МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
УНИВЕРСИТЕТА

И. Б. ЛЯПУНОВ

ВАРИАНТЫ ВЫПУСКНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ СУНЦ НГУ ЗА 2018 ГОД

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК
2018

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
Л97

Л97 **Ляпунов, И. Б.**
Варианты выпускных экзаменов по математике СУНЦ НГУ за 2018 год: Учеб. пособие / И. Б. Ляпунов. — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018. — 49 с.

Сборник содержит задачи выпускных экзаменов по математике в 9 и 11-х классах, проводившихся в СУНЦ НГУ в 2018 г. Все задачи снабжены решениями или подробными указаниями, ответами и критериями оценок. Данное учебное пособие предназначено для учащихся СУНЦ НГУ, оканчивающих школу, учителей старших классов, а также для всех, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
Л97

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое издание содержит варианты выпускных экзаменов по математике 9 и 11-х классов СУНЦ НГУ за 2018 г. Расположение задач традиционное для такого рода изданий — по классам и вариантам. Продолжительность экзамена составляет 3 ч 55 мин. Из-за различия в семинарских программах выпускникам физико-математического и химического профиля 11 класса предлагались различные по трудности задач варианты, сответственно, 11—14 и 21—24. Выпускникам 9 класса предлагались варианты 911—914. Задачи для 9 класса публикуются впервые, они размещены после задач для 11 класса. Все задачи снабжены решениями или подробными указаниями, критериями оценок и ответами. Задачи настоящего сборника позволяют составить представление о требованиях к подготовке выпускников СУНЦ НГУ по математике.

Все задачи являются оригинальными, в том смысле, что составлены заново именно для этого экзамена, при этом часть идей по составлению задач заимствована из вступительных экзаменов ведущих вузов страны разных лет.

Пособие будет полезно как учащимся СУНЦ, оканчивающим школу, так и учителям старших классов, а также всем, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

Автор выражает благодарность своим коллегам к.п.н. Юрию Викторовичу Михееву и д.ф.-м.н. Вадиму Григорьевичу Пузаренко за полезные обсуждения проектов задач, а также составителям вариантов выездных вступительных экзаменов в филиалы НГУ начала 90-х гг. за полезную идею задачи по планиметрии в 11 классе.

И. Б. Ляпунов

Р А З Д Е Л 1
ЗАДАЧИ ВЫПУСКНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

2018 год, 11 класс

Вариант 11

1. а) Решить уравнение $2\cos x\cos 2x + 5\sqrt{2}\sin 2x - 10\cos x = 0$.

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{(25x^2)}(625x^4)\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\log_3(4-x)\right) \geqslant \log_{\frac{1}{3}}\left(\log_3(25-8x)\right).$$

3. В прямоугольный треугольник с площадью 50 вписан квадрат с площадью 16 таким образом, что две вершины квадрата лежат на гипотенузе треугольника, а две другие — на его катетах. Найти длину гипотенузы треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2-2a-3)\cdot 9^x + (a+1)\cdot 3^{x+1} + 1 > 0$ верно, для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC = BC = 30$, $AB = 10\sqrt{11}$. Все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину. Двугранный угол, при ребре AB, равен $\operatorname{arctg}\frac{9\sqrt{5}}{7}$. Шар касается прямых AD, BD, CD и основания ABC пирамиды. Найти объем шара, радиус которого в 18 раз меньше радиуса указанного шара.

Вариант 12

1. а) Решить уравнение $2\cos x\cos 2x + 9\sqrt{3}\sin 2x - 26\cos x = 0$.

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{(9x^2)}(81x^4)\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2(5-x)\right) \geqslant \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2(41-10x)\right).$$

3. В прямоугольный треугольник с площадью 96 вписан квадрат с площадью 36 таким образом, что две вершины квадрата лежат на гипотенузе треугольника, а две другие — на его катетах. Найти длину гипотенузы треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2+a-2)\cdot 9^x - (a-1)\cdot 3^{x+1} + 1 > 0$ верно, для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC = BC = 40$, $AB = 48$. Все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину. Двугранный угол, при ребре AB, равен $\operatorname{arctg}\frac{50\sqrt{2}}{7}$. Шар касается прямых AD, BD, CD и основания ABC пирамиды. Найти объем шара, радиус которого в 25 раз меньше радиуса указанного шара.

Вариант 13

1. а) Решить уравнение $2\sin x\cos 2x - 3\sqrt{2}\sin 2x - 6\sin x = 0$.

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_{(4x^2)}(16x^4)\right) + \log_{\frac{1}{5}}\left(\log_5(6-x)\right) \geqslant \log_{\frac{1}{5}}\left(\log_5(61-12x)\right).$$

3. В прямоугольный треугольник с площадью 200 вписан квадрат с площадью 64 таким образом, что две вершины квадрата лежат на гипотенузе треугольника, а две другие — на его катетах. Найти длину гипотенузы треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2+2a-8)\cdot 9^x - (a-2)\cdot 3^{x+1} + 1 > 0$ верно, для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC = BC = 70$, $AB = 40\sqrt{6}$. Все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину. Двугранный угол, при ребре AB, равен $\operatorname{arctg} 98\sqrt{2}$. Шар касается прямых AD, BD, CD и основания ABC пирамиды. Найти объем шара, радиус которого в 98 раз меньше радиуса указанного шара.

Вариант 14

1. а) Решить уравнение $2\sin x\cos 2x - 7\sqrt{3}\sin 2x - 22\sin x = 0$.

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0)$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{7}}\left(\log_{(16x^2)}(256x^4)\right) + \log_{\frac{1}{7}}\left(\log_7(3-x)\right) \geqslant \log_{\frac{1}{7}}\left(\log_7(13-6x)\right).$$

3. В прямоугольный треугольник с площадью 90 вписан квадрат с площадью 25 таким образом, что две вершины квадрата лежат на гипотенузе треугольника, а две другие — на его катетах. Найти длину гипотенузы треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2+3a-4)\cdot 4^x - (a-1)\cdot 2^{x+2} + 1 > 0$ верно, для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC = BC = 60$, $AB = 20\sqrt{11}$. Все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину. Двугранный угол, при ребре AB, равен $\operatorname{arctg}\frac{24}{7}$. Шар касается прямых AD, BD, CD и основания ABC пирамиды. Найти объем шара, радиус которого в 36 раз меньше радиуса указанного шара.

Вариант 21

1. а) Решить уравнение $\cos 2x + 5\sqrt{2}\sin x - 5 = 0$.

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{3}} \left(\log_3(4-x)\right) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} \left(\log_3(25-8x)\right).$$

3. В прямоугольный треугольник с площадью 50 вписан квадрат с площадью 16 таким образом, что две вершины квадрата лежат на гипотенузе треугольника, а две другие — на его катетах. Найти длину гипотенузы треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2-2a-3)\cdot x^2+3(a+1)\cdot x+1>0$ верно, для всех $x\in(-\infty;+\infty)$.

5. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC=BC=30$, $AB=10\sqrt{11}$. Все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину. Двугранный угол, при ребре AB, равен $\operatorname{arctg}\frac{9\sqrt{5}}{7}$. Шар касается ребер AD, BD, CD и основания ABC пирамиды. Найти объем шара, радиус которого в 18 раз меньше радиуса указанного шара.

Вариант 22

1. а) Решить уравнение $\cos 2x+9\sqrt{3}\sin x-13=0$.

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_2(5-x)\right) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_2(41-10x)\right).$$

3. В прямоугольный треугольник с площадью 96 вписан квадрат с площадью 36 таким образом, что две вершины квадрата лежат на гипотенузе треугольника, а две другие — на его катетах. Найти длину гипотенузы треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2+a-2)\cdot x^2-3(a-1)\cdot x+1>0$ верно, для всех $x\in(-\infty;+\infty)$.

5. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC=BC=40$, $AB=48$.

Все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину. Двугранный угол, при ребре AB, равен $\operatorname{arctg}\frac{50\sqrt{2}}{7}$. Шар касается ребер AD, BD, CD и основания ABC пирамиды. Найти объем шара, радиус которого в 25 раз меньше радиуса указанного шара.

Вариант 23

1. а) Решить уравнение $\cos 2x - 3\sqrt{2}\cos x - 3 = 0$.

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}} 2 + \log_{\frac{1}{5}} \left(\log_5(6 - x)\right) \geqslant \log_{\frac{1}{5}} \left(\log_5(61 - 12x)\right).$$

3. В прямоугольный треугольник с площадью 200 вписан квадрат с площадью 64 таким образом, что две вершины квадрата лежат на гипотенузе треугольника, а две другие — на его катетах. Найти длину гипотенузы треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2 + 2a - 8) \cdot x^2 - 3(a - 2) \cdot x + 1 > 0$ верно, для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC = BC = 70$, $AB = 40\sqrt{6}$. Все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину. Двугранный угол, при ребре AB, равен $\operatorname{arctg} 98\sqrt{2}$. Шар касается ребер AD, BD, CD и основания ABC пирамиды. Найти объем шара, радиус которого в 98 раз меньше радиуса указанного шара.

Вариант 24

1. а) Решить уравнение $\cos 2x - 7\sqrt{3}\cos x - 11 = 0$.

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0)$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{7}} 2 + \log_{\frac{1}{7}} \left(\log_7(3 - x)\right) \geqslant \log_{\frac{1}{7}} \left(\log_7(13 - 6x)\right).$$

3. В прямоугольный треугольник с площадью 90 вписан квадрат с площадью 25 таким образом, что две вершины квадрата лежат на гипотенузе треугольника, а две другие — на его катетах. Найти длину гипотенузы треугольника.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2 + 3a - 4) \cdot x^2 - 4(a-1) \cdot x + 1 > 0$ верно, для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC = BC = 60$, $AB = 20\sqrt{11}$. Все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину. Двугранный угол, при ребре AB, равен $\operatorname{arctg} \frac{24}{7}$. Шар касается ребер AD, BD, CD и основания ABC пирамиды. Найти объем шара, радиус которого в 36 раз меньше радиуса указанного шара.

2018 год, 9 класс

Вариант 911

1. Если теплоход и катер плывут по течению, то расстояние от пункта A до пункта B теплоход проходит в 3 раза быстрее, чем катер; при этом катер каждый час отстает от теплохода на 36 км. Если же они плывут против течения, то теплоход проходит путь от B до A в 4 раза быстрее катера. Найдите скорость течения.

2. Найти разность арифметической прогрессии, у которой сумма пятого и девятого членов равна 34, а произведение этих же членов равно 253.

3. В равнобедренный треугольник с углом при основании α вписан квадрат таким образом, что две вершины квадрата лежат на основании треугольника, а две другие — на его боковых сторонах. Найти значение $\operatorname{tg}\alpha$, при котором площадь квадрата будет составлять $\frac{8}{25}$ площади треугольника.

4. Решить неравенство $\dfrac{2x^2 + 15x + 27}{(2x+9)(x+1)} \leqslant 2|x|$.

5. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 = y^2, \\ (x-a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$
имеет ровно 4 решения.

Вариант 912

1. Если пароход и катер плывут против течения реки, то расстояние от пункта A до пункта B катер проходит в 3,5 раза быстрее, чем пароход; при этом пароход каждый час отстает от катера на 15 км. Если же они плывут по течению, то катер проходит путь от B до A в 2,5 раза быстрее парохода. Найдите скорость течения.

2. Найти разность арифметической прогрессии, у которой сумма четвертого и восемнадцатого членов равна 34, а произведение этих же членов равно 240.

3. В равнобедренный треугольник с углом при основании α вписан квадрат таким образом, что две вершины квадрата лежат на основании треугольника, а две другие — на его боковых сторонах. Найти значение $\operatorname{tg}\alpha$, при котором площадь квадрата будет составлять $\frac{12}{49}$ площади треугольника.

4. Решить неравенство $\dfrac{2x^2+17x+30}{(2x+5)(x+1)} \leqslant 2|x|$.

5. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 = y^2, \\ x^2 + (y-a)^2 = 25 \end{cases}$$
имеет ровно 4 решения.

Вариант 913

1. Если теплоход и катер плывут по течению, то расстояние от пункта A до пункта B теплоход проходит в 2,5 раза быстрее, чем катер; при этом катер каждый час отстает от теплохода на 21 км. Если же они плывут против течения, то теплоход проходит путь от B до A в 4,5 раза быстрее катера. Найдите скорость течения.

2. Найти разность арифметической прогрессии, у которой сумма четвертого и восьмого членов равна 36, а произведение этих же членов равно 260.

3. В равнобедренный треугольник с углом при основании α вписан квадрат таким образом, что две вершины квадрата лежат на основании треугольника, а две другие — на его боковых сторонах. Найти значение $\operatorname{tg}\alpha$, при котором площадь квадрата будет составлять $\frac{24}{49}$ площади треугольника.

4. Решить неравенство $\dfrac{2x^2+13x-45}{(2x-5)(x+2)} \leqslant 2|x|$.

5. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y^2, \\ (x-a)^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

Вариант 914

1. Если пароход и катер плывут против течения реки, то расстояние от пункта A до пункта B катер проходит в 2,5 раза быстрее, чем пароход; при этом пароход каждый час отстает от катера на 12 км. Если же они плывут по течению, то катер проходит путь от B до A в $\frac{5}{3}$ раза быстрее парохода. Найдите скорость течения.

2. Найти разность арифметической прогрессии, у которой сумма пятого и тринадцатого членов равна 32, а произведение этих же членов равно 192.

