МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

И. Б. ЛЯПУНОВ

ВАРИАНТЫ ВЫПУСКНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ СУНЦ НГУ ЗА 2020 ГОД

Методическое пособие

НОВОСИБИРСК

2020

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
Л 97

Ляпунов, И. Б.

Л 97 Варианты выпускных экзаменов по математике СУНЦ НГУ за 2020 год : метод. пособие / И. Б. Ляпунов ; СУНЦ НГУ. — Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2020. — 76 с.

ISBN 978–5–4437–1081–5

Сборник содержит задачи выпускных экзаменов по математике в 9 и 11-х классах, проводившихся в СУНЦ НГУ в 2020 г. Все задачи снабжены решениями или подробными указаниями, ответами и критериями оценок. Данное методическое пособие предназначено для оканчивающих школу учащихся СУНЦ НГУ, учителей старших классов, а также для всех, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
Л 97

ISBN 978–5–4437–1081–5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое издание содержит варианты выпускных экзаменов по математике 9 и 11-х классов СУНЦ НГУ за 2020 г. Расположение задач традиционное для такого рода изданий — по классам и вариантам. Продолжительность экзамена составляет 3 ч 30 мин. Из-за различия в программах выпускникам физико-математического и химического профиля предлагались различные по трудности задач варианты, для 11 класса сответственно, 011—014 и 021—024, а для 9 класса — 0911—0914 и 0921—0924. Задачи для 9 класса по традиции размещены после задач для 11 класса. Все задачи снабжены решениями или подробными указаниями, критериями оценок и ответами. Задачи настоящего сборника позволяют составить представление о требованиях к подготовке выпускников СУНЦ НГУ по математике.

В 2020 г. экзамен впервые проводился в дистанционной форме, задачи публиковались по одной, их надо было решать за ограниченное время.

Все задачи являются оригинальными, в том смысле, что составлены заново, именно для этого экзамена, при этом, часть идей по составлению задач заимствована из вступительных экзаменов ведущих вузов страны разных лет.

Пособие будет полезно как учащимся СУНЦ, оканчивающим школу, так и учителям старших классов, а также всем, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

Автор выражает благодарность канд. пед. наук Юрию Викторовичу Михееву за полезные обсуждения.

И. Б. Ляпунов

РАЗДЕЛ 1
ЗАДАЧИ ВЫПУСКНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

2020 год, 11 класс

Вариант 011

1. а) Решить уравнение

$$\frac{16\cdot\operatorname{tg}x\cdot\cos^3 x-4\cdot\sin 2x}{\pi^2}=\frac{2\cdot\sin 2x\cdot\cos x-\sin 2x}{(3x-\pi)^2}.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{(x-8)^2}\left(\frac{11x-55}{x-3}\right)+\log_{(x-8)^2}\left(\frac{x-2}{13x-65}\right)\leqslant 0.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB=60$, а боковая сторона $AC=78$. Прямоугольный треугольник ABD с гипотенузой BD расположен в плоскости треугольника ABC так, что точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB. Известно, что описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр O вписанной в треугольник ABC окружности. Найти длину отрезка OD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно два различных значения переменной x удовлетворяют равенству

$$\frac{(a-3)x^4-a(4a^2-13a+3)x^2-4a^4+12a^3}{x^2-4}=0.$$

5. Около треугольной пирамиды $SABC$ с попарно перпендикулярными боковыми ребрами SA, SB и SC описана сфера с центром O, причем $SA = 4$, $SB = 6$ и $SC = 8$. Найти площадь поверхности указанной сферы и объем пирамиды $OABC$.

Вариант 012

1. а) Решить уравнение

$$\frac{4 \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \sin^3 x - \sin 2x}{\pi^2} = \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x - \sin 2x}{(6x - \pi)^2}.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[0; \frac{7\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{(x-7)^2}\left(\frac{9x - 45}{x - 3}\right) + \log_{(x-7)^2}\left(\frac{x - 1}{13x - 65}\right) \leqslant 0.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB = 30$, а боковая сторона $AC = 25$. Прямоугольный треугольник ABD с гипотенузой BD расположен в плоскости треугольника ABC так, что точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB. Известно, что описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр O вписанной в треугольник ABC окружности. Найти длину отрезка OD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно два различных значения переменной x удовлетворяют равенству

$$\frac{(a-4)x^4 - a(9a^2 - 37a + 4)x^2 - 9a^4 + 36a^3}{x^2 - 36} = 0.$$

5. Около треугольной пирамиды $SABC$ с попарно перпендикулярными боковыми ребрами SA, SB и SC описана сфера с центром O, причем $SA = 2$, $SB = 6$ и $SC = 10$. Найти площадь поверхности указанной сферы и объем пирамиды $OABC$.

