МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

И. Б. ЛЯПУНОВ

ВАРИАНТЫ ВЫПУСКНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ СУНЦ НГУ ЗА 2019 ГОД

Методическое пособие

НОВОСИБИРСК
2019

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
Л 97

Ляпунов, И. Б.

Л 97 Варианты выпускных экзаменов по математике СУНЦ НГУ за 2019 год : метод. пособие / И. Б. Ляпунов ; СУНЦ НГУ. — Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2019. — 52 с.

ISBN 978–5–4437–0900–0

Сборник содержит задачи выпускных экзаменов по математике в 9 и 11-х классах, проводившихся в СУНЦ НГУ в 2019 г. Все задачи снабжены решениями или подробными указаниями, ответами и критериями оценок. Данное методическое пособие предназначено для оканчивающих школу учащихся СУНЦ НГУ, учителей старших классов, а также для всех, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
Л97

ISBN 978–5–4437–0900–0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое издание содержит варианты выпускных экзаменов по математике 9 и 11-х классов СУНЦ НГУ за 2019 г. Расположение задач традиционное для такого рода изданий — по классам и вариантам. Продолжительность экзамена составляет 3 ч 55 мин. Из-за различия в семинарских программах выпускникам физико-математического и химического профиля 11 класса предлагались различные по трудности задач варианты, сответственно, 911—914 и 921—924. Выпускникам 9 класса предлагались варианты 991—994. Задачи для 9 класса по традиции размещены после задач для 11 класса. Все задачи снабжены решениями или подробными указаниями, критериями оценок и ответами. Задачи настоящего сборника позволяют составить представление о требованиях к подготовке выпускников СУНЦ НГУ по математике.

Все задачи являются оригинальными, в том смысле, что составлены заново именно для этого экзамена, при этом часть идей по составлению задач заимствована из вступительных экзаменов ведущих вузов страны разных лет.

Пособие будет полезно как учащимся СУНЦ, оканчивающим школу, так и учителям старших классов, а также всем, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

Автор выражает благодарность канд. пед. наук Юрию Викторовичу Михееву и канд. физ.-мат. наук Александру Сергеевичу Марковичеву за полезные обсуждения проектов задач.

И. Б. Ляпунов

РАЗДЕЛ 1

ЗАДАЧИ ВЫПУСКНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

2019 год, 11 класс

Вариант 911

1. а) Решить уравнение
$$9^{\left(1-2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)}-4\cdot 3^{\left(\frac{1}{2}-\cos(2x+\pi)\right)}+9=0.$$
б) Указать все корни этого уравнения из промежутка $\left(\frac{\pi}{2};\frac{9\pi}{4}\right)$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log^2_{\frac{1}{5}}(x^2)-12\log_5(-x)+9}{\log^2_5(-x)-4}\geqslant 0.$

3. Найти площадь треугольника ABC, если даны его сторона $AB=4\sqrt{2}$, медиана $BD=\sqrt{17}$, радиус описанной окружности $R=\sqrt{10}$.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$$(a+1)\cdot\cos^2 x-2\cdot(a^2+a)\cdot\cos x+10a^2-15a-25>0$$
верно для всех $x\in(-\infty;+\infty)$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC=BC=39$, $AB=30$. Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Угол между ребром SC и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{20}{39}$. Шар касается основания пирамиды и всех плоскостей ее боковых граней. Найти объем шара, радиус которого в 10 раз меньше радиуса указанного шара.

Вариант 912

1. а) Решить уравнение

$$625^{\left(\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}-6\cdot 5^{\left(\frac{1}{2}-\sin(2x+\pi)\right)}+25=0.$$

б) Указать все корни этого уравнения из промежутка $\left(\frac{\pi}{3};\frac{9\pi}{4}\right)$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log^2_{\frac{1}{3}}(x^2)-4\log_3(-x)+1}{\log_3^2(-x)-9}\geqslant 0.$

3. Найти площадь треугольника ABC, если даны его сторона $AB=2\sqrt{3}$, медиана $BD=\sqrt{11}$, радиус описанной окружности $R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(a-1)\cdot\sin^2 x-2\cdot(a^2-a)\cdot\sin x+8a^2-24a+16>0$$

верно для всех $x\in(-\infty;+\infty)$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC=BC=50$, $AB=60$. Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Угол между ребром SC и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. Шар касается основания пирамиды и всех плоскостей ее боковых граней. Найти объем шара, радиус которого в 15 раз меньше радиуса указанного шара.

Вариант 913

1. а) Решить уравнение

$$4^{\left(2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1\right)}-5\cdot 2^{\left(-\frac{1}{2}-\sin(2x+\frac{3\pi}{2})\right)}+2=0.$$

б) Указать все корни этого уравнения из промежутка $\left(\pi;\frac{11\pi}{4}\right)$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log^2_{\frac{1}{6}}(x^2)+12\log_6(-x)+9}{\log_6^2(-x)-4}\geqslant 0.$

3. Найти площадь треугольника ABC, если даны его сторона $AB=2\sqrt{2}$, медиана $BD=\frac{\sqrt{29}}{2}$, радиус описанной окружности $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(a-5)\cdot\cos^2 x - 2\cdot(a^2-5a)\cdot\cos x + 4a^2 - 24a + 20 > 0$$

верно для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC = BC = 150$, $AB = 240$. Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Угол между ребром SC и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Шар касается основания пирамиды и всех плоскостей ее боковых граней. Найти объем шара, радиус которого в 40 раз меньше радиуса указанного шара.

Вариант 914

1. а) Решить уравнение
$$81^{\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\right)} - 10\cdot 3^{\left(-\frac{1}{2}-\sin(2x+3\pi)\right)} + 3 = 0.$$

б) Указать все корни этого уравнения из промежутка $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log^2_{\frac{1}{2}}(x^2) + 4\log_2(-x) + 1}{\log^2_2(-x) - 16} \geqslant 0.$

3. Найти площадь треугольника ABC, если даны его сторона $AB = \sqrt{3}$, медиана $BD = \sqrt{2}$, радиус описанной окружности $R = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(a+2)\cdot\sin^2 x - 2\cdot(a^2+2a)\cdot\sin x + 6a^2 + 3a - 18 > 0$$

верно для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC = BC = 68$, $AB = 120$. Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Угол между ребром SC и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{36}{17}$. Шар касается основания пирамиды и всех плоскостей ее боковых граней. Найти объем шара, радиус которого в 15 раз меньше радиуса указанного шара.

Вариант 921

1. а) Решить уравнение
$9^{\left(1-2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)}-4\cdot 3^{\left(\frac{1}{2}-\cos(2x+\pi)\right)}+9=0.$
б) Указать все корни этого уравнения из промежутка $\left(\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log^2_{\frac{1}{5}}(x^2)-12\log_5(-x)+9}{\log^2_5(-x)-4}\geqslant 0.$

3. Найти площадь треугольника ABC, если даны его сторона $AB=4\sqrt{2}$, медиана $BD=\sqrt{17}$, $\angle ACB=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых найдется хотя бы одно значение x, удовлетворяющее равенству

$$(a+1)\cdot\cos^2 x-2\cdot(a^2+a)\cdot\cos x+10a^2-15a-25=0.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC=BC=39$, $AB=30$. Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Угол между ребром SC и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{20}{39}$. Найти объем шара, радиус которого в 10 раз меньше радиуса вписанного в пирамиду шара.

Вариант 922

1. а) Решить уравнение
$625^{\left(\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}-6\cdot 5^{\left(\frac{1}{2}-\sin(2x+\pi)\right)}+25=0.$
б) Указать все корни этого уравнения из промежутка $\left(\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log^2_{\frac{1}{3}}(x^2)-4\log_3(-x)+1}{\log^2_3(-x)-9}\geqslant 0.$

3. Найти площадь треугольника ABC, если даны его сторона $AB=2\sqrt{3}$, медиана $BD=\sqrt{11}$, $\angle ACB=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых найдется хотя бы одно значение x, удовлетворяющее равенству

$$(a-1)\cdot\sin^2 x-2\cdot(a^2-a)\cdot\sin x+8a^2-24a+16=0.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC=BC=50$, $AB=60$. Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Угол между ребром SC и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. Найти объем шара, радиус которого в 15 раз меньше радиуса вписанного в пирамиду шара.

Вариант 923

1. а) Решить уравнение
$$4^{\left(2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1\right)}-5\cdot 2^{\left(-\frac{1}{2}-\sin(2x+\frac{3\pi}{2})\right)}+2=0.$$
б) Указать все корни этого уравнения из промежутка $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right)$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log^2_{\frac{1}{6}}(x^2)+12\log_6(-x)+9}{\log^2_6(-x)-4}\geqslant 0.$

3. Найти площадь треугольника ABC, если даны его сторона $AB=2\sqrt{2}$, медиана $BD=\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\angle ACB=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых найдется хотя бы одно значение x, удовлетворяющее равенству
$$(a-5)\cdot\cos^2 x-2\cdot(a^2-5a)\cdot\cos x+4a^2-24a+20=0.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC=BC=150$, $AB=240$. Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Угол между ребром SC и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Найти объем шара, радиус которого в 40 раз меньше радиуса вписанного в пирамиду шара.

Вариант 924

1. а) Решить уравнение
$$81^{\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\right)}-10\cdot 3^{\left(-\frac{1}{2}-\sin(2x+3\pi)\right)}+3=0.$$
б) Указать все корни этого уравнения из промежутка $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)$.

2. Решить неравенство $\dfrac{\log^2_{\frac{1}{2}}(x^2)+4\log_2(-x)+1}{\log^2_2(-x)-16}\geqslant 0.$

3. Найти площадь треугольника ABC, если даны его сторона $AB=\sqrt{3}$, медиана $BD=\sqrt{2}$, $\angle ACB=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых найдется хотя бы одно значение x, удовлетворяющее равенству

$$(a+2)\cdot\sin^2 x - 2\cdot(a^2+2a)\cdot\sin x + 6a^2 + 3a - 18 = 0.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, причем $AC = BC = 68$, $AB = 120$. Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Угол между ребром SC и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{36}{17}$. Найти объем шара, радиус которого в 15 раз меньше радиуса вписанного в пирамиду шара.

2019 год, 9 класс

Вариант 991

1. Бассейн заполняется из двух труб за 5 ч 20 мин. Если открыть только первую трубу, то бассейн заполнится на 8 ч быстрее, чем если открыть только вторую трубу. Сколько времени будет заполняться бассейн только второй трубой?

2. Окружность радиуса 9 с центром в вершине C треугольника ABC площади $84\sqrt{2}$ пересекает его основание AB в точках L и M, причем L лежит между A и M. Площади треугольников CAL, CLM и CMB в указанном порядке являются вторым, четвертым и шестым членами арифметической прогрессии. Найти высоту треугольника ABC, проведенную из вершины C.

3. В прямоугольном треугольнике ABC, с гипотенузой AB и высотой CN, точка M — середина катета BC. Прямая MN пересекает прямую AC в точке D. Найти площадь треугольника BCD, если $MN = 8$, $DN = 25$.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{2x+1}-x}{\sqrt{2x+1}+x} \leqslant 1$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |x| + 4|y-a| = 4a, \\ \left(x^2+y^2-17\right)\cdot\left((x-12)^2+(y-3)^2\right) = 0 \end{cases}$ имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 992

1. Бассейн заполняется из двух труб за 4 ч 48 мин. Если открыть только первую трубу, то бассейн заполнится на 4 ч быстрее, чем если открыть только вторую трубу. Сколько времени будет заполняться бассейн только второй трубой?

2. Окружность радиуса 8 с центром в вершине C треугольника ABC площади $48\sqrt{3}$ пересекает его основание AB в точках L и M, причем L лежит между A и M. Площади треугольников CAL, CLM и CMB в указанном порядке являются третьим, пятым и седьмым членами арифметической прогрессии. Найти высоту треугольника ABC, проведенную из вершины C.

3. В прямоугольном треугольнике ABC, с гипотенузой AB и высотой CN, точка M — середина катета BC. Прямая MN пересекает прямую AC в точке D. Найти площадь треугольника BCD, если $MN = 6$, $DN = 16$.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+5}-x-3}{\sqrt{x+5}+x+3} \leqslant 1$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3|x-a|+|y| = 3a, \\ \left(x^2+y^2-40\right)\cdot\left((x-5)^2+(y+15)^2\right) = 0 \end{cases}$ имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 993

1. Бассейн заполняется из двух труб за 5 ч 50 мин. Если открыть только первую трубу, то бассейн заполнится на 4 ч быстрее, чем если открыть только вторую трубу. Сколько времени будет заполняться бассейн только второй трубой?

2. Окружность радиуса 7 с центром в вершине C треугольника ABC площади $30\sqrt{6}$ пересекает его основание AB в точках L и M, причем L лежит между A и M. Площади треугольников CAL, CLM и CMB в указанном порядке являются четвертым, шестым и восьмым членами арифметической прогрессии. Найти высоту треугольника ABC, проведенную из вершины C.

3. В прямоугольном треугольнике ABC, с гипотенузой AB и высотой CN, точка M — середина катета BC. Прямая MN пересекает прямую AC в точке D. Найти площадь треугольника BCD, если $MN = 8$, $DN = 18$.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+4}-2x-2}{\sqrt{x+4}+2x+2} \leqslant 1$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |x| + 2|y-a| = 2a, \\ \left(x^2+y^2-80\right)\cdot\left((x+12)^2+(y-6)^2\right)=0 \end{cases}$ имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 994

1. Бассейн заполняется из двух труб за 7 ч 12 мин. Если открыть только первую трубу, то бассейн заполнится на 6 ч быстрее, чем если открыть только вторую трубу. Сколько времени будет заполняться бассейн только второй трубой?

2. Окружность радиуса 6 с центром в вершине C треугольника ABC площади $24\sqrt{5}$ пересекает его основание AB в точках L и M, причем L лежит между A и M. Площади треугольников CAL, CLM и CMB в указанном порядке являются пятым, седьмым и девятым членами арифметической прогрессии. Найти высоту треугольника ABC, проведенную из вершины C.

3. В прямоугольном треугольнике ABC, с гипотенузой AB и высотой CN, точка M — середина катета BC. Прямая MN пересекает прямую AC в точке D. Найти площадь треугольника BCD, если $MN = 5$, $DN = 18$.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{3x+7}-x-2}{\sqrt{3x+7}+x+2} \leqslant 1$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2|x-a| + |y| = 2a, \\ \left(x^2+y^2-45\right)\cdot\left((x-6)^2+(y-12)^2\right)=0 \end{cases}$ имеет ровно 2 различных решения.