3. В равнобедренный треугольник с углом при основании α вписан квадрат таким образом, что две вершины квадрата лежат на основании треугольника, а две другие — на его боковых сторонах. Найти значение $\operatorname{tg}\alpha$, при котором площадь квадрата будет составлять $\frac{12}{25}$ площади треугольника.

4. Решить неравенство $\dfrac{2x^2+17x+35}{(2x+7)(x+2)} \leqslant 2|x|$.

5. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y^2, \\ x^2 + (y-a)^2 = 16 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

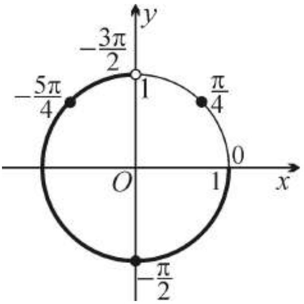
Р А З Д Е Л 2

УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ ОЦЕНОК

2018 год, 11 класс

Вариант 11

1. а) Проведем необходимые преобразования исходного уравнения $2 \cdot \cos x \cdot \cos 2x + 5 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - 10 \cdot \cos x = 0$, $2 \cdot \cos x \cdot (\cos 2x + 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin x - 5) = 0$, $\cos x = 0$ или $1 - 2 \cdot \sin^2 x + {}$ $+5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin x - 5 = 0$. Для $\cos x = 0$, имеем $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Во втором уравнении $2 \cdot \sin^2 x - 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin x + 4 = 0$ произведем замену $t = \sin x, t \in [-1; 1]$, получим $2t^2 - 5\sqrt{2}t + 4 = 0$, $t_{1,2} = \frac{5\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{4}$, $t_1 = 2\sqrt{2} > 1$ — посторонний, $t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. После обратной замены имеем, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$.



б) Отберем все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$, с помощью тригонометрического круга, $x = -\frac{5\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$;

б) $x = -\frac{5\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{2}$.

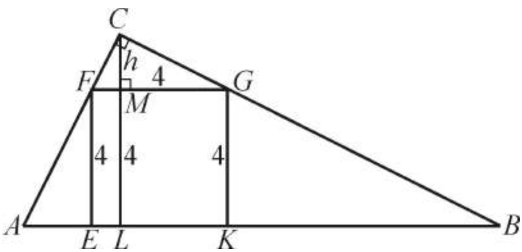
2. Указания. ОДЗ: $\begin{cases} 25x^2 > 0, \\ 25x^2 \neq 1, \\ 625x^4 > 0, \\ \log_{(25x^2)}(625x^4) > 0, \\ 4-x > 0, \\ \log_3(4-x) > 0, \\ 25-8x > 0, \\ \log_3(25-8x) > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm\dfrac{1}{5}, \\ x \neq 0, \\ 2 > 0, \\ 4-x > 0, \\ 4-x > 1, \\ 25-8x > 0, \\ 25-8x > 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm\dfrac{1}{5}, \\ x \neq 0, \\ x < 3; \end{cases}$ ОДЗ имеет вид $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 3\right)$.

На ОДЗ имеем, $\log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{3}} \left(\log_3(4-x)\right) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} \left(\log_3(25-8x)\right)$, $\log_{\frac{1}{3}} \left(2\log_3(4-x)\right) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} \left(\log_3(25-8x)\right)$, так как основание логарифма $\frac{1}{3} < 1$, то знак неравенства при потенцировании меняем, $2\log_3(4-x) \leqslant \log_3(25-8x)$, $\log_3(4-x)^2 \leqslant \log_3(25-8x)$, так как основание логарифма $3 > 1$, то знак неравенства при потенцировании сохраняем, $(4-x)^2 \leqslant 25-8x$, $16-8x+x^2 \leqslant 25-8x$, $x^2 \leqslant 9$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, с учетом ОДЗ $\boxed{x \in \left[-3; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 3\right).}$

Ответ. $x \in \left[-3; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 3\right)$.

3. Указание. Введем обозначения согласно рисунку.



Треугольники ABC и FGC подобны по двум углам. Пусть $CM = h$, тогда коэффициент подобия $k = \frac{h}{h+4}$, площадь $S_{\triangle FGC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 4$, с другой стороны,

$$S_{\triangle FGC} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC},$$

$\frac{1}{2} \cdot h \cdot 4 = \left(\frac{h}{h+4}\right)^2 \cdot 50$, $(h+4)^2 = 25 \cdot h$, $h^2 - 17 \cdot h + 16 = 0$, $h_1 = 1$, $h_2 = 16$. Из подобия $\frac{4}{AB} = \frac{h}{h+4}$, откуда $AB = \frac{4\cdot(h+4)}{h}$.

Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, не может превышать половину гипотенузы. В самом деле, медиана, проведенная из вершины прямого угла (наклонная), равна половине гипотенузы, а перпендикуляр, проведенный из той же вершины (высота), короче наклонной. Поэтому должно выполняться неравенство $CL \leqslant \frac{1}{2}AB$.

При $h = 1$ имеем: $AB = 20$, $CL = 1 + 4 = 5$, $5 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 20$ — верно, $\boxed{AB = 20}$ — в ответ.

При $h = 16$ имеем $AB = 5$, $CL = 16 + 4 = 20$, $20 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 5$ — неверно, $AB = 5$ — постороннее. Ответ. 20.

4. Указания. Замена $3^x = t$, $t > 0$. Надо найти все a, при каждом из которых неравенство $(a^2-2a-3)\cdot t^2+(a+1)\cdot 3\cdot t+1 > 0$ верно, для всех $t > 0$.

Первый случай. Старший коэффициент $a^2-2a-3 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = 3$. При $a = -1$ неравенство примет вид $1 > 0$ — верно при всех $t \in R$, в том числе и при $t > 0$, поэтому $\boxed{a = -1}$ — в ответ. При $a = 3$ неравенство примет вид $12t + 1 > 0$ — верно при всех $t > 0$, поэтому $\boxed{a = 3}$ — в ответ.

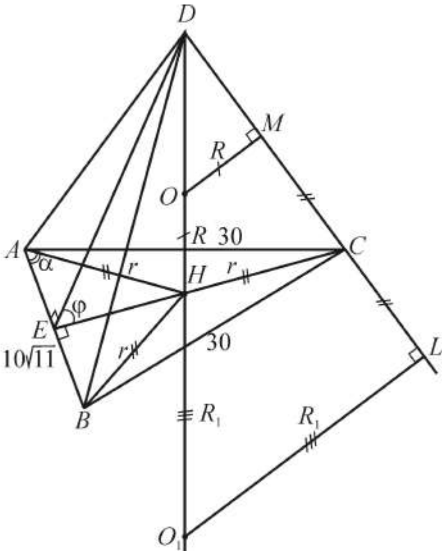
Второй случай. Старший коэффициент $a^2 - 2a - 3 \neq 0$, имеем квадратное неравенство, чтобы его решения содержали бесконечный промежуток, необходимо, чтобы ветви графика квадратного трехчлена были направлены вверх, т. е. $a^2 - 2a - 3 > 0$, $a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ — ограничение. Далее возможны 3 случая.

а) Корней нет, т. е. $D < 0$, $3^2 \cdot (a+1)^2 - 4 \cdot (a^2 - 2a - 3) < 0$, $9\cdot(a+1)^2-4\cdot(a+1)\cdot(a-3) < 0$, $(a+1)\cdot(9\cdot(a+1)-4\cdot(a-3)) < 0$, $(a+1) \cdot (5a+21) < 0$, $\boxed{a \in \left(-\frac{21}{5}; -1\right)}$ — в ответ, в качестве альтернативы можно решить неравенство $5a^2 + 26a + 21 < 0$.

б) $D = 0$, $a = -1$ или $a = -\frac{21}{5}$. Случай $a = -1$ уже рассмотрен, неравенство квадратным не является. При $a = -\frac{21}{5}$, имеем $t = \dfrac{-3(a+1)}{2(a+1)(a-3)} = \dfrac{-3}{2(a-3)} = \dfrac{-3}{2(-\frac{21}{5} - 3)} > 0$. Таким образом, нашлось $t > 0$, при котором левая часть неравенства обратилась в 0, и при таком t получилось неверное неравенство $0 > 0$, поэтому найденное $a = -\frac{21}{5}$, не подходит под условие задачи.

в) $D > 0$, $a \in \left(-\infty; -\frac{21}{5}\right) \cup (3; +\infty)$. В этом случае надо, чтобы квадратный трехчлен имел два отрицательных корня, тогда при $t > 0$ его значения будут положительны. Это означает, что произведение корней $\dfrac{1}{a^2 - 2a - 3} > 0$ — выполнено, а их сумма $t = \dfrac{-3(a+1)}{(a+1)(a-3)} = \dfrac{-3}{(a-3)} < 0$, откуда $a - 3 > 0$, $\boxed{a \in (3; +\infty)}$ — в ответ. Ответ $a \in \left(-\frac{21}{5}; -1\right] \cup [3; +\infty)$.

5. Указание.



Так как шар касается трех прямых, содержащих боковые ребра, то возьмём две из них. Тогда центр шара лежит в плоскости, проходящей через биссектрису угла, образованного прямыми и перпендикулярной плоскости угла. В данном случае эта плоскость совпадает с плоскостью серединного перпендикуляра к ребру основания, через которое проходят выбранные прямые. Аналогично, возьмем две другие прямые, тогда центр шара лежит в плоскости серединного перпендикуляра к другому ребру, а значит на их пересечении — на высоте пирамиды.

Введем обозначения согласно рисунку: O, O_1 — центры, а R, R_1 — радиусы искомых шаров. Поскольку все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину, её высота DH падает в центр H описанной около основания ABC окружности. Найдем её радиус $r = HC$. В равнобедренном треугольнике ABC медиана CE является высотой и биссектрисой. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACE имеем $CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{(30)^2 - (5\sqrt{11})^2} = 25$, $\sin\alpha = \frac{CE}{AC} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2r$, $r = \frac{BC}{2\sin\alpha} = \frac{30}{2\cdot\frac{5}{6}} = 18$. Найдем $EH = EC - HC = 25 - 18 = 7$.

В равнобедренном треугольнике ADB медиана DE также является высотой и биссектрисой, поэтому $\varphi = \angle DEC$ — линейный угол двугранного угла с ребром AB, по условию $\operatorname{tg}\varphi = \frac{9\sqrt{5}}{7}$. Найдем высоту пирамиды DH и боковое ребро DC. По свойствам прямоугольного треугольника $\operatorname{tg}\varphi = \frac{DH}{EH}$, $DH = EH \cdot \operatorname{tg}\varphi = 7 \cdot \frac{9\sqrt{5}}{7} = 9\sqrt{5}$. По теореме Пифагора $DC = \sqrt{CH^2 + DH^2} = \sqrt{(18)^2 + (9\sqrt{5})^2} = 27$.

Возможны два случая: 1) шар касается либо боковых ребер пирамиды, 2) либо их продолжений за плоскость основания. В случае 1), центр шара обозначен O, а $OM = R$ и $OH = R$ — радиусы, проведенные в точки касания. В случае 2), центр шара обозначен O_1, а $O_1L = R_1$ и $O_1H = R_1$ — радиусы, проведенные в точки касания. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведенных из одной точки, имеем $CM = CH = CL = 18$.

Первый случай. Шар касается боковых ребер пирамиды. Имеем $DM = DC - CM = 27 - 18 = 9$. Треугольники OMD и CHD подобны по двум углам (угол D — общий, а второй угол прямой). Из подобия $\frac{DM}{DH} = \frac{R}{18}$, $\frac{9}{9\sqrt{5}} = \frac{R}{18}$, $R = \frac{18}{\sqrt{5}}$, искомый объем $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{18}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{4\sqrt{5}\pi}{75}$. $\boxed{V = \frac{4\sqrt{5}\pi}{75}}$ — в ответ.

Второй случай. Шар касается продолжений боковых ребер пирамиды, $DL = DC + CL = 27 + 18 = 45$. Треугольники O_1LD и CHD подобны по двум углам (угол D — общий, а второй угол прямой). Из подобия $\frac{DL}{DH} = \frac{R_1}{18}$, $\frac{45}{9\sqrt{5}} = \frac{R_1}{18}$, $R = 18\sqrt{5}$, искомый объем $V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R_1}{18}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{5}\right)^3 = \frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$. $\boxed{V_1 = \frac{20\sqrt{5}\pi}{3}}$ — в ответ.

Ответ. $\frac{4\sqrt{5}\pi}{75}$ или $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$.

Вариант 21

Все задачи варианта либо являются частным случаем аналогичной задачи из варианта 11, либо совпадают с ними.

1. Отсутствует множитель $\cos x = 0$.
Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$; б) $x = -\frac{5\pi}{4}$.

2. Отсутствует $\log_{(25x^2)}(625x^4)$. ОДЗ имеет вид $x \in (-\infty; 3)$.
Ответ. $x \in [-3; 3)$.

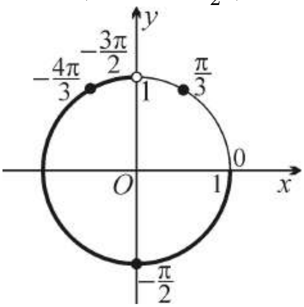
3. Совпадает с задачей варианта 11. Ответ. 20.

4. Отсутствуют случаи б) $D = 0$, в) $D > 0$. Ответ $a \in \left(-\frac{21}{5}; -1\right]$.

5. Только первый случай. Ответ. $\frac{4\sqrt{5}\pi}{75}$.