Вариант 013

1. а) Решить уравнение

$$\frac{16 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \cos^3 x + 4 \cdot \sin 2x}{\pi^2} = \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x}{(3x - 2\pi)^2}.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{(x-6)^2}\left(\frac{7x-28}{x-3}\right) + \log_{(x-6)^2}\left(\frac{x-2}{9x-36}\right) \leqslant 0.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB = 24$, а боковая сторона $AC = 15$. Прямоугольный треугольник ABD с гипотенузой BD расположен в плоскости треугольника ABC так, что точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB. Известно, что описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр O вписанной в треугольник ABC окружности. Найти длину отрезка OD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно два различных значения переменной x удовлетворяют равенству

$$\frac{(a-1)x^4 - a(16a^2 - 17a + 1)x^2 - 16a^4 + 16a^3}{x^2 - 4} = 0.$$

5. Около треугольной пирамиды $SABC$ с попарно перпендикулярными боковыми ребрами SA, SB и SC описана сфера с центром O, причем $SA = 4$, $SB = 8$ и $SC = 12$. Найти площадь поверхности указанной сферы и объем пирамиды $OABC$.

Вариант 014

1. а) Решить уравнение

$$\frac{4 \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \sin^3 x + \sin 2x}{\pi^2} = \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x + \sin 2x}{(6x + \pi)^2}.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{4}; 0\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{(x-5)^2}\left(\frac{7x-21}{x-2}\right)+\log_{(x-5)^2}\left(\frac{x-1}{9x-27}\right)\leqslant 0.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB=60$, а боковая сторона $AC=34$. Прямоугольный треугольник ABD с гипотенузой BD расположен в плоскости треугольника ABC так, что точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB. Известно, что описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр O вписанной в треугольник ABC окружности. Найти длину отрезка OD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно два различных значения переменной x удовлетворяют равенству

$$\frac{(a-5)x^4-a(4a^2-23a+15)x^2-12a^4+60a^3}{x^2-36}=0.$$

5. Около треугольной пирамиды $SABC$ с попарно перпендикулярными боковыми ребрами SA, SB и SC описана сфера с центром O, причем $SA=6$, $SB=8$ и $SC=10$. Найти площадь поверхности указанной сферы и объем пирамиды $OABC$.

Вариант 021

1. а) Решить уравнение

$$16\cdot\operatorname{tg}x\cdot\cos^3x-3\cdot\sin 2x=2\cdot\sin 2x\cdot\cos x.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{(x-8)^2}\left(\frac{11x-55}{x-3}\right)+\log_{(x-8)^2}\left(\frac{x-2}{13x-65}\right)\leqslant 0.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB = 60$, а боковая сторона $AC = 78$. Прямоугольный треугольник ABD с гипотенузой BD расположен в плоскости треугольника ABC так, что точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB. Известно, что описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр O вписанной в треугольник ABC окружности. Найти длину отрезка OD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно положительное значение переменной x удовлетворяет равенству

$$\frac{(a-3)x^2 - a(4a^2 - 13a + 3)x - 4a^4 + 12a^3}{x-4} = 0.$$

5. Боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ попарно перпендикулярны, причем $SA = 4$, $SB = 6$ и $SC = 8$. Найти площадь поверхности описанной около пирамиды $SABC$ сферы.

Вариант 022

1. а) Решить уравнение

$$8 \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \sin^3 x - \sin 2x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[0; \frac{7\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{(x-7)^2}\left(\frac{9x-45}{x-3}\right) + \log_{(x-7)^2}\left(\frac{x-1}{13x-65}\right) \leqslant 0.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB = 30$, а боковая сторона $AC = 25$. Прямоугольный треугольник ABD с гипотенузой BD расположен в плоскости треугольника ABC так, что точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB. Известно, что описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр O вписанной в треугольник ABC окружности. Найти длину отрезка OD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно положительное значение переменной x удовлетворяет равенству

$$\frac{(a-4)x^2 - a(9a^2-37a+4)x - 9a^4 + 36a^3}{x-36} = 0.$$

5. Боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ попарно перпендикулярны, причем $SA = 2$, $SB = 6$ и $SC = 10$. Найти площадь поверхности описанной около пирамиды $SABC$ сферы.