РАЗДЕЛ 2

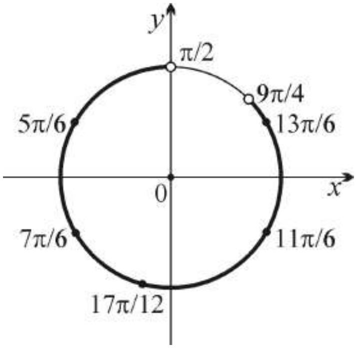
УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ ОЦЕНОК

2019 год, 11 класс

Вариант 911

1. а) $9^{\left(1-2\sin^2 x\right)} - 4\cdot 3^{\left(\frac{1}{2}+\cos 2x\right)} + 9 = 0$ (по формулам приведения), $9^{\cos 2x} - 4\sqrt{3}\cdot 3^{\cos 2x} + 9 = 0$. Замена $y = 3^{\cos 2x}$, $y \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Имеем $y^2 - 4\sqrt{3}y + 9 = 0$, $y_1 = \sqrt{3}$, $y_2 = 3\sqrt{3}$ — посторонний, т. к. $y_2 \notin \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Обратная замена $3^{\cos 2x} = 3^{\frac{1}{2}}$, т. к. $3 \neq 1$, то $\cos 2x = \frac{1}{2}$,

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ 2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \quad \boxed{\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.} \text{ — в ответ.}$$



б) Отбирая с помощью тригонометрического круга все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$, получим $x \in \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) $x \in \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$.

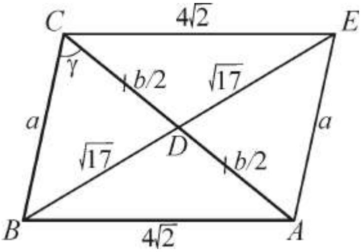
2. Указания. Преобразуя, получим равносильное неравенство $\dfrac{\left(-2\log_5|x|\right)^2 - 12\log_5(-x) + 9}{\log_5^2(-x) - 4} \geqslant 0$. Заметим, что из определения логарифма, $x < 0$, откуда $\dfrac{4\left(\log_5(-x)\right)^2 - 12\log_5(-x) + 9}{(\log_5(-x)+2)\cdot(\log_5(-x)-2)} \geqslant 0$,

$\dfrac{(2\log_5(-x)-3)^2}{(\log_5(-x)+2)\cdot(\log_5(-x)-2)} \geqslant 0$. Замена $t = \log_5(-x)$, имеем $\dfrac{(2t-3)^2}{(t+2)\cdot(t-2)} \geqslant 0$. Применим метод интервалов

$$\left[\begin{array}{l} t<-2, \\ t=\dfrac{3}{2}, \\ t>2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_5(-x)<-2, \\ \log_5(-x)=\dfrac{3}{2}, \\ \log_5(-x)>2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{r} 0<-x<\dfrac{1}{25}, \\ -x=5\sqrt{5}, \\ -x>25; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{r} 0>x>-\dfrac{1}{25}, \\ x=-5\sqrt{5}, \\ x<-25. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty;-25) \cup \left\{-5\sqrt{5}\right\} \cup \left(-\dfrac{1}{25};0\right)$.

3. Указание.



Продолжим медиану BD на ту же длину, достроив данный треугольник до параллелограмма $ABCE$. Введем обозначения согласно рисунку. Применим тождество параллелограмма $BE^2+AC^2 = 2\cdot AB^2+2\cdot BC^2$. С учетом обозначений и числовых данных тождество примет вид

$$(2\cdot\sqrt{17})^2+b^2 = 2\cdot(4\sqrt{2})^2+2\cdot a^2.$$

По теореме синусов $\frac{AB}{\sin\gamma} = 2R$, откуда $\sin\gamma = \frac{AB}{2R}$, $\sin\gamma = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{10}}$, $\sin\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Используя основное тригонометрическое тождество найдем $\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

1) $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$. По теореме косинусов $a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 32$.

Имеем систему $\begin{cases} 2a^2-b^2=4, \\ a^2-2\cdot a\cdot b\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}+b^2=32. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на 8 и вычтем из него второе, получим $15a^2+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot ab-9b^2=0$. Если $b=0$, то из уравнения следует $a=0$, однако пара $(0;0)$ не является решением исходной системы, поэтому при делении обеих частей полученного уравнения на $b^2 \neq 0$ потери решений не будет,

$$15\left(\tfrac{a}{b}\right)^2+\tfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(\tfrac{a}{b}\right)-9=0.$$

Решив уравнение, находим $\left(\frac{a}{b}\right)_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\left(\frac{a}{b}\right)_2 = -\frac{9}{5\sqrt{5}} < 0$ — посторонний. Подставляя в первое уравнение системы $a = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot b$, находим $b = 6$, затем находим $a = 2\sqrt{5}$, искомая площадь $S_1 = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 12$.

2) $\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. По теореме косинусов $a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 32$.

Имеем систему $\begin{cases} 2a^2 - b^2 = 4, \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} + b^2 = 32. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на 8 и вычтем из него второе, получим $15a^2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot ab - 9b^2 = 0$. Аналогично первому случаю придем к уравнению $15\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right) - 9 = 0$. Решив уравнение, находим $\left(\frac{a}{b}\right)_3 = \frac{9}{5\sqrt{5}}$, $\left(\frac{a}{b}\right)_4 = -\frac{\sqrt{5}}{3} < 0$ — посторонний. Подставляя в первое уравнение системы $a = \frac{9}{5\sqrt{5}} \cdot b$, находим $b = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{37}}$, затем находим $a = \frac{18}{\sqrt{37}}$, искомая площадь $S_2 = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{\sqrt{37}} \cdot \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{37}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{180}{37}$.

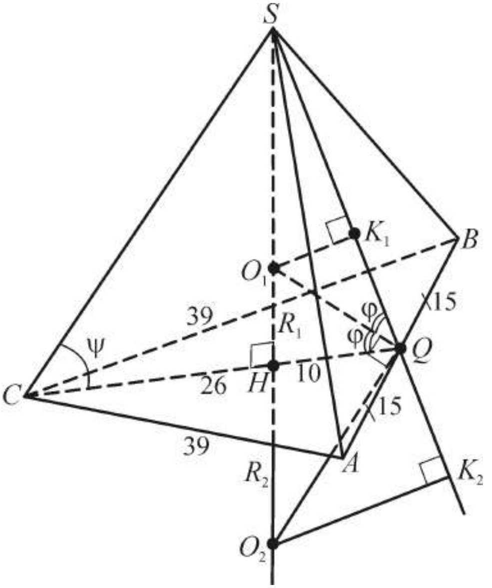
Ответ: 12 или $\frac{180}{37}$.

4. Указания. Заметим, при $a = -1$ неравенство примет вид $0 > 0$, что неверно, следовательно, $a \neq -1$. Также, при $a = -1$, свободный член выражения слева равен 0, что позволяет разложить его на множители, один из которых $a + 1$. Замена $\cos x = t$, $t \in [-1; 1]$. Надо найти все a, при каждом из которых неравенство $(a+1) \cdot (t^2 - 2at + 10a - 25) > 0$ верно для всех $t \in [-1; 1]$. Найдем корни квадратного трехчлена $t^2 - 2at + 10a - 25$, имеем $t_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 10a + 25} = a \pm (a - 5)$, $t_1 = 2a - 5$, $t_2 = 5$. Приходим к неравенству $(a+1) \cdot (t - 2a + 5) \cdot (t - 5) > 0$, которое должно быть верно, для всех $t \in [-1; 1]$. Заметим, что при $t \in [-1; 1]$ верно $t - 5 < 0$, сократим на этот отрицательный множитель обе части неравенства и сменим его знак, получим $(a + 1) \cdot (t - 2a + 5) < 0$, оно должно быть верно, для всех $t \in [-1; 1]$.

Первый случай. При $a + 1 < 0$, надо $t - 2a + 5 > 0$, для всех $t \in [-1; 1]$. Это достигается, если при минимальном $t = -1$ неравенство верно, т. е. $-1 - 2a + 5 > 0$, откуда $a < 2$, с учетом ограничения $a < -1$, находим $\boxed{a < -1}$ — в ответ.

Второй случай. При $a + 1 > 0$, надо $t - 2a + 5 < 0$, для всех $t \in [-1; 1]$. Это достигается, если при максимальном $t = 1$ неравенство верно, т. е. $1-2a+5<0$, откуда $a>3$, с учетом ограничения $a>-1$, находим $\boxed{a>3}$ — в ответ. Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

5. Указание.



Так как все двугранные углы при основании ABC пирамиды равны между собой, то ее вершина S проектируется в центр H вписанной в треугольник ABC окружности, а все точки прямой, содержащей высоту SH данной пирамиды, равноудалены от ее боковых граней, поэтому центр искомого шара лежит на прямой SH. Пусть O_1 — центр шара радиуса R_1, лежащего внутри данной пирамиды, а O_2 — центр шара радиуса R_2, лежащего снаружи от нее. Введем обозначения согласно рисунку. Найдем радиус HQ вписанной в основание ABC окружности. В равнобедренном треугольнике ABC медиана CQ является высотой и биссектрисой. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACQ имеем $CQ=\sqrt{AC^2-AQ^2}=\sqrt{(39)^2-(15)^2}=36$. По формулам $S=\frac{1}{2}\cdot P\cdot r=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h$ имеем $(39+39+30)\cdot r=30\cdot 36$, откуда $HQ=r=10$. Тогда $CH=CQ-HQ=36-10=26$. Найдем высоту пирамиды $SH=CH\cdot\operatorname{tg}\psi=26\cdot\frac{20}{39}=\frac{40}{3}$. По теореме Пифагора $SQ=\sqrt{SH^2+HQ^2}=\sqrt{\left(\frac{40}{3}\right)^2+(10)^2}=\frac{50}{3}$. Так как $HQ\perp AB$ и HQ — проекция SQ, то по теореме о трех перпендикулярах $SQ\perp AB$ и угол HQS — линейный угол двугранного угла с ребром AB, соответственно O_1Q — его биссектриса. Пусть $\angle HQO_1=\varphi$, тогда $\cos 2\varphi=\frac{HQ}{SQ}=\frac{10}{\frac{50}{3}}=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}=\frac{1}{2}$. Из прямоугольного треугольника O_1HQ

имеем $\frac{R_1}{10} = \frac{R_1}{HQ} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$, откуда $\boxed{V_1 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}}$ — в ответ.

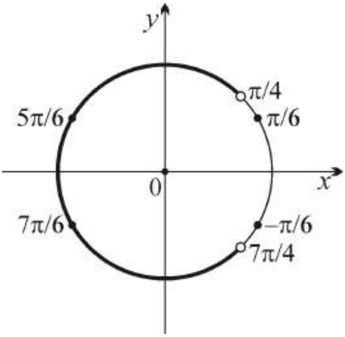
Второй случай. Шар касается продолжений боковых граней пирамиды и ее основания, тогда центр O_2 лежит на пересечении прямой SH с биссектрисой угла HQK_2. Биссектрисы смежных углов образуют угол в $90°$, поэтому $\angle HQO_2 = 90° - \varphi$, соответственно $\operatorname{tg}\angle HQO_2 = \operatorname{ctg}\varphi$, откуда $\frac{R_2}{10} = \frac{R_2}{HQ} = \operatorname{ctg}\varphi = 2$, $\boxed{V_2 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(2)^3 = \frac{32\pi}{3}}$ — в ответ. Ответ: $\frac{\pi}{6}$ или $\frac{32\pi}{3}$.

Замечание. Получить ответ в первом случае всех вариантов задачи 5 можно, выразив объем пирамиды по двум различным формулам — через площадь основания и высоту, а также через радиус вписанного шара и площадь ее полной поверхности. Сами объем и площадь полной поверхности не нужны. Выраженные через площадь основания, они сократятся при использовании формулы, связывающей площадь фигуры с площадью ее ортогональной проекции: $S_{pr} = S_{fig}\cdot\cos\alpha$, где α — угол между плоскостями, в которых лежат фигура и ее проекция.

Вариант 921

Все задачи варианта либо являются частным случаем аналогичной задачи из варианта 911, либо совпадают с ними.

1. а) Решение в точности повторяет решение пункта а) аналогичной задачи из варианта 911.



б) Отбирая с помощью тригонометрического круга все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$, получим $x \in \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) $x \in \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$.

2. Совпадает с задачей из варианта 911.

3. Частный случай задачи варианта 911. Ответ: 12.

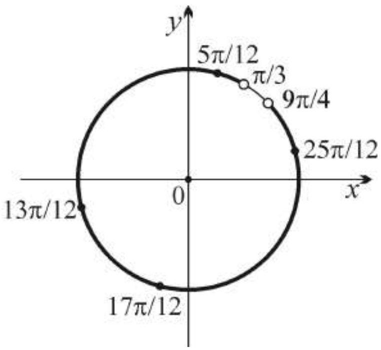
4. Указания. Заметим, при $a=-1$ уравнение примет вид $0=0$, что верно при всех x, следовательно, $\boxed{a=-1}$ — в ответ.

Также, при $a=-1$, свободный член выражения слева равен 0, что позволяет разложить его на множители, один из которых $a+1$. Замена $\cos x=t$, $t\in[-1;1]$, $(a+1)\cdot(t^2-2at+10a-25)=0$. Рассмотрим это уравнение при $a\neq-1$. Надо найти все a, при каждом из которых уравнение $(t^2-2at+10a-25)=0$ имеет решение $t\in[-1;1]$. Найдем корни $t^2-2at+10a-25=0$, имеем $t_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2-10a+25}=a\pm(a-5)$, $t_1=2a-5$, $t_2=5>1$ — посторонний всегда. Приходим к уравнению $t-2a+5=0$, которое должно иметь решение $t\in[-1;1]$. Оценивая с двух сторон $t=2a-5$ его минимумом, при $t=-1$, и максимумом, при $t=1$, находим границы для $a:-1+5\leqslant 2a\leqslant 1+5$, откуда $\boxed{2\leqslant a\leqslant 3}$ — в ответ. Ответ: $a\in\{-1\}\cup[2;3]$.

5. Только первый случай. Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Вариант 912

1. а) $25^{(2\cdot(-\cos x)\cdot(-\sin x))}-6\cdot5^{\left(\frac{1}{2}+\sin 2x\right)}+25=0$ (по формулам приведения), $25^{\sin 2x}-6\sqrt{5}\cdot5^{\sin 2x}+25=0$. Замена $y=5^{\sin 2x}$, $y\in\left[\frac{1}{5};5\right]$. Имеем $y^2-6\sqrt{5}y+25=0$, $y_1=\sqrt{5}$, $y_2=5\sqrt{5}$ — посторонний, т. к. $y_2\notin\left[\frac{1}{5};5\right]$. Обратная замена $5^{\sin 2x}=5^{\frac{1}{2}}$, т. к. $5\neq1$, то $\sin 2x=\frac{1}{2}$, $\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi m, m\in\mathbb{Z},\\ 2x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z};\end{array}\right.$ $\boxed{\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+\pi m, m\in\mathbb{Z},\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.}$ — в ответ.