Вариант 12

1. а) Проведем необходимые преобразования исходного уравнения $2\cdot\cos x\cdot\cos 2x + 9\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x - 26\cdot\cos x = 0$, $2\cdot\cos x\cdot(\cos 2x + 9\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x - 13) = 0$, $\cos x = 0$ или $-2\cdot\sin^2 x + +9\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x - 13 = = 0$. Для $\cos x = 0$, имеем $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Во втором уравнении $2\cdot\sin^2 x - 9\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x + 12 = 0$ произведем замену $t = \sin x, t \in [-1; 1]$, получим $2t^2 - 9\sqrt{2}t + 12 = 0$, $t_{1,2} = \frac{9\sqrt{3}\pm 7\sqrt{3}}{4}$, $t_1 = 4\sqrt{3} > 1$ — посторонний, $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. После обратной замены имеем, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z$.



б) Отберем все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$, с помощью тригонометрического круга, $x = -\frac{4\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z$;

б) $x = -\frac{4\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{2}$.

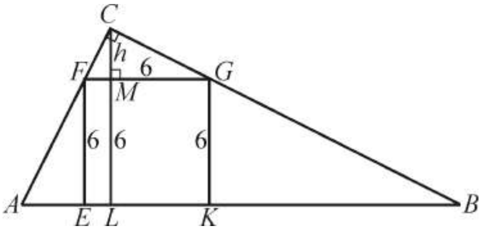
2. Указания. ОДЗ: $\begin{cases} 9x^2 > 0, \\ 9x^2 \neq 1, \\ 81x^4 > 0, \\ \log_{(9x^2)}(81x^4) > 0, \\ 5 - x > 0, \\ \log_2(5-x) > 0, \\ 41 - 10x > 0, \\ \log_2(41 - 10x) > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm\dfrac{1}{3}, \\ x \neq 0, \\ 2 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ 5 - x > 1, \\ 41 - 10x > 0, \\ 41 - 10x > 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm\dfrac{1}{3}, \\ x \neq 0, \\ x < 4; \end{cases}$ ОДЗ имеет вид $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 4\right)$.

На ОДЗ имеем, $\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} (\log_2(5-x)) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} (\log_2(41-10x))$, $\log_{\frac{1}{2}} (2\log_2(5-x)) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} (\log_2(41-10x))$, так как основание логарифма $\frac{1}{2} < 1$, то знак неравенства при потенцировании меняем, $2\log_2(5-x) \leqslant \log_2(41-10x)$, $\log_2(5-x)^2 \leqslant \log_2(41-10x)$, так как основание логарифма $2 > 1$, то знак неравенства при потенцировании сохраняем, $(5-x)^2 \leqslant 41-10x$, $25-10x+x^2 \leqslant 41-10x$, $x^2 \leqslant 16$, $x \in [-4; 4]$, с учетом ОДЗ $\boxed{x \in \left[-4; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 4\right).}$

Ответ. $x \in \left[-4; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 4\right)$.

3. Указание. Введем обозначения согласно рисунку.



Треугольники ABC и FGC подобны по двум углам. Пусть $CM = h$, тогда коэффициент подобия $k = \frac{h}{h+6}$. Площадь $S_{\triangle FGC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 6$, с другой стороны

$$S_{\triangle FGC} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC},$$

$\frac{1}{2} \cdot h \cdot 6 = \left(\frac{h}{h+6}\right)^2 \cdot 96$, $(h+6)^2 = 32 \cdot h$, $h^2 - 20 \cdot h + 36 = 0$, $h_1 = 2$, $h_2 = 18$. Из подобия $\frac{6}{AB} = \frac{h}{h+6}$, откуда $AB = \frac{6\cdot(h+6)}{h}$.

Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, не может превышать половину гипотенузы. В самом деле, медиана, проведенная из вершины прямого угла (наклонная), равна половине гипотенузы, а перпендикуляр, проведенный из той же вершины (высота), короче наклонной. Поэтому должно выполняться неравенство $CL \leqslant \frac{1}{2}AB$.

При $h = 2$ имеем: $AB = 24$, $CL = 2 + 6 = 8$, $8 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 24$ — верно, $\boxed{AB = 24}$ — в ответ.

При $h = 18$ имеем $AB = 8$, $CL = 18 + 6 = 24$, $24 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 8$ — неверно, $AB = 8$ — постороннее. Ответ. 24.

4. Указания. Замена $3^x = t$, $t > 0$. Надо найти все a, при каждом из которых неравенство $(a^2+a-2)\cdot t^2 + (a-1)\cdot 3\cdot t + 1 > 0$ верно, для всех $t > 0$.

Первый случай. Старший коэффициент $a^2 + a - 2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -2$. При $a = 1$ неравенство примет вид $1 > 0$ — верно при всех $t \in R$, в том числе и при $t > 0$, поэтому $\boxed{a = 1}$ — в ответ.

При $a = -2$ неравенство примет вид $9t + 1 > 0$ — верно при всех $t > 0$, поэтому $\boxed{a = -2}$ — в ответ.

Второй случай. Старший коэффициент $a^2 + a - 2 \neq 0$, имеем квадратное неравенство, чтобы его решения содержали бесконечный промежуток, необходимо, чтобы ветви графика квадратного трехчлена были направлены вверх, т. е. $a^2 + a - 2 > 0$, $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ — ограничение. Далее возможны 3 случая.

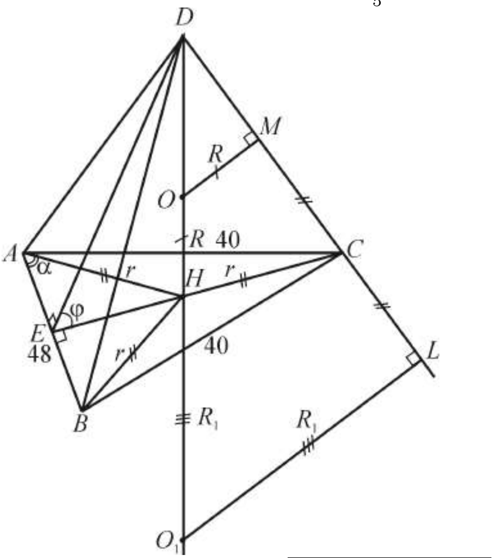
а) Корней нет, т. е. $D < 0$, $3^2 \cdot (a-1)^2 - 4 \cdot (a^2 + a - 2) < 0$, $9 \cdot (a-1)^2 - 4 \cdot (a-1) \cdot (a+2) < 0$, $(a-1) \cdot (9 \cdot (a-1) - 4 \cdot (a+2)) < 0$, $(a-1) \cdot (5a - 17) < 0$, $\boxed{a \in \left(\frac{17}{5}; 1\right)}$ — в ответ, в качестве альтернативы можно решить неравенство $5a^2 - 22a + 17 < 0$.

б) $D = 0$, $a = 1$ или $a = \frac{17}{5}$. Случай $a = 1$ уже рассмотрен, неравенство квадратным не является. При $a = \frac{17}{5}$, имеем $t = \dfrac{3(a-1)}{2(a-1)(a+2)} = \dfrac{3}{2(a+2)} = \dfrac{3}{2(\frac{17}{5} + 2)} > 0$. Таким образом, нашлось $t > 0$, при котором левая часть неравенства обратилась в 0, и при таком t получилось неверное неравенство $0 > 0$, поэтому найденное $a = \frac{17}{5}$, не подходит под условие задачи.

в) $D > 0$, $a \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{17}{5}; +\infty\right)$. В этом случае надо, чтобы квадратный трехчлен имел два отрицательных корня, тогда при $t > 0$ его значения будут положительны. Это означает, что произведение корней $\dfrac{1}{a^2 + a - 2} > 0$ — выполнено, а их сумма $t = \dfrac{3(a-1)}{(a-1)(a+2)} = \dfrac{3}{(a+2)} < 0$, откуда $a + 2 < 0$, $\boxed{a \in (-\infty; -2)}$ — в ответ. Ответ $a \in (-\infty; -2] \cup \left[1; \frac{17}{5}\right)$.

5. Указание. Так как шар касается трех прямых, содержащих боковые ребра, то возьмём две из них. Тогда центр шара лежит в плоскости, проходящей через биссектрису угла, образованного прямыми и перпендикулярной плоскости угла. В данном случае эта плоскость совпадает с плоскостью серединного перпендикуляра к ребру основания, через которое проходят выбранные прямые. Аналогично, возьмем две другие прямые, тогда центр шара лежит в плоскости серединного перпендикуляра к другому ребру, а значит на их пересечении — на высоте пирамиды.

Введем обозначения согласно рисунку: O, O_1 — центры, а R, R_1 — радиусы искомых шаров. Поскольку все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину, её высота DH падает в центр H описанной около основания ABC окружности. Найдем её радиус $r = HC$. В равнобедренном треугольнике ABC медиана CE является высотой и биссектрисой. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACE имеем $CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{(40)^2 - (24)^2} = 32$, $\sin\alpha = \frac{CE}{AC} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2r$, $r = \frac{BC}{2\sin\alpha} = \frac{40}{2\cdot\frac{4}{5}} = 25$. Найдем $EH = EC - HC = 32 - 25 = 7$. В равнобедренном треугольнике ADB медиана DE также является высотой и биссектрисой, поэтому $\varphi = \angle DEC$ — линейный угол двугранного угла с ребром AB, по условию $\operatorname{tg}\varphi = \frac{50\sqrt{2}}{7}$. Найдем высоту пирамиды DH и боковое ребро DC. По свойствам прямоугольного треугольника $\operatorname{tg}\varphi = \frac{DH}{EH}$, $DH = EH\cdot\operatorname{tg}\varphi = 7\cdot\frac{50\sqrt{2}}{7}$, $DH = 50\sqrt{2}$. По теореме Пифагора $DC = \sqrt{CH^2 + DH^2} = \sqrt{(25)^2 + (50\sqrt{2})^2} = 75$.



Возможны два случая: 1) шар касается либо боковых ребер пирамиды, 2) либо их продолжений за плоскость основания. В случае 1), центр шара обозначен O, а $OM = R$ и $OH = R$ — радиусы, проведенные в точки касания. В случае 2), центр шара обозначен O_1, а $O_1L = R_1$ и $O_1H = R_1$ — радиусы, проведенные в точки касания. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведенных из одной точки, имеем $CM = CH = CL = 25$.

Первый случай. Шар касается боковых ребер пирамиды. Имеем $DM = DC - CM = 75 - 25 = 50$. Треугольники OMD и CHD подобны по двум углам (угол D — общий, а второй угол прямой). Из подобия $\frac{DM}{DH} = \frac{R}{25}$, $\frac{50}{50\sqrt{2}} = \frac{R}{25}$, $R = \frac{25}{\sqrt{2}}$, искомый объем $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{25}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$. $\boxed{V = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}}$ — в ответ.

Второй случай. Шар касается продолжений боковых ребер пирамиды, $DL = DC + CL = 75 + 25 = 100$. Треугольники O_1LD и CHD подобны по двум углам (угол D — общий, а второй угол прямой). Из подобия $\frac{DL}{DH} = \frac{R_1}{25}$, $\frac{100}{50\sqrt{2}} = \frac{R_1}{25}$, $R = 25\sqrt{2}$, искомый объем $V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R_1}{25}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\right)^3 = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$. $\boxed{V_1 = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}}$ — в ответ.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ или $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.

Вариант 22

Все задачи варианта либо являются частным случаем аналогичной задачи из варианта 12, либо совпадают с ними.

1. Отсутствует множитель $\cos x = 0$.
Ответ: а) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z$; б) $x = -\frac{4\pi}{3}$.

2. Отсутствует $\log_{(9x^2)}(81x^4)$. ОДЗ имеет вид $x \in (-\infty; 4)$.
Ответ. $x \in [-4; 4)$.

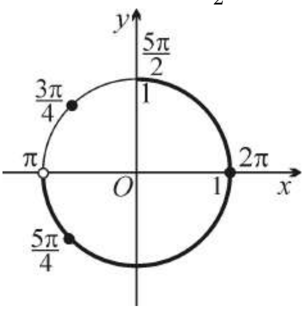
3. Совпадает с задачей варианта 12. Ответ. 24.

4. Отсутствуют случаи б) $D = 0$, в) $D > 0$. Ответ $a \in \left[1; \frac{17}{5}\right)$.

5. Только первый случай. Ответ. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$.

Вариант 13

1. а) Проведем необходимые преобразования исходного уравнения $2\cdot\sin x\cdot\cos 2x - 3\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x - 6\cdot\sin x = 0$, $2\cdot\sin x\cdot(\cos 2x - 3\sqrt{2}\cos x - 3) = 0$, $\sin x = 0$ или $2\cos^2 x - 1 - 3\sqrt{2}\cos x - 3 = 0$. Для $\sin x = 0$, имеем $x = \pi n, n \in Z$. Во втором уравнении $2\cdot\cos^2 x - 3\cdot\sqrt{2}\cdot\cos x - 4 = 0$ заменим $\cos x = t, t \in [-1; 1]$, получим $2t^2 - 3\sqrt{2}t - 4 = 0$, $t_{1,2} = \frac{3\sqrt{2}\pm 5\sqrt{2}}{4}$, $t_1 = 2\sqrt{2} > 1$ — посторонний, $t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. После обратной замены имеем, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$.



б) Отберем все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$, с помощью тригонометрического круга, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = 2\pi$.

Ответ: а) $x = \pi n, n \in Z$; $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$;
б) $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = 2\pi$.

