автомобиль прошел весь путь длиной 96 километров с постоянной скоростью. Второй автомобиль прошел путь длиной 135 километров, причем в течение первого часа он двигался по прямолинейному участку дороги со скоростью в 1,5 раза большей, чем скорость первого автомобиля, а остаток пути до пункта B он ехал со скоростью 75 километров в час. Найти скорость первого автомобиля.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log_3(5x+6)\cdot\log_{(5x+6)}2}{\log_9(4x+5)} \leqslant 1.$

3. В остроугольном треугольнике ABC, площадь которого равна 70, высоты AM и CN пересекаются в точке H. Найти длины сторон AB и AC, если известно, что $AH : HM = 3 : 2$ и $BC = 14$.

4. Решить уравнение $\dfrac{\cos 6x - \cos 4x}{\sin 3x + \sin x} = \dfrac{\sin 3x - \sin x}{\cos 6x + \cos 4x}$.

5. В призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 основание ABC — прямоугольный треугольник с катетами $AC = 3\sqrt{6}$, $BC = 3\sqrt{2}$. Сфера радиуса $\sqrt{22}$, центр которой лежит внутри призмы, проходит через вершины A, B, C, B_1, C_1 и середину ребра A_1B_1. Найти угол между боковым ребром и основанием призмы.

Вариант 4

1. Из пункта A в пункт B одновременно по двум различным дорогам вышли два пешехода. Первый пешеход прошел весь путь длиной 4 километра с постоянной скоростью и прибыл в пункт B на полчаса раньше второго. Второй пешеход преодолел путь длиной 7,8 километра, причем в течение первого часа он двигался по прямолинейному участку дороги со скоростью в 1,2 раза большей, чем скорость первого пешехода, а остаток пути до пункта B он шел со скоростью 6 километров в час. Найти скорость первого пешехода.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log_4 (8-7x) \cdot \log_{(8-7x)} 9}{\log_2 (7-6x)} \leqslant 1$.

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AM и BN пересекаются в точке H. Найти длины сторон AB и AC, если известно, что $AH = 7$, $HM = 2$ и $BM : MC = 3 : 2$.

4. Решить уравнение $\dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\cos 8x + \cos 6x} = \dfrac{\cos 8x - \cos 6x}{\sin 5x + \sin 3x}$.

5. В призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 основание ABC — прямоугольный треугольник с катетами $AB = 6\sqrt{3}$, $AC = 6$. Сфера радиуса $\sqrt{37}$, центр которой лежит внутри призмы, проходит через вершины A, B, C, A_1, C_1 и середину ребра B_1C_1. Найти длину бокового ребра данной призмы.

2007 год

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\log_{3x}\left(x^2+1\right)\cdot\log_{3x}\left(x^2+2\right)+1\geqslant\log_{3x}\left(x^4+3x^2+2\right).$$

2. Решить уравнение $\dfrac{|\sin x+\cos x|}{\cos 2x}=2$.

3. Окружность пересекает стороны угла с вершиной P в точках A, B, C, D так, что точка A лежит между точками P и B, точка D лежит между точками P и C. Известно, что $PA=2$, $PC=8$, $\angle APD=30^\circ$ и площадь четырехугольника $ABCD$ равна $\dfrac{45}{2}$. Найти длину отрезка AD.

4. Найти все натуральные числа n, для которых по заданной сумме первых n членов арифметической прогрессии и заданной сумме её сотого, двухсотого и трёхсотого членов однозначно вычисляются все члены прогрессии.

5. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 лежит равносторонний треугольник ABC со сторонами, равными $2\sqrt{3}$. Точки M, N, K расположены соответственно на рёбрах AA_1, BC, AC так, что $AM:MA_1=3:1$, $BN=NC$, $AK:KC=2:1$. Найти объем призмы $ABCA_1B_1C_1$, если известно, что расстояние между прямыми MN и B_1K равно $\dfrac{1}{4}$.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_{4x}\left(x^2+1\right)\cdot\log_{4x}\left(x^2+3\right)+1\geqslant\log_{4x}\left(x^4+4x^2+3\right).$$

2. Решить уравнение $\dfrac{\sin x+\cos x}{|\cos 2x|}+3=0$.

3. Окружность пересекает стороны угла с вершиной P в точках A, B, C, D так, что точка A лежит между точками P и B, точка D лежит между точками P и C. Известно, что $PB=4\sqrt{3}$,

$PD = 2$, $\angle APD = 60^\circ$ и площадь четырехугольника $ABCD$ равна $\dfrac{33}{2}$. Найти длину отрезка BC.

4. Найти все натуральные числа n, для которых по заданному произведению первых n членов геометрической прогрессии с положительными членами и заданному произведению её сорокового и пятидесятого членов однозначно вычисляются все члены прогрессии.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1 равны 2. Точки M, N, K расположены соответственно на рёбрах AB, CC_1, AC так, что $AM : MB = 5 : 1$, $CN = NC_1$, $AK : KC = 2 : 1$. Найти объем призмы $ABCA_1B_1C_1$, если известно, что расстояние между прямыми MN и B_1K равно $\dfrac{1}{2}$.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\log_{3x}\left(x^2+1\right)\cdot\log_{3x}\left(2x^2+1\right)+1 \geqslant \log_{3x}\left(2x^4+3x^2+1\right).$$

2. Решить уравнение $\dfrac{|\sin x - \cos x|}{\cos 2x} = 3$.

3. Окружность пересекает стороны угла с вершиной P в точках A, B, C, D так, что точка A лежит между точками P и B, точка D лежит между точками P и C. Известно, что $PA = 2$, $PC = 6$, $\angle APD = 45^\circ$ и площадь четырехугольника $ABCD$ равна $12\sqrt{2}$. Найти длину отрезка BD.

4. Найти все натуральные числа n, для которых по заданной сумме первых n членов арифметической прогрессии и заданной сумме её шестисотого, семисотого и восьмисотого членов однозначно вычисляются все члены прогрессии.

5. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 лежит равносторонний треугольник ABC со сторонами, равными 8. Точки M, N, K расположены соответственно на рёбрах AB, CC_1, BC так, что $AM : MB = 1 : 3$, $CN = NC_1$, $BK = KC$. Найти объем призмы $ABCA_1B_1C_1$, если известно, что расстояние между прямыми MN и A_1K равно 1.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\log_{4x}\left(2x^2+1\right)\cdot\log_{4x}\left(x^2+3\right)+1\geqslant\log_{4x}\left(2x^4+7x^2+3\right).$$

2. Решить уравнение $\dfrac{\sin x-\cos x}{|\cos 2x|}+2=0$.

3. Окружность пересекает стороны угла с вершиной P в точках A, B, C, D так, что точка A лежит между точками P и B, точка D лежит между точками P и C. Известно, что $PB=12$, $PD=3$, $\angle APD=30^\circ$ и площадь четырехугольника $ABCD$ равна $\dfrac{45}{4}$. Найти длину отрезка AC.

4. Найти все натуральные числа n, для которых по заданному произведению первых n членов геометрической прогрессии с положительными членами и заданному произведению её девяностого и сотого членов однозначно вычисляются все члены прогрессии.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1 равны $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Точки M, N, K расположены соответственно на рёбрах CC_1, AB, BC так, что $CM:MC_1=1:2$, $AN:NB=1:3$, $BK:KC=1:3$. Найти объем призмы $ABCA_1B_1C_1$, если известно, что расстояние между прямыми MN и A_1K равно $\dfrac{3}{2}$.

2008 год

Вариант 1

1. На берегах реки расположены пункты А и Б. Почтовый катер отправился из А в Б с постоянной скоростью. Когда половина пути была пройдена, капитан катера обнаружил, что забыл взять почту. Вернувшись в А, катер снова отправился в Б. В результате общее время катера в пути оказалось в 2,25 раза больше, чем запланированное. Во сколько раз скорость катера в стоячей воде больше скорости реки?

2. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{2}\cos 3x}{1-2\cos 2x}=\sin 2x.$

3. В треугольнике ABC точка K расположена на стороне AC так, что $AK : KC = 2 : 1$, точки M и N выбраны на стороне BC так, что AM параллельно KN. Найти MN, если известно, что $BC = 10$, а площадь четырехугольника $AMNK$ составляет 80 % от площади треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2+(a+1)x-7=0$ не имеет решений в промежутке $[-3,-1)$.

5. Дана треугольная пирамида $SABC$, в основании которой лежит правильный треугольник ABC со стороной 3, ребро SA перпендикулярно основанию и имеет длину 4. Сфера касается рёбер SA, SB, AB, проходит через вершину C и вторично пересекает прямую SC в точке K. Найти длину отрезка CK.

Вариант 2

1. На берегах реки расположены пункты А и Б. Почтовый катер отправился из А в Б с постоянной скоростью. Когда треть пути была пройдена, капитан катера обнаружил, что забыл взять почту. Вернувшись в А, катер снова отправился в Б. В результате общее время катера в пути оказалось в 1,6 раза больше, чем запланированное. Во сколько раз скорость катера в стоячей воде больше скорости реки?

2. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{2}\sin 3x}{1+2\cos 2x}=\sin 2x.$

3. В треугольнике ABC точка K расположена на стороне AB так, что $AK : KB = 1 : 2$, точки M и N выбраны на стороне BC так, что AM параллельно KN. Найти MN, если известно, что $BC = 20$, а площадь четырехугольника $AMNK$ составляет 50 % от площади треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2-(a-2)x-3=0$ не имеет решений в промежутке $[2,3)$.

5. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, причем все рёбра призмы имеют единичную длину. Сфера касается отрезков

AA_1, AB, A_1B, проходит через вершину C_1 и вторично пересекает прямую BC_1 в точке K. Найти длину отрезка C_1K.

Вариант 3

1. На берегах реки расположены пункты А и Б. Почтовый катер отправился из А в Б с постоянной скоростью. Когда половина пути была пройдена, капитан катера обнаружил, что забыл взять почту. Вернувшись в А, катер снова отправился в Б. В результате общее время катера в пути оказалось в 1,8 раза больше, чем запланированное. Во сколько раз скорость катера в стоячей воде больше скорости реки?

2. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{3}\cos 3x}{1-2\cos 2x} = \sin 2x$.

3. В треугольнике ABC точка K расположена на стороне BC так, что $BK : KC = 3 : 1$, точки M и N выбраны на стороне AC так, что BM параллельно KN. Найти MN, если известно, что $AC = 25$, а площадь четырехугольника $BMNK$ составляет 30 % от площади треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (a+3)x - 5 = 0$ не имеет решений в промежутке $(-4, -1]$.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые рёбра пирамиды имеют длину 5. Сфера касается рёбер SA, SB, AB, проходит через вершину C и вторично пересекает прямую SC в точке K. Найти длину отрезка CK.