б) Отбирая с помощью тригонометрического круга все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{\pi}{3};\frac{9\pi}{4}\right)$, получим $x\in\left\{\frac{5\pi}{12};\frac{13\pi}{12};\frac{17\pi}{12};\frac{25\pi}{12}\right\}$.

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{12}+\pi m, m\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{5\pi}{12}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

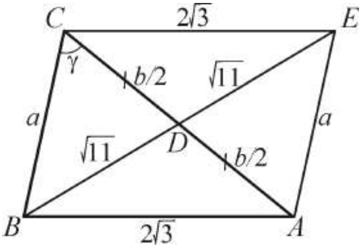
б) $x\in\left\{\frac{5\pi}{12};\frac{13\pi}{12};\frac{17\pi}{12};\frac{25\pi}{12}\right\}$.

2. Указания. Преобразуя, получим равносильное неравенство $\dfrac{(-2\log_3|x|)^2 - 4\log_3(-x) + 1}{\log_3^2(-x) - 9} \geqslant 0$. Заметим, что из определения логарифма, $x < 0$, откуда $\dfrac{4(\log_3(-x))^2 - 4\log_3(-x) + 1}{(\log_3(-x) + 3)\cdot(\log_3(-x) - 3)} \geqslant 0$, $\dfrac{(2\log_3(-x) - 1)^2}{(\log_3(-x) + 3)\cdot(\log_3(-x) - 3)} \geqslant 0$. Замена $t = \log_3(-x)$, имеем $\dfrac{(2t-1)^2}{(t+3)\cdot(t-3)} \geqslant 0$. Применим метод интервалов

$$\left[\begin{array}{l} t < -3, \\ t = \dfrac{1}{2}, \\ t > 3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_3(-x) < -3, \\ \log_3(-x) = \dfrac{1}{2}, \\ \log_3(-x) > 3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{r} 0 < -x < \dfrac{1}{27}, \\ -x = \sqrt{3}, \\ -x > 27; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{r} 0 > x > -\dfrac{1}{27}, \\ x = -\sqrt{3}, \\ x < -27. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -27) \cup \left\{-\sqrt{3}\right\} \cup \left(-\dfrac{1}{27}; 0\right)$.

3. Указание.



Продолжим медиану BD на ту же длину, достроив данный треугольник до параллелограмма $ABCE$. Введем обозначения согласно рисунку. Применим тождество параллелограмма $BE^2 + AC^2 = 2\cdot AB^2 + 2\cdot BC^2$. С учетом обозначений и числовых данных тождество примет вид

$$(2\cdot\sqrt{11})^2 + b^2 = 2\cdot(2\sqrt{3})^2 + 2\cdot a^2.$$

По теореме синусов $\frac{AB}{\sin\gamma} = 2R$, откуда $\sin\gamma = \frac{AB}{2R}$, $\sin\gamma = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$, $\sin\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Используя основное тригонометрическое тождество найдем $\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1) $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. По теореме косинусов $a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 12$.

Имеем систему $\begin{cases} 2a^2 - b^2 = 20, \\ a^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} + b^2 = 12. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из него второе, умноженное на 5, получим $a^2 + \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot ab - 8b^2 = 0$. Если $b = 0$, то из уравнения следует $a = 0$, однако пара $(0; 0)$ не является решением исходной системы, поэтому при делении обеих частей полученного уравнения на $b^2 \neq 0$ потери решений не будет,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right) - 8 = 0.$$

Решив уравнение, находим $\left(\frac{a}{b}\right)_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{a}{b}\right)_2 = -4\sqrt{3} < 0$ — посторонний. Подставляя в первое уравнение системы $a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot b$, находим $b = 2\sqrt{3}$, затем находим $a = 4$, искомая площадь $S_1 = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 4\sqrt{2}$.

2) $\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. По теореме косинусов $a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 12$.

Имеем систему $\begin{cases} 2a^2 - b^2 = 20, \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} + b^2 = 12. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из него второе, умноженное на 5, получим $a^2 - \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot ab - 8b^2 = 0$. Аналогично первому случаю придем к уравнению $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right) - 8 = 0$. Решив уравнение, находим $\left(\frac{a}{b}\right)_3 = 4\sqrt{3}$, $\left(\frac{a}{b}\right)_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}} < 0$ — посторонний. Подставляя в первое уравнение системы $a = 4\sqrt{3} \cdot b$, находим $b = \frac{2}{\sqrt{19}}$, затем находим $a = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$, искомая площадь $S_2 = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \cdot \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8\sqrt{2}}{19}$.

Ответ: $4\sqrt{2}$ или $\frac{8\sqrt{2}}{19}$.

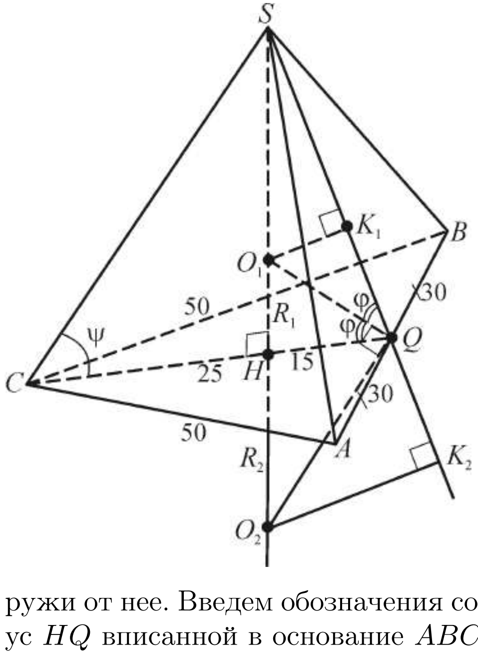
4. Указания. Заметим, при $a = 1$ неравенство примет вид $0 > 0$, что неверно, следовательно, $a \neq 1$. Также, при $a = 1$, свободный член выражения слева равен 0, что позволяет разложить его на множители, один из которых $a-1$. Замена $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$. Надо найти все a, при каждом из которых неравенство $(a-1) \cdot (t^2 - 2at + 8a - 16) > 0$ верно для всех $t \in [-1; 1]$. Найдем корни квадратного трехчлена $t^2 - 2at + 8a - 16$, имеем $t_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 8a + 16} = a \pm (a-4)$, $t_1 = 2a-4$, $t_2 = 4$. Приходим к неравенству $(a-1) \cdot (t - 2a + 4) \cdot (t - 4) > 0$, которое должно быть верно, для всех $t \in [-1; 1]$. Заметим, что при $t \in [-1; 1]$ верно

$t - 4 < 0$, сократим на этот отрицательный множитель обе части неравенства и сменим его знак, получим $(a-1)\cdot(t-2a+4) < 0$, оно должно быть верно, для всех $t \in [-1; 1]$.

Первый случай. При $a - 1 < 0$, надо $t - 2a + 4 > 0$, для всех $t \in [-1; 1]$. Это достигается, если при минимальном $t = -1$ неравенство верно, т. е. $-1 - 2a + 4 > 0$, откуда $a < \frac{3}{2}$, с учетом ограничения $a < 1$, находим $\boxed{a < 1}$ — в ответ.

Второй случай. При $a - 1 > 0$, надо $t - 2a + 4 < 0$, для всех $t \in [-1; 1]$. Это достигается, если при максимальном $t = 1$ неравенство верно, т. е. $1 - 2a + 4 < 0$, откуда $a > \frac{5}{2}$, с учетом ограничения $a > 1$, находим $\boxed{a > \dfrac{5}{2}}$ — в ответ. Ответ: $a \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

5. Указание.



Так как все двугранные углы при основании ABC пирамиды равны между собой, то ее вершина S проектируется в центр H вписанной в треугольник ABC окружности, а все точки прямой, содержащей высоту SH данной пирамиды, равноудалены от ее боковых граней, поэтому центр искомого шара лежит на прямой SH. Пусть O_1 — центр шара радиуса R_1, лежащего внутри данной пирамиды, а O_2 — центр шара радиуса R_2, лежащего снаружи от нее. Введем обозначения согласно рисунку. Найдем радиус HQ вписанной в основание ABC окружности. В равнобедренном треугольнике ABC медиана CQ является высотой и биссектрисой. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACQ имеем $CQ = \sqrt{AC^2 - AQ^2} = \sqrt{(50)^2 - (30)^2} = 40$. По формулам $S = \frac{1}{2}\cdot P \cdot r = \frac{1}{2}\cdot a \cdot h$ имеем $(50 + 50 + 60)\cdot r = 60 \cdot 40$, откуда $HQ = r = 15$. Тогда $CH = CQ - HQ = 40 - 15 = 25$.

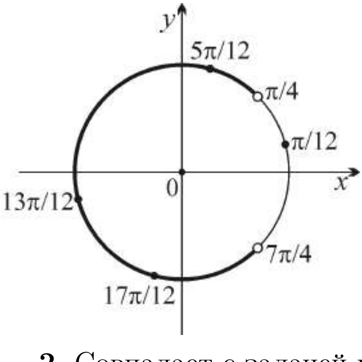
Найдем высоту пирамиды $SH = CH \cdot \operatorname{tg}\psi = 25 \cdot \frac{4}{7} = \frac{100}{7}$. По теореме Пифагора $SQ = \sqrt{SH^2 + HQ^2} = \sqrt{\left(\frac{100}{7}\right)^2 + (15)^2} = \frac{5 \cdot 29}{7}$. Так как $HQ \perp AB$ и HQ — проекция SQ, то по теореме о трех перпендикулярах $SQ \perp AB$ и угол HQS — линейный угол двугранного угла с ребром AB, соответственно O_1Q — его биссектриса. Пусть $\angle HQO_1 = \varphi$, тогда $\cos 2\varphi = \frac{HQ}{SQ} = \frac{15}{\frac{5 \cdot 29}{7}} = \frac{21}{29}$, $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}} = \frac{2}{5}$. Из прямоугольного треугольника O_1HQ имеем $\frac{R_1}{15} = \frac{R_1}{HQ} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{5}$, откуда $\boxed{V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{32\pi}{375}}$ — в ответ.

Второй случай. Шар касается продолжений боковых граней пирамиды и ее основания, тогда центр O_2 лежит на пересечении прямой SH с биссектрисой угла HQK_2. Биссектрисы смежных углов образуют угол в $90°$, поэтому $\angle HQO_2 = 90° - \varphi$, соответственно $\operatorname{tg}\angle HQO_2 = \operatorname{ctg}\varphi$, откуда $\frac{R_2}{15} = \frac{R_2}{HQ} = \operatorname{ctg}\varphi = \frac{5}{2}$, $\boxed{V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125\pi}{6}}$ — в ответ. Ответ: $\frac{32\pi}{375}$ или $\frac{125\pi}{6}$.

Вариант 922

Все задачи варианта либо являются частным случаем аналогичной задачи из варианта 912, либо совпадают с ними.

1. а) Решение в точности повторяет решение пункта а) аналогичной задачи из варианта 912.



б) Отбирая с помощью тригонометрического круга все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$, получим $x \in \left\{\frac{5\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\right\}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{12} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) $x \in \left\{\frac{5\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\right\}$.

2. Совпадает с задачей из варианта 912.

3. Частный случай задачи варианта 912. Ответ: $4\sqrt{2}$.

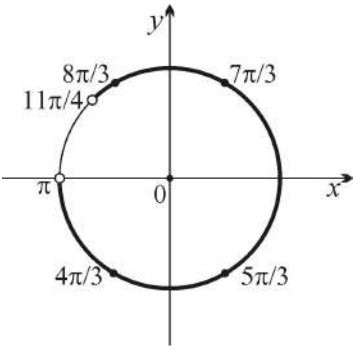
4. Указания. Заметим, при $a = 1$ уравнение примет вид $0 = 0$, что верно при всех x, следовательно, $\boxed{a = 1}$ — в ответ.

Также, при $a = 1$, свободный член выражения слева равен 0, что позволяет разложить его на множители, один из которых $a-1$. Замена $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$, $(a-1)\cdot(t^2 - 2at + 8a - 16) = 0$. Рассмотрим это уравнение при $a \neq 1$. Надо найти все a, при каждом из которых уравнение $(t^2 - 2at + 8a - 16) = 0$ имеет решение $t \in [-1; 1]$. Найдем корни $t^2 - 2at + 8a - 16 = 0$, имеем $t_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 8a + 16} = a \pm (a-4)$, $t_1 = 2a - 4$, $t_2 = 4 > 1$ — посторонний всегда. Приходим к уравнению $t - 2a + 4 = 0$, которое должно иметь решение $t \in [-1; 1]$. Оценивая с двух сторон $t = 2a - 4$ его минимумом, при $t = -1$, и максимумом, при $t = 1$, находим границы для a : $-1+4 \leqslant 2a \leqslant 1+4$, откуда $\boxed{\dfrac{3}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{5}{2}}$ — в ответ. Ответ: $a \in \{1\} \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

5. Только первый случай. Ответ: $\frac{32\pi}{375}$.

Вариант 913

1. а) $4^{\left(2\cos^2 x - 1\right)} - 5 \cdot 2^{\left(-\frac{1}{2} + \cos 2x\right)} + 2 = 0$ (по формулам приведения), $4^{\cos 2x} - \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\cos 2x} + 2 = 0$. Замена $y = 2^{\cos 2x}$, $y \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Имеем $y^2 - \frac{5}{\sqrt{2}}y + 2 = 0$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_2 = 2\sqrt{2}$ — посторонний, т. к. $y_2 \notin \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Обратная замена $2^{\cos 2x} = 2^{-\frac{1}{2}}$, т. к. $2 \neq 1$, то $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ 2x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$ $\boxed{\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.}$ — в ответ.



б) Отбирая с помощью тригонометрического круга все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\pi; \frac{11\pi}{4}\right)$, получим $x \in \left\{\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right\}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

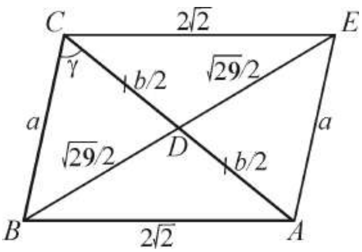
б) $x \in \left\{\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right\}$.