Вариант 023

1. а) Решить уравнение

$$16 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \cos^3 x + 3 \cdot \sin 2x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{(x-6)^2}\left(\frac{7x-28}{x-3}\right) + \log_{(x-6)^2}\left(\frac{x-2}{9x-36}\right) \leqslant 0.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB = 24$, а боковая сторона $AC = 15$. Прямоугольный треугольник ABD с гипотенузой BD расположен в плоскости треугольника ABC так, что точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB. Известно, что описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр O вписанной в треугольник ABC окружности. Найти длину отрезка OD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно положительное значение переменной x удовлетворяет равенству

$$\frac{(a-1)x^2 - a(16a^2 - 17a + 1)x - 16a^4 + 16a^3}{x-4} = 0.$$

5. Боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ попарно перпендикулярны, причем $SA = 4$, $SB = 8$ и $SC = 12$. Найти площадь поверхности описанной около пирамиды $SABC$ сферы.

Вариант 024

1. а) Решить уравнение

$$8 \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \sin^3 x + \sin 2x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{4}; 0\right]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{(x-5)^2}\left(\frac{7x-21}{x-2}\right) + \log_{(x-5)^2}\left(\frac{x-1}{9x-27}\right) \leqslant 0.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB = 60$, а боковая сторона $AC = 34$. Прямоугольный треугольник ABD с гипотенузой BD расположен в плоскости треугольника ABC так, что точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB. Известно, что описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр O вписанной в треугольник ABC окружности. Найти длину отрезка OD.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно положительное значение переменной x удовлетворяет равенству

$$\frac{(a-5)x^2 - a(4a^2 - 23a + 15)x - 12a^4 + 60a^3}{x-36} = 0.$$

5. Боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ попарно перпендикулярны, причем $SA = 6$, $SB = 8$ и $SC = 10$. Найти площадь поверхности описанной около пирамиды $SABC$ сферы.

2020 год, 9 класс

Вариант 0911

1. Две бригады строят дом. Если дом построит одна первая бригада, то она потратит на 8 дней больше, чем если бы этот же дом строили две бригады вместе. Если дом будет строить только вторая бригада, то она затратит на 2 дня больше, чем обе бригады вместе. За сколько дней построит дом одна первая бригада?

2. Числа $\sin\alpha$, $4\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$ и $\cos\alpha$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\alpha$.

3. Основание равнобедренной трапеции равно 10, а синус угла равен $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Найти площадь этой трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{(2x^2-5x-3)^2}-x^2}{\sqrt{2x^2-5x-3}+x} \geqslant x-6$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = ax, \\ \sqrt{1-(x-1)^2-(y+1)^2}\cdot(|x-1|-2y-4) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Вариант 0912

1. Две бригады строят дом. Если дом построит одна первая бригада, то она потратит на 16 дней больше, чем если бы этот же дом строили две бригады вместе. Если дом будет строить только вторая бригада, то она затратит на 4 дня больше, чем обе бригады вместе. За сколько дней построит дом одна первая бригада?

2. Числа $17\cos\alpha$, $5\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$ и $-17\sin\alpha$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\alpha$.

3. Основание равнобедренной трапеции равно 4, а синус угла равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найти площадь этой трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{(2x^2-3x-2)^2-x^2}}{\sqrt{2x^2-3x-2}+x} \geqslant x-4$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = ax, \\ \sqrt{1-(x+1)^2-(y-1)^2}\cdot(|x+1|+5y-10) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Вариант 0913

1. Две бригады строят дом. Если дом построит одна первая бригада, то она потратит на 32 дня больше, чем если бы этот же дом строили две бригады вместе. Если дом будет строить только вторая бригада, то она затратит на 2 дня больше, чем обе бригады вместе. За сколько дней построит дом одна первая бригада?

2. Числа $-7\sin\alpha$, $4\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$ и $7\cos\alpha$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\alpha$.

3. Основание равнобедренной трапеции равно 10, а синус угла равен $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найти площадь этой трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{(2x^2-9x-5)^2-x^2}}{\sqrt{2x^2-9x-5}+x} \geqslant x-10$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = ax, \\ \sqrt{1-(x-1)^2-(y-1)^2}\cdot(|x-1|+3y-6)=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Вариант 0914

1. Две бригады строят дом. Если дом построит одна первая бригада, то она потратит на 25 дней больше, чем если бы этот же дом строили две бригады вместе. Если дом будет строить только вторая бригада, то она затратит на 4 дня больше, чем обе бригады вместе. За сколько дней построит дом одна первая бригада?