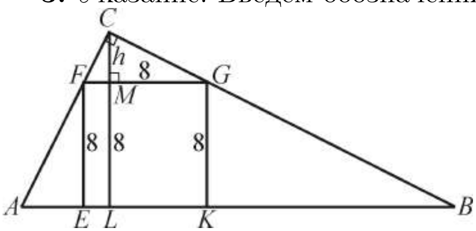
2. Указания. ОДЗ: $\begin{cases} 4x^2 >0, \\ 4x^2 \neq 1, \\ 16x^4 >0, \\ \log_{(4x^2)}(16x^4) >0, \\ 6-x >0, \\ \log_5(6-x) >0, \\ 61-12x >0, \\ \log_5(61-12x) >0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm\dfrac{1}{2}, \\ x \neq 0, \\ 2 >0, \\ 6-x >0, \\ 6-x >1, \\ 61-12x >0, \\ 61-12x >1; \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm\dfrac{1}{2}, \\ x \neq 0, \\ x <5; \end{cases}$ ОДЗ имеет вид $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 5\right)$.

На ОДЗ имеем, $\log_{\frac{1}{5}} 2 + \log_{\frac{1}{5}} (\log_5(6-x)) \geqslant \log_{\frac{1}{5}} (\log_5(61-12x))$, $\log_{\frac{1}{5}} (2\log_3(6-x)) \geqslant \log_{\frac{1}{5}} (\log_5(61-12x))$, так как основание логарифма $\frac{1}{5} < 1$, то знак неравенства при потенцировании меняем, $2\log_5(6-x) \leqslant \log_5(61-12x)$, $\log_5(6-x)^2 \leqslant \log_5(61-12x)$, так как основание логарифма $5 > 1$, то знак неравенства при потенцировании сохраняем, $(6-x)^2 \leqslant 61-12x$, $36-12x+x^2 \leqslant 61-12x$, $x^2 \leqslant 25$, $x \in [-5; 5]$, с учетом ОДЗ $\boxed{x \in \left[-5; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 5\right).}$

Ответ. $x \in \left[-5; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 5\right)$.

3. Указание. Введем обозначения согласно рисунку.



Треугольники ABC и FGC подобны по двум углам. Пусть $CM = h$, тогда коэффициент подобия $k = \frac{h}{h+8}$. Площадь $S_{\triangle FGC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 8$, с другой стороны $S_{\triangle FGC} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC}$, $\frac{1}{2} \cdot h \cdot 8 = \left(\frac{h}{h+8}\right)^2 \cdot 200$, $(h+8)^2 = 50 \cdot h$, $h^2 - 34 \cdot h + 64 = 0$, $h_1 = 2$, $h_2 = 32$. Из подобия $\frac{8}{AB} = \frac{h}{h+8}$, откуда $AB = \frac{8 \cdot (h+8)}{h}$.

Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, не может превышать половину гипотенузы. В самом деле, медиана, проведенная из вершины прямого угла (наклонная), равна половине гипотенузы, а перпендикуляр, проведенный из той же вершины (высота), короче наклонной. Поэтому должно выполняться неравенство $CL \leqslant \frac{1}{2}AB$.

При $h = 2$ имеем: $AB = 40$, $CL = 2 + 8 = 10$, $10 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 40$ — верно, $\boxed{AB = 40}$ — в ответ.

При $h = 32$ имеем $AB = 10$, $CL = 32 + 8 = 40$, $40 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10$ — неверно, $AB = 10$ — постороннее. Ответ. 40.

4. Указания. Замена $3^x = t$, $\quad t > 0$. Надо найти все a, при каждом из которых неравенство $(a^2+2a-8)\cdot t^2+(a-2)\cdot 3\cdot t+1 > 0$ верно, для всех $t > 0$.

Первый случай. Старший коэффициент $a^2 + 2a - 8 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -4$. При $a = 2$ неравенство примет вид $1 > 0$ — верно при всех $t \in R$, в том числе и при $t > 0$, поэтому $\boxed{a = 2}$ — в ответ. При $a = -4$ неравенство примет вид $18t + 1 > 0$ — верно при всех $t > 0$, поэтому $\boxed{a = -4}$ — в ответ.

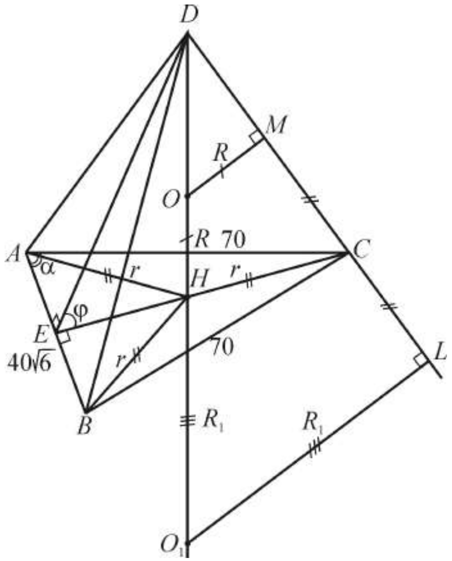
Второй случай. Старший коэффициент $a^2 + 2a - 8 \neq 0$, имеем квадратное неравенство, чтобы его решения содержали бесконечный промежуток, необходимо, чтобы ветви графика квадратного трехчлена были направлены вверх, т. е. $a^2 + 2a - 8 > 0$, $a \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$ — ограничение. Далее возможны 3 случая.

а) Корней нет, т. е. $D < 0$, $3^2 \cdot (a-2)^2 - 4 \cdot (a^2 + 2a - 8) < 0$, $9\cdot(a-2)^2-4\cdot(a-2)\cdot(a+4) < 0$, $(a-2) \cdot (9 \cdot (a-2) - 4 \cdot (a+4)) < 0$, $(a-2) \cdot (5a - 34) < 0$, $\boxed{a \in \left(\frac{34}{5}; 2\right)}$ — в ответ, в качестве альтернативы можно решить неравенство $5a^2 - 44a + 34 < 0$.

б) $D = 0$, $a = 2$ или $a = \frac{34}{5}$. Случай $a = 2$ уже рассмотрен, неравенство квадратным не является. При $a = \frac{34}{5}$, имеем $t = \dfrac{3(a-2)}{2(a-2)(a+4)} = \dfrac{3}{2(a+4)} = \dfrac{3}{2(\frac{34}{5} + 4)} > 0$. Таким образом, нашлось $t > 0$, при котором левая часть неравенства обратилась в 0, и при таком t получилось неверное неравенство $0 > 0$, поэтому найденное $a = \frac{34}{5}$, не подходит под условие задачи.

в) $D > 0$, $a \in (-\infty; -4) \cup \left(\frac{34}{5}; +\infty\right)$. В этом случае надо, чтобы квадратный трехчлен имел два отрицательных корня, тогда при $t > 0$ его значения будут положительны. Это означает, что произведение корней $\dfrac{1}{a^2+2a-8} > 0$ — выполнено, а их сумма $t = \dfrac{3(a-2)}{(a-2)(a+4)} = \dfrac{3}{(a+4)} < 0$, откуда $a + 4 < 0$, $\boxed{a \in (-\infty; -4)}$ — в ответ. Ответ $a \in (-\infty; -4] \cup \left[2; \frac{34}{5}\right)$.

5. Указание.



Так как шар касается трех прямых, содержащих боковые ребра, то возьмём две из них. Тогда центр шара лежит в плоскости, проходящей через биссектрису угла, образованного прямыми и перпендикулярной плоскости угла. В данном случае эта плоскость совпадает с плоскостью серединного перпендикуляра к ребру основания, через которое проходят выбранные прямые. Аналогично, возьмем две другие прямые, тогда центр шара лежит в плоскости серединного перпендикуляра к другому ребру, а значит на их пересечении — на высоте пирамиды.

Введем обозначения согласно рисунку: O, O_1 — центры, а R, R_1 — радиусы искомых шаров. Поскольку все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину, её высота DH падает в центр H описанной около основания ABC окружности. Найдем её радиус $r = HC$. В равнобедренном треугольнике ABC медиана CE является высотой и биссектрисой. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACE имеем $CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{(70)^2 - (20\sqrt{6})^2} = 50$, $\sin\alpha = \frac{CE}{AC} = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}$. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2r$, $r = \frac{BC}{2\sin\alpha} = \frac{70}{2\cdot\frac{5}{7}} = 49$. Найдем $EH = EC - HC = 50 - 49 = 1$.

В равнобедренном треугольнике ADB медиана DE также является высотой и биссектрисой, поэтому $\varphi = \angle DEC$ — линейный угол двугранного угла с ребром AB, по условию $\operatorname{tg}\varphi = 98\sqrt{2}$. Найдем высоту пирамиды DH и боковое ребро DC. По свойствам прямоугольного треугольника $\operatorname{tg}\varphi = \frac{DH}{EH}$, $DH = EH \cdot \operatorname{tg}\varphi = 1 \cdot 98\sqrt{2} = 98\sqrt{2}$. По теореме Пифагора $DC = \sqrt{CH^2 + DH^2} = \sqrt{(49)^2 + (98\sqrt{2})^2} = 147$.

Возможны два случая: 1) шар касается либо боковых ребер пирамиды, 2) либо их продолжений за плоскость основания. В случае 1), центр шара обозначен O, а $OM = R$ и $OH = R$ — радиусы, проведенные в точки касания. В случае 2), центр шара обозначен O_1, а $O_1L = R_1$ и $O_1H = R_1$ — радиусы, проведенные в точки касания. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведенных из одной точки, имеем $CM = CH = CL = 49$.

Первый случай. Шар касается боковых ребер пирамиды. Имеем $DM = DC - CM = 147 - 49 = 98$. Треугольники OMD и CHD подобны по двум углам (угол D — общий, а второй угол прямой). Из подобия $\frac{DM}{DH} = \frac{R}{49}$, $\frac{98}{98\sqrt{2}} = \frac{R}{49}$, $R = \frac{49}{\sqrt{2}}$, искомый объем $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{98}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi}{24}$. $\boxed{V = \frac{\sqrt{2}\pi}{24}}$ — в ответ.

Второй случай. Шар касается продолжений боковых ребер пирамиды, $DL = DC + CL = 147 + 49 = 196$. Треугольники O_1LD и CHD подобны по двум углам (угол D — общий, а второй угол прямой). Из подобия $\frac{DL}{DH} = \frac{R_1}{49}$, $\frac{196}{98\sqrt{2}} = \frac{R_1}{49}$, $R = 49\sqrt{2}$, искомый объем $V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R_1}{98}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$. $\boxed{V_1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}}$ — в ответ.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}\pi}{24}$ или $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$.

Вариант 23

Все задачи варианта либо являются частным случаем аналогичной задачи из варианта 13, либо совпадают с ними.

1. Отсутствует множитель $\sin x = 0$.
Ответ: а) $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$; б) $x = \frac{5\pi}{4}$.

2. Отсутствует $\log_{(4x^2)}(16x^4)$. ОДЗ имеет вид $x \in (-\infty; 5)$.
Ответ. $x \in [-5; 5)$.

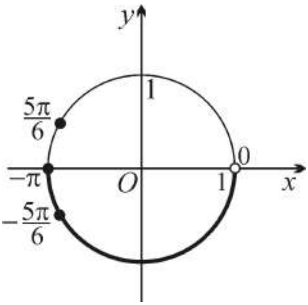
3. Совпадает с задачей варианта 13. Ответ. 40.

4. Отсутствуют случаи б) $D = 0$, в) $D > 0$. Ответ $a \in \left[2; \frac{34}{5}\right)$.

5. Только первый случай. Ответ. $\frac{\sqrt{2}\pi}{24}$.

Вариант 14

1. а) Преобразуем уравнение $2\cdot\sin x\cdot\cos 2x-7\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x\cdot\cos x-$ $-22\cdot\sin x=0$, $2\cdot\sin x\cdot(\cos 2x-7\cdot\sqrt{3}\cdot\cos x-11)=0$, $\sin x=0$ или $2\cdot\cos^2 x-1-7\cdot\sqrt{3}\cdot\cos x-11=0$. Для $\sin x=0$, имеем $x=\pi n, n\in Z$. Во втором уравнении $2\cdot\cos^2 x-7\cdot\sqrt{3}\cdot\cos x-12=0$ произведем замену $t=\cos x, t\in[-1;1]$, получим $2t^2-7\sqrt{3}t-12=0$, $t_{1,2}=$ $=\frac{7\sqrt{3}\pm 9\sqrt{3}}{4}$, $t_1=4\sqrt{3}>1$ — посторонний, $t_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. После обратной замены имеем, $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi m, m\in Z$.



б) Отберем все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi;0)$, с помощью тригонометрического круга, $x=-\frac{5\pi}{6}$, $x=-\pi$.

Ответ: а) $x=\pi n, n\in Z$; $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi m, m\in Z$;

б) $x=-\frac{5\pi}{6}$, $x=-\pi$.

2. Указания. ОДЗ: $\begin{cases} 16x^2>0,\\ 16x^2\neq 1,\\ 256x^4>0,\\ \log_{(16x^2)}(256x^4)>0,\\ 3-x>0,\\ \log_7(3-x)>0,\\ 13-6x>0,\\ \log_7(13-6x)>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 0,\\ x\neq\pm\dfrac{1}{4},\\ x\neq 0,\\ 2>0,\\ 3-x>0,\\ 3-x>1,\\ 13-6x>0,\\ 13-6x>1; \end{cases}$

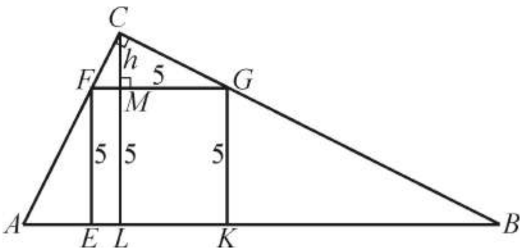
$\begin{cases} x\neq 0,\\ x\neq\pm\dfrac{1}{4},\\ x\neq 0,\\ x<2; \end{cases}$ ОДЗ имеет вид $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};2\right)$.