2. Указания. Преобразуя, получим равносильное неравенство $\dfrac{(-2\log_6|x|)^2+12\log_6(-x)+9}{\log_6^2(-x)-4}\geqslant 0$. Заметим, что из определения логарифма, $x<0$, откуда $\dfrac{4(\log_6(-x))^2+12\log_6(-x)+9}{(\log_6(-x)+2)\cdot(\log_6(-x)-2)}\geqslant 0$, $\dfrac{(2\log_6(-x)+3)^2}{(\log_6(-x)+2)\cdot(\log_6(-x)-2)}\geqslant 0$. Замена $t=\log_6(-x)$, имеем $\dfrac{(2t+3)^2}{(t+2)\cdot(t-2)}\geqslant 0$. Применим метод интервалов

$$\left[\begin{array}{l} t<-2,\\ t=-\dfrac{3}{2},\\ t>2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_6(-x)<-2,\\ \log_6(-x)=-\dfrac{3}{2},\\ \log_6(-x)>2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{r} 0<-x<\dfrac{1}{36},\\ -x=\dfrac{1}{6\sqrt6},\\ -x>36; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{r} 0>x>-\dfrac{1}{36},\\ x=-\dfrac{1}{6\sqrt6},\\ x<-36. \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-\infty;-36)\cup\left\{-\dfrac{1}{6\sqrt6}\right\}\cup\left(-\dfrac{1}{36};0\right)$.

3. Указание.



Продолжим медиану BD на ту же длину, достроив данный треугольник до параллелограмма $ABCE$. Введем обозначения согласно рисунку. Применим тождество параллелограмма $BE^2+AC^2=2\cdot AB^2+2\cdot BC^2$. С учетом обозначений и числовых данных тождество примет вид

$$(2\cdot\tfrac{\sqrt{29}}{2})^2+b^2=2\cdot(2\sqrt2)^2+2\cdot a^2.$$

По теореме синусов $\frac{AB}{\sin\gamma}=2R$, откуда $\sin\gamma=\frac{AB}{2R}$, $\sin\gamma=\frac{2\sqrt2}{\sqrt{10}}$, $\sin\gamma=\frac{2}{\sqrt5}$. Используя основное тригонометрическое тождество найдем $\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt5}$.

1) $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt5}$. По теореме косинусов $a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\frac{1}{\sqrt5}=8$.

Имеем систему $\begin{cases} 2a^2-b^2=13,\\ a^2-2\cdot a\cdot b\cdot\dfrac{1}{\sqrt5}+b^2=8. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на 8 и вычтем из него второе, умноженное на 13, получим $3a^2 + \frac{26}{\sqrt{5}} \cdot ab - 21b^2 = 0$. Если $b = 0$, то из уравнения следует $a = 0$, однако пара $(0; 0)$ не является решением исходной системы, поэтому при делении обеих частей полученного уравнения на $b^2 \neq 0$ потери решений не будет,

$$3\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{26}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right) - 21 = 0.$$

Решив уравнение, находим $\left(\frac{a}{b}\right)_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $\left(\frac{a}{b}\right)_2 = -\frac{35}{3\sqrt{5}} < 0$ — посторонний. Подставляя в первое уравнение системы $a = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot b$, находим $b = \sqrt{5}$, затем находим $a = 3$, искомая площадь $S_1 = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 3$.

2) $\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. По теореме косинусов $a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 8$.

Имеем систему $\begin{cases} 2a^2 - b^2 = 13, \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} + b^2 = 8. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на 8 и вычтем из него второе, умноженное на 13, получим $3a^2 - \frac{26}{\sqrt{5}} \cdot ab - 21b^2 = 0$. Аналогично первому случаю придем к уравнению $3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{26}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right) - 21 = 0$. Решив уравнение, находим $\left(\frac{a}{b}\right)_3 = \frac{35}{3\sqrt{5}}$, $\left(\frac{a}{b}\right)_4 = -\frac{3}{\sqrt{5}} < 0$ — посторонний. Подставляя в первое уравнение системы $a = \frac{35}{3\sqrt{5}} \cdot b$, находим $b = \frac{3}{\sqrt{37}}$, затем находим $a = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{37}}$, искомая площадь $S_2 = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{37}} \cdot \frac{3}{\sqrt{37}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{21}{37}$.

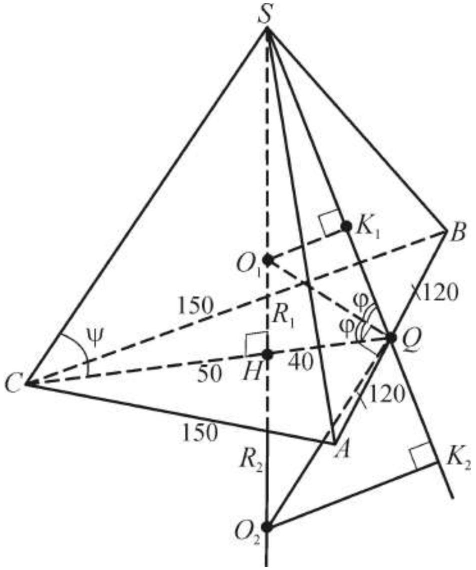
Ответ: 3 или $\frac{21}{37}$.

4. Указания. Заметим, при $a = 5$ неравенство примет вид $0 > 0$, что неверно, следовательно, $a \neq 5$. Также, при $a = 5$, свободный член выражения слева равен 0, что позволяет разложить его на множители, один из которых $a - 5$. Замена $\cos x = t$, $t \in [-1; 1]$. Надо найти все a, при каждом из которых неравенство $(a - 5) \cdot (t^2 - 2at + 4a - 4) > 0$ верно для всех $t \in [-1; 1]$. Найдем корни квадратного трехчлена $t^2 - 2at + 4a - 4$, имеем $t_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4a + 4} = a \pm (a - 2)$, $t_1 = 2a - 2$, $t_2 = 2$. Приходим к неравенству $(a - 5) \cdot (t - 2a + 2) \cdot (t - 2) > 0$, которое должно быть верно, для всех $t \in [-1; 1]$. Заметим, что при $t \in [-1; 1]$ верно $t - 2 < 0$, сократим на этот отрицательный множитель обе части неравенства и сменим его знак, получим $(a-5)\cdot(t-2a+2)<0$, оно должно быть верно, для всех $t\in[-1;1]$.

Первый случай. При $a-5<0$, надо $t-2a+2>0$, для всех $t\in[-1;1]$. Это достигается, если при минимальном $t=-1$ неравенство верно, т. е. $-1-2a+2>0$, откуда $a<\frac{1}{2}$, с учетом ограничения $a<5$, находим $\boxed{a<\dfrac{1}{2}}$ — в ответ.

Второй случай. При $a-5>0$, надо $t-2a+2<0$, для всех $t\in[-1;1]$. Это достигается, если при максимальном $t=1$ неравенство верно, т. е. $1-2a+2<0$, откуда $a>\frac{3}{2}$, с учетом ограничения $a>5$, находим $\boxed{a>5}$ — в ответ. Ответ: $a\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(5;+\infty)$.

5. Указание.



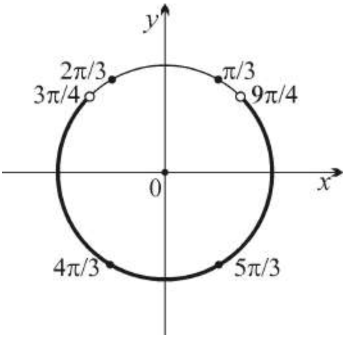
Так как все двугранные углы при основании ABC пирамиды равны между собой, то ее вершина S проектируется в центр H вписанной в треугольник ABC окружности, а все точки прямой, содержащей высоту SH данной пирамиды, равноудалены от ее боковых граней, поэтому центр искомого шара лежит на прямой SH. Пусть O_1 — центр шара радиуса R_1, лежащего внутри данной пирамиды, а O_2 — центр шара радиуса R_2, лежащего снаружи от нее. Введем обозначения согласно рисунку. Найдем радиус HQ вписанной в основание ABC окружности. В равнобедренном треугольнике ABC медиана CQ является высотой и биссектрисой. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACQ имеем $CQ=\sqrt{AC^2-AQ^2}=\sqrt{(150)^2-(120)^2}=90$. По формулам $S=\frac{1}{2}\cdot P\cdot r=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h$ имеем $(150+150+240)\cdot r=240\cdot 90$, откуда $HQ=r=40$. Тогда $CH=CQ-HQ=90-40=50$. Найдем высоту пирамиды $SH=CH\cdot\operatorname{tg}\psi=50\cdot\frac{1}{3}=\frac{50}{3}$. По теореме Пифагора $SQ = \sqrt{SH^2 + HQ^2} = \sqrt{\left(\frac{50}{3}\right)^2 + (40)^2} = \frac{130}{3}$. Так как $HQ \perp AB$ и HQ — проекция SQ, то по теореме о трех перпендикулярах $SQ \perp AB$ и угол HQS — линейный угол двугранного угла с ребром AB, соответственно O_1Q — его биссектриса. Пусть $\angle HQO_1 = \varphi$, тогда $\cos 2\varphi = \frac{HQ}{SQ} = \frac{40}{\frac{130}{3}} = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}} = \frac{1}{5}$. Из прямоугольного треугольника O_1HQ имеем $\frac{R_1}{40} = \frac{R_1}{HQ} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{5}$, откуда $\boxed{V_1 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{4\pi}{375}}$ — в ответ.

Второй случай. Шар касается продолжений боковых граней пирамиды и ее основания, тогда центр O_2 лежит на пересечении прямой SH с биссектрисой угла HQK_2. Биссектрисы смежных углов образуют угол в 90°, поэтому $\angle HQO_2 = 90^\circ - \varphi$, соответственно $\operatorname{tg}\angle HQO_2 = \operatorname{ctg}\varphi$, откуда $\frac{R_2}{40} = \frac{R_2}{HQ} = \operatorname{ctg}\varphi = 5$, $\boxed{V_2 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(5)^3 = \frac{500\pi}{3}}$ — в ответ. Ответ: $\frac{4\pi}{375}$ или $\frac{500\pi}{3}$.

Вариант 923

Все задачи варианта либо являются частным случаем аналогичной задачи из варианта 913, либо совпадают с ними.

1. а) Решение в точности повторяет решение пункта а) аналогичной задачи из варианта 913.



б) Отбирая с помощью тригонометрического круга все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$, получим $x \in \left\{\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) $x \in \left\{\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$.

2. Совпадает с задачей из варианта 913.

3. Частный случай задачи варианта 913. Ответ: 3.

4. Указания. Заметим, при $a = 5$ уравнение примет вид $0 = 0$, что верно при всех x, следовательно, $\boxed{a = 5}$ — в ответ.

Также, при $a = 5$, свободный член выражения слева равен 0, что позволяет разложить его на множители, один из которых $a-5$. Замена $\cos x = t$, $t \in [-1;1]$, $(a-5)\cdot(t^2-2at+4a-4)=0$. Рассмотрим это уравнение при $a \neq 5$. Надо найти все a, при каждом из которых уравнение $(t^2-2at+4a-4)=0$ имеет решение $t \in [-1;1]$. Найдем корни $t^2-2at+4a-4=0$, имеем $t_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2-4a+4} = a \pm (a-2)$, $t_1 = 2a-2$, $t_2 = 2 > 1$ — посторонний всегда. Приходим к уравнению $t-2a+2=0$, которое должно иметь решение $t \in [-1;1]$. Оценивая с двух сторон $t = 2a-2$ его минимумом, при $t=-1$, и максимумом, при $t=1$, находим границы для $a: -1+2 \leqslant 2a \leqslant 1+2$, откуда $\boxed{\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{3}{2}}$ — в ответ. Ответ: $a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \cup \{5\}$.

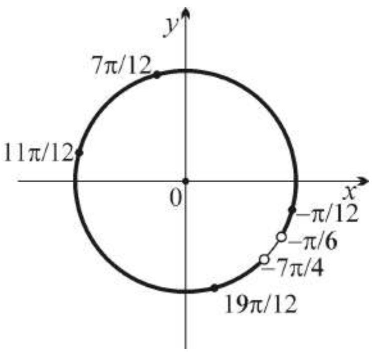
5. Только первый случай. Ответ: $\frac{4\pi}{375}$.

Вариант 914

1. а) $9^{(2\cdot(-\cos x)\cdot(-\sin x))} - 10\cdot 3^{-\left(\frac{1}{2}+\sin 2x\right)} + 3 = 0$ (по формулам приведения), $9^{\sin 2x} - \frac{10}{\sqrt{3}}\cdot 3^{\sin 2x} + 3 = 0$. Замена $y = 3^{\sin 2x}$, $y \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Имеем $y^2 - \frac{10}{\sqrt{3}}y + 3 = 0$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y_2 = 3\sqrt{3}$ — посторонний, т. к. $y_2 \notin \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Обратная замена $3^{\sin 2x} = 3^{-\frac{1}{2}}$, т. к. $3 \neq 1$, то

$$\sin 2x = -\tfrac{1}{2}, \quad \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ 2x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \quad \boxed{\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.} —$$

в ответ.



б) Отбирая с помощью тригонометрического круга все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right)$, получим $x \in \left\{-\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}\right\}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{12} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

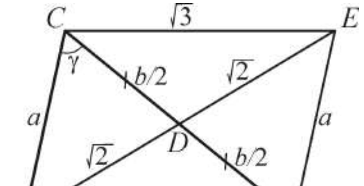
б) $x \in \left\{-\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}\right\}$.

2. Указания. Преобразуя, получим равносильное неравенство $\dfrac{(-2\log_2|x|)^2+4\log_2(-x)+1}{\log_2^2(-x)-16}\geqslant 0$. Заметим, что из определения логарифма, $x<0$, откуда $\dfrac{4\left(\log_2(-x)\right)^2+4\log_2(-x)+1}{(\log_2(-x)+4)\cdot(\log_2(-x)-4)}\geqslant 0$, $\dfrac{(2\log_2(-x)+1)^2}{(\log_2(-x)+4)\cdot(\log_2(-x)-4)}\geqslant 0$. Замена $t=\log_2(-x)$, имеем $\dfrac{(2t+1)^2}{(t+4)\cdot(t-4)}\geqslant 0$. Применим метод интервалов

$$\left[\begin{array}{l} t<-4,\\ t=-\dfrac{1}{2},\\ t>4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_2(-x)<-4,\\ \log_2(-x)=-\dfrac{1}{2},\\ \log_2(-x)>4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{r} 0<-x<\dfrac{1}{16},\\ -x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ -x>16; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{r} 0>x>-\dfrac{1}{16},\\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ x<-16. \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-\infty;-16)\cup\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}\cup\left(-\dfrac{1}{16};0\right)$.

3. Указание.