2. Числа $-7\cos\alpha$, $5\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$ и $-7\sin\alpha$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\alpha$.

3. Основание равнобедренной трапеции равно 14, а синус угла равен $\frac{\sqrt{7}}{4}$. Найти площадь этой трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{(2x^2-7x-4)^2}-x^2}{\sqrt{2x^2-7x-4}+x}\geqslant x-8$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = ax, \\ \sqrt{1-(x+1)^2-(y+1)^2}\cdot(2|x+1|-3y-6)=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Вариант 0921

1. Моторная лодка прошла 6 км по озеру и 5 км против течения реки, затратив на весь путь 1 час. Найти собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

2. Числа $\sin\alpha$, $4\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$ и $\cos\alpha$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\alpha$.

3. Большее основание равнобедренной трапеции равно 10, а синус угла равен $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Найти площадь этой трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{(2x^2-5x-3)^2}-x^2}{\sqrt{2x^2-5x-3}+x} \geqslant x-6$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = ax, \\ y = -1 - \sqrt{1-(x-3)^2} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Вариант 0922

1. Моторная лодка прошла 9 км по озеру и 4 км против течения реки, затратив на весь путь 1 час. Найти собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

2. Числа $17\cos\alpha$, $5\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$ и $-17\sin\alpha$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\alpha$.

3. Большее основание равнобедренной трапеции равно 4, а синус угла равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найти площадь этой трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{(2x^2-3x-2)^2}-x^2}{\sqrt{2x^2-3x-2}+x} \geqslant x-4$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = ax, \\ y = -1 - \sqrt{1-(x-2)^2} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Вариант 0923

1. Моторная лодка прошла 7 км по озеру и 5 км против течения реки, затратив на весь путь 1 час. Найти собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

2. Числа $-7\sin\alpha$, $4\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$ и $7\cos\alpha$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\alpha$.

3. Большее основание равнобедренной трапеции равно 10, а синус угла равен $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найти площадь этой трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{(2x^2-9x-5)^2-x^2}}{\sqrt{2x^2-9x-5}+x}\geqslant x-10.$

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y=ax, \\ y=-1-\sqrt{1-(x-5)^2} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Вариант 0924

1. Моторная лодка прошла 12 км по озеру и 3 км против течения реки, затратив на весь путь 1 час. Найти собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

2. Числа $-7\cos\alpha$, $5\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$ и $-7\sin\alpha$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\alpha$.

3. Большее основание равнобедренной трапеции равно 14, а синус угла равен $\frac{\sqrt{7}}{4}$. Найти площадь этой трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{(2x^2-7x-4)^2-x^2}}{\sqrt{2x^2-7x-4}+x}\geqslant x-8.$

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y=ax, \\ y=-2-\sqrt{4-(x-3)^2} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

РАЗДЕЛ 2
УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ ОЦЕНОК

2020 год, 11 класс

Вариант 011

1. а) Указание: наше уравнение имеет смысл при ограничениях $\begin{cases} 3x-\pi \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases}$ откуда $x \neq \frac{\pi}{3}$, $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Перенесем оба слагаемых в одну сторону и преобразуем

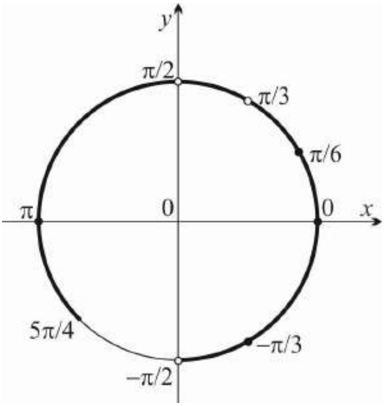
$$\frac{16\cdot\sin x\cdot\cos^2 x-4\cdot\sin 2x}{\pi^2}-\frac{2\cdot\sin 2x\cdot\cos x-\sin 2x}{(3x-\pi)^2}=0,$$

$$\frac{8\cdot\sin 2x\cdot\cos x-4\cdot\sin 2x}{\pi^2}-\frac{2\cdot\sin 2x\cdot\cos x-\sin 2x}{(3x-\pi)^2}=0,$$

$$(2\cdot\sin 2x\cdot\cos x-\sin 2x)\cdot\left(\frac{4}{\pi^2}-\frac{1}{(3x-\pi)^2}\right)=0,$$

$\sin 2x\cdot(2\cos x-1)\cdot(4(3x-\pi)^2-\pi^2)=0$, так как $\cos x\neq 0$, то $\left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \cos x=\dfrac{1}{2}, \\ 3x-\pi=\pm\dfrac{\pi}{2}, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi m, \\ \quad m\in\mathbb{Z}, \\ x=\dfrac{\pi}{6}, \\ x=\dfrac{\pi}{2}, \end{array}\right.$ $\boxed{\left[\begin{array}{l} x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ \quad n\neq 0, \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi m, \\ \quad m\in\mathbb{Z}, \\ x=\dfrac{\pi}{6}. \end{array}\right.}$

Последняя совокупность выписана с учетом ограничений, в ответ на пункт а) не включены $x=\frac{\pi}{2}$ и $n=0$ во второй серии.