На ОДЗ имеем, $\log_{\frac{1}{7}}2+\log_{\frac{1}{7}}(\log_7(3-x))\geqslant\log_{\frac{1}{7}}(\log_7(13-6x))$, $\log_{\frac{1}{7}}(2\log_7(3-x))\geqslant\log_{\frac{1}{7}}(\log_7(13-6x))$, так как основание логарифма $\frac{1}{7}<1$, то знак неравенства при потенцировании меняем,

$2\log_7(3-x) \leqslant \log_7(13-6x)$, $\log_7(3-x)^2 \leqslant \log_7(13-6x)$, так как основание логарифма $7>1$, то знак неравенства при потенцировании сохраняем, $(3-x)^2 \leqslant 13-6x$, $9-6x+x^2 \leqslant 13-6x$, $x^2 \leqslant 4$, $x \in [-2;2]$, с учетом ОДЗ $\boxed{x \in \left[-2;-\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4};0\right) \cup \left(0;\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4};2\right).}$

Ответ. $x \in \left[-2;-\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4};0\right) \cup \left(0;\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4};2\right)$.

3. Указание. Введем обозначения согласно рисунку.



Треугольники ABC и FGC подобны по двум углам. Пусть $CM = h$, тогда коэффициент подобия $k = \frac{h}{h+5}$. Площадь $S_{\triangle FGC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 5$, с другой стороны

$$S_{\triangle FGC} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC},$$

$\frac{1}{2} \cdot h \cdot 5 = \left(\frac{h}{h+5}\right)^2 \cdot 90$, $(h+5)^2 = 36 \cdot h$, $h^2 - 26 \cdot h + 25 = 0$, $h_1 = 1$, $h_2 = 25$. Из подобия $\frac{5}{AB} = \frac{h}{h+5}$, откуда $AB = \frac{5\cdot(h+5)}{h}$.

Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, не может превышать половину гипотенузы. В самом деле, медиана, проведенная из вершины прямого угла (наклонная), равна половине гипотенузы, а перпендикуляр, проведенный из той же вершины (высота), короче наклонной. Поэтому должно выполняться неравенство $CL \leqslant \frac{1}{2}AB$.

При $h=1$ имеем: $AB = 30$, $CL = 1+5 = 6$, $6 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 30$ — верно, $\boxed{AB = 30}$ — в ответ.

При $h = 25$ имеем $AB = 6$, $CL = 25+5 = 30$, $30 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 6$ — неверно, $AB = 6$ — постороннее. Ответ. 30.

4. Указания. Замена $2^x = t$, $t > 0$. Надо найти все a, при каждом из которых неравенство $(a^2+3a-4)\cdot t^2 + (a-1)\cdot 4\cdot t + 1 > 0$ верно, для всех $t > 0$.

Первый случай. Старший коэффициент $a^2+3a-4 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -4$. При $a = 1$ неравенство примет вид $1 > 0$ — верно при всех $t \in R$, в том числе и при $t > 0$, поэтому $\boxed{a=1}$ — в ответ. При $a = -4$ неравенство примет вид $20t+1 > 0$ — верно при всех $t > 0$, поэтому $\boxed{a=-4}$ — в ответ.

Второй случай. Старший коэффициент $a^2+3a-4\neq 0$, имеем квадратное неравенство, чтобы его решения содержали бесконечный промежуток, необходимо, чтобы ветви графика квадратного трехчлена были направлены вверх, т. е. $a^2+3a-4>0$, $a\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$ — ограничение. Далее возможны 3 случая.

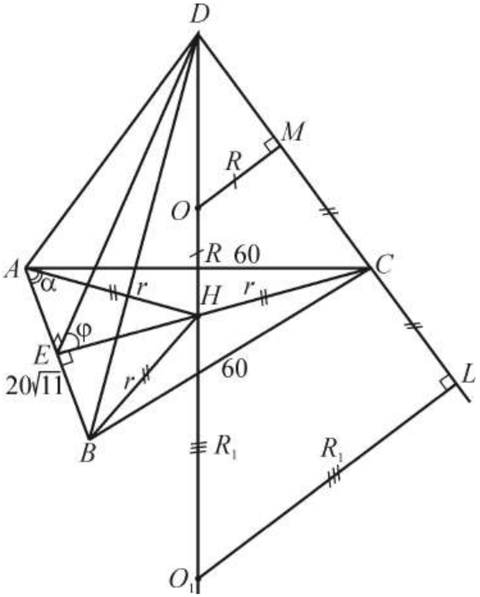
а) Корней нет, т. е. $D<0$, $4^2\cdot(a-1)^2-4\cdot(a^2+3a-4)<0$, $16\cdot(a-1)^2-4\cdot(a-1)\cdot(a+4)<0$, $(a-1)\cdot(16\cdot(a-1)-4\cdot(a+4))<0$, $(a-1)\cdot(3a-8)<0$, $\boxed{a\in\left(\frac{8}{3};1\right)}$ — в ответ, в качестве альтернативы можно решить неравенство $3a^2-11a+8<0$.

б) $D=0$, $a=1$ или $a=\frac{8}{3}$. Случай $a=1$ уже рассмотрен, неравенство квадратным не является. При $a=\frac{8}{3}$, имеем $t=\dfrac{4(a-1)}{2(a-1)(a+4)}=\dfrac{4}{2(a+4)}=\dfrac{4}{2(\frac{8}{3}+4)}>0$. Таким образом, нашлось $t>0$, при котором левая часть неравенства обратилась в 0, и при таком t получилось неверное неравенство $0>0$, поэтому найденное $a=\frac{8}{3}$, не подходит под условие задачи.

в) $D>0$, $a\in(-\infty;-4)\cup\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$. В этом случае надо, чтобы квадратный трехчлен имел два отрицательных корня, тогда при $t>0$ его значения будут положительны. Это означает, что произведение корней $\dfrac{1}{a^2+3a-4}>0$ — выполнено, а их сумма $t=\dfrac{4(a-1)}{(a-1)(a+4)}=\dfrac{4}{(a+4)}<0$, откуда $a+4<0$, $\boxed{a\in(-\infty;-4)}$ — в ответ. Ответ $a\in(-\infty;-4]\cup\left[1;\frac{8}{3}\right)$.

5. Указание. Так как шар касается трех прямых, содержащих боковые ребра, то возьмём две из них. Тогда центр шара лежит в плоскости, проходящей через биссектрису угла, образованного прямыми и перпендикулярной плоскости угла. В данном случае эта плоскость совпадает с плоскостью серединного перпендикуляра к ребру основания, через которое проходят выбранные прямые. Аналогично, возьмем две другие прямые, тогда центр шара лежит в плоскости серединного перпендикуляра к другому ребру, а значит на их пересечении — на высоте пирамиды.

Введем обозначения согласно рисунку: O, O_1 — центры, а R, R_1 — радиусы искомых шаров. Поскольку все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину, её высота DH падает в центр H описанной около основания ABC окружности. Найдем её радиус $r = HC$. В равнобедренном треугольнике ABC медиана CE является высотой и биссектрисой. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике ACE имеем $CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{(60)^2 - (10\sqrt{11})^2} = 50$, $\sin\alpha = \frac{CE}{AC} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2r$, $r = \frac{BC}{2\sin\alpha} = \frac{60}{2\cdot\frac{5}{6}} = 36$. Найдем $EH = EC - HC = 50 - 36 = 14$.



В равнобедренном треугольнике ADB медиана DE также является высотой и биссектрисой, поэтому $\varphi = \angle DEC$ — линейный угол двугранного угла с ребром AB, по условию $\operatorname{tg}\varphi = \frac{24}{7}$. Найдем высоту пирамиды DH и боковое ребро DC. По свойствам прямоугольного треугольника $\operatorname{tg}\varphi = \frac{DH}{EH}$, $DH = EH\cdot\operatorname{tg}\varphi = 14\cdot\frac{24}{7} = 48$. По теореме Пифагора верно $DC = \sqrt{CH^2 + DH^2} = \sqrt{(36)^2 + (48)^2} = 60$.

Возможны два случая: 1) шар касается либо боковых ребер пирамиды, 2) либо их продолжений за плоскость основания. В случае 1), центр шара обозначен O, а $OM = R$ и $OH = R$ — радиусы, проведенные в точки касания. В случае 2), центр шара обозначен O_1, а $O_1L = R_1$ и $O_1H = R_1$ — радиусы, проведенные в точки касания. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведенных из одной точки, имеем $CM = CH = CL = 36$.

Первый случай. Шар касается боковых ребер пирамиды. Имеем $DM = DC - CM = 60 - 36 = 24$. Треугольники OMD и CHD подобны по двум углам (угол D — общий, а второй угол прямой). Из подобия $\frac{DM}{DH} = \frac{R}{36}$, $\frac{24}{48} = \frac{R}{36}$, $R = 18$, искомый объем $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{36}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}$. $\boxed{V = \frac{\pi}{6}}$ — в ответ.

Второй случай. Шар касается продолжений боковых ребер пирамиды, $DL = DC + CL = 60 + 36 = 96$. Треугольники O_1LD и CHD подобны по двум углам (угол D — общий, а второй угол прямой). Из подобия $\frac{DL}{DH} = \frac{R_1}{36}$, $\frac{96}{48} = \frac{R_1}{36}$, $R = 72$, искомый объем $V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R_1}{36}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(2\right)^3 = \frac{32\pi}{3}$. $\boxed{V_1 = \frac{32\pi}{3}}$ — в ответ.

Ответ. $\frac{\pi}{6}$ или $\frac{32\pi}{3}$.

Вариант 24

Все задачи варианта либо являются частным случаем аналогичной задачи из варианта 14, либо совпадают с ними.

1. Отсутствует множитель $\sin x = 0$.
Ответ: а) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; б) $x = -\frac{5\pi}{6}$.
2. Отсутствует $\log_{(16x^2)}(256x^4)$. ОДЗ имеет вид $x \in (-\infty; 2)$.
Ответ. $x \in [-2; 2)$.
3. Совпадает с задачей варианта 14. Ответ. 30.
4. Отсутствуют случаи б) $D = 0$, в) $D > 0$. Ответ $a \in \left[1; \frac{8}{3}\right)$.
5. Только первый случай. Ответ. $\frac{\pi}{6}$.

Критерии оценок, 11 класс

Полное и обоснованное решение каждой задачи с правильным ответом оценивалось по 7 баллов. Частично верные решения оценивались в соответствии с таблицей, 0 баллов выставлялось, если решение не удовлетворяло ни одному из критериев. Границы итоговых оценок: «2» — менее 6, «3» — с 6 по 19, «4» — с 20 по 27, «5» — с 28 баллов.

Физико-математические классы

Ошибки	Баллы
Задача 1	
Описка в ответе при верном решении.	6
Арифметические ошибки в тригонометрии, но отбор верный в этих рамках, задача доведена до ответа.	4
Потеря корней при сокращении на множитель или использование постороннего корня в обратных тригонометрических функциях.	2

Ошибки	Баллы
Задача 2	
Арифметическая ошибка в конце, не изменившая сложность задачи, либо неверно выставлена скобка в левой граничной точке.	6
Арифметическая ошибка, приведшая к неверному неравенству, или не выколота одна точка.	4
Выставлен неверный знак неравенства при потенцировании при остальных верных действиях до ответа или не выколото более одной точки.	2
Задача 3	
Задача доведена до ответа с одной арифметической ошибкой.	6
Рассмотрен только один из двух случаев, при этом верный ответ выбран без обоснования.	4
Оба случая в ответе, или рассмотрен только один верный случай без обоснования и с арифметической ошибкой.	3
Имеется верное геометрическое рассуждение, которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен, либо в ответ выбран неверный случай.	2
Задача 4	
Неверный конец одного из промежутков (строгий).	6
Найдены все основные случаи кроме случая двух отрицательных корней или вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу.	4
Найдены только граничные точки ($D = 0$ и старший коэффициент равен нулю).	2
Найдена только ровно одна из граничных точек.	1
Задача 5	
Одна арифметическая ошибка, ход решения верный.	6
Получен обоснованный верный ответ только для одного случая, или отсутствует обоснование, что элемент искомый, но оба случая рассмотрены или ответ дан без учета нормирующего множителя.	5
Более одной арифметической ошибки при верном ходе решения, рассмотрены два случая до ответов.	4
Более одной арифметической ошибки при верном ходе решения, рассмотрен только один случай до ответа.	3
Имеется верное геометрическое рассуждение, которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен.	2