Продолжим медиану BD на ту же длину, достроив данный треугольник до параллелограмма $ABCE$. Введем обозначения согласно рисунку. Применим тождество параллелограмма $BE^2+AC^2=2\cdot AB^2+2\cdot BC^2$. С учетом обозначений и числовых данных тождество примет вид

$$(2\cdot\sqrt{2})^2+b^2=2\cdot(\sqrt{3})^2+2\cdot a^2.$$

По теореме синусов $\frac{AB}{\sin\gamma}=2R$, откуда $\sin\gamma=\frac{AB}{2R}$, $\sin\gamma=\frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}$, $\sin\gamma=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Используя основное тригонометрическое тождество найдем $\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1) $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$. По теореме косинусов $a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=3$.

Имеем систему $\begin{cases} 2a^2 - b^2 = 2, \\ a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} + b^2 = 3. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из него второе, умноженное на 2, получим $4a^2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot ab - 5b^2 = 0$. Если $b = 0$, то из уравнения следует $a = 0$, однако пара $(0; 0)$ не является решением исходной системы, поэтому при делении обеих частей полученного уравнения на $b^2 \neq 0$ потери решений не будет,

$$4\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right) - 5 = 0.$$

Решив уравнение, находим $\left(\frac{a}{b}\right)_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left(\frac{a}{b}\right)_2 = -\frac{5}{2\sqrt{3}} < 0$ — посторонний. Подставляя в первое уравнение системы $a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b$, находим $b = 2$, затем находим $a = \sqrt{3}$, искомая площадь $S_1 = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$, $S_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2}$.

2) $\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. По теореме косинусов $a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3$.

Имеем систему $\begin{cases} 2a^2 - b^2 = 2, \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} + b^2 = 3. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из него второе, умноженное на 2, получим $4a^2 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot ab - 5b^2 = 0$. Аналогично первому случаю придем к уравнению $4\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right) - 5 = 0$. Решив уравнение, находим $\left(\frac{a}{b}\right)_3 = \frac{5}{2\sqrt{3}}$, $\left(\frac{a}{b}\right)_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ — посторонний. Подставляя в первое уравнение системы $a = \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot b$, находим $b = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$, затем находим $a = \frac{5}{\sqrt{19}}$, искомая площадь $S_2 = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{19}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{19}$.

Ответ: $\sqrt{2}$ или $\frac{5\sqrt{2}}{19}$.

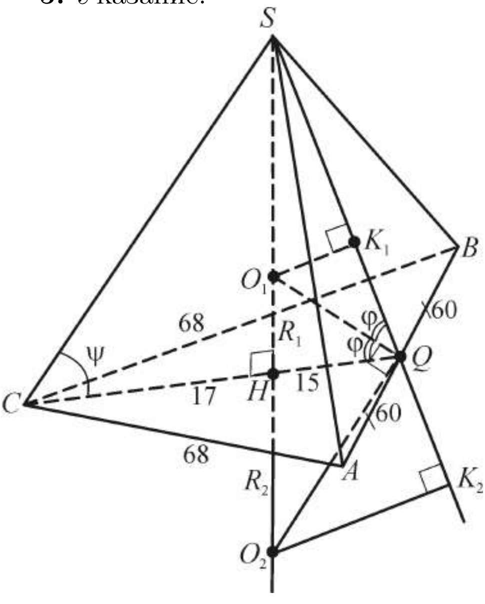
4. Указания. Заметим, при $a = -2$ неравенство примет вид $0 > 0$, что неверно, следовательно, $a \neq -2$. Также, при $a = -2$, свободный член выражения слева равен 0, что позволяет разложить его на множители, один из которых $a + 2$. Замена $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$. Надо найти все a, при каждом из которых неравенство $(a + 2) \cdot (t^2 - 2at + 6a - 9) > 0$ верно для всех $t \in [-1; 1]$. Найдем корни квадратного трехчлена $t^2 - 2at + 6a - 9$, имеем

$t_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 6a + 9} = a \pm (a - 3)$, $t_1 = 2a - 3$, $t_2 = 3$. Приходим к неравенству $(a + 2) \cdot (t - 2a + 3) \cdot (t - 3) > 0$, которое должно быть верно, для всех $t \in [-1; 1]$. Заметим, что при $t \in [-1; 1]$ верно $t - 3 < 0$, сократим на этот отрицательный множитель обе части неравенства и сменим его знак, получим $(a + 2) \cdot (t - 2a + 3) < 0$, оно должно быть верно, для всех $t \in [-1; 1]$.

Первый случай. При $a + 2 < 0$, надо $t - 2a + 3 > 0$, для всех $t \in [-1; 1]$. Это достигается, если при минимальном $t = -1$ неравенство верно, т. е. $-1 - 2a + 3 > 0$, откуда $a < 1$, с учетом ограничения $a < -2$, находим $\boxed{a < -2}$ — в ответ.

Второй случай. При $a + 2 > 0$, надо $t - 2a + 3 < 0$, для всех $t \in [-1; 1]$. Это достигается, если при максимальном $t = 1$ неравенство верно, т. е. $1 - 2a + 3 < 0$, откуда $a > 2$, с учетом ограничения $a > -2$, находим $\boxed{a > 2}$ — в ответ. Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

5. Указание.



Так как все двугранные углы при основании ABC пирамиды равны между собой, то ее вершина S проектируется в центр H вписанной в треугольник ABC окружности, а все точки прямой, содержащей высоту SH данной пирамиды, равноудалены от ее боковых граней, поэтому центр искомого шара лежит на прямой SH. Пусть O_1 — центр шара радиуса R_1, лежащего внутри данной пирамиды, а O_2 — центр шара радиуса R_2, лежащего снаружи от нее. Введем обозначения согласно рисунку. Найдем радиус HQ вписанной в основание ABC окружности. В равнобедренном треугольнике ABC медиана CQ является высотой и биссектрисой. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника

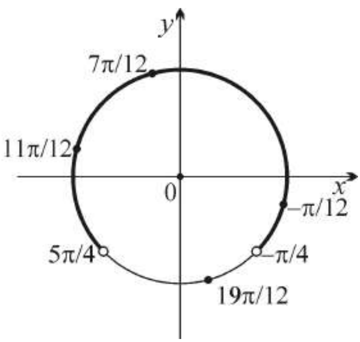
ACQ имеем $CQ = \sqrt{AC^2 - AQ^2} = \sqrt{(68)^2 - (60)^2} = 32$. По формулам $S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ имеем $(68 + 68 + 120) \cdot r = 120 \cdot 32$, откуда $HQ = r = 15$. Тогда $CH = CQ - HQ = 32 - 15 = 17$. Найдем высоту пирамиды $SH = CH \cdot \operatorname{tg} \psi = 17 \cdot \frac{36}{17} = 36$. По теореме Пифагора $SQ = \sqrt{SH^2 + HQ^2} = \sqrt{(36)^2 + (15)^2} = 39$. Так как $HQ \perp AB$ и HQ — проекция SQ, то по теореме о трех перпендикулярах $SQ \perp AB$ и угол HQS — линейный угол двугранного угла с ребром AB, соответственно O_1Q — его биссектриса. Пусть $\angle HQO_1 = \varphi$, тогда $\cos 2\varphi = \frac{HQ}{SQ} = \frac{15}{39} = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}} = \frac{2}{3}$. Из прямоугольного треугольника O_1HQ имеем $\frac{R_1}{15} = \frac{R_1}{HQ} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3}$, откуда $\boxed{V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32\pi}{81}}$ — в ответ.

Второй случай. Шар касается продолжений боковых граней пирамиды и ее основания, тогда центр O_2 лежит на пересечении прямой SH с биссектрисой угла HQK_2. Биссектрисы смежных углов образуют угол в 90°, поэтому $\angle HQO_2 = 90^\circ - \varphi$, соответственно $\operatorname{tg} \angle HQO_2 = \operatorname{ctg} \varphi$, откуда $\frac{R_2}{15} = \frac{R_2}{HQ} = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{3}{2}$, $\boxed{V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9\pi}{2}}$ — в ответ. Ответ: $\frac{32\pi}{81}$ или $\frac{9\pi}{2}$.

Вариант 924

Все задачи варианта либо являются частным случаем аналогичной задачи из варианта 914, либо совпадают с ними.

1. а) Решение в точности повторяет решение пункта а) аналогичной задачи из варианта 914.



б) Отбирая с помощью тригонометрического круга все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$, получим $x \in \left\{-\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right\}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{12} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) $x \in \left\{-\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right\}$.

2. Совпадает с задачей из варианта 914.

3. Частный случай задачи варианта 914. Ответ: $\sqrt{2}$.

4. Указания. Заметим, при $a = -2$ уравнение примет вид $0 = 0$, что верно при всех x, следовательно, $\boxed{a = -2}$ — в ответ.

Также, при $a = -2$, свободный член выражения слева равен 0, что позволяет разложить его на множители, один из которых $a + 2$. Замена $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$, $(a + 2) \cdot (t^2 - 2at + 6a - 9) = 0$. Рассмотрим это уравнение при $a \neq -2$. Надо найти все a, при каждом из которых уравнение $(t^2 - 2at + 6a - 9) = 0$ имеет решение $t \in [-1; 1]$. Найдем корни $t^2 - 2at + 6a - 9 = 0$, имеем $t_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 6a + 9} = a \pm (a - 3)$, $t_1 = 2a - 3$, $t_2 = 3 > 1$ — посторонний всегда. Приходим к уравнению $t - 2a + 3 = 0$, которое должно иметь решение $t \in [-1; 1]$. Оценивая с двух сторон $t = 2a - 3$ его минимумом, при $t = -1$, и максимумом, при $t = 1$, находим границы для $a : -1 + 3 \leqslant 2a \leqslant 1 + 3$, откуда $\boxed{1 \leqslant a \leqslant 2}$ — в ответ. Ответ: $a \in \{-2\} \cup [1; 2]$.

5. Только первый случай. Ответ: $\frac{32\pi}{81}$.

Критерии оценок, 11 класс

Полное и обоснованное решение каждой задачи с правильным ответом оценивалось по 7 баллов. Частично верные решения оценивались в соответствии с таблицей, 0 баллов выставлялось, если решение не удовлетворяло ни одному из критериев. Границы итоговых оценок: «2» — менее 4, «3» — с 4 по 17, «4» — с 18 по 25, «5» — с 26 баллов.

Физико-математические классы

Ошибки	Баллы
Задача 1	
Описка в ответе при верном решении.	6
Получены только верные серии решений при неверном отборе.	4
Неверно решено простейшее или найдены и верно решены неверные простейшие тригонометрические уравнения, или подставлен посторонний корень в обратную тригонометрическую функцию.	2

Ошибки	Баллы
Задача 2	
Описка в ответе, либо потеряна отдельная точка.	6
Арифметическая ошибка, приведшая к неверному неравенству.	4
Неверные преобразования логарифмов, или выставлен неверный знак неравенства при потенцировании при остальных верных действиях до ответа или в ответе присутствует хотя бы одна запрещенная точка.	2
Задача 3	
Задача доведена до ответа с одной арифметической ошибкой.	6
Оба случая в ответе при верном ходе решения и более чем одной арифметической ошибке, или верно рассмотрен только один из двух случаев до ответа.	4
Рассмотрен только один случай до ответа и с одной арифметической ошибкой.	3
Имеется верное геометрическое рассуждение (выписаны обе системы уравнений), которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен.	2
Выписана только одна верная система, ответ не получен	1
Задача 4	
Неверный конец одного из промежутков (нестрогий).	6
Найдены все основные случаи, при этом границы выбраны неверно, или верные границы неправильно сравнены.	4
Найдена только граничная точка (старший коэффициент равен нулю) или при умножении на отрицательный множитель не сменен знак неравенства, ответ получен.	2
Задача 5	
Одна арифметическая ошибка, ход решения верный.	6
Рассмотрен только один случай до верного ответа или ответ дан без учета нормирующего множителя.	5
Более одной арифметической ошибки при верном ходе решения, рассмотрены два случая до ответов.	4
Более одной арифметической ошибки при верном ходе решения, рассмотрен только один случай до ответа.	3
Имеется верное геометрическое рассуждение (указано верное подобие или составлено уравнение), которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен.	2

Химико-биологические классы

Ошибки	Баллы
Задача 1	
Описка в ответе при верном решении.	6
Получены только верные серии решений, отбор неверный.	4
Неверно решено простейшее или найдены и верно решены неверные простейшие тригонометрические уравнения, или подставлен посторонний корень в обратную тригонометрическую функцию.	2
Задача 2	
Описка в ответе, либо потеряна отдельная точка.	6
Арифметическая ошибка, приведшая к неверному неравенству.	4
Неверные преобразования логарифмов, или выставлен неверный знак неравенства при потенцировании при остальных верных действиях до ответа или в ответе присутствует хотя бы одна запрещенная точка.	2
Задача 3	
Задача доведена до ответа с 1-й арифметической ошибкой.	6
Более чем одна арифметическая ошибка, ответ получен.	4
Имеется верное геометрическое рассуждение (выписана система уравнений), которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен.	2
Задача 4	
Один из неверных концов промежутка (строгий).	6
Найден основной случай, возможно без граничных точек, или не рассмотрен случай, когда старший коэффициент равен нулю, или вычислительная ошибка.	4
Рассмотрен только один случай, когда старший коэффициент равен нулю или найдены только граничные точки.	2
Задача 5	
Одна арифметическая ошибка, ход решения верный.	6
Ответ дан без учета нормирующего множителя.	5
Более одной арифметической ошибки при верном ходе решения либо верно рассмотрен не тот случай.	4
Имеется верное геометрическое рассуждение (указано верное подобие или составлено уравнение), которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен.	2

2019 год, 9 класс

Вариант 991

1. Указание. Пусть объем бассейна равен 1, а t — время заполнения бассейна первой трубой, тогда искомое $T = t + 8$ — время заполнения бассейна второй трубой. Время заполнения бассейна совместно двумя трубами по условию составляет $5\frac{1}{3}$ или $\frac{16}{3}$ ч.

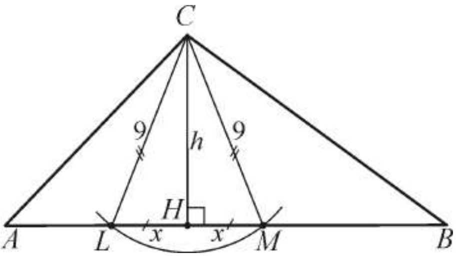
Имеем, за 1 час из первой трубы в бассейн поступает воды $\frac{1}{t}$, а из второй — $\frac{1}{t+8}$. По условию за $\frac{16}{3}$ ч. обе трубы заполнят весь бассейн, откуда $\frac{16}{3} \cdot \frac{1}{t} + \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{t+8} = 1$, $\frac{16}{3} \cdot \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+8}\right) = 1$, $16(t + 8 + t) = 3t(t + 8)$. Преобразуя, получим $3t^2 - 8t - 128 = 0$,

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 3 \cdot 128}}{3} = \frac{4 \pm 20}{3},$$

$t_1 = -\dfrac{16}{3} < 0$ — посторонний, $t_2 = 8$ — подходит.