Вариант 4

1. На берегах реки расположены пункты А и Б. Почтовый катер отправился из А в Б с постоянной скоростью. Когда треть пути была пройдена, капитан катера обнаружил, что забыл взять почту. Вернувшись в А, катер снова отправился в Б. В результате общее время катера в пути оказалось в 1,8 раза больше, чем запланированное. Во сколько раз скорость катера в стоячей воде больше скорости реки?

2. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{3}\sin 3x}{1+2\cos 2x} = \sin 2x$.

3. В треугольнике ABC точка K расположена на стороне AB так, что $AK : KB = 3 : 2$, точки M и N выбраны на стороне AC так, что BM параллельно KN. Найти MN, если известно, что $AC = 60$, а площадь четырехугольника $BMNK$ составляет 48 % от площади треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - (a-4)x - 9 = 0$ не имеет решений в промежутке $(1, 2]$.

5. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Сфера касается отрезков AA_1, AB, A_1B, проходит через вершину C и вторично пересекает прямую A_1C в точке K. Найти длину отрезка CK.

2009 год

Вариант 1

1. Решить уравнение $\sin 2x = \sqrt{\dfrac{5}{4} - 2\cos^2 x}$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log_3\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\log_5\left(\dfrac{x}{2}\right)} \leqslant \log_x 8$.

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Хорда BK этой окружности параллельна касательной, проведенной к окружности в точке A, и пересекает сторону AC в точке N. Найти AN, если $AB = 3$, $AC = 9$.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^3 + x^2 - 5x + a = 0$ имеет три различных действительных корня.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ все рёбра имеют длину 1. Точка M на ребре SA расположена так, что $SM : MA = 1 : 2$. Найти площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой SB.

Вариант 2

1. Решить уравнение $\sin 2x + \sqrt{2 - 5\sin^2 x} = 0$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log_2(2x)}{\log_3(2x)} \geqslant \log_x 10$.

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Хорда CD этой окружности параллельна касательной, проведенной к окружности в точке B, и делит сторону AB в отношении $1 : 3$, считая от точки B. Найти сторону BC, если $AB = 4$.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^3 + x^2 - x + a = 0$ имеет только один действительный корень.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ все рёбра имеют длину 2. Точка M на ребре AD расположена так, что $AM : MD = 1 : 2$. Найти площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой SC.

Вариант 3

1. Решить уравнение $\sin 2x = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\sin^2 x}$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log_4\left(\dfrac{x}{3}\right)}{\log_5\left(\dfrac{x}{3}\right)} \leqslant \log_x 27$.

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Хорда BK этой окружности параллельна касательной, проведенной к окружности в точке C, и делит сторону AC в отношении $1 : 8$, считая от точки C. Найти сторону BC, если $AC = 9$.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $3x^3+9x^2+5x+a = 0$ имеет три различных действительных корня.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ все рёбра имеют длину 1. Точка M на ребре SD расположена так, что $SM : MD = 2$. Найти площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой SC.

Вариант 4

1. Решить уравнение $\sin 2x + \sqrt{\sqrt{2}\sin^2 x - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 0$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log_3(4x)}{\log_4(4x)} \geqslant \log_x 7$.

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Хорда CD этой окружности параллельна касательной, проведенной к окружности в точке A, и пересекает сторону AB в точке M. Найти AM, если $AB = 9$, $AC = 6$.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^3 + 4x^2 + 5x + a = 0$ имеет только один действительный корень.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ все рёбра имеют длину 1. Точка M на ребре CD расположена так, что $CM : MD = 2$. Найти площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой SB.

2010 год

Вариант 1

1. Рассматриваются всевозможные наборы из 2010 последовательных натуральных чисел, сумма которых делится на 51. Найдите, чему равно минимальное из всех наименьших чисел в этих наборах.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - 2\cos x - \cos 2x - 2\cos 3x} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC окружность, проходящая через вершины A и B, пересекает высоту BH и сторону BC в точках K и M соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $BK : KH = 3 : 1$, $BM = 2$, $MC = 4$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x - 3y| + x = 2, \\ |x + 3y| - x = 2. \end{cases}$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллелепипеда равны 12. Точки M, N и F — середины рёбер A_1B_1, CC_1, и AD соответственно. Плоскость FB_1D_1 пересекает отрезок MN в точке K. Найдите длину отрезка NK.

Вариант 2

1. Рассматриваются всевозможные наборы из 2010 последовательных натуральных чисел, сумма которых делится на 39. Найдите, чему равно наименьшее из всех наибольших чисел в этих наборах.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - 2\cos x + \cos 2x + 2\cos 3x} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC окружность, проходящая через вершины A и B, пересекает высоту BH и сторону BC в точках K и M соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $BK = 3$, $KH = 1$, $BM : MC = 1 : 4$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x + 2y| + x = 3, \\ |x - 2y| - x = 3. \end{cases}$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 8. Боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллелепипеда равны 7. Точки M, и N — середины рёбер AB и B_1C_1 соответственно. Плоскость A_1BD пересекает отрезок MN в точке K. Найдите длину отрезка NK.

Вариант 3

1. Рассматриваются всевозможные наборы из 2010 последовательных натуральных чисел, сумма которых делится на 57. Найдите, чему равно наименьшее из всех наименьших чисел в этих наборах.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2+\cos x-2\cos 2x+\cos 3x}=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right).$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC окружность, проходящая через вершины A и B, пересекает высоту BH и сторону BC в точках K и M соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $BK : KH = 2 : 1$, $BM = 2$, $MC = 8$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} |y-3x|+y=4, \\ |y+3x|-y=4. \end{cases}$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 3. Боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллелепипеда равны 2. Точки M, N, и F — середины рёбер BB_1, AD и C_1D_1 соответственно. Плоскость ACF пересекает отрезок MN в точке L. Найдите длину отрезка NL.

Вариант 4

1. Рассматриваются всевозможные наборы из 2010 последовательных натуральных чисел, сумма которых делится на 27. Найдите, чему равно наименьшее из всех наибольших чисел в этих наборах.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2+\cos x+2\cos 2x-\cos 3x}=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC окружность, проходящая через вершины A и B, пересекает высоту BH и сторону BC в точках K и M соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $BK = 5$, $KH = 1$, $BM = MC$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} |y+4x|+y=3, \\ |y-4x|-y=3. \end{cases}$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4. Боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллелепипеда равны 1. Точки M, N, и G — середины рёбер B_1C_1, CD и BB_1 соответственно. Плоскость GCD_1 пересекает отрезок MN в точке K. Найдите длину отрезка MK.

2011 год

Вариант 1

1. Решите уравнение $\cos(x-1)=\dfrac{\pi}{6}$.

2. Решите неравенство

$$\log_{|2x+3|}\sqrt{x^2+3x+5}\geqslant\log_{(4x^2+12x+9)}(x+8).$$

3. В ранобедренном треугольнике ABC со сторонами $AB=BC=4$, $AC=3$ точка M на стороне AC расположена так, что $AM=2$. Отрезок BM пересекает биссектрису AL треугольника ABC в точке P. Найдите отношение $AP:PL$.

4. Решите уравнение $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}\sin 2x}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|2x+1|=a\cdot\left(x-\dfrac{3}{2}\right)-1$ не имеет решений.

6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка P на ребре AD расположена так, что $AP:PD=4:1$. Через точку P проводится прямая, которая пересекает прямые A_1B и B_1D в точках M и N соответственно. Найдите чему равно отношение $MP:PN$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\sin(x+1)=\dfrac{\pi}{4}$.

2. Решите неравенство

$$\log_{|2x-1|}\sqrt{x^2-x+4}\geqslant\log_{(4x^2-4x+1)}(8-x).$$

3. В ранобедренном треугольнике ABC со сторонами $AB=BC=5$, $AC=3$ точка M на стороне AC расположена так, что $AM = 1$. Отрезок BM пересекает биссектрису AL треугольника ABC в точке P. Найдите отношение $AP : PL$.

4. Решите уравнение $2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{3}\sin 2x}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|2x+3| = a \cdot \left(x - \dfrac{1}{2}\right) - 1$ имеет хотя бы одно решение.

6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка P на ребре A_1D_1 расположена так, что $A_1P : PD_1 = 2 : 3$. Через точку P проводится прямая, которая пересекает прямые A_1B и B_1D в точках M и N соответственно. Найдите чему равно отношение $MP : PN$.

Вариант 3

1. Решите уравнение $\cos(x+1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

2. Решите неравенство

$$\log_{|2x-3|}\sqrt{x^2 - 3x + 4} \geqslant \log_{(4x^2 - 12x + 9)}(x+7).$$

3. В ранобедренном треугольнике ABC со сторонами $AB = BC = 4$, $AC = 3$ точка M на стороне AC расположена так, что $AM = 1$. Отрезок BM пересекает биссектрису AL треугольника ABC в точке P. Найдите отношение $AP : PL$.

4. Решите уравнение $2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{2 - \sqrt{3}\sin 2x}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|2x-1| = a \cdot \left(x + \dfrac{3}{2}\right) - 1$ не имеет решений.

6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка P на ребре AD расположена так, что $AP : PD = 3 : 2$. Через точку P проводится прямая, которая пересекает прямые A_1B и B_1D в точках M и N соответственно. Найдите чему равно отношение $MP : PN$.

Вариант 4

1. Решите уравнение $\sin(x-1) = -\dfrac{\pi}{6}$.

2. Решите неравенство

$$\log_{|2x+1|}\sqrt{x^2+x+1} \geqslant \log_{(4x^2+4x+1)}(x+5).$$

3. В ранобедренном треугольнике ABC со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 3$ точка M на стороне AC расположена так, что $AM = 2$. Отрезок BM пересекает биссектрису AL треугольника ABC в точке P. Найдите отношение $AP : PL$.

4. Решите уравнение $2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}\sin 2x}$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|2x-3| = a\cdot\left(x+\dfrac{1}{2}\right) - 1$ имеет хотя бы одно решение.

6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точка P на ребре A_1D_1 расположена так, что $A_1P : PD_1 = 1 : 4$. Через точку P проводится прямая, которая пересекает прямые A_1B и B_1D в точках M и N соответственно. Найдите чему равно отношение $MP : PN$.

2012 год

Вариант 1

1. Решите неравенство $\log_x\left(\dfrac{2+x-x^2}{x^2}\right) \leqslant -1$.

2. Найдите все решения уравнения $2\cos\left(x^2+1\right) = 1$.

3. Найдите площадь треугольника, если известно, что радиус вписанной в него окружности равен 2, радиус описанной окружности равен 7, а один из углов треугольника равен 60°.

4. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a|x|+|y| = 2, \\ |x|+2|y| = 5-2a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ отрезок, соединяющий середины рёбер AB и SD, образует с плоскостью $ABCD$ угол в 30° и имеет длину 5. Найдите объем этой пирамиды.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\log_x\left(\dfrac{4+4x-3x^2}{4x^2}\right)\leqslant -1$.

2. Найдите все решения уравнения $2\sin\left(x^2+2\right)=\sqrt{3}$.

3. Найдите периметр треугольника, если известно, что радиус вписанной в него окружности равен 5, радиус описанной окружности равен 13, а один из углов треугольника равен 60°.

4. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}|x|+a|y|=1,\\ 3|x|+|y|=4-3a\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ отрезок, соединяющий середины рёбер AD и SC, образует с плоскостью $ABCD$ угол величиной $\arccos 0{,}6$ и имеет длину 10. Найдите объем этой пирамиды.

Вариант 3

1. Решите неравенство $\log_x\left(\dfrac{6+x-2x^2}{x^2}\right)\leqslant -1$.

2. Найдите все решения уравнения $2\cos\left(x^2+2\right)+1=0$.

3. Найдите площадь треугольника, если известно, что радиус вписанной в него окружности равен 3, радиус описанной окружности равен 13, а один из углов треугольника равен 120°.

4. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}|y|-a|x|=1,\\ |x|+2|y|=3+2a\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ отрезок, соединяющий середины рёбер AB и SC, образует с плоскостью $ABCD$ угол в 60° и имеет длину 10. Найдите объем этой пирамиды.

Вариант 4

1. Решите неравенство $\log_x\left(\dfrac{8+2x-3x^2}{2x^2}\right)\leqslant -1$.

2. Найдите все решения уравнения $2\sin\left(x^2+2\right)+\sqrt{3}=0$.

3. Найдите периметр треугольника, если известно, что радиус вписанной в него окружности равен 3, радиус описанной окружности равен 14, а один из углов треугольника равен 120°.

4. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |x| - a|y| = 2, \\ 3|x| + 2|y| = 7 + 3a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ отрезок, соединяющий середины рёбер AD и SB, образует с плоскостью $ABCD$ угол величиной $\arccos 0{,}8$ и имеет длину 5. Найдите объем этой пирамиды.

2013 год

Вариант 1

1. Решить уравнение $\dfrac{10\cos^2 x + 9\sqrt{2}\cos x + 8\sin^2 x}{\sqrt{5\pi x - x^2}} = 0$.

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2} - 4^x) \geqslant -2$.

3. В параллелограмме $ABCD$ сторона AD имеет длину 6 см. Биссектриса угла ADC пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T. Длина отрезка KT равна 3 см. Найти величину угла BAD.

4. От пристани в центре озера под углами 120° друг к другу одновременно отплыли весельная лодка, моторная лодка и скоростной теплоход "Ракета". Скорости судов в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Через 2 часа расстояние между весельной лодкой и теплоходом "Ракета" равнялось $20\sqrt{31}$ км, а между весельной и моторной лодками — $20\sqrt{13}$ км. Найти скорости судов.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$. Точка M — середина ребра B_1C_1. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка DD_1 на плоскость A_1CM.

Вариант 2

1. Решить уравнение $\dfrac{6\cos^2 x + 7\sqrt{2}\sin x + 8\sin^2 x}{\sqrt{7\pi x - 2x^2}} = 0.$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3\sqrt{2}}}(3^{x+2} - 9^x) \geqslant -2.$

3. Из вершины B равнобедренного треугольника ABC на его основание AC опущена высота BD. Длина каждой из боковых сторон AB и BC треугольника ABC равна 8 см. В треугольнике BCD проведена медиана DE. В треугольник BDE вписана окружность, касающаяся стороны BE в точке K и стороны DE в точке M. Длина отрезка KM равна 2 см. Найти величину угла BAC.

4. Из точки пересечения трех дорог, расположенных под углами $120°$ друг к другу, одновременно стартуют по каждой из дорог пешеход, бегун и велосипедист. Скорости участников в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Через 2 часа расстояние между пешеходом и бегуном равнялось $10\sqrt{7}$ км, а между бегуном и велосипедистом — $10\sqrt{19}$ км. Найти скорости участников.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 4$. Точка K — середина ребра AD, точка M — середина ребра BB_1, точка N — середина ребра A_1B_1. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка C_1D_1 на плоскость KMN.

Вариант 3

1. Решить уравнение $\dfrac{14\cos^2 x + 9\sqrt{3}\cos x + 12\sin^2 x}{\sqrt{3\pi x - x^2}} = 0.$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(2^{x+3} - 4^x) \geqslant -2.$

3. В параллелограмме $ABCD$ сторона CD имеет длину 8 см. Биссектриса угла ADC пересекает прямую BC в точке Q. В треугольник CDQ вписана окружность, касающаяся стороны CD в точке M и стороны CQ в точке N. Длина отрезка MN равна 4 см. Найти величину угла ABC.

4. От архипелага, расположенного в океане, под углами $120°$ друг к другу одновременно отплыли моторная лодка, экскурсионный теплоход "Лайнер" и спасательный катер. Скорости судов в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Через 3 часа расстояние между моторной лодкой и катером равнялось 210 км, а между теплоходом и катером — $30\sqrt{61}$ км. Найти скорости судов.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер $AB = 6$, $AD = 8$, $AA_1 = \dfrac{36}{\sqrt{11}}$. Точка M — середина ребра AD, точка N — середина ребра CD. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка DD_1 на плоскость B_1MN.

Вариант 4

1. Решить уравнение $\dfrac{7\sqrt{3}\sin x - 10\sin^2 x - 12\cos^2 x}{\sqrt{9\pi x - 2x^2}} = 0.$

2. Решить неравенство $\log_{\sqrt{\frac{8}{9}}}(3^{x+1} - 9^x) \geqslant 2.$

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2 см. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E. В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке H. Длина отрезка MH равна 1 см. Найти величину угла BAD.

4. К главной дороге примыкает второстепенная под углом $60°$. От пересечения дорог одновременно стартуют по главной дороге велосипедист и водитель на мокике в противоположных направлениях, а по второстепенной дороге отправляется гужевая повозка, причем направления движения велосипедиста и гужевой повозки образуют угол в $60°$. Скорости транспортных средств образуют арифметическую прогрессию в следующем порядке: гужевая повозка, велосипед, мокик. Через 3 часа расстояние между гужевой повозкой и велосипедистом равнялось $15\sqrt{7}$ км, а между гужевой повозкой и мокиком — $30\sqrt{7}$ км. Найти скорости участников.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер $AB = 8$, $AD = 4$, $AA_1 = 4$. Точка K — середина ребра AD, точка M — середина ребра B_1C_1, точка N — середина ребра C_1D_1. Найти длину перпендикулярной проекции отрезка A_1B_1 на плоскость KMN.

2014 год

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$(\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 2\cos x + 1) \cdot \sqrt{8\pi x + 15\pi^2 - 16x^2} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{x+3} - x + 3) \geqslant -3 + \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2}{9}$.

3. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найти длину отрезка KC, если длина отрезка AK равна 3, а длина отрезка BC равна 2.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2 - 4|x| - a)^2 + 4(x^2 - 4|x| - a) + 6 = 2\cos\frac{16\pi}{a}$$

имеет ровно 2 корня.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер $AB = 6$, $AD = 5$, $AA_1 = 11$. Точка M лежит на ребре BB_1, причем $BM = 2\sqrt{7}$. Точка N лежит на ребре DD_1, причем $DN = 5$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, M и N.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$(\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 2\cos x + 1) \cdot \sqrt{32\pi x - 7\pi^2 - 16x^2} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(\sqrt{x+2} - x + 4) \geqslant -2 + \log_{\frac{1}{9}} \dfrac{2}{27}$.

3. В выпуклом четырехугольнике $MNPQ$ диагональ NQ является биссектрисой угла PNM и пересекается с диагональю PM в точке S. Найти длину отрезка NS, если известно, что вокруг четырехугольника $MNPQ$ можно описать окружность и что длина отрезка PQ равна 12, а длина отрезка SQ равна 9.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2 - 6|x| - a)^2 + 6(x^2 - 6|x| - a) + 12 = 3\cos\frac{24\pi}{a}$$

имеет ровно 2 корня.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер $AB = 8$, $AD = 4$, $AA_1 = 14$. Точка M лежит на ребре BB_1, причем $BM = 2\sqrt{17}$. Точка N лежит на ребре DD_1, причем $DN = 4$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, M и N.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$(\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - 2\sin x + 1) \cdot \sqrt{24\pi x + 7\pi^2 - 16x^2} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{x+5} - x + 5) \geqslant -2 + \log_{\frac{1}{4}}\frac{5}{8}$.

3. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке E. Найти длину отрезка BE, если известно, что диагональ BD является биссектрисой угла ABC и что длина отрезка BD равна 25, а длина отрезка CD равна 15.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2 - 8|x| - a)^2 + 8(x^2 - 8|x| - a) + 20 = 4\cos\frac{48\pi}{a}$$

имеет ровно 2 корня.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер $AB = 4$, $AD = 6$, $AA_1 = 8$. Точка M лежит на ребре BB_1, причем $BM = 1$. Точка N лежит на ребре DD_1, причем $DN = 6$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, M и N.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$(\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 2\sin x + 1) \cdot \sqrt{-16\pi x + 5\pi^2 - 16x^2} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+4}-x+6) \geqslant -4+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{5}{8}$.

3. Диагональ MP выпуклого четырехугольника $MNPQ$, вписанного в окружность, является биссектрисой угла NMQ и пересекается с диагональю NQ в точке T. Найти длину отрезка NP, если известно, что длина отрезка MT равна 5, а длина отрезка TP равна 4.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2-6|x|-a)^2+8(x^2-6|x|-a)+21=5\cos\frac{30\pi}{a}$$

имеет ровно 2 корня.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер $AB=7$, $AD=3$, $AA_1=24$. Точка M лежит на ребре BB_1, причем $BM=7\sqrt{7}$. Точка N лежит на ребре DD_1, причем $DN=3$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, M и N.

2015 год

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$(4\cos x-5\sin 2x+2\sin x\sin 2x)\cdot\log_{\left(2-\frac{2x}{\pi}\right)}\left(\tfrac{3\pi}{2}+x\right)=0.$$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(25x^2) \geqslant \log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6)$.

3. В прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 вписана окружность. Найти радиус окружности, касающейся этой вписанной окружности, гипотенузы и большего катета треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{32-14x-x^2}=x-a$$

имеет единственное решение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер $AB=3$, $AD=2$, $AA_1=4$. Точка M лежит на ребре DC, причем $DM=2$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A и M под углом $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$ к плоскости ABC.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$(6\sin x - 7\sin 2x + 2\sin 2x\cos x)\cdot \log_{\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{49}}(9x^2) \geqslant \log_{\frac{1}{7}}(x^2-3x-10)$.