Химико-биологические классы

Ошибки	Баллы
Задача 1	
Описка в ответе при верном решении.	6
Арифметические ошибки в тригонометрии, но отбор верный в этих рамках, задача доведена до ответа.	4
Потеря корней при решении простейшего или использование постороннего корня в обратных тригонометрических функциях.	2
Задача 2	
Арифметическая ошибка в конце, не изменившая сложность задачи, либо неверно выставлена скобка в левой граничной точке.	6
Арифметическая ошибка, приведшая к неверному неравенству.	4
Выставлен неверный знак неравенства при потенцировании, при остальных верных действиях до ответа.	2
Задача 3	
Задача доведена до ответа с одной арифметической ошибкой.	6
Оба случая в ответе, или рассмотрен только один из двух случаев, при этом верный ответ выбран без обоснования.	4
Рассмотрен только один верный случай без обоснования и с арифметической ошибкой.	3
Имеется верное геометрическое рассуждение, которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен, либо в ответ выбран неверный случай.	2
Задача 4	
Неверный конец одного из промежутков (строгий).	6
Найден основной случай без граничных точек, или вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу.	4
Найдены только граничные точки ($D = 0$ и старший коэффициент равен нулю).	2
Найдена только ровно одна из граничных точек.	1
Задача 5	
Одна арифметическая ошибка, ход решения верный.	6
Отсутствует обоснование, что элемент искомый или ответ дан без учета нормирующего множителя.	5
Более одной арифметической ошибки при верном ходе решения до ответа, либо верно рассмотрен не тот случай.	4
Имеется верное геометрическое рассуждение, которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен.	2

2018 год, 9 класс

Вариант 911

1. Указание. Пусть v — собственная скорость катера, тогда $v+36$ — собственная скорость теплохода. Пусть u — искомая скорость течения реки, расстояние примем за 1. По условию имеем
$3\cdot\frac{1}{v+36+u}=\frac{1}{v+u}$ (плыли по течению),
$1\cdot\frac{1}{v+36-u}=\frac{1}{v-u}$ (плыли против течения), откуда

$$\begin{cases}3(v+u)=(v+u+36),\\4(v-u)=(v-u+36);\end{cases}\begin{cases}2(v+u)=36,\\3(v-u)=36;\end{cases}\begin{cases}v+u=18,\\v-u=12;\end{cases}$$

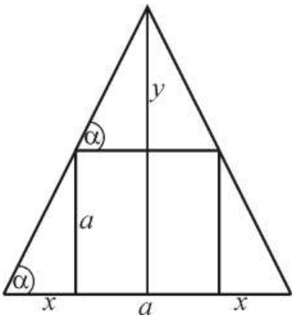
$2u=6$, $u=3$. Ответ. 3.

2. Пусть d — искомая разность, тогда $a_9=a_5+4d$, по условию

$$\begin{cases}a_5+a_5+4d=34,\\a_5\cdot(a_5+4d)=253;\end{cases}\begin{cases}a_5+2d=17,\\a_5\cdot(a_5+4d)=253;\end{cases}$$

$a_5=17-2d$, $(17-2d)(17-2d+4d)=253$, $(17-2d)(17+2d)=253$, $289-4d^2=253$, $4d^2=36$, $d^2=9$, $d=\pm3$. Ответ. ±3.

3. Указание. Введем обозначения согласно рисунку.



Пусть a — сторона квадрата, x — часть основания треугольника от его вершины до ближайшей вершины квадрата, тогда справедливо $\frac{a}{x}=\operatorname{tg}\alpha$, $x=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$. Пусть y — часть высоты треугольника от его вершины до ближайшей стороны квадрата, тогда справедливо $\frac{y}{\frac{a}{2}}=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Высота треугольника равна $a+y=a+\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$, основание треугольника равно $a+2x=a+\frac{2a}{\operatorname{tg}\alpha}$, площадь треугольника $S=\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{2a}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\left(a+\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$,

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\left(1+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right).$$

По условию $a^2=\frac{8}{25}\cdot S$, подставляя, имеем

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{25}\cdot S\cdot\left(1+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right).$$

замена $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} = b$, имеем $25 = 4\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot(1+b)$, $25 = 4\cdot\left(2+\frac{1}{b}+b\right)$, $17 = \frac{4\left(b^2+1\right)}{b}$, $4b^2 - 17b + 4 = 0$, $b_{1,2} = \frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8}$, $b_{1,2} = \frac{17\pm15}{8}$, $b_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = 4$, $\operatorname{tg}\alpha = 2b$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ или $\operatorname{tg}\alpha = 8$.

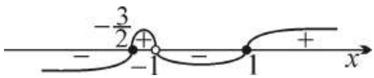
Ответ. $\frac{1}{2}$ или 8.

4. Решить неравенство $\dfrac{2x^2+15x+27}{(2x+9)(x+1)} \leqslant 2|x|$.

ОДЗ $\begin{cases} 2x+9\neq 0, \\ x+1\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq -\dfrac{9}{2}, \\ x\neq -1. \end{cases}$

Разложим числитель дроби на множители, вычислив его корни $2x^2+15x+27=0$, $x_{1,2} = \frac{-15\pm\sqrt{225-8\cdot27}}{4}$, $x_{1,2} = \frac{-15\pm3}{4}$, $x_1 = -\frac{9}{2}$, $x_2 = -3$, откуда $2x^2+15x+27 = 2\left(x+\frac{9}{2}\right)(x+3)$. Неравенство примет вид $\dfrac{(2x+9)(x+3)}{(2x+9)(x+1)} \leqslant 2|x|$, На ОДЗ $2x+9\neq 0$, можно сократить и перейти к равносильному неравенству $\dfrac{x+3}{x+1} \leqslant 2|x|$.

Первый случай, $x \geqslant 0$, имеем $\dfrac{x+3}{x+1} \leqslant 2x$, $\dfrac{x+3}{x+1} - 2x \leqslant 0$, $\dfrac{x+3-2x(x+1)}{x+1} \leqslant 0$, $\dfrac{2x^2+x-3}{x+1} \geqslant 0$, $\dfrac{2(x+\frac{3}{2})(x-1)}{x+1} \geqslant 0$. Применим метод интервалов согласно рисунку.

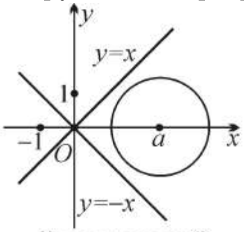


С учетом $x \geqslant 0$, имеем $\boxed{x\in[1;+\infty)}$ — в ответ.

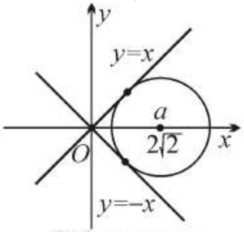
Второй случай, $x < 0$, имеем $\dfrac{x+3}{x+1} \leqslant -2x$, $\dfrac{x+3}{x+1} + 2x \leqslant 0$, $\dfrac{x+3+2x(x+1)}{x+1} \leqslant 0$, $\dfrac{2x^2+3x+3}{x+1} \leqslant 0$. Числитель дроби корней не имеет, следовательно, ветви его графика не пересекают ось абсцисс, его старший коэффициент положителен, следовательно, ветви графика квадратного трехчлена направлены вверх и числитель положителен при всех x, поэтому $x+1<0$, $x<-1$, откуда с учетом ОДЗ имеем $\boxed{x\in\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right)\cup\left(-\frac{9}{2};-1\right)}$ — в ответ.

Ответ. $x\in\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right)\cup\left(-\frac{9}{2};-1\right)\cup[1;+\infty)$.

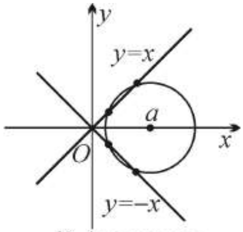
5. Указания. Первому уравнению системы соответствует пара пересекающихся прямых $y = x$ и $y = -x$, а второму — окружность радиуса 2, центр которой смещается вдоль оси координат Ox и имеет относительно этой оси координату a. Положение центра в точках касания легко вычисляется с помощью гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом, равным радиусу окружности. Анализируя взаимное расположение прямых и окружности при различных a, легко получить ответ.



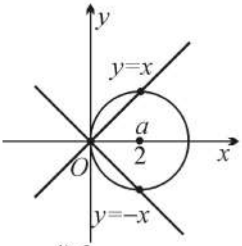
1) нет решений
$a>2\sqrt{2}$



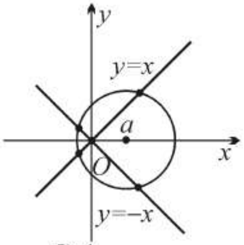
2) 2 решения
$a=2\sqrt{2}$



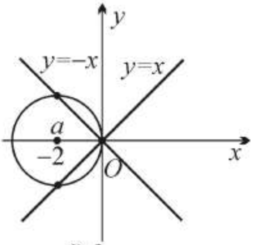
3) 4 решения
$2<a<2\sqrt{2}$



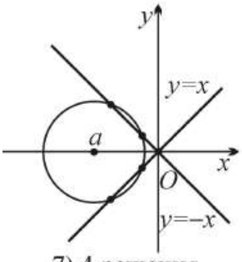
4) 3 решения
$a=2$



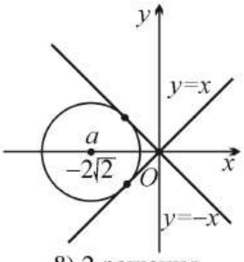
5) 4 решения
$-2<a<2$



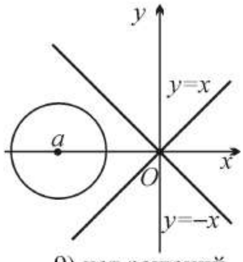
6) 3 решения
$a=-2$



7) 4 решения
$-2\sqrt{2}<a<-2$



8) 2 решения
$a=-2\sqrt{2}$



9) нет решений
$a<-2\sqrt{2}$

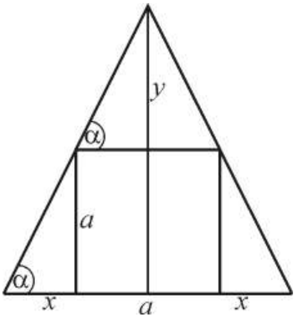
Ответ. $a \in \left(-2\sqrt{2}; -2\right) \cup (-2; 2) \cup \left(2; 2\sqrt{2}\right)$.

Вариант 912

1. Указание. Пусть v — собственная скорость парохода, тогда $v+15$ — собственная скорость катера. Пусть u — искомая скорость течения реки, расстояние примем за 1. По условию имеем
$\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{v+15+u}=\frac{1}{v+u}$ (плыли по течению),
$\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{v+15-u}=\frac{1}{v-u}$ (плыли против течения), откуда
$$\begin{cases}5(v+u)=2(v+u+15),\\ 7(v-u)=2(v-u+15);\end{cases}\quad\begin{cases}3(v+u)=30,\\ 5(v-u)=30;\end{cases}\quad\begin{cases}v+u=10,\\ v-u=6;\end{cases}$$
$2u=4$, $u=2$. Ответ. 2.

2. Пусть d — искомая разность, тогда $a_{18}=a_4+14d$, по условию
$$\begin{cases}a_4+a_4+14d=34,\\ a_4\cdot(a_4+14d)=240;\end{cases}\quad\begin{cases}a_4+7d=17,\\ a_4\cdot(a_4+14d)=240;\end{cases}$$
$a_4=17-7d$, $(17-7d)(17-7d+14d)=240$, $(17-7d)(17+7d)=240$, $289-49d^2=240$, $49d^2=49$, $d^2=1$, $d=\pm1$. Ответ. ±1.

3. Указание. Введем обозначения согласно рисунку.



Пусть a — сторона квадрата, x — часть основания треугольника от его вершины до ближайшей вершины квадрата, тогда справедливо $\frac{a}{x}=\operatorname{tg}\alpha$, $x=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$. Пусть y — часть высоты треугольника от его вершины до ближайшей стороны квадрата, тогда справедливо $\frac{y}{\frac{a}{2}}=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Высота треугольника равна $a+y=a+\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$, основание треугольника равно $a+2x=a+\frac{2a}{\operatorname{tg}\alpha}$, площадь треугольника $S=\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{2a}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\left(a+\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$,
$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\left(1+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right).$$
По условию $a^2=\frac{12}{49}\cdot S$, подставляя, имеем
$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{49}\cdot S\cdot\left(1+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right).$$

замена $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} = b$, имеем $49 = 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{b}\right) \cdot (1 + b)$, $49 = 6 \cdot \left(2 + \frac{1}{b} + b\right)$, $37 = \frac{6\left(b^2+1\right)}{b}$, $6b^2 - 37b + 6 = 0$, $b_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{1369-144}}{12}$, $b_{1,2} = \frac{37 \pm 35}{12}$, $b_1 = \frac{1}{6}$, $b_2 = 6$, $\operatorname{tg}\alpha = 2b$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ или $\operatorname{tg}\alpha = 12$.

Ответ. $\frac{1}{3}$ или 12.

4. Решить неравенство $\dfrac{2x^2 + 17x + 30}{(2x+5)(x+1)} \leqslant 2|x|$.

ОДЗ $\begin{cases} 2x + 5 \neq 0, \\ x + 1 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq -\dfrac{5}{2}, \\ x \neq -1. \end{cases}$

Разложим числитель дроби на множители, вычислив его корни $2x^2 + 17x + 30 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 8\cdot 30}}{4}$, $x_{1,2} = \frac{-17 \pm 7}{4}$, $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = -6$, откуда $2x^2 + 17x + 30 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x+6)$. Неравенство примет вид $\dfrac{(2x+5)(x+6)}{(2x+5)(x+1)} \leqslant 2|x|$, На ОДЗ $2x + 5 \neq 0$, можно сократить и перейти к равносильному неравенству $\dfrac{x+6}{x+1} \leqslant 2|x|$.