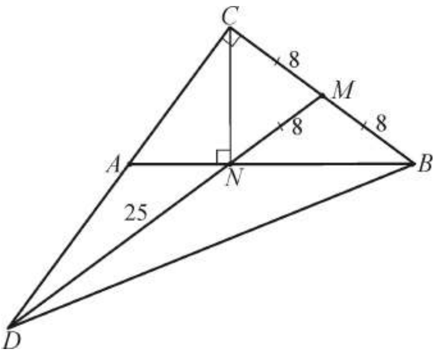
Искомое $T = t_2 + 8 = 8 + 8 = 16$. Ответ: за 16 ч.

2. Указание. Введем обозначения согласно рисунку. Радиусы данной



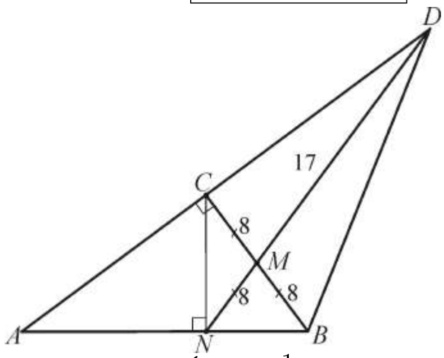
окружности являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника CLM с высотой CH. Пусть $CH = h$ — искомое. По свойству равнобедренного треугольника высота является медианой, положим $LH = HM = x$. Из условия и определения арифметической прогрессии следует, что площади треугольников CAL, CLM и CMB являются последовательными членами другой арифметической прогрессии, поэтому верна формула $S_{\triangle CAL} + S_{\triangle CMB} = 2 \cdot S_{\triangle CLM}$, откуда $3 \cdot S_{\triangle CLM} = S_{\triangle ABC}$. Учитывая условие, имеем $3 \cdot S_{\triangle CLM} = 84\sqrt{2}$, $S_{\triangle CLM} = 28\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h$. По теореме Пифагора $x^2 + h^2 = 9^2$. Имеем систему $\begin{cases} x \cdot h = 28\sqrt{2}, \\ x^2 + h^2 = 81, \end{cases}$ из первого уравнения которой $x = \dfrac{28\sqrt{2}}{h}$, а из второго — $\dfrac{\left(28\sqrt{2}\right)^2}{h^2} + h^2 = 81$. Замена $h^2 = t > 0$, имеем $t^2 - 81t + 2 \cdot 28^2 = 0$, $t_{1,2} = \dfrac{81 \pm \sqrt{81^2 - 4 \cdot \left(28\sqrt{2}\right)^2}}{2} = \dfrac{81 \pm 17}{2}$, $t_1 = 32$, $t_2 = 49$, оба корня подходят, $h_1 = 4\sqrt{2}$, $h_2 = 7$. Ответ: $4\sqrt{2}$ или 7.

3. Указание. Введем обозначения согласно рисунку. Возможны два



случая. В первом точка D лежит на продолжении катета CA за точку A, во втором точка D лежит на продолжении катета AC за точку C. В обоих случаях точка M является серединой гипотенузы прямоугольного треугольника CNB, а значит, она является центром описанной около него окружности. Откуда $8 = MN = MB = CM$, а $BC = 2 \cdot 8 = 16$. В первом случае имеем $DM = DN + MN = 25 + 8 = 33$. По теореме Пифагора $CD = \sqrt{33^2 - 8^2} = 5\sqrt{41}$. По формуле площади треугольника $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 5\sqrt{41} = 40\sqrt{41}$, $\boxed{S_{\triangle BCD} = 40\sqrt{41}}$ — в ответ.

Во втором случае имеем $DM = DN - MN = 25 - 8 = 17$. По теореме Пифагора $CD = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. По формуле площади треугольника находим для второго случая $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD$, $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120$, $\boxed{S_{\triangle BCD} = 120}$ — в ответ.



Ответ: $40\sqrt{41}$ или 120.

4. Указание. Ограничения $\begin{cases} 2x+1 \geqslant 0, \\ \sqrt{2x+1} + x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -\dfrac{1}{2}, \\ x \neq 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$

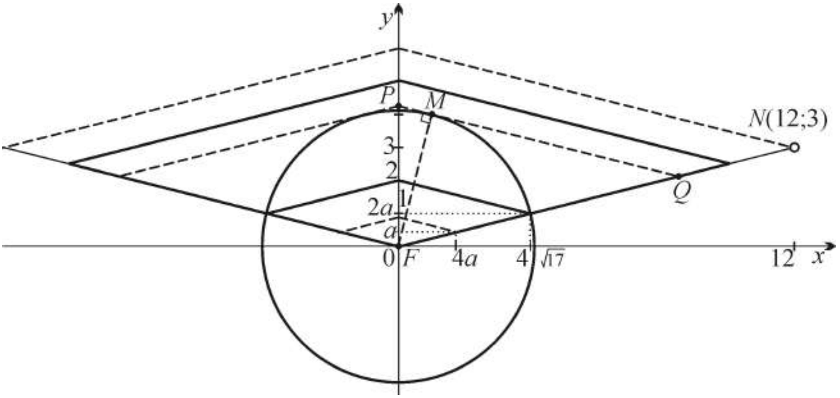
Преобразуем $\dfrac{\sqrt{2x+1} - x - \sqrt{2x+1} - x}{\sqrt{2x+1} + x} \leqslant 0$, $\dfrac{x}{\sqrt{2x+1} + x} \geqslant 0$.

При $x = 0$ верное равенство, $\boxed{x = 0}$ — в ответ. Рассмотрим случаи

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{2x+1} + x > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \sqrt{2x+1} + x < 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{2x+1} > -x; \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leqslant x < 0, \\ 2x + 1 < (-x)^2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x > 0, \\ \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leqslant x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{2}, \\ x > 1 + \sqrt{2}. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [-\frac{1}{2}; 1 - \sqrt{2}) \cup [0; +\infty)$.

5. Указания. Значения параметра a не могут быть отрицательными, что вытекает из первого уравнения системы, которому соответствует контур ромба с центром в точке $(0; a)$ и одной из вершин F, совпадающей с началом координат при любом значении параметра a. В самом деле, при подстановке в уравнение $x = 0$ и $y = 0$ получим верное равенство $4 = 4$. Остальные вершины ромба имеют координаты $(4a; a)$, $(-4a; a)$, $(0; 2a)$. Стороны ромба с вершиной в начале координат всегда располагаются на прямых $x+4y = 0$ и $x-4y = 0$ и по теореме Пифагора равны $\sqrt{(4a)^2 + (a)^2} = a\sqrt{17}$.



Второму множеству соответствует окружность с центром в начале координат, радиусом $\sqrt{17}$, и отдельная точка $N(12; 3)$. Анализируя взаимное расположение контура ромба и окружности с точкой при различных a, находим, что система будет иметь ровно 2 решения в двух случаях.

Первый случай, обе вершины ромба с его большей диагонали лежат на окружности, тогда сторона ромба равна радиусу окружности, откуда имеем уравнение $a\sqrt{17} = \sqrt{17}$, $\boxed{a = 1}$ — в ответ.

Второй случай, стороны ромба, не лежащие на прямых $x + 4y = 0$ и $x - 4y = 0$, расположены между аналогичными сторонами ромба, касательными к окружности, и сторонами ромба, с одной из вершин в отдельной точке $N(12; 3)$. На рисунке эти границы отмечены пунктирной линией. Значение параметра a, когда имеет место касание, найдем из треугольника PQF, выразив его площадь по двум различным формулам, $S_{\triangle PQF} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot PQ = a \cdot 4a$, $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot a\sqrt{17} = a \cdot 4a$, $a = \frac{17}{8}$. Вторую границу для a найдем, поместив соответствующую вершину ромба в точку $N(12; 3)$, откуда $a = 3$, в итоге $\boxed{\frac{17}{8} < a < 3}$ — в ответ.

Ответ: $a \in \{1\} \cup \left(\frac{17}{8}; 3\right)$.

Вариант 992

1. Указание. Пусть объем бассейна равен 1, а t — время заполнения бассейна первой трубой, тогда искомое $T = t + 4$ — время заполнения бассейна второй трубой. Время заполнения бассейна совместно двумя трубами по условию составляет $4\frac{4}{5}$ или $\frac{24}{5}$ ч.

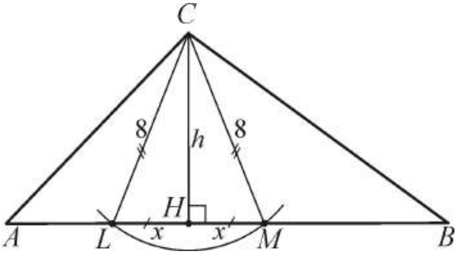
Имеем, за 1 час из первой трубы в бассейн поступает воды $\frac{1}{t}$, а из второй — $\frac{1}{t+4}$. По условию за $\frac{24}{5}$ ч. обе трубы заполнят весь бассейн, откуда $\frac{24}{5} \cdot \frac{1}{t} + \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{t+4} = 1$, $\frac{24}{5} \cdot \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+4}\right) = 1$, $24(t + 4 + t) = 5t(t + 4)$. Преобразуя, получим $5t^2 - 28t - 96 = 0$,

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 5 \cdot 96}}{5} = \frac{14 \pm 26}{5},$$

$t_1 = -\dfrac{12}{5} < 0$ — посторонний, $t_2 = 8$ — подходит.

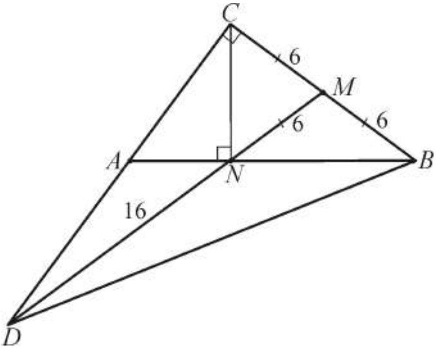
Искомое $T = t_2 + 4 = 8 + 4 = 12$. Ответ: за 12 ч.

2. Указание. Введем обозначения согласно рисунку. Радиусы данной

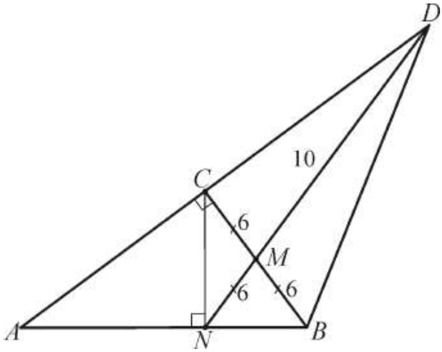


окружности являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника CLM с высотой CH. Пусть $CH = h$ — искомое. По свойству равнобедренного треугольника высота является медианой, положим $LH = HM = x$. Из условия и определения арифметической прогрессии следует, что площади треугольников CAL, CLM и CMB являются последовательными членами другой арифметической прогрессии, поэтому верна формула $S_{\triangle CAL} + S_{\triangle CMB} = 2 \cdot S_{\triangle CLM}$, откуда $3 \cdot S_{\triangle CLM} = S_{\triangle ABC}$. Учитывая условие, имеем $3 \cdot S_{\triangle CLM} = 48\sqrt{3}$, $S_{\triangle CLM} = 16\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h$. По теореме Пифагора $x^2 + h^2 = 8^2$. Имеем систему $\begin{cases} x \cdot h = 16\sqrt{3}, \\ x^2 + h^2 = 64, \end{cases}$ из первого уравнения которой $x = \dfrac{16\sqrt{3}}{h}$, а из второго — $\dfrac{\left(16\sqrt{3}\right)^2}{h^2} + h^2 = 64$. Замена $h^2 = t > 0$, имеем $t^2 - 64t + 3 \cdot 16^2 = 0$, $t_{1,2} = 32 \pm \sqrt{32^2 - \left(16\sqrt{3}\right)^2} = 32 \pm 16$, $t_1 = 16$, $t_2 = 48$, оба корня подходят, $h_1 = 4$, $h_2 = 4\sqrt{3}$. Ответ: 4 или $4\sqrt{3}$.

3. Указание. Введем обозначения согласно рисунку. Возможны два случая. В первом точка D лежит на продолжении катета CA за точку A, во втором точка D лежит на продолжении катета AC за точку C. В обоих случаях точка M является серединой гипотенузы прямоугольного треугольника CNB, а значит, она является центром описанной около него окружности. Откуда $6 = MN = MB = CM$, а $BC = 2 \cdot 6 = 12$. В первом случае имеем $DM = DN + MN = 16 + 6 = 22$. По теореме Пифагора $CD = \sqrt{22^2 - 6^2} = 8\sqrt{7}$. По формуле площади треугольника $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8\sqrt{7} = 48\sqrt{7}$, $\boxed{S_{\triangle BCD} = 48\sqrt{7}}$ — в ответ.



Во втором случае имеем $DM = DN - MN = 16 - 6 = 10$. По теореме Пифагора $CD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. По формуле площади треугольника находим для второго случая $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD$, $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$, $\boxed{S_{\triangle BCD} = 48}$ — в ответ.



Ответ: $48\sqrt{7}$ или 48.

4. Указание. Ограничения $\begin{cases} x+5 \geqslant 0, \\ \sqrt{x+5}+x+3 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -5, \\ x \neq -4. \end{cases}$

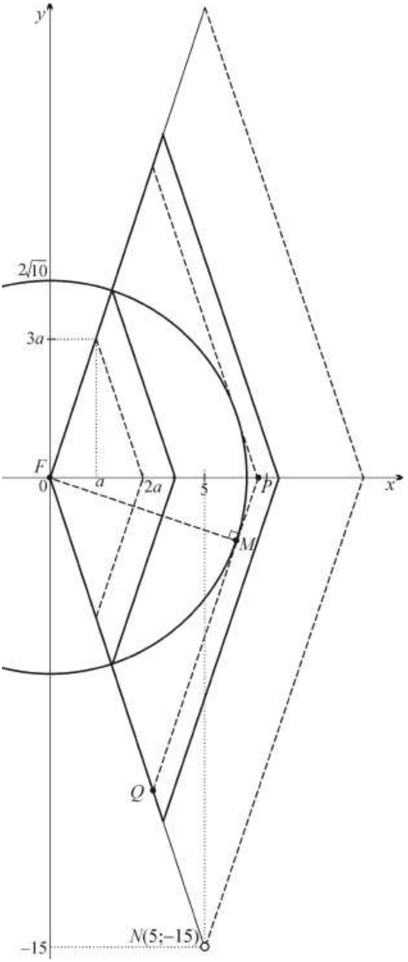
Преобразуем $\dfrac{\sqrt{x+5}-x-3-\sqrt{x+5}-x-3}{\sqrt{x+5}+x+3} \leqslant 0$, $\dfrac{x+3}{\sqrt{x+5}+x+3} \geqslant 0$.