3. В прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12 вписана окружность. Найти радиус окружности, касающейся этой вписанной окружности, гипотенузы и большего катета треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{28+12x-x^2} = x+a$$

имеет единственное решение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = \dfrac{8}{5}$. Точка M — середина ребра DC. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A и M под углом $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$ к плоскости ABC.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$(4\cos x + 3\sin 2x - 2\sin x\sin 2x)\cdot \log_{\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\pi}\right)}(\pi + x) = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{25}}(4x^2) \geqslant \log_{\frac{1}{5}}(x^2-2x-3)$.

3. В равнобедренный треугольник с высотой 12 и основанием 10 вписана окружность. Найти радиус окружности, касающейся этой вписанной окружности, основания и боковой стороны треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{20-8x-x^2} = x-a$$

имеет единственное решение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер $AB = 6\sqrt{3}$, $AD = 4$, $AA_1 = 6$. Точка N лежит на ребре A_1B_1, причем $A_1N = 4\sqrt{3}$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A и N под углом 60° к плоскости ABC.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$(6\sin x + 5\sin 2x - 2\sin 2x\cos x)\cdot\log_{\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)}(\pi + x) = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(16x^2) \geqslant \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x - 12)$.

3. В равнобедренный треугольник с высотой 8 и основанием 12 вписана окружность. Найти радиус окружности, касающейся этой вписанной окружности, основания и боковой стороны треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{24 + 10x - x^2} = x + a$$

имеет единственное решение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер $AB = 5$, $AD = 6$, $AA_1 = \dfrac{72}{13}$. Точка N середина ребра A_1B_1. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A и N под углом $\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}$ к плоскости ABC.

2016 год

Вариант 11

1. Решить уравнение

$$(6\sin x - 5\sin 2x + 6\sin 3x + \sin 4x)\cdot\sqrt{\frac{\pi^2}{x^2} - \frac{9}{4}} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{(1-|x-2|)}(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) \geqslant 0$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC тангенс угла B равен $\dfrac{12}{5}$. Точка M лежит на гипотенузе AB, точка N лежит на одном из катетов. Отрезок $MN = 20$, перпендикулярен гипотенузе и касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Исследовать все возможные случаи расположения отрезка MN. Найти площадь треугольника BMN в каждом из случаев.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{21-6|x-6|}=\sqrt{(x-a)^2-6}$$
имеет единственное решение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание — квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{2}$, высота параллелепипеда равна 4. Точка M — середина ребра AD, точка N — середина ребра CD, точка K — середина ребра B_1C_1. Найти длину ортогональной проекции ребра DD_1 на плоскость MNK.

Вариант 12

1. Решить уравнение
$$(6\cos x+7\sin 2x-6\cos 3x-\sin 4x)\cdot\sqrt{\frac{\pi^2}{x^2}-\frac{81}{64}}=0.$$

2. Решить неравенство $\log_{(1-|x-4|)}(x^2-7x+\frac{49}{4})\geqslant 0$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC тангенс угла B равен $\dfrac{5}{12}$. Точка M лежит на гипотенузе AB, точка N лежит на одном из катетов. Отрезок $MN=12$, перпендикулярен гипотенузе и касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Исследовать все возможные случаи расположения отрезка MN. Найти площадь треугольника BMN в каждом из случаев.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{6-4|x-3|}=\sqrt{(x-a)^2-2}$$
имеет единственное решение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание — квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота параллелепипеда равна 4. Точка M — середина ребра AD, точка N — середина ребра CD, точка K — середина ребра B_1C_1. Найти длину ортогональной проекции ребра CC_1 на плоскость MNK.

Вариант 13

1. Решить уравнение
$$(4\sin x + 3\sin 2x + 4\sin 3x - \sin 4x)\cdot\sqrt{\frac{\pi^2}{x^2} - \frac{16}{9}} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{(1-|x-5|)}(x^2 - 9x + \frac{81}{4}) \geqslant 0$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC тангенс угла B равен $\dfrac{8}{15}$. Точка M лежит на гипотенузе AB, точка N лежит на одном из катетов. Отрезок $MN = 15$, перпендикулярен гипотенузе и касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Исследовать все возможные случаи расположения отрезка MN. Найти площадь треугольника BMN в каждом из случаев.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{12 - 6|x-4|} = \sqrt{(x-a)^2 - 3}$$
имеет единственное решение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание — квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{2}$, высота параллелепипеда равна 6. Точка M — середина ребра AD, точка N — середина ребра CD, точка K — середина ребра B_1C_1. Найти длину ортогональной проекции ребра AA_1 на плоскость MNK.

Вариант 14

1. Решить уравнение
$$(6\cos x - 7\sin 2x - 6\cos 3x + \sin 4x)\cdot\sqrt{\frac{\pi^2}{x^2} - \frac{64}{49}} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{(1-|x-1|)}(x^2 - x + \frac{1}{4}) \geqslant 0$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC тангенс угла B равен $\dfrac{15}{8}$. Точка M лежит на гипотенузе AB, точка N лежит на одном из катетов. Отрезок $MN = 24$, перпендикулярен гипотенузе и касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Исследовать все возможные случаи расположения отрезка MN. Найти площадь треугольника BMN в каждом из случаев.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{14 - 4|x-5|} = \sqrt{(x-a)^2 - 2}$$
имеет единственное решение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание — квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота параллелепипеда равна 8. Точка M — середина ребра AD, точка N — середина ребра CD, точка K — середина ребра B_1C_1. Найти длину ортогональной проекции ребра CC_1 на плоскость MNK.

Вариант 21

1. Решить уравнение

$$(6\sin x - 5\sin 2x + 6\sin 3x + \sin 4x) \cdot \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{x^2}{\pi^2}} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) \geqslant 0$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC тангенс угла B равен $\dfrac{12}{5}$. Точка M лежит на гипотенузе AB, точка N лежит на одном из катетов. Отрезок $MN = 20$, перпендикулярен гипотенузе и касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Исследовать все возможные случаи расположения отрезка MN. Найти площадь треугольника BMN в каждом из случаев.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{21 - 6|x-6|} = \sqrt{(x-a)^2 - 6}$$

имеет единственное решение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание — квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{2}$, высота параллелепипеда равна 4. Точка M — середина ребра AD, точка N — середина ребра CD, точка K — середина ребра B_1C_1. Найти двугранный угол, образованный плоскостью MNK с плоскостью основания параллелепипеда ABC.

Вариант 22

1. Решить уравнение

$$(6\cos x + 7\sin 2x - 6\cos 3x - \sin 4x) \cdot \sqrt{\frac{64}{81} - \frac{x^2}{\pi^2}} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 7x + \frac{49}{4}) \geqslant 0$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC тангенс угла B равен $\frac{5}{12}$. Точка M лежит на гипотенузе AB, точка N лежит на одном из катетов. Отрезок $MN = 12$, перпендикулярен гипотенузе и касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Исследовать все возможные случаи расположения отрезка MN. Найти площадь треугольника BMN в каждом из случаев.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{6 - 4|x - 3|} = \sqrt{(x - a)^2 - 2}$$
имеет единственное решение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание — квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота параллелепипеда равна 4. Точка M — середина ребра AD, точка N — середина ребра CD, точка K — середина ребра B_1C_1. Найти двугранный угол, образованный плоскостью MNK с плоскостью основания параллелепипеда ABC.

Вариант 23

1. Решить уравнение
$$(4\sin x + 3\sin 2x + 4\sin 3x - \sin 4x) \cdot \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{x^2}{\pi^2}} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 9x + \frac{81}{4}) \geqslant 0$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC тангенс угла B равен $\frac{8}{15}$. Точка M лежит на гипотенузе AB, точка N лежит на одном из катетов. Отрезок $MN = 15$, перпендикулярен гипотенузе и касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Исследовать все возможные случаи расположения отрезка MN. Найти площадь треугольника BMN в каждом из случаев.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{12 - 6|x - 4|} = \sqrt{(x - a)^2 - 3}$$
имеет единственное решение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание — квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{2}$, высота параллелепипеда равна 6. Точка M — середина ребра AD, точка N — середина ребра CD, точка K — середина ребра B_1C_1. Найти двугранный угол, образованный плоскостью MNK с плоскостью основания параллелепипеда ABC.

Вариант 24

1. Решить уравнение
$$(6\cos x - 7\sin 2x - 6\cos 3x + \sin 4x)\cdot\sqrt{\frac{49}{64}-\frac{x^2}{\pi^2}} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - x + \frac{1}{4}) \geqslant 0$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC тангенс угла B равен $\dfrac{15}{8}$. Точка M лежит на гипотенузе AB, точка N лежит на одном из катетов. Отрезок $MN = 24$, перпендикулярен гипотенузе и касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Исследовать все возможные случаи расположения отрезка MN. Найти площадь треугольника BMN в каждом из случаев.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{14-4|x-5|} = \sqrt{(x-a)^2-2}$$
имеет единственное решение.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание — квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота параллелепипеда равна 8. Точка M — середина ребра AD, точка N — середина ребра CD, точка K — середина ребра B_1C_1. Найти двугранный угол, образованный плоскостью MNK с плоскостью основания параллелепипеда ABC.

2017 год

Вариант 11

1. Решить уравнение
$$\lg\left(49-x^2\right)\cdot\frac{\sin 2x\cdot\sin 3x + \cos 4x\cdot\cos x - 5\cos^2 x + 3\cos x}{\sqrt{\sin^2 x - 3\sin x}} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{|x+\frac{3}{2}|}(1-(x+2)^2) > 0$.

3. Центры двух окружностей находятся на расстоянии 26. Их радиусы равны 7 и 17. К окружностям проведена общая касательная прямая. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания прямой с окружностями и середина отрезка, соединяющего центры окружностей.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x-3|+|y-1|)\cdot(x^2+y^2-16)=0, \\ |x|-y-a=0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=12$, $BC=16$. Все боковые ребра пирамиды имеют длину $\sqrt{244}$. Найти расстояние между прямыми, содержащими ребра SA и BC данной пирамиды.

Вариант 12

1. Решить уравнение

$$\lg\left(36-(x-\frac{\pi}{2})^2\right)\cdot\frac{\sin 2x\cdot\cos 3x-\sin x\cdot\cos 4x+9\sin^2 x-5\sin x}{\sqrt{\cos^2 x-5\cos x}}=0.$$

2. Решить неравенство $\log_{|x+\frac{9}{2}|}(1-(x+5)^2)>0$.