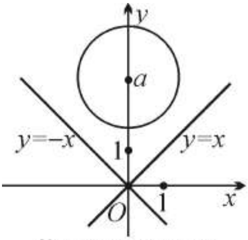
Первый случай, $x \geqslant 0$, имеем $\dfrac{x+6}{x+1} \leqslant 2x$, $\dfrac{x+6}{x+1} - 2x \leqslant 0$, $\dfrac{x + 6 - 2x(x+1)}{x+1} \leqslant 0$, $\dfrac{2x^2 + x - 6}{x+1} \geqslant 0$, $\dfrac{2(x - \frac{3}{2})(x+2)}{x+1} \geqslant 0$. Применим метод интервалов согласно рисунку.

С учетом $x \geqslant 0$, имеем $\boxed{x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)}$ — в ответ.

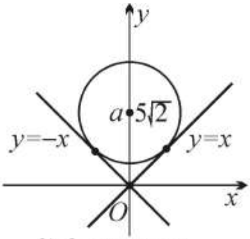
Второй случай, $x < 0$, имеем $\dfrac{x+6}{x+1} \leqslant -2x$, $\dfrac{x+6}{x+1} + 2x \leqslant 0$, $\dfrac{x + 6 + 2x(x+1)}{x+1} \leqslant 0$, $\dfrac{2x^2 + 3x + 6}{x+1} \leqslant 0$. Числитель дроби корней не имеет, следовательно, ветви его графика не пересекают ось абсцисс, его старший коэффициент положителен, следовательно, ветви графика квадратного трехчлена направлены вверх и числитель положителен при всех x, поэтому $x + 1 < 0$, $x < -1$, откуда с учетом ОДЗ имеем $\boxed{x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -1\right)}$ — в ответ.

Ответ. $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}; -1\right) \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

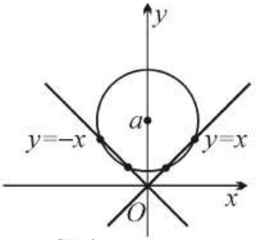
5. Указания. Первому уравнению системы соответствует пара пересекающихся прямых $y = x$ и $y = -x$, а второму — окружность радиуса 5, центр которой смещается вдоль оси координат Oy и имеет относительно этой оси координату a. Положение центра в точках касания легко вычисляется с помощью гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом, равным радиусу окружности. Анализируя взаимное расположение прямых и окружности при различных a, легко получить ответ.



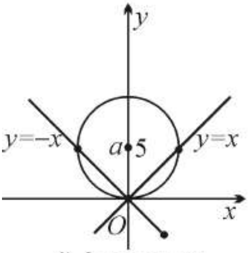
1) нет решений
$a>5\sqrt{2}$



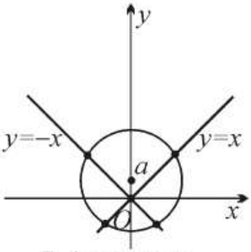
2) 2 решения
$a=5\sqrt{2}$



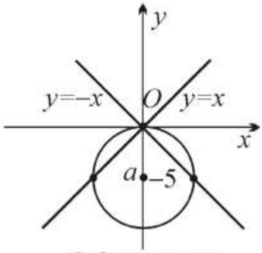
3) 4 решения
$5<a<5\sqrt{2}$



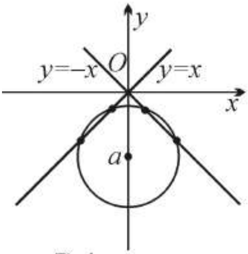
4) 3 решения
$a=5$



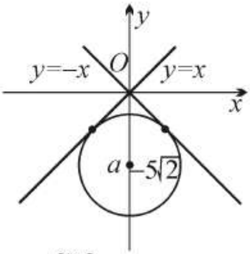
5) 4 решения
$-5<a<5$



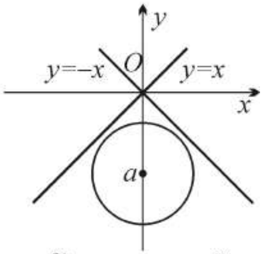
6) 3 решения
$a=-5$



7) 4 решения
$-5\sqrt{2}<a<-5$



8) 2 решения
$a=-5\sqrt{2}$



9) нет решений
$a<-5\sqrt{2}$

Ответ. $a \in \left(-5\sqrt{2}; -5\right) \cup (-5; 5) \cup \left(5; 5\sqrt{2}\right)$.

Вариант 913

1. Указание. Пусть v — собственная скорость катера, тогда $v+21$ — собственная скорость теплохода. Пусть u — искомая скорость течения реки, расстояние примем за 1. По условию имеем
$\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{v+21+u}=\frac{1}{v+u}$ (плыли по течению),
$\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{v+21-u}=\frac{1}{v-u}$ (плыли против течения), откуда

$$\begin{cases}5(v+u)=2(v+u+21),\\9(v-u)=2(v-u+21);\end{cases}\begin{cases}3(v+u)=42,\\7(v-u)=42;\end{cases}\begin{cases}v+u=14,\\v-u=6;\end{cases}$$

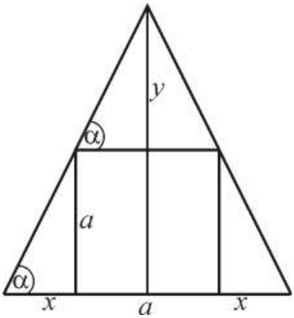
$2u=8$, $u=4$. Ответ. 4.

2. Пусть d — искомая разность, тогда $a_8=a_4+4d$, по условию

$$\begin{cases}a_4+a_4+4d=36,\\a_4\cdot(a_4+4d)=260;\end{cases}\begin{cases}a_4+2d=18,\\a_4\cdot(a_4+4d)=260;\end{cases}$$

$a_4=18-2d$, $(18-2d)(18-2d+4d)=260$, $(18-2d)(18+2d)=260$, $324-4d^2=260$, $4d^2=64$, $d^2=16$, $d=\pm4$. Ответ. ±4.

3. Указание. Введем обозначения согласно рисунку.



Пусть a — сторона квадрата, x — часть основания треугольника от его вершины до ближайшей вершины квадрата, тогда справедливо $\frac{a}{x}=\operatorname{tg}\alpha$, $x=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$. Пусть y — часть высоты треугольника от его вершины до ближайшей стороны квадрата, тогда справедливо $\frac{y}{\frac{a}{2}}=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Высота треугольника равна $a+y=a+\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$, основание треугольника равно $a+2x=a+\frac{2a}{\operatorname{tg}\alpha}$, площадь треугольника $S=\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{2a}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\left(a+\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$,

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\left(1+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right).$$

По условию $a^2=\frac{24}{49}\cdot S$, подставляя, имеем

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{49}\cdot S\cdot\left(1+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right).$$

замена $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}=b$, имеем $49=12\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot(1+b)$, $49=12\cdot\left(2+\frac{1}{b}+b\right)$, $25=\frac{12\left(b^2+1\right)}{b}$, $12b^2-25b+12=0$, $b_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{625-576}}{24}$, $b_{1,2}=\frac{25\pm7}{24}$, $b_1=\frac{4}{3}$, $b_2=\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha=2b$, откуда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{3}$ или $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$.

Ответ. $\frac{8}{3}$ или $\frac{3}{2}$.

4. Решить неравенство $\dfrac{2x^2+13x-45}{(2x-5)(x+2)}\leqslant 2|x|$.

ОДЗ $\begin{cases} 2x-5\neq 0, \\ x+2\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq \dfrac{5}{2}, \\ x\neq -2. \end{cases}$

Разложим числитель дроби на множители, вычислив его корни $2x^2+13x-45=0$, $x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{169+8\cdot45}}{4}$, $x_{1,2}=\frac{-13\pm23}{4}$, $x_1=\frac{5}{2}$, $x_2=-9$, откуда $2x^2+13x-45=2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+9)$. Неравенство примет вид $\dfrac{(2x-5)(x+9)}{(2x-5)(x+2)}\leqslant 2|x|$, На ОДЗ $2x-5\neq 0$, можно сократить и перейти к равносильному неравенству $\dfrac{x+9}{x+2}\leqslant 2|x|$.

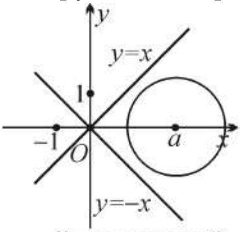
Первый случай, $x\geqslant 0$, имеем $\dfrac{x+9}{x+2}\leqslant 2x$, $\dfrac{x+9}{x+2}-2x\leqslant 0$, $\dfrac{x+9-2x(x+2)}{x+2}\leqslant 0$, $\dfrac{2x^2+3x-9}{x+2}\geqslant 0$, $\dfrac{2(x-\frac{3}{2})(x+3)}{x+2}\geqslant 0$. Примени́м метод интервалов согласно рисунку.

С учетом $x\geqslant 0$ и ОДЗ, имеем $\boxed{x\in\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)}$ — в ответ.

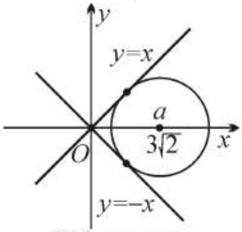
Второй случай, $x<0$, имеем $\dfrac{x+9}{x+2}\leqslant -2x$, $\dfrac{x+9}{x+2}+2x\leqslant 0$, $\dfrac{x+9+2x(x+2)}{x+2}\leqslant 0$, $\dfrac{2x^2+5x+9}{x+2}\leqslant 0$. Числитель дроби корней не имеет, следовательно, ветви его графика не пересекают ось абсцисс, его старший коэффициент положителен, следовательно, ветви графика квадратного трехчлена направлены вверх и числитель положителен при всех x, поэтому $x+2<0$, $x<-2$, откуда с учетом имеем $\boxed{x\in(-\infty;-2)}$ — в ответ.

Ответ. $x\in(-\infty;-2)\cup\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

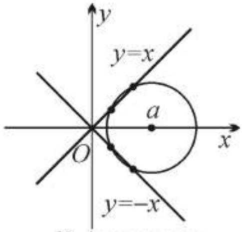
5. Указания. Первому уравнению системы соответствует пара пересекающихся прямых $y = x$ и $y = -x$, а второму — окружность радиуса 3, центр которой смещается вдоль оси координат Ox и имеет относительно этой оси координату a. Положение центра в точках касания легко вычисляется с помощью гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом, равным радиусу окружности. Анализируя взаимное расположение прямых и окружности при различных a, легко получить ответ.



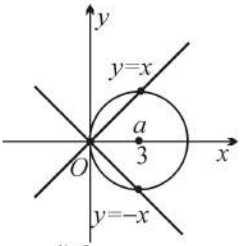
1) нет решений
$a>3\sqrt{2}$



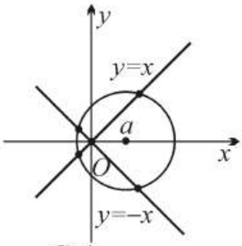
2) 2 решения
$a=3\sqrt{2}$



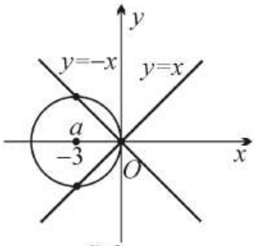
3) 4 решения
$3<a<3\sqrt{2}$



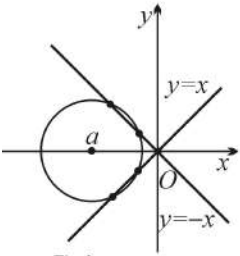
4) 3 решения
$a=3$



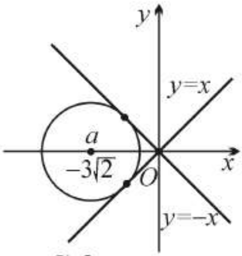
5) 4 решения
$-3<a<3$



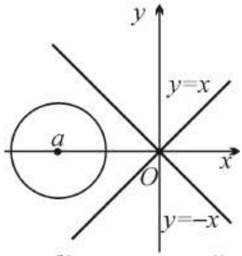
6) 3 решения
$a=-3$



7) 4 решения
$-3\sqrt{2}<a<-3$



8) 2 решения
$a=-3\sqrt{2}$



9) нет решений
$a<-3\sqrt{2}$

Ответ. $a \in \left(-3\sqrt{2}; -3\right) \cup (-3; 3) \cup \left(3; 3\sqrt{2}\right)$.

Вариант 914

1. Указание. Пусть v — собственная скорость парохода, тогда $v+12$ — собственная скорость катера. Пусть u — искомая скорость течения реки, расстояние примем за 1. По условию имеем
$\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{v+12+u}=\frac{1}{v+u}$ (плыли по течению),
$\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{v+12-u}=\frac{1}{v-u}$ (плыли против течения), откуда

$$\begin{cases}5(v+u)=3(v+u+12),\\ 5(v-u)=2(v-u+12);\end{cases}\quad\begin{cases}2(v+u)=36,\\ 3(v-u)=24;\end{cases}\quad\begin{cases}v+u=18,\\ v-u=8;\end{cases}$$

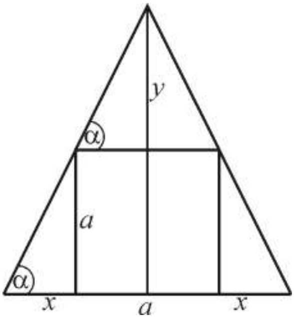
$2u=10$, $u=5$. Ответ. 5.