При $x+3=0$ верное равенство, $\boxed{x=-3}$ — в ответ. Рассмотрим случаи

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3>0, \\ \sqrt{x+5}+x+3>0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+3<0, \\ \sqrt{x+5}+x+3<0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-3, \\ \sqrt{x+5}>-x-3; \end{cases} \\ \begin{cases} -5 \leqslant x < -3, \\ x+5<(-x-3)^2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x>-3, \\ \begin{cases} -5 \leqslant x < -3, \\ \left[\begin{array}{l} x<-4, \\ x>-1. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [-5; -4) \cup [-3; +\infty)$.

5. Указания. Значения параметра a не могут быть отрицательными,



что вытекает из первого уравнения системы, которому соответствует контур ромба с центром в точке $(a;0)$ и одной из вершин F, совпадающей с началом координат при любом значении параметра a. В самом деле, при подстановке в уравнение $x=0$ и $y=0$ получим верное равенство $3=3$. Остальные вершины ромба имеют координаты $(2a;0)$, $(a;-3a)$, $(a;3a)$. Стороны ромба с вершиной в начале координат всегда располагаются на прямых $y=3x$ и $y=-3x$ и по теореме Пифагора равны $\sqrt{(a)^2+(3a)^2}=a\sqrt{10}$.

Второму множеству соответствует окружность с центром в начале координат, радиусом $2\sqrt{10}$, и отдельная точка $N(5;-15)$. Анализируя взаимное расположение контура ромба и окружности с точкой при различных a, находим, что система будет иметь ровно 2 решения в двух случаях.

Первый случай, обе вершины ромба с его большей диагонали лежат на окружности, тогда сторона ромба равна радиусу окружности, откуда имеем уравнение $a\sqrt{10}=2\sqrt{10}$, $\boxed{a=2}$ — в ответ.

Второй случай, стороны ромба, не лежащие на прямых $y=3x$ и $y=-3x$ расположены между аналогичными сторонами ромба, касательными к окружности, и сторонами ромба, с одной из вершин в отдельной точке $N(5;-15)$. На рисунке эти границы отмечены пунктирной линией. Значение параметра a, когда имеет место касание, найдем из треугольника PQF, выразив его площадь по двум различным формулам, откуда $S_{\triangle PQF}=$ $=\frac{1}{2}\cdot OM\cdot PQ=3a\cdot a$, $\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot a\sqrt{10}=3a\cdot a$, $a=\frac{10}{3}$. Вторую границу для a найдем, поместив соответствующую вершину ромба в точку $N(5;-15)$, откуда $a=5$, в итоге $\boxed{\frac{10}{3}<a<5}$ — в ответ.

Ответ: $a\in\{2\}\cup\left(\frac{10}{3};5\right)$.

Вариант 993

1. Указание. Пусть объем бассейна равен 1, а t — время заполнения бассейна первой трубой, тогда искомое $T = t + 4$ — время заполнения бассейна второй трубой. Время заполнения бассейна совместно двумя трубами по условию составляет $5\frac{5}{6}$ или $\frac{35}{6}$ ч.

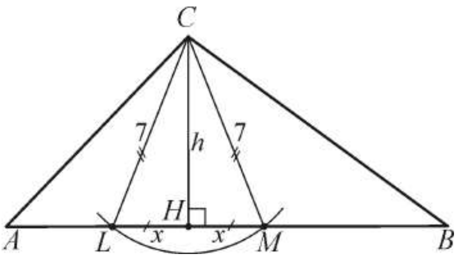
Имеем, за 1 час из первой трубы в бассейн поступает воды $\frac{1}{t}$, а из второй — $\frac{1}{t+4}$. По условию за $\frac{35}{6}$ ч. обе трубы заполнят весь бассейн, откуда $\frac{35}{6} \cdot \frac{1}{t} + \frac{35}{6} \cdot \frac{1}{t+4} = 1$, $\frac{35}{6} \cdot \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+4}\right) = 1$, $35(t + 4 + t) = 6t(t + 4)$. Преобразуя, получим $6t^2 - 46t - 140 = 0$,

$$t_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{529 + 6 \cdot 140}}{6} = \frac{23 \pm 37}{6},$$

$t_1 = -\dfrac{14}{6} < 0$ — посторонний, $t_2 = 10$ — подходит.

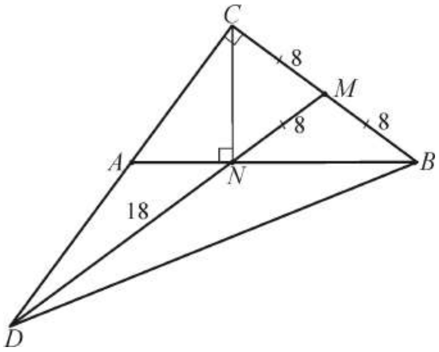
Искомое $T = t_2 + 4 = 10 + 4 = 14$. Ответ: за 14 ч.

2. Указание. Введем обозначения согласно рисунку. Радиусы данной окружности являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника CLM с высотой CH. Пусть $CH = h$ — искомое. По свойству равнобедренного треугольника высота является медианой, положим $LH = HM = x$. Из условия и определения арифметической прогрессии следует, что площади треугольников CAL, CLM и CMB являются последовательными членами другой арифметической прогрессии, поэтому верна формула $S_{\triangle CAL} + S_{\triangle CMB} = 2 \cdot S_{\triangle CLM}$, откуда $3 \cdot S_{\triangle CLM} = S_{\triangle ABC}$. Учитывая условие, имеем $3 \cdot S_{\triangle CLM} = 30\sqrt{6}$, $S_{\triangle CLM} = 10\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h$. По теореме Пифагора $x^2 + h^2 = 7^2$. Имеем систему $\begin{cases} x \cdot h = 10\sqrt{6}, \\ x^2 + h^2 = 49, \end{cases}$ из первого уравнения которой $x = \dfrac{10\sqrt{6}}{h}$,



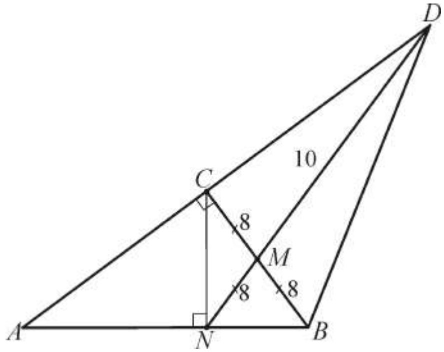
а из второго — $\dfrac{\left(10\sqrt{6}\right)^2}{h^2} + h^2 = 49$. Замена $h^2 = t > 0$, имеем $t^2 - 49t + 6 \cdot 10^2 = 0$, $t_{1,2} = \dfrac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot \left(10\sqrt{6}\right)^2}}{2} = \dfrac{49 \pm 1}{2}$, $t_1 = 24$, $t_2 = 25$, оба корня подходят, $h_1 = 2\sqrt{6}$, $h_2 = 5$. Ответ: $2\sqrt{6}$ или 5.

3. Указание. Введем обозначения согласно рисунку. Возможны два



случая. В первом точка D лежит на продолжении катета CA за точку A, во втором точка D лежит на продолжении катета AC за точку C. В обоих случаях точка M является серединой гипотенузы прямоугольного треугольника CNB, а значит, она является центром описанной около него окружности. Откуда $8 = MN = MB = CM$, а $BC = 2 \cdot 8 = 16$. В первом случае имеем $DM = DN + MN = 18 + 8 = 26$. По теореме Пифагора $CD = \sqrt{26^2 - 8^2} = 6\sqrt{17}$. По формуле площади треугольника $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6\sqrt{17} = 48\sqrt{17}$, $\boxed{S_{\triangle BCD} = 48\sqrt{17}}$ — в ответ.

Во втором случае имеем $DM = DN - MN = 18 - 8 = 10$. По теореме Пифагора $CD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$. По формуле площади треугольника находим для второго случая $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD$, $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 = 48$, $\boxed{S_{\triangle BCD} = 48}$ — в ответ.



Ответ: $48\sqrt{17}$ или 48.

4. Указание. Ограничения $\begin{cases} x + 4 \geqslant 0, \\ \sqrt{x+4} + 2x + 2 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -4, \\ x \neq -\frac{7}{4}. \end{cases}$

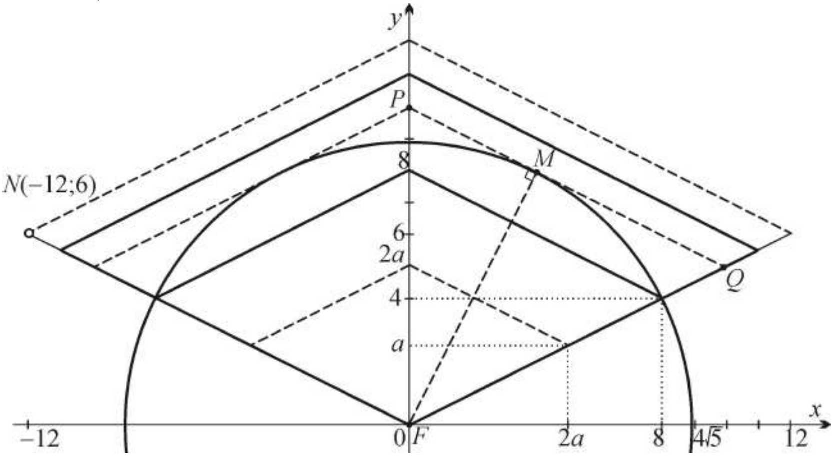
Преобразуем $\dfrac{\sqrt{x+4} - 2x - 2 - \sqrt{x+4} - 2x - 2}{\sqrt{x+4} + 2x + 2} \leqslant 0$, $\dfrac{2x+2}{\sqrt{x+4} + 2x + 2} \geqslant 0$.

При $2x+2 = 0$ верное равенство, $\boxed{x = -1}$ — в ответ. Рассмотрим случаи

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + 2 > 0, \\ \sqrt{x+4} + 2x + 2 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 2 < 0, \\ \sqrt{x+4} + 2x + 2 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1, \\ \sqrt{x+4} > -2x - 2; \end{cases} \\ \begin{cases} -4 \leqslant x < -1, \\ x + 4 < (-2x-2)^2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x > -1, \\ \begin{cases} -4 \leqslant x < -1, \\ \left[\begin{array}{l} x < -\frac{7}{4}, \\ x > 0. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [-4; -\frac{7}{4}) \cup [-1; +\infty)$.

5. Указания. Значения параметра a не могут быть отрицательными, что вытекает из первого уравнения системы, которому соответствует контур ромба с центром в точке $(0; a)$ и одной из вершин F, совпадающей с началом координат при любом значении параметра a. В самом деле, при подстановке в уравнение $x = 0$ и $y = 0$ получим верное равенство $2 = 2$. Остальные вершины ромба имеют координаты $(2a; a)$, $(-2a; a)$, $(0; 2a)$. Стороны ромба с вершиной в начале координат всегда располагаются на прямых $x+2y = 0$ и $x-2y = 0$ и по теореме Пифагора равны $\sqrt{(2a)^2 + (a)^2} = a\sqrt{5}$.



Второму множеству соответствует окружность с центром в начале координат, радиусом $4\sqrt{5}$, и отдельная точка $N(-12; 6)$. Анализируя взаимное расположение контура ромба и окружности с точкой при различных a, находим, что система будет иметь ровно 2 решения в двух случаях.

Первый случай, обе вершины ромба с его большей диагонали лежат на окружности, тогда сторона ромба равна радиусу окружности, откуда имеем уравнение $a\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$, $\boxed{a = 4}$ — в ответ.

Второй случай, стороны ромба, не лежащие на прямых $x + 2y = 0$ и $x - 2y = 0$, расположены между аналогичными сторонами ромба, касательными к окружности, и сторонами ромба, с одной из вершин в отдельной точке $N(-12; 6)$. На рисунке эти границы отмечены пунктирной линией. Значение параметра a, когда имеет место касание, найдем из треугольника PQF, выразив его площадь по двум различным формулам, $S_{\triangle PQF} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot PQ = a \cdot 2a$, $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot a\sqrt{5} = a \cdot 2a$, $a = 5$. Вторую границу для a найдем, поместив соответствующую вершину ромба в точку $N(-12; 6)$, откуда $a = 6$, в итоге $\boxed{5 < a < 6}$ — в ответ.

Ответ: $a \in \{4\} \cup (5; 6)$.

Вариант 994

1. Указание. Пусть объем бассейна равен 1, а t — время заполнения бассейна первой трубой, тогда искомое $T = t + 6$ — время заполнения бассейна второй трубой. Время заполнения бассейна совместно двумя трубами по условию составляет $7\frac{1}{5}$ или $\frac{36}{5}$ ч.

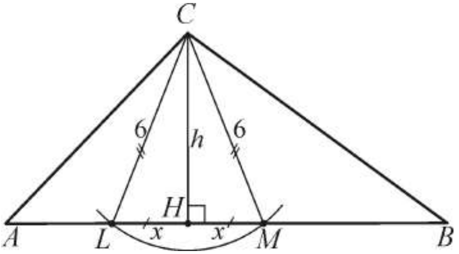
Имеем, за 1 час из первой трубы в бассейн поступает воды $\frac{1}{t}$, а из второй — $\frac{1}{t+6}$. По условию за $\frac{36}{5}$ ч. обе трубы заполнят весь бассейн, откуда $\frac{36}{5} \cdot \frac{1}{t} + \frac{36}{5} \cdot \frac{1}{t+6} = 1$, $\frac{36}{5} \cdot \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+6}\right) = 1$, $36(t + 6 + t) = 5t(t + 6)$. Преобразуя, получим $5t^2 - 42t - 216 = 0$,

$$t_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 + 5 \cdot 216}}{5} = \frac{21 \pm 39}{5},$$

$t_1 = -\dfrac{18}{5} < 0$ — посторонний, $t_2 = 12$ — подходит.

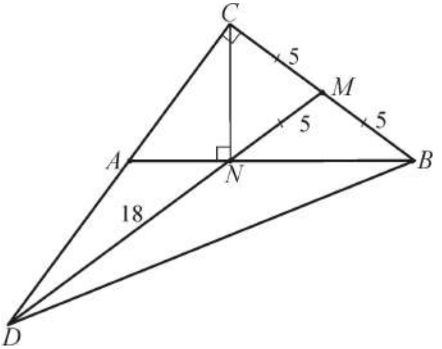
Искомое $T = t_2 + 6 = 12 + 6 = 18$. Ответ: за 18 ч.