3. Центры двух окружностей находятся на расстоянии 34. Их радиусы равны 7 и 23. К окружностям проведена общая касательная прямая. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания прямой с окружностями и середина отрезка, соединяющего центры окружностей.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x+4|+|y+1|)\cdot(x^2+y^2-25)=0, \\ |x|+y-a=0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 48$, $BC = 14$. Все боковые ребра пирамиды имеют длину $\sqrt{626}$. Найти расстояние между прямыми, содержащими ребра SB и AC данной пирамиды.

Вариант 13

1. Решить уравнение

$$\lg\left(64 - x^2\right) \cdot \frac{\sin 2x \cdot \sin 3x + \cos 4x \cdot \cos x + 7\cos^2 x + 4\cos x}{\sqrt{\sin^2 x - 4\sin x}} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{|x+\frac{1}{2}|}(1 - (x+1)^2) > 0$.

3. Центры двух окружностей находятся на расстоянии 82. Их радиусы равны 31 и 49. К окружностям проведена общая касательная прямая. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания прямой с окружностями и середина отрезка, соединяющего центры окружностей.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x+2| + |y-1|) \cdot (x^2 + y^2 - 9) = 0, \\ |x| - y + a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 10$, $BC = 24$. Все боковые ребра пирамиды имеют длину $\sqrt{269}$. Найти расстояние между прямыми, содержащими ребра SA и BC данной пирамиды.

Вариант 14

1. Решить уравнение

$$\lg\left(49 - (x + \frac{\pi}{2})^2\right) \cdot \frac{\sin 2x \cdot \cos 3x - \sin x \cdot \cos 4x - 11\sin^2 x - 6\sin x}{\sqrt{\cos^2 x - 2\cos x}} = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{|x+\frac{7}{2}|}(1 - (x+4)^2) > 0$.

3. Центры двух окружностей находятся на расстоянии 74. Их радиусы равны 23 и 47. К окружностям проведена общая касательная прямая. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания прямой с окружностями и середина отрезка, соединяющего центры окружностей.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x-5|+|y+1|)\cdot(x^2+y^2-36) = 0, \\ |x|+y+a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 80$, $BC = 18$. Все боковые ребра пирамиды имеют длину $\sqrt{1690}$. Найти расстояние между прямыми, содержащими ребра SB и AC данной пирамиды.

Вариант 21

1. Решить уравнение

$$\lg(49-x^2)\cdot(\sin 2x\cdot\sin 3x+\cos 4x\cdot\cos x-5\cos^2 x+3\cos x) = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{|x+\frac{3}{2}|}\frac{1}{5} > 0$.

3. Центры двух окружностей находятся на расстоянии 26. Их радиусы равны 7 и 17. Найти длину отрезка общей касательной к этим окружностям, заключенного между точками касания.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-16 = 0, \\ |x|-y-a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$, $BC = 16$. Все боковые ребра пирамиды имеют длину $\sqrt{244}$. Найти расстояние между прямыми, содержащими ребра SA и BC данной пирамиды.

Вариант 22

1. Решить уравнение

$$\lg(36-x^2)\cdot(\sin 2x\cdot\cos 3x-\sin x\cdot\cos 4x+9\sin^2 x-5\sin x)=0.$$

2. Решить неравенство $\log_{|x+\frac{9}{2}|}\frac{1}{4}>0$.

3. Центры двух окружностей находятся на расстоянии 34. Их радиусы равны 7 и 23. Найти длину отрезка общей касательной к этим окружностям, заключенного между точками касания.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-25=0,\\ |x|+y-a=0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=48$, $BC=14$. Все боковые ребра пирамиды имеют длину $\sqrt{626}$. Найти расстояние между прямыми, содержащими ребра SB и AC данной пирамиды.

Вариант 23

1. Решить уравнение

$$\lg(64-x^2)\cdot(\sin 2x\cdot\sin 3x+\cos 4x\cdot\cos x+7\cos^2 x+4\cos x)=0.$$

2. Решить неравенство $\log_{|x+\frac{1}{2}|}\frac{1}{7}>0$.

3. Центры двух окружностей находятся на расстоянии 82. Их радиусы равны 31 и 49. Найти длину отрезка общей касательной к этим окружностям, заключенного между точками касания.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-9=0,\\ |x|-y+a=0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 10$, $BC = 24$. Все боковые ребра пирамиды имеют длину $\sqrt{269}$. Найти расстояние между прямыми, содержащими ребра SA и BC данной пирамиды.

Вариант 24

1. Решить уравнение

$$\lg(25 - x^2) \cdot (\sin 2x \cdot \cos 3x - \sin x \cdot \cos 4x - 11 \sin^2 x - 6 \sin x) = 0.$$

2. Решить неравенство $\log_{|x+\frac{7}{2}|} \frac{1}{8} > 0$.

3. Центры двух окружностей находятся на расстоянии 74. Их радиусы равны 23 и 47. Найти длину отрезка общей касательной к этим окружностям, заключенного между точками касания.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 36 = 0, \\ |x| + y + a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 80$, $BC = 18$. Все боковые ребра пирамиды имеют длину $\sqrt{1690}$. Найти расстояние между прямыми, содержащими ребра SB и AC данной пирамиды.

Р А З Д Е Л 2

ОТВЕТЫ

1991 год

Вариант 1

1. При $a=\sqrt{2}$ $x=2$; при $a\in(\sqrt{2},+\infty)$ $x_1=a^{-2+\sqrt{4+6\log_a 2}}$, $x_2=a^{2-\sqrt{4-2\log_a 2}}$. **2.** $\alpha=\arccos(\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2})$. **3.** $c=\frac{4}{5}$; $S_{\min}=\frac{48}{25}\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$. **4.** Указание: точки пересечения окружностей с катетами являются основаниями перпендикуляров, проведенных к катетам из основания высоты, опущенной на гипотенузу. **5.** $\frac{l\pi}{8}+2\pi k$, $l=6,\,7,\,11,\,12,\,14\,;\ k\in Z$.

Вариант 2

1. При $a\in(0;1)$, $x_1=a^{\sqrt{2-2a}-1}$, $x_2=a^{1-\sqrt{2a+2}}$ **2.** $\varphi=2\arccos\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$. **3.** $c=9$, $S_{\min}=\frac{361}{2916}=\left(\frac{19}{54}\right)^2$. **4.** Указание: если KH — перпендикуляр к диаметру AB, то $AK\cdot AC=AH\cdot AB$ и $BK\cdot BD=BH\cdot AB$. **5.** $\frac{5\pi}{12}+2\pi k$, $\frac{13\pi}{12}+2\pi n$, $k,n\in Z$.

1992 год

Вариант 1

1. $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2};\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$. **2.** $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, $x_2=1$, $x_3=-1-\sqrt{2}$. **3.** 56. **4.** $-3<a<-\frac{12}{7}$, $1<a<\frac{4}{3}$. **5.** 16.

Вариант 2

1. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(0; \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)$. **2.** $x_1 = \pi k$, $k \in Z$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$. **3.** 70. **4.** $-\frac{1}{3} < a < 0$, $\frac{19}{7} < a < 4$. **5.** 32.

Вариант 3

1. $\left(-\frac{1}{4}; \frac{3-\sqrt{11}}{2}\right) \cup \left(0; \frac{3+\sqrt{11}}{2}\right)$. **2.** $x_1 = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, $x_2 = 3 - \sqrt{6}$, $x_3 = 5$. **3.** $40\sqrt{6}$. **4.** $-9 < a < -\frac{23}{3}$, $0 < a < \frac{1}{2}$. **5.** 24.

Вариант 4

1. $\left(\frac{7}{2}; \frac{11-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(4; \frac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$. **2.** $x_1 = 2\pi k$, $k \in Z$, $x_2 = 4 - \sqrt{2}$, $x_3 = 4$. **3.** 36. **4.** $\frac{1}{2} < a < 1$, $\frac{26}{3} < a < 10$. **5.** 16.

1993 год

Вариант 1

1. 60 км/ч. **2.** $x = \pm\arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + 2\pi k, k \in Z$. **3.** $15\sqrt{10}$ и $9\sqrt{10}$.
4. $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{4}.\right)$. **5.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Вариант 2

1. 15 км/ч. **2.** $x = (-1)^k \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \pi k, k \in Z$. **3.** $\frac{24000}{169}$.
4. $(3; 4)$. **5.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Вариант 3

1. 5 км/ч. (Предполагается, что скорость пешехода не может быть очень большой.) **2.** $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. **3.** $4\sqrt{3}$.
4. $(-4; -3) \cup (4; \infty)$. **5.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Вариант 4

1. 40км/ч и 50 км/ч. **2.** $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, k, m \in Z$. **3.** 3. **4.** $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. **5.** $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

1994 год

Вариант 1

1. $(18 - \sqrt{6}) : \sqrt{6}$. **2.** $\{0; 0\}$ или $\{-2; -1\}$. **3.** $AB = BC = 3\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$. **4.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \pi n$, $k, n \in Z$. **5.** $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{14}$.

Вариант 2

1. 1 : 5. **2.** $\{0; -4\}$ или $\{1; 5\}$. **3.** $AC = 2\sqrt{3}, AB = BC = 6$. **4.** $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, n, $k \in Z$. **5.** $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$.

Вариант 3

1. 5 : 4. **2.** $\left\{\frac{3}{2}; 2\right\}$ или $\left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}$. **3.** $2\sqrt{7}$. **4.** $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **5.** 1, $\sqrt{2}$, 2.

Вариант 4

1. 7 : 5. **2.** $\{0; 1\}$ или $\left\{-\frac{2}{7}; -\frac{27}{7}\right\}$. **3.** $AB = BC = 6$, $AC = 2\sqrt{6}$. **4.** $x = \pi k$, $k \in Z$. **5.** $3\sqrt{2}$, 6, $3\sqrt{6}$.

1995 год

Вариант 1

1. $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **2.** $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi k$, $n, k \in Z$. **3.** $5\sqrt{10}$. **4.** $6\sqrt{5} - 13 < a < 7 - 2\sqrt{5}$. **5.** $\sqrt{14}$.

Вариант 2

1. $x_1 = 4, x_2 = 2^{-\frac{5}{3}}$. **2.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k$, $n, k \in Z$. **3.** $3\sqrt{34}$. **4.** $-\frac{1}{3} < a < -\frac{1}{4}$. **5.** $\sqrt{35}$.

Вариант 3

1. $x_1 = 2, x_2 = 2^{-\frac{4}{3}}$. **2.** $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{4}{5}\right) + \pi k$, $n, k \in Z$. **3.** $3\sqrt{34}$. **4.** $2\sqrt{10} - 6 < a < 4 - \sqrt{10}$. **5.** 2.