2. Пусть d — искомая разность, тогда $a_{13}=a_5+8d$, по условию

$$\begin{cases}a_5+a_5+8d=32,\\ a_5\cdot(a_5+8d)=192;\end{cases}\quad\begin{cases}a_5+4d=16,\\ a_5\cdot(a_5+8d)=192;\end{cases}$$

$a_5=16-4d$, $(16-4d)(16-4d+8d)=192$, $(16-4d)(16+4d)=192$, $256-16d^2=192$, $16d^2=64$, $d^2=4$, $d=\pm2$. Ответ. ±2.

3. Указание. Введем обозначения согласно рисунку.



Пусть a — сторона квадрата, x — часть основания треугольника от его вершины до ближайшей вершины квадрата, тогда справедливо $\frac{a}{x}=\operatorname{tg}\alpha$, $x=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$. Пусть y — часть высоты треугольника от его вершины до ближайшей стороны квадрата, тогда справедливо $\frac{y}{\frac{a}{2}}=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Высота треугольника равна $a+y=a+\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$, основание треугольника равно $a+2x=a+\frac{2a}{\operatorname{tg}\alpha}$, площадь треугольника $S=\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{2a}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\left(a+\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$,

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\left(1+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right).$$

По условию $a^2=\frac{12}{25}\cdot S$, подставляя, имеем

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{25}\cdot S\cdot\left(1+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right).$$

замена $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} = b$, имеем $25 = 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{b}\right) \cdot (1 + b)$, $25 = 6 \cdot \left(2 + \frac{1}{b} + b\right)$, $13 = \frac{6\left(b^2+1\right)}{b}$, $6b^2 - 13b + 6 = 0$, $b_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{12}$, $b_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{12}$, $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_2 = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2b$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ или $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Ответ. $\frac{4}{3}$ или 3.

4. Решить неравенство $\dfrac{2x^2 + 17x + 35}{(2x+7)(x+2)} \leqslant 2|x|$.

ОДЗ $\begin{cases} 2x + 7 \neq 0, \\ x + 2 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq -\dfrac{7}{2}, \\ x \neq -2. \end{cases}$

Разложим числитель дроби на множители, вычислив его корни $2x^2 + 17x + 35 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 8 \cdot 35}}{4}$, $x_{1,2} = \frac{-17 \pm 3}{4}$, $x_1 = -\frac{7}{2}$, $x_2 = -5$, откуда $2x^2 + 17x + 35 = 2\left(x + \frac{7}{2}\right)(x+5)$. Неравенство примет вид $\dfrac{(2x+7)(x+5)}{(2x+7)(x+2)} \leqslant 2|x|$, На ОДЗ $2x + 7 \neq 0$, можно сократить и перейти к равносильному неравенству $\dfrac{x+5}{x+2} \leqslant 2|x|$.

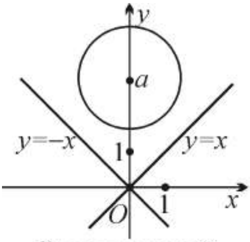
Первый случай, $x \geqslant 0$, имеем $\dfrac{x+5}{x+2} \leqslant 2x$, $\dfrac{x+5}{x+2} - 2x \leqslant 0$, $\dfrac{x+5-2x(x+2)}{x+2} \leqslant 0$, $\dfrac{2x^2+3x-5}{x+2} \geqslant 0$, $\dfrac{2(x+\frac{5}{2})(x-1)}{x+2} \geqslant 0$. Применим метод интервалов согласно рисунку.

С учетом $x \geqslant 0$, имеем $\boxed{x \in [1; +\infty)}$ — в ответ.

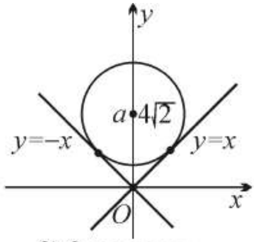
Второй случай, $x < 0$, имеем $\dfrac{x+5}{x+2} \leqslant -2x$, $\dfrac{x+5}{x+2} + 2x \leqslant 0$, $\dfrac{x+5+2x(x+2)}{x+2} \leqslant 0$, $\dfrac{2x^2+5x+5}{x+2} \leqslant 0$. Числитель дроби корней не имеет, следовательно, ветви его графика не пересекают ось абсцисс, его старший коэффициент положителен, следовательно, ветви графика квадратного трехчлена направлены вверх и числитель положителен при всех x, поэтому $x + 2 < 0$, $x < -2$, откуда с учетом ОДЗ имеем $\boxed{x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup \left(-\frac{7}{2}; -2\right)}$ — в ответ.

Ответ. $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup \left(-\frac{7}{2}; -2\right) \cup [1; +\infty)$.

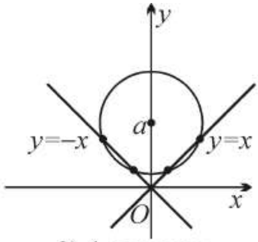
5. Указания. Первому уравнению системы соответствует пара пересекающихся прямых $y = x$ и $y = -x$, а второму — окружность радиуса 4, центр которой смещается вдоль оси координат Oy и имеет относительно этой оси координату a. Положение центра в точках касания легко вычисляется с помощью гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом, равным радиусу окружности. Анализируя взаимное расположение прямых и окружности при различных a, легко получить ответ.



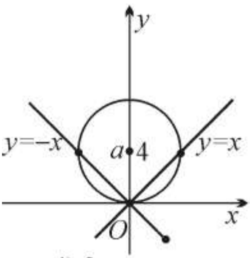
1) нет решений
$a>4\sqrt{2}$



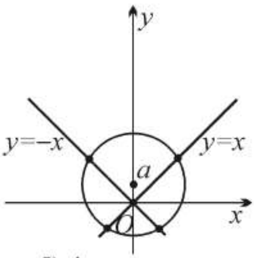
2) 2 решения
$a=4\sqrt{2}$



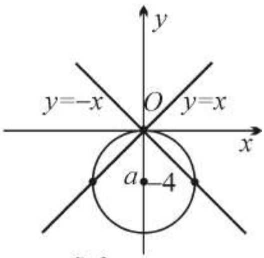
3) 4 решения
$4<a<4\sqrt{2}$



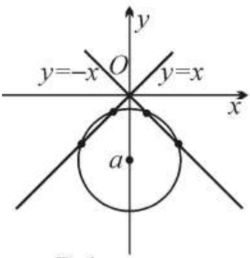
4) 3 решения
$a=4$



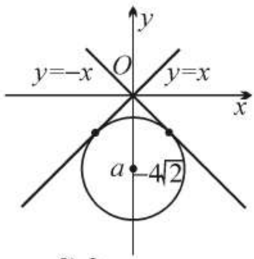
5) 4 решения
$-4<a<4$



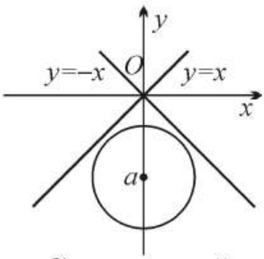
6) 3 решения
$a=-4$



7) 4 решения
$-4\sqrt{2}<a<-4$



8) 2 решения
$a=-4\sqrt{2}$



9) нет решений
$a<-4\sqrt{2}$

Ответ. $a \in \left(-4\sqrt{2}; -4\right) \cup (-4; 4) \cup \left(4; 4\sqrt{2}\right)$.

Критерии оценок, 9 класс

Полное и обоснованное решение каждой задачи с правильным ответом оценивалось по 7 баллов. Частично верные решения оценивались в соответствии с таблицей, 0 баллов выставлялось, если решение не удовлетворяло ни одному из критериев. Границы итоговых оценок: «2» — менее 6, «3» — с 6 по 19, «4» — с 20 по 27, «5» — с 28 баллов.

Ошибки	Баллы
Задача 1	
Описка в ответе при верном решении.	6
Арифметическая ошибка, задача доведена до ответа.	4
Более одной арифметической ошибки, при этом задача доведена до ответа, либо записана только верная система без ответа.	2
Задача 2	
Арифметическая ошибка в конце, не изменившая сложность задачи, ответ получен.	6
Более одной арифметической ошибки, при этом задача доведена до ответа с двумя решениями.	4
Потеряно одно из решений.	2
Задача 3	
Задача доведена до ответа с одной арифметической ошибкой.	6
Рассмотрен только один из двух случаев.	4
Рассмотрен только один верный случай с арифметической ошибкой, ответ получен.	3
Имеется верное геометрическое рассуждение, которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен.	2
Задача 4	
Неверный конец одного из промежутков (строгий).	6
Квадратный трехчлен разложен на множители без учета старшего коэффициента, далее все действия верные, ответ получен.	5
Верно решен только один из случаев при раскрытии модуля, ответ получен для обоих случаев.	4
Умножение обеих частей неравенства на знаменатель без учета его знака, или неверное раскрытие модуля, или сочетание двух ошибок выше, или один из случаев не завершен.	2
Задача 5	
Описка в ответе при верном решении.	6
Из ответа не исключен хотя бы один из случаев с 3-я решениями.	5
В ответ включен хотя бы один из случаев с 2-я решениями.	4
Сочетание только двух предыдущих ошибок.	3
Есть верное рассуждение, которое можно довести до ответа.	2

РАЗДЕЛ 3

ОТВЕТЫ

2018 год, 11 класс

Вариант 11

1. а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; $\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$; б) $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$.
2. $\left[-3;-\frac{1}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{5};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{5};3\right)$. **3.** 20.
4. $a\in\left(-\frac{21}{5};-1\right]\cup[3;+\infty)$. **5.** $\frac{4\sqrt{5}\pi}{75}$ или $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$.

Вариант 12

1. а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; $\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi m, m\in Z$; б) $-\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$.
2. $\left[-4;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};4\right)$. **3.** 24. **4.** $a\in(-\infty;-2]\cup\left[1;\frac{17}{5}\right)$.
5. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ или $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.

Вариант 13

1. а) $\pi n, n\in Z$; $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$; б) $\frac{5\pi}{4}$, 2π. **2.** $\left[-5;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup$ $\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};5\right)$. **3.** 40. **4.** $a\in(-\infty;-4]\cup\left[2;\frac{34}{5}\right)$. **5.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{24}$ или $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$.

Вариант 14

1. а) $\pi n, n\in Z$; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$; б) $-\frac{5\pi}{6}$, $-\pi$. **2.** $\left[-2;-\frac{1}{4}\right)\cup$ $\cup\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};2\right)$. **3.** 30. **4.** $a\in(-\infty;-4]\cup\left[1;\frac{8}{3}\right)$. **5.** $\frac{\pi}{6}$ или $\frac{32\pi}{3}$.

Вариант 21

1. а) $\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$; б) $-\frac{5\pi}{4}$. **2.** $[-3;3)$. **3.** 20.
4. $a\in\left(-\frac{21}{5};-1\right]$. **5.** $\frac{4\sqrt{5}\pi}{75}$.

Вариант 22

1. а) $\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi m, m\in Z$; б) $-\frac{4\pi}{3}$. **2.** $[-4;4)$. **3.** 24. **4.** $a\in\left[1;\frac{17}{5}\right)$. **5.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$.

Вариант 23

1. а) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$; б) $\frac{5\pi}{4}$. **2.** $[-5;5)$. **3.** 40. **4.** $a\in\left[2;\frac{34}{5}\right)$. **5.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{24}$.

Вариант 24

1. а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$; б) $-\frac{5\pi}{6}$. **2.** $[-2;2)$. **3.** 30. **4.** $a\in\left[1;\frac{8}{3}\right)$. **5.** $\frac{\pi}{6}$.

2018 год, 9 класс

Вариант 911

1. 3 км/час. **2.** ±3. **3.** $\frac{1}{2}$ или 8. **4.** $x\in\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right)\cup\left(-\frac{9}{2};-1\right)\cup[1;+\infty)$. **5.** $a\in\left(-2\sqrt{2};-2\right)\cup(-2;2)\cup\left(2;2\sqrt{2}\right)$.

Вариант 912

1. 2 км/час. **2.** ±1. **3.** $\frac{1}{3}$ или 12. **4.** $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{5}{2};-1\right)\cup$ $\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. **5.** $a\in\left(-5\sqrt{2};-5\right)\cup(-5;5)\cup\left(5;5\sqrt{2}\right)$.

Вариант 913

1. 4 км/час. **2.** ±4. **3.** $\frac{3}{2}$ или $\frac{8}{3}$. **4.** $x\in(-\infty;-2)\cup\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **5.** $a\in\left(-3\sqrt{2};-3\right)\cup(-3;3)\cup\left(3;3\sqrt{2}\right)$.

Вариант 914

1. 5 км/час. **2.** ±2. **3.** $\frac{4}{3}$ или 3. **4.** $x\in\left(-\infty;-\frac{7}{2}\right)\cup\left(-\frac{7}{2};-2\right)\cup[1;+\infty)$. **5.** $a\in\left(-4\sqrt{2};-4\right)\cup(-4;4)\cup\left(4;4\sqrt{2}\right)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное пособие

Ляпунов Игорь Борисович

Варианты

выпускных экзаменов

по математике СУНЦ НГУ за 2018 год

Технический редактор *Т. В. Иванова*

Графические работы *А. Г. Иванов*

Верстка *И. Б. Ляпунов*

Подписано в печать 07.06.2018 г.
Заказ № 15-18

Формат $60 \times 84/16$
Усл. печ. л. 2,8
Уч.-изд. л. 3,45
Тираж 300 экз.

Издательско-полиграфический центр НГУ
630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2