2. Указание. Введем обозначения согласно рисунку. Радиусы данной окружности являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника CLM с высотой CH. Пусть $CH = h$ — искомое. По свойству равнобедренного треугольника высота является медианой, положим $LH = HM = x$. Из условия и определения арифметической прогрессии следует, что площади треугольников CAL, CLM и CMB являются последовательными членами другой арифметической прогрессии, поэтому верна формула $S_{\triangle CAL} + S_{\triangle CMB} = 2 \cdot S_{\triangle CLM}$, откуда $3 \cdot S_{\triangle CLM} = S_{\triangle ABC}$. Учитывая условие, имеем $3 \cdot S_{\triangle CLM} = 24\sqrt{5}$, $S_{\triangle CLM} = 8\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h$. По теореме Пифагора $x^2 + h^2 = 6^2$. Имеем систему $\begin{cases} x \cdot h = 8\sqrt{5}, \\ x^2 + h^2 = 36, \end{cases}$ из первого уравнения которой $x = \dfrac{8\sqrt{5}}{h}$, а из

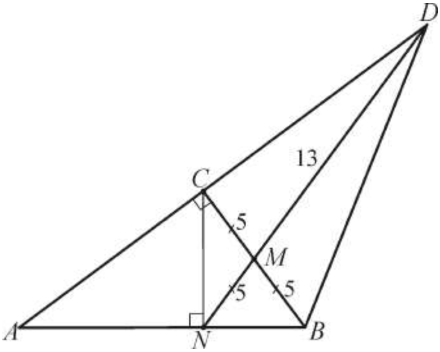


второго — $\dfrac{\left(8\sqrt{5}\right)^2}{h^2} + h^2 = 36$. Замена $h^2 = t > 0$, имеем $t^2 - 36t + 5 \cdot 8^2 = 0$, $t_{1,2} = 18 \pm \sqrt{18^2 - \left(8\sqrt{5}\right)^2} = 18 \pm 2$, $t_1 = 16$, $t_2 = 20$, оба корня подходят, $h_1 = 4$, $h_2 = 2\sqrt{5}$. Ответ: 4 или $2\sqrt{5}$.

3. Указание. Введем обозначения согласно рисунку. Возможны два случая. В первом точка D лежит на продолжении катета CA за точку A, во втором точка D лежит на продолжении катета AC за точку C. В обоих случаях точка M является серединой гипотенузы прямоугольного треугольника CNB, а значит, она является центром описанной около него окружности. Откуда $5 = MN = MB = CM$, а $BC = 2 \cdot 5 = 10$. В первом случае имеем $DM = DN + MN = 18 + 5 = 23$. По теореме Пифагора $CD = \sqrt{23^2 - 5^2} = 6\sqrt{14}$. По формуле площади треугольника $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6\sqrt{14} = 30\sqrt{14}$, $\boxed{S_{\triangle BCD} = 30\sqrt{14}}$ — в ответ.



Во втором случае имеем $DM = DN - MN = 18 - 5 = 13$. По теореме Пифагора $CD = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. По формуле площади треугольника находим для второго случая $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD$, $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$, $\boxed{S_{\triangle BCD} = 60}$ — в ответ.



Ответ: $30\sqrt{14}$ или 60.

4. Указание. Ограничения $\begin{cases} 3x + 7 \geqslant 0, \\ \sqrt{3x+7} + x + 2 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -\frac{7}{3}, \\ x \neq \frac{-1-\sqrt{13}}{2}. \end{cases}$

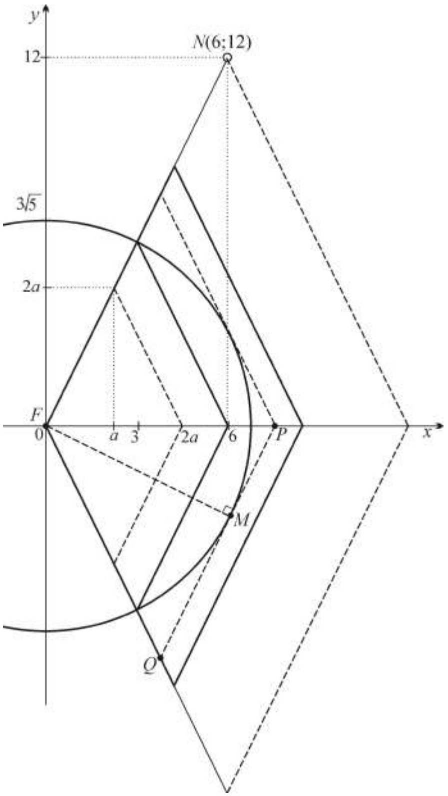
Преобразуем $\dfrac{\sqrt{3x+7} - x - 2 - \sqrt{3x+7} - x - 2}{\sqrt{3x+7} + x + 2} \leqslant 0$, $\dfrac{x+2}{\sqrt{3x+7} + x + 2} \geqslant 0$.

При $x + 2 = 0$ верное равенство, $\boxed{x = -2}$ — в ответ. Рассмотрим случаи

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2 > 0, \\ \sqrt{3x+7} + x + 2 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 < 0, \\ \sqrt{3x+7} + x + 2 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -2, \\ \sqrt{3x+7} > -x - 2; \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{7}{3} \leqslant x < -2, \\ 3x + 7 < (-x-2)^2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x > -2, \\ \begin{cases} -\frac{7}{3} \leqslant x < -2, \\ \left[\begin{array}{l} x < \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \\ x > \frac{-1+\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [-\frac{7}{3}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}) \cup [-2; +\infty)$.

5. Указания. Значения параметра a не могут быть отрицательными, что вытекает из первого уравнения системы, которому соответствует контур ромба с центром в точке $(a; 0)$ и одной из вершин F, совпадающей с началом координат при любом значении параметра a. В самом деле, при подстановке в уравнение $x = 0$ и $y = 0$ получим верное равенство $2 = 2$. Остальные вершины ромба имеют координаты $(2a; 0)$, $(a; -3a)$, $(a; 3a)$. Стороны ромба с вершиной в начале координат всегда располагаются на прямых $y = 2x$ и $y = -2x$ и по теореме Пифагора равны $\sqrt{(a)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{10}$.



Второму множеству соответствует окружность с центром в начале координат, радиусом $2\sqrt{10}$, и отдельная точка $N(6; 12)$. Анализируя взаимное расположение контура ромба и окружности с точкой при различных a, находим, что система будет иметь ровно 2 решения в двух случаях.

Первый случай, обе вершины ромба с его большей диагонали лежат на окружности, тогда сторона ромба равна радиусу окружности, откуда имеем уравнение $a\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$, $\boxed{a = 2}$ — в ответ.

Второй случай, стороны ромба, не лежащие на прямых $y = 2x$ и $y = -2x$ расположены между аналогичными сторонами ромба, касательными к окружности, и сторонами ромба, с одной из вершин в отдельной точке $N(6; 12)$. На рисунке эти границы отмечены пунктирной линией. Значение параметра a, когда имеет место касание, найдем из треугольника PQF, выразив его площадь по двум различным формулам, откуда $S_{\triangle PQF} = = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot PQ = 2a \cdot a$, $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot a\sqrt{10} = 2a \cdot a$, $a = \frac{10}{3}$. Вторую границу для a найдем, поместив соответствующую вершину ромба в точку $N(6; 12)$, откуда $a = 5$, в итоге $\boxed{\frac{10}{3} < a < 5}$ — в ответ.

Ответ: $a \in \{2\} \cup \left(\frac{10}{3}; 5\right)$.

Критерии оценок, 9 класс

Полное и обоснованное решение каждой задачи с правильным ответом оценивалось по 7 баллов. Частично верные решения оценивались в соответствии с таблицей, 0 баллов выставлялось, если решение не удовлетворяло ни одному из критериев. Границы итоговых оценок: «2» — менее 11, «3» — с 11 по 19, «4» — с 20 по 28, «5» — с 29 баллов.

Ошибки	Баллы
Задача 1	
Описка в ответе при верном решении.	6
Арифметическая ошибка, задача доведена до ответа.	4
Более одной арифметической ошибки, при этом задача доведена до ответа, либо записана только верная система без ответа.	2
Задача 2	
Арифметическая ошибка в конце, ответ получен.	6
Более одной арифметической ошибки, при этом ответ получен с двумя решениями, или верно рассмотрен только один случай.	4
Рассмотрен только один случай с неверным ответом или имеется верное геометрическое рассуждение (выписана система уравнений) без ответа, которое можно довести до правильного ответа.	2
Задача 3	
Ответ получен с одной арифметической ошибкой или опиской.	6
Рассмотрен только один из двух случаев с верным ответом.	4
Рассмотрен только один верный случай с арифметической ошибкой, ответ получен.	3
Имеется верное рассуждение без ответа с указанием на оба случая, которое можно довести до правильного ответа.	2
Задача 4	
Потеря одной граничной точки.	6
Потеря двух граничных точек.	5
В ответе только 1 верный промежуток при верном ходе решения.	4
Умножение обеих частей неравенства на знаменатель без учета его знака, или из ответа не исключен ноль знаменателя.	2
Задача 5	
Описка в ответе при верном решении.	6
Потеряно решение в виде отдельной точки.	5
Арифметическая ошибка при вычислении границ параметра при верном анализе случаев или в ответ ошибочно включен один лишний случай.	4
Имеется верное рассуждение (верно определены и изображены множества, соответствующие каждому уравнению, их взаимное расположение, намечена схема решения), которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен.	2

РАЗДЕЛ 3
ОТВЕТЫ

2019 год, 11 класс

Вариант 911

1. а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; б) $\frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6}$. **2.** $(-\infty;-25)\cup\{-5\sqrt{5}\}\cup$ $\cup\left(-\frac{1}{25};0\right)$. **3.** 12 или $\frac{180}{37}$. **4.** $a\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **5.** $\frac{\pi}{6}$ или $\frac{32\pi}{3}$.

Вариант 912

1. а) $\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in Z$; $\frac{5\pi}{12}+\pi k, k\in Z$; б) $\frac{5\pi}{12},\ \frac{13\pi}{12},\ \frac{17\pi}{12},\ \frac{25\pi}{12}$. **2.** $(-\infty;-27)\cup$ $\cup\{-\sqrt{3}\}\cup(-\frac{1}{27};0)$. **3.** $4\sqrt{2}$ или $\frac{8\sqrt{2}}{19}$. **4.** $a\in(-\infty;1)\cup(\frac{5}{2};+\infty)$. **5.** $\frac{32\pi}{375}$ или $\frac{125\pi}{6}$.

Вариант 913

1. а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$; б) $\frac{4\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3}$. **2.** $(-\infty;-36)\cup\left\{-\frac{1}{6\sqrt{6}}\right\}\cup$ $\cup\left(-\frac{1}{36};0\right)$. **3.** 3 или $\frac{21}{37}$. **4.** $a\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(5;+\infty)$. **5.** $\frac{4\pi}{375}$ или $\frac{500\pi}{3}$.

Вариант 914

1. а) $-\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in Z$; $-\frac{5\pi}{12}+\pi k, k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{12},\ \frac{7\pi}{12},\ \frac{11\pi}{12},\ \frac{19\pi}{12}$. **2.** $(-\infty;-16)\cup\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\cup\left(-\frac{1}{16};0\right)$. **3.** $\sqrt{2}$ или $\frac{5\sqrt{2}}{19}$. **4.** $a\in(-\infty;-2)\cup$ $\cup(2;+\infty)$. **5.** $\frac{32\pi}{81}$ или $\frac{9\pi}{2}$.

Вариант 921

1. а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; б) $\frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}$. **2.** $(-\infty;-25)\cup\{-5\sqrt{5}\}\cup\left(-\frac{1}{25};0\right)$. **3.** 12. **4.** $a\in\{-1\}\cup[2;3]$. **5.** $\frac{\pi}{6}$.

Вариант 922

1. а) $\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in Z$; $\frac{5\pi}{12}+\pi k, k\in Z$; б) $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$. **2.** $(-\infty;-27)\cup\cup\{-\sqrt{3}\}\cup\left(-\frac{1}{27};0\right)$. **3.** $4\sqrt{2}$. **4.** $a\in\{1\}\cup\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$. **5.** $\frac{32\pi}{375}$.

Вариант 923

1. а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$; б) $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$. **2.** $(-\infty;-36)\cup\left\{-\frac{1}{6\sqrt{6}}\right\}\cup\left(-\frac{1}{36};0\right)$. **3.** 3. **4.** $a\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]\cup\{5\}$. **5.** $\frac{4\pi}{375}$.

Вариант 924

1. а) $-\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in Z$; $-\frac{5\pi}{12}+\pi k, k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$. **2.** $(-\infty;-16)\cup\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\cup\left(-\frac{1}{16};0\right)$. **3.** $\sqrt{2}$. **4.** $a\in\{-2\}\cup[1;2]$. **5.** $\frac{32\pi}{81}$.

2019 год, 9 класс

Вариант 991

1. 16 часов. **2.** $4\sqrt{2}$ или 7. **3.** 120 или $40\sqrt{41}$. **4.** $x\in\left[-\frac{1}{2};1-\sqrt{2}\right)\cup\cup[0;+\infty)$. **5.** $a\in\{1\}\cup\left(\frac{17}{8};3\right)$.

Вариант 992

1. 12 часов. **2.** 4 или $4\sqrt{3}$. **3.** 48 или $48\sqrt{7}$. **4.** $x\in[-5;-4)\cup\cup[-3;+\infty)$. **5.** $a\in\{2\}\cup\left(\frac{10}{3};5\right)$.

Вариант 993

1. 14 часов. **2.** 5 или $2\sqrt{6}$. **3.** 48 или $48\sqrt{17}$. **4.** $x\in\left[-4;-\frac{7}{4}\right)\cup\cup[-1;+\infty)$. **5.** $a\in\{4\}\cup(5;6)$.

Вариант 994

1. 18 часов. **2.** 4 или $2\sqrt{5}$. **3.** 60 или $30\sqrt{14}$. **4.** $x\in\left[-\frac{7}{3};\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\cup[-2;+\infty)$. **5.** $a\in\{3\}\cup\left(\frac{15}{4};6\right)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ляпунов Игорь Борисович

ВАРИАНТЫ ВЫПУСКНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ СУНЦ НГУ ЗА 2019 ГОД

Методическое пособие

Технический редактор *Т. В. Иванова*

Графические работы *А. Г. Иванова*

Верстка *И. Б. Ляпунова*

Подписано в печать 08.05.2019 г.
Формат $60 \times 84/16$ Уч.-изд. л. 3,25. Усл. печ. л. 3,02.
Тираж 250 экз. Заказ № 119
Издательско-полиграфический центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2