Вариант 4

1. $x_1 = 4, x_2 = 2^{-\frac{5}{3}}$. **2.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3}{5}\right) + \pi k$, $n, k \in Z$. **3.** $5\sqrt{10}$. **4.** $-\frac{2}{3} < a < 0$. **5.** 3.

1996 год

Вариант 1

1. $(2;9)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{3}\right)$. **2.** $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \pi n$, $n \in Z$. **3.** $\frac{5}{32}S$. **4.** $[1 + \ln 2; \infty)$. **5.** 1.

Вариант 2

1. $(4;3)$ и $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{9}\right)$. **2.** $x = \frac{\pi}{4} - (-1)^n \arcsin\left(\sqrt{2} - 1\right) + \pi n$, $n \in Z$. **3.** $\frac{3}{16}S$. **4.** $(-\infty; 3\ln 3 - 3]$. **5.** $\frac{6}{5}$.

1997 год

Вариант 1

1. При $a = -1$ и $a = -\frac{1}{8}$. **2.** $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **3.** $\frac{\sqrt{265}}{2}$. **4.** $[\frac{11}{2}; 7) \cup (\frac{15}{2}; 8]$. **5.** $\frac{4\sqrt{2}}{5}$.

Вариант 2

1. При $a = 1$ и $a = \frac{3}{8}$. **2.** $x = -\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. **3.** $\sqrt{19}$. **4.** $[1; \frac{4}{3}) \cup (\frac{3}{2}; \frac{5}{3}]$. **5.** $\frac{6(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{5}$.

Вариант 3

1. При $a = 1$ и $a = -2$. **2.** $x = -\frac{\pi}{24} + \pi n,\ x = -\frac{5\pi}{24} + \pi k,\ n, k \in Z$. **3.** 9. **4.** $[-2; -\frac{3}{2}) \cup (-1; \frac{1}{2}]$. **5.** $\frac{4\sqrt{2}}{5}$.

Вариант 4

1. При $a = -1$ и $a = -\frac{1}{4}$. **2.** $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. **3.** $\sqrt{65}$. **4.** $[\frac{10}{3}; \frac{7}{2}) \cup (\frac{11}{3}; 4]$. **5.** $\frac{20\sqrt{3}}{13}$.

1998 год

Вариант 1

1. $(0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup [5^{\log_3 2}; \infty)$. **2.** $x = \pi k,\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ k, n \in Z$. **3.** $8\sqrt{2}$. **4.** $a_1 = 1;\ a_2 = -1;\ a_3 = -\frac{65}{16}$. **5.** $\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. $\big(0; 10^{-\log_5 2}\big] \cup (1; 4) \cup (4; \infty)$. **2.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ k, n \in Z$. **3.** 2. **4.** $a_1 = 1; a_2 = -1; a_3 = -\frac{37}{12}$. **5.** 1 и 4.

Вариант 3

1. $(0; 5^{-\lg 2}] \cup (1; 5) \cup (5; \infty)$. **2.** $x = \pi k,\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ k, n \in Z$. **3.** $\sqrt{7}$. **4.** $a_1 = 1; a_2 = -1; a_3 = -\frac{17}{8}$. **5.** 1 и 3.

Вариант 4

1. $(0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; 1) \cup [5^{\log_3 2}; \infty)$. **2.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ k, n \in Z$. **3.** 5. **4.** $a_1 = 1; a_2 = -1; a_3 = -\frac{5}{4}$. **5.** $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{3}$.

1999 год

Вариант 1

1. $(-\infty;-1]\cup\{5\}$. **2.** $10^{\log_2 3}$. **3.** $4\sqrt{15}$. **4.** $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin(\frac{-1+\sqrt{0{,}2}}{\sqrt{2}})+\pi n,\ k,n\in Z$. **5.** $V=\frac{25\sqrt{11}}{6}$.

Вариант 2

1. $(-\infty;-3]\cup\{2\}$. **2.** $10^{\log_3 2}$. **3.** 140.
4. $x=2\pi k$, $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos(\frac{\sqrt{5{,}4}-1}{\sqrt{2}})+2\pi n,\ k,n\in Z$. **5.** $V=\frac{64\sqrt{5}}{3}$.

Вариант 3

1. $(-\infty;-7]\cup\{2\}$. **2.** $10^{\log_2 6}$. **3.** $16\sqrt{31}$. **4.** $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin(\frac{1-\sqrt{5{,}8}}{\sqrt{2}})+\pi n,\ k,n\in Z$. **5.** $V=\frac{8\sqrt{5}}{3}$.

Вариант 4

1. $(-\infty;-6]\cup\{4\}$. **2.** $10^{\log_3 5}$. **3.** $8\sqrt{15}$. **4.** $x=\pi+2\pi k$, $x=-\frac{\pi}{4}\pm\arccos(\frac{1-\sqrt{0{,}3}}{\sqrt{2}})+2\pi n,\ k,n\in Z$. **5.** $V=3\sqrt{7}$.

2000 год

Вариант 1

1. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\ k,n\in Z$. **2.** $[\frac{1}{2};1)\cup[\frac{5}{4};\frac{3}{2})\cup[2;\frac{5}{2})$.
3. $\sqrt{17}$. **4.** $\frac{1}{10}$. **5.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{10}}$.

Вариант 2

1. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=-\operatorname{arctg}2+\pi n,\ k,n\in Z$. **2.** $(0;\frac{1}{4}]\cup(\frac{1}{2};\frac{3}{4}]\cup(\frac{5}{4};2]$.
3. $2\sqrt{19}$. **4.** $a=-\frac{1}{4}$. **5.** $\frac{5\sqrt{6}}{18}$.

Вариант 3

1. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n$, $k, n \in Z$. **2.** $[\frac{1}{4}; 1) \cup [\frac{3}{2}; \frac{7}{4}) \cup [2; \frac{9}{4})$. **3.** $2\sqrt{6}$. **4.** $a = \frac{1}{6}$. **5.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Вариант 4

1. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $k, n \in Z$. **2.** $[\frac{1}{4}; 1) \cup [\frac{17}{8}; \frac{13}{4}) \cup [4; \frac{17}{4})$. **3.** $\sqrt{61}$. **4.** $a = \frac{1}{8}$. **5.** $\frac{1}{\sqrt{22}}$.

2001 год

Вариант 1

1. 8 и 35. **2.** $(0; \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}; 2)$. **3.** $8\sqrt{6}$. **4.** $\alpha = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$. **5.** $3 : 5$.

Вариант 2

1. 54 и 53. **2.** $(0; \frac{1}{27}] \cup (1; +\infty)$. **3.** 288. **4.** $\alpha = 2\pi m$, $m \in Z$. **5.** $V = \frac{48\sqrt{10}}{5}$.

Вариант 3

1. 9 и 38. **2.** $(0; \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{2}; 8)$. **3.** $3\sqrt{5}$. **4.** $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$. **5.** $\arccos\frac{83}{86}$.

Вариант 4

1. 47 и 48. **2.** $(0; \frac{1}{27}] \cup (27; \infty)$. **3.** $2\sqrt{26}$. **4.** $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$. **5.** $V = \frac{32\sqrt{3}}{9}$.

2002 год

Вариант 1

1. $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$. **2.** $x = 8,\ x = \frac{\sqrt{177}-7}{4}$. **3.** $\sqrt{185}$.
4. $\frac{7}{2} \leqslant a < 4\,,\ 4 < a \leqslant 5$. **5.** $\frac{21}{11}$.

Вариант 2

1. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. **2.** $x = 3,\ x = \frac{\sqrt{57}-9}{4}$. **3.** 32.
4. $\frac{1}{3} \leqslant a < 1\,,\ 1 < a \leqslant 3$. **5.** $\frac{7}{11}$.

Вариант 3

1. $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$. **2.** $x = -3,\ x = \frac{15-\sqrt{89}}{4}$. **3.** $\sqrt{377}$.
4. $\frac{5}{2} \leqslant a < 3,\ 3 < a \leqslant 4$. **5.** $\frac{13}{23}$.

Вариант 4

1. $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. **2.** $x = 1,\ x = \frac{13-\sqrt{17}}{4}$. **3.** 88.
4. $\frac{7}{3} \leqslant a < 3,\ 3 < a \leqslant 5$. **5.** $\frac{23}{9}$.

2003 год

Вариант 1

1. 500 м. **2.** $x = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ x = \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{2})+\pi n,\ k, n \in Z$. **3.** $9\sqrt{2}+3\sqrt{10}$.
4. $\left(1; \frac{5-2\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left(2; \frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{5+2\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Вариант 2

1. 10 мин. **2.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = -\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{5}) + \pi n,\ k, n \in Z$. **3.** $\frac{5}{2}\sqrt{17}$.
4. $\left(2; \frac{11-3\sqrt{5}}{2}\right] \cup (3; 4) \cup \left[\frac{11+3\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

Вариант 3

1. 600 м. **2.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = -\operatorname{arctg}(2\sqrt{3}) + \pi n,\ k, n \in Z$. **3.** $\frac{1}{2}\sqrt{26}$. **4.** $\left(3; \frac{27-5\sqrt{17}}{2}\right] \cup (4; 6) \cup \left[\frac{27+5\sqrt{17}}{2}; \infty\right)$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$.

Вариант 4

1. 20 мин. **2.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{7}) + \pi n,\ k, n \in Z$. **3.** $4\sqrt{10}$. **4.** $\left(4; \frac{29-5\sqrt{17}}{2}\right] \cup (5; 7) \cup \left[\frac{29+5\sqrt{17}}{2}; \infty\right)$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{24}{7}$.

2004 год

Вариант 1

1. 2. **2.** $x = \frac{1}{2}$. **3.** $36\sqrt{6}$. **4.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$. **5.** 1.

Вариант 2

1. 5. **2.** $x = -\frac{1}{2}$. **3.** $50\sqrt{2}$. **4.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$. **5.** 3.

Вариант 3

1. 1. **2.** $x = \frac{1}{3}$. **3.** $12\sqrt{15}$. **4.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$. **5.** 2.

Вариант 4

1. 2. **2.** $x = -\frac{2}{3}$. **3.** $90\sqrt{3}$. **4.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$. **5.** 7.

2005 год

Вариант 1

1. 147. **2.** $x = \operatorname{arctg}\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} + \pi k,\ k \in Z$. **3.** $3\sqrt{7}$. **4.** $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 1\right) \cup \left[\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$. **5.** $\frac{9\sqrt{11}}{11}$.

Вариант 2

1. 316. **2.** $x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2\sqrt{5}} + \pi k,\ k \in Z$. **3.** $9\sqrt{35}$.
4. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right) \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$. **5.** $\frac{7}{3\sqrt{2}}$.

Вариант 3

1. 177. **2.** $x = \operatorname{arctg}(-2 \pm 2\sqrt{2}) + \pi k,\ k \in Z$. **3.** $18\sqrt{5}$.
4. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \cup [2; +\infty)$. **5.** $\frac{3}{4\sqrt{2}}$.

Вариант 4

1. 207. **2.** $x = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{7}\pm\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} + \pi k,\ k \in Z$. **3.** $4\sqrt{15}$.
4. $\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{3}; 1\right) \cup \left[\sqrt[3]{9}; +\infty\right)$. **5.** $\frac{12}{\sqrt{14}}$.

2006 год

Вариант 1

1. 60 м/мин. **2.** $\left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$. **3.** $5\sqrt{5}$, $2\sqrt{29}$. **4.** $x = \frac{\pi m}{13}$, $m \in Z$, $m \neq 13l$, $l \in Z$, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$, $n \neq 3k - 1$, $k \in Z$. **5.** 60°.

Вариант 2

1. 16 км/ч. **2.** $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right] \cup \left(1; \frac{7}{6}\right)$. **3.** $\sqrt{53}$, $7\sqrt{2}$. **4.** $x = \frac{\pi m}{11}$, $m \in Z$, $m \neq 11l$, $l \in Z$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$, $n \neq 5k - 3$, $k \in Z$. **5.** $\frac{\sqrt{30}}{2}$.

Вариант 3

1. 60 км/ч. **2.** $\left(-\frac{6}{5}; -1\right) \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **3.** $10\sqrt{2}$, $2\sqrt{29}$. **4.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$, $x = \frac{\pi n}{7}$, $n \in Z$, $n \neq 7k$, $k \in Z$. **5.** $\arcsin\frac{\sqrt{42}}{7}$.

Вариант 4

1. 4 км/ч. **2.** $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup \left(1; \frac{8}{7}\right)$. **3.** $6\sqrt{3}$, $\sqrt{93}$. **4.** $x = \frac{\pi m}{11}$, $m \in Z$, $m \neq 11l$, $l \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **5.** $4\sqrt{3}$.

2007 год

Вариант 1

1. $\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup[1;2]\cup\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$. **2.** $x=\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi m$, $m\in Z$, $x=\frac{5\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi n$, $n\in Z$. **3.** $\sqrt{13-6\sqrt{3}}$. **4.** $n\in N$, $n\neq 399$. **5.** 6.

Вариант 2

1. $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};2-\sqrt{3}\right]\cup[1;3]\cup\left[2+\sqrt{3};+\infty\right)$. **2.** $x=\frac{5\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+2\pi m$, $m\in Z$, $x=\frac{5\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+2\pi n$, $n\in Z$. **3.** $\sqrt{84-24\sqrt{3}}$. **4.** $n\in N$, $n\neq 89$. **5.** $8\sqrt{3}$.

Вариант 3

1. $\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};1\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$. **2.** $x=-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+2\pi m$, $m\in Z$, $x=\frac{3\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+2\pi n$, $n\in Z$. **3.** $3\sqrt{10-3\sqrt{2}}$. **4.** $n\in N$, $n\neq 1399$. **5.** $48\sqrt{2}$.

Вариант 4

1. $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[1;\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]\cup[3;+\infty)$. **2.** $x=-\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi m$, $m\in Z$, $x=-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi n$, $n\in Z$. **3.** $\sqrt{17-4\sqrt{3}}$. **4.** $n\in N$, $n\neq 189$. **5.** 54.

2008 год

Вариант 1

1. В 5 раз. **2.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in Z$, $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$, $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. **3.** 6. **4.** $(-\infty;-7]\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$. **5.** $\frac{16}{5}$.

Вариант 2

1. В 9 раз. **2.** $x = \pi m$, $m \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$. **3.** 6. **4.** $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \cup [4; +\infty)$. **5.** $\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

Вариант 3

1. В 4 раза. **2.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$, $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **3.** 6. **4.** $(-\infty; -7) \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **5.** $\frac{9}{5}$.

Вариант 4

1. В 6 раз. **2.** $x = \pi m$, $m \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. **3.** 18. **4.** $(-\infty; -4] \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **5.** $\frac{5}{6}\sqrt{3}$.

2009 год

Вариант 1

1. $x = \frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in Z$. **2.** $(1; 2) \cup \left(2; 2^{\log_5 27}\right]$. **3.** 1. **4.** $a \in \left(-\frac{175}{27}; 3\right)$. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Вариант 2

1. $x = -\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$. **2.** $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[2^{\log_3 10}; +\infty\right)$. **3.** 2. **4.** $a \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{27}; +\infty\right)$. **5.** $\sqrt{2}$.

Вариант 3

1. $x = \frac{\pi}{8} + \pi m$, $m \in Z$. **2.** $(1; 3) \cup \left(3; 4^{\log_5 27}\right]$. **3.** 3. **4.** $a \in \left(-\frac{25}{9}; \frac{7}{9}\right)$. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Вариант 4

1. $x = -\frac{3\pi}{8} + \pi m$, $m \in Z$. **2.** $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup \left[3^{\log_4 7}; +\infty\right)$. **3.** 4. **4.** $a \in \left(-\infty; \frac{50}{27}\right) \cup (2; +\infty)$. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2010 год

Вариант 1

1. 7. **2.** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **3.** $8\sqrt{2}$. **4.** $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$; $\left(t; \frac{2}{3}\right)$, где $t \in [-2; 2]$. **5.** 5.

Вариант 2

1. 2012. **2.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, $x = 2\pi k$, $k \in Z$. **3.** 8. **4.** $\left(0; \frac{3}{2}\right)$; $\left(t; -\frac{3}{2}\right)$, где $t \in [-3; 3]$. **5.** $\frac{27}{4}$.

Вариант 3

1. 12. **2.** $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$, $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **3.** 30. **4.** $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$; $\left(\frac{4}{3}; t\right)$, где $t \in [-4; 4]$. **5.** 1.

Вариант 4

1. 2017. **2.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$. **3.** 12. **4.** $\left(\frac{3}{4}; 0\right)$; $\left(-\frac{3}{4}; t\right)$, где $t \in [-3; 3]$. **5.** $\frac{9}{5}$.

2011 год

Вариант 1

1. $x = 1 \pm \arccos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi m$, $m \in Z$. **2.** $(-8; -3] \cup \left(-2; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup [1; +\infty)$. **3.** 7 : 2. **4.** $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$. **5.** $a \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right]$.
6. 3 : 2.

Вариант 2

1. $x = -1 + (-1)^m \cdot \arcsin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \pi m$, $m \in Z$. **2.** $(-\infty; -2] \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup [2; 8)$. **3.** 4 : 5. **4.** $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$.
5. $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup (2; +\infty)$. **6.** 4 : 1.

Вариант 3

1. $x = 1 \pm \arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi m$, $m \in Z$. **2.** $\left(-7; 2-\sqrt{7}\right] \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup \left[2+\sqrt{7}; +\infty\right)$. **3.** $7 : 8$. **4.** $x = (-1)^{m+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$. **5.** $a \in \left[-2; \frac{1}{2}\right)$. **6.** $1 : 4$.

Вариант 4

1. $x = 1 + (-1)^m \cdot \arcsin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi m$, $m \in Z$. **2.** $(-5; -2] \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup [2; +\infty)$. **3.** $16 : 5$. **4.** $x = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$. **5.** $a \in (-\infty; -2) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **6.** $2 : 3$.

2012 год

Вариант 1

1. $(0;1) \cup \left[\sqrt{2}; 2\right)$. **2.** $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{3} - 1 + 2\pi m}$, $m \in Z$, $m \geqslant 0$; $x = \pm\sqrt{-\frac{\pi}{3} - 1 + 2\pi k}$, $k \in Z$, $k \geqslant 1$. **3.** $18\sqrt{3}$. **4.** $a \in (-\infty; 2]$. **5.** 50.

Вариант 2

1. $(0;1) \cup \left[\frac{2}{\sqrt{3}}; 2\right)$. **2.** $x = \pm\sqrt{(-1)^m \cdot \frac{\pi}{3} - 2 + \pi m}$, $m \in Z$, $m \geqslant 1$. **3.** $36\sqrt{3}$. **4.** $a \in (-\infty; 1]$. **5.** $\frac{1536}{5} = 307{,}2$.

Вариант 3

1. $(0;1) \cup \left[\sqrt{3}; 2\right)$. **2.** $x = \pm\sqrt{\frac{2\pi}{3} - 2 + 2\pi m}$, $m \in Z$, $m \geqslant 0$; $x = \pm\sqrt{-\frac{2\pi}{3} - 2 + 2\pi k}$, $k \in Z$, $k \geqslant 1$. **3.** $42\sqrt{3}$. **4.** $a \in [-1; +\infty)$. **5.** $\frac{400}{\sqrt{3}}$.

Вариант 4

1. $(0;1) \cup \left[\sqrt{\frac{8}{3}}; 2\right)$. **2.** $x = \pm\sqrt{\frac{4\pi}{3} - 2 + 2\pi m}$, $m \in Z$, $m \geqslant 0$; $x = \pm\sqrt{-\frac{\pi}{3} - 2 + 2\pi k}$, $k \in Z$, $k \geqslant 1$. **3.** $30\sqrt{3}$. **4.** $a \in [-2; +\infty)$. **5.** $\frac{256}{5}$.

2013 год

Вариант 1

1. $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{4}$, $\frac{19\pi}{4}$. **2.** $(-\infty;0] \cup [\log_2 3;2)$. **3.** $60°$. **4.** 10, 30, 50 км/ч. **5.** $\frac{8}{13}$.

Вариант 2

1. $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{4}$. **2.** $(-\infty;1] \cup [\log_3 6;2)$. **3.** $30°$. **4.** 5, 10, 15 км/ч. **5.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Вариант 3

1. $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$. **2.** $(-\infty;0] \cup [\log_2 7;3)$. **3.** $120°$. **4.** 30, 40, 50 км/ч. **5.** $\frac{30}{\sqrt{11}}$.

Вариант 4

1. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{3}$. **2.** $(-\infty;-1] \cup \left[\log_3 \frac{8}{3};1\right)$. **3.** $120°$. **4.** 10, 15, 20 км/ч. **5.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

2014 год

Вариант 1

1. $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{2\pi}{3}$. **2.** $\{-3\}\cup[-2;6)$. **3.** 1. **4.** -2; $\frac{8}{3}$; 4; 8. **5.** 50.

Вариант 2

1. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, π, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$. **2.** $\{-2\} \cup [-1;7)$. **3.** 7. **4.** -6; 4; 6; 12. **5.** 56.

Вариант 3

1. $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, 0, π. **2.** $\{-5\} \cup \left[-4;\frac{11+\sqrt{41}}{2}\right)$. **3.** 16. **4.** -12; $\frac{24}{5}$; 6; 8; 12; 24. **5.** $6\sqrt{33}$.

Вариант 4

1. $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{6}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0. **2.** $\{-4\} \cup \left[-3; \frac{13+\sqrt{41}}{2}\right)$. **3.** 6. **4.** -5; 5; $\frac{15}{2}$; 15. **5.** 63.

2015 год

Вариант 1

1. $-\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $1-\frac{3\pi}{2}$. **2.** $\left(-\infty; -\sqrt{6}\right] \cup \left[5+\sqrt{31}; +\infty\right)$. **3.** $2 \cdot \frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1} = 2 \cdot \frac{11-2\sqrt{10}}{9}$. **4.** $\left\{-7-9\sqrt{2}\right\} \cup (-16; 2]$. **5.** $\frac{21}{2}$ или 6.

Вариант 2

1. $\pm\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, π, $1-\frac{\pi}{2}$. **2.** $\left(-\infty; -\sqrt{10}\right] \cup \left[3+\sqrt{19}; +\infty\right)$. **3.** $2 \cdot \frac{\sqrt{26}-1}{\sqrt{26}+1} = 2 \cdot \frac{27-2\sqrt{26}}{25}$. **4.** $[-14; 2) \cup \left\{8\sqrt{2}-6\right\}$. **5.** $\frac{5}{2}$ или 5.

Вариант 3

1. $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $1-\pi$. **2.** $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right] \cup \left[2+\sqrt{7}; +\infty\right)$. **3.** $\frac{10}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}-2}{\sqrt{13}+2} = \frac{10}{3} \cdot \frac{17-4\sqrt{13}}{9}$. **4.** $\left\{-4-6\sqrt{2}\right\} \cup (-10; 2]$. **5.** $28\sqrt{3}$ или $16\sqrt{3}$.

Вариант 4

1. $\pm\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, π, $1-\pi$. **2.** $\left(-\infty; -2\sqrt{3}\right] \cup \left[4+2\sqrt{7}; +\infty\right)$. **3.** $3 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = 3 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. **4.** $[-12; 2) \cup \left\{7\sqrt{2}-5\right\}$. **5.** $\frac{39}{2}$ или 39.

2016 год

Вариант 11

1. $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}$. **2.** $\left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup \left(2; \frac{5}{2}\right]$. **3.** $\frac{250}{3}$ или 300. **4.** $a \in \left(\frac{5}{2} - \sqrt{6}; \frac{5}{2} + \sqrt{6}\right) \cup \left(\frac{19}{2} - \sqrt{6}; \frac{19}{2} + \sqrt{6}\right) \cup \{0; 12\}$. **5.** $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

Вариант 12

1. $\pm\frac{8\pi}{9}, \pm\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$. **2.** $\left(3; \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; 4\right) \cup \left(4; \frac{9}{2}\right]$. **3.** $\frac{864}{5}$ или 360. **4.** $a \in \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}; \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2} - \sqrt{2}; \frac{9}{2} + \sqrt{2}\right) \cup \{0; 6\}$. **5.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Вариант 13

1. $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{3\pi}{4}$. **2.** $\left(4; \frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}; 5\right) \cup \left(5; \frac{11}{2}\right]$. **3.** $\frac{3375}{16}$ или 450. **4.** $a \in \left(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\right) \cup \left(6 - \sqrt{3}; 6 + \sqrt{3}\right) \cup \{0; 8\}$. **5.** $\frac{9\sqrt{10}}{5}$.

Вариант 14

1. $\pm\frac{7\pi}{8}, \pm\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. **2.** $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right]$. **3.** $\frac{768}{5}$ или 480. **4.** $a \in \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}; \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) \cup \left(\frac{17}{2} - \sqrt{2}; \frac{17}{2} + \sqrt{2}\right) \cup \{0; 10\}$. **5.** $\frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{33}}$.

Вариант 21

1. $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, 0$. **2.** $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$. **3.** $\frac{250}{3}$ или 300. **4.** $a \in \left(\frac{5}{2} - \sqrt{6}; \frac{5}{2} + \sqrt{6}\right) \cup \left(\frac{19}{2} - \sqrt{6}; \frac{19}{2} + \sqrt{6}\right) \cup \{0; 12\}$. **5.** $\operatorname{arctg} 2$.

Вариант 22

1. $\pm\frac{8\pi}{9}, \pm\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, 0$. **2.** $\left[\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right]$. **3.** $\frac{864}{5}$ или 360. **4.** $a \in \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}; \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2} - \sqrt{2}; \frac{9}{2} + \sqrt{2}\right) \cup \{0; 6\}$. **5.** $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

Вариант 23

1. $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{3\pi}{4}, 0$. **2.** $\left[\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}; \frac{11}{2}\right]$. **3.** $\frac{3375}{16}$ или 450. **4.** $a \in \left(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\right) \cup \left(6 - \sqrt{3}; 6 + \sqrt{3}\right) \cup \{0; 8\}$. **5.** $\operatorname{arctg} 3$.

Вариант 24

1. $\pm\frac{7\pi}{8}$, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, 0. **2.** $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$. **3.** $\frac{768}{5}$ или 480. **4.** $a\in\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2};\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{17}{2}-\sqrt{2};\frac{17}{2}+\sqrt{2}\right)\cup\{0;10\}$. **5.** $\operatorname{arctg}4\sqrt{2}$.

2017 год

Вариант 11

1. $-4\sqrt{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$. **2.** $\left(-\frac{5}{2};-2\right)\cup\left(-2;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};-1\right)$. **3.** 25 или 144. **4.** $a\in(-4;2)\cup(2;4)\cup\left\{4\sqrt{2}\right\}$. **5.** $\frac{24}{\sqrt{5}}$.

Вариант 12

1. $\frac{\pi}{2}-\sqrt{35}$, $-\frac{7\pi}{6}$, $-\pi$, $\frac{5\pi}{6}$, π. **2.** $\left(-\frac{11}{2};-5\right)\cup\left(-5;-\frac{9}{2}\right)\cup\left(-\frac{9}{2};-4\right)$. **3.** 64 или 225. **4.** $a\in(-5;3)\cup(3;5)\cup\left\{5\sqrt{2}\right\}$. **5.** $\frac{7\sqrt{2}}{5}$.

Вариант 13

1. $-3\sqrt{7}$, $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$. **2.** $\left(-\frac{3}{2};-1\right)\cup\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **3.** 81 или 1600. **4.** $a\in\left\{-3\sqrt{2}\right\}\cup(-3;-1)\cup(-1;3)$. **5.** $4\sqrt{5}$.

Вариант 14

1. $-\frac{\pi}{2}-4\sqrt{3}$, $-\pi$, $-\frac{5\pi}{6}$, π, $\frac{7\pi}{6}$. **2.** $\left(-\frac{9}{2};-4\right)\cup\left(-4;-\frac{7}{2}\right)\cup\left(-\frac{7}{2};-3\right)$. **3.** 144 или 1225. **4.** $a\in\left\{-6\sqrt{2}\right\}\cup(-6;-4)\cup(-4;6)$. **5.** $\frac{18}{\sqrt{10}}$.

Вариант 21

1. $\pm4\sqrt{3}$, $\pm\frac{5\pi}{3}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3}$. **2.** $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **3.** 10 или 24. **4.** $a\in(-4;4)\cup\left\{4\sqrt{2}\right\}$. **5.** $\frac{24}{\sqrt{5}}$.

Вариант 22

1. $\pm\sqrt{35}$, $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$, $\pm\pi$, 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$. **2.** $\left(-\frac{11}{2};-\frac{9}{2}\right)\cup\left(-\frac{9}{2};-\frac{7}{2}\right)$. **3.** 16 или 30. **4.** $a\in(-5;5)\cup\left\{5\sqrt{2}\right\}$. **5.** $\frac{7\sqrt{2}}{5}$.

Вариант 23

1. $\pm 3\sqrt{7}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3}$, $\pm\frac{4\pi}{3}$. **2.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **3.** 18 или 80. **4.** $a\in\left\{-3\sqrt{2}\right\}\cup(-3;3)$. **5.** $4\sqrt{5}$.

Вариант 24

1. $\pm 2\sqrt{6}$, $\pm\pi$, 0, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$. **2.** $\left(-\frac{9}{2};-\frac{7}{2}\right)\cup\left(-\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$. **3.** 24 или 70. **4.** $a\in\left\{-6\sqrt{2}\right\}\cup(-6;6)$. **5.** $\frac{18}{\sqrt{10}}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие **3**

Раздел 1. **Задачи выпускных экзаменов по математике СУНЦ НГУ** **4**

1.1. 1991 год (одногодичный поток) 4
1.2. 1992 год 5
1.3. 1993 год 7
1.4. 1994 год 9
1.5. 1995 год 12
1.6. 1996 год 14
1.7. 1997 год 15
1.8. 1998 год 17
1.9. 1999 год 19
1.10. 2000 год 21
1.11. 2001 год 23
1.12. 2002 год 25
1.13. 2003 год 28
1.14. 2004 год 30
1.15. 2005 год 33
1.16. 2006 год 35
1.17. 2007 год 38
1.18. 2008 год 40
1.19. 2009 год 43
1.20. 2010 год 45
1.21. 2011 год 48
1.22. 2012 год 50
1.23. 2013 год 52
1.24. 2014 год 55
1.25. 2015 год 57
1.26. 2016 год 59

1.27. 2017 год 64

Раздел 2. **Ответы** **70**
2.1. 1991 год 70
2.2. 1992 год 70
2.3. 1993 год 71
2.4. 1994 год 72
2.5. 1995 год 72
2.6. 1996 год 73
2.7. 1997 год 73
2.8. 1998 год 74
2.9. 1999 год 75
2.10. 2000 год 75
2.11. 2001 год 76
2.12. 2002 год 77
2.13. 2003 год 77
2.14. 2004 год 78
2.15. 2005 год 78
2.16. 2006 год 79
2.17. 2007 год 80
2.18. 2008 год 80
2.19. 2009 год 81
2.20. 2010 год 82
2.21. 2011 год 82
2.22. 2012 год 83
2.23. 2013 год 84
2.24. 2014 год 84
2.25. 2015 год 85
2.26. 2016 год 86
2.27. 2017 год 87

Учебное пособие

Никитин Александр Александрович,
Михеев Юрий Викторович,
Ляпунов Игорь Борисович

Варианты выпускных экзаменов по математике СУНЦ НГУ

Технический редактор *Т. В. Иванова*

Верстка *И. Б. Ляпунов*

Подписано в печать 15.06.2017 г.
Заказ № 13-17

Формат $60 \times 84/16$
Усл. печ. л. 5,4
Уч.-изд. л. 6,5
Тираж 400 экз.

Издательско-полиграфический центр НГУ
630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2