б) Указание: корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$, отберем с помощью тригонометрического круга.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \neq 0$, $n \in Z$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$; $\frac{\pi}{6}$; πk, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{3}$, 0, $\frac{\pi}{6}$, π.

2. Указание: наше неравенство имеет смысл при ограничениях
$$\begin{cases} (x-8)^2 > 0, \\ (x-8)^2 \neq 1, \\ \dfrac{11x-55}{x-3} > 0, \\ \dfrac{x-2}{13x-65} > 0, \end{cases} \begin{cases} x \neq 8, \\ x \neq 7,\ x \neq 9, \\ \dfrac{x-5}{x-3} > 0, \\ \dfrac{x-2}{x-5} > 0, \end{cases} \begin{cases} x \neq 8, \\ x \neq 7, \\ x \neq 9, \\ x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty), \\ x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty), \end{cases}$$ откуда имеем ограничение $x \in (-\infty; 2) \cup (5; 7) \cup (7; 8) \cup (8; 9) \cup (9; +\infty)$.

Перепишем неравенство в равносильном виде
$$\log_{(x-8)^2}\left(\frac{x-2}{13x-65}\right) \leqslant \log_{(x-8)^2}\left(\frac{x-3}{11x-55}\right).$$

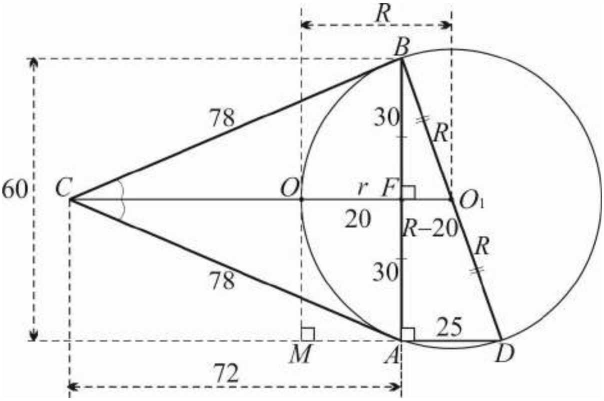
Первый случай, $0 < (x-8)^2 < 1$, $x \in (7; 8) \cup (8; 9)$ — ограничение. Знак неравенства при потенцировании сменим, получим $\dfrac{x-2}{13 \cdot (x-5)} \geqslant \dfrac{x-3}{11 \cdot (x-5)}$, $\dfrac{11 \cdot (x-2) - 13 \cdot (x-3)}{13 \cdot 11 \cdot (x-5)} \geqslant 0$. Преобразуя и сокращая обе части неравенства на отрицательный множитель со сменой знака неравенства, получим $\dfrac{x - \frac{17}{2}}{x-5} \leqslant 0$, откуда $x \in \left(5; \frac{17}{2}\right]$, с учетом ограничения $\boxed{x \in (7; 8) \cup \left(8; \frac{17}{2}\right]}$ — в ответ.

Второй случай, $(x-8)^2 > 1$, $x \in (-\infty; 2) \cup (5; 7) \cup (9; +\infty)$ — ограничение. Знак неравенства при потенцировании сохраняем $\dfrac{x-2}{13(x-5)} \leqslant \dfrac{x-3}{11(x-5)}$. Действуя аналогично первому случаю, по-

лучим неравенство противоположного знака $\dfrac{x-\frac{17}{2}}{x-5} \geqslant 0$, откуда $x \in (-\infty; 5) \cup \left[\frac{17}{2}; +\infty\right)$, $\boxed{x \in (-\infty; 2) \cup (9; +\infty)}$ — в ответ с учетом ограничения.

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (7; 8) \cup \left(8; \frac{17}{2}\right] \cup (9; +\infty)$.

3. Указание: центр O окружности, вписанной в данный треугольник ABC, лежит на пересечении его биссектрисс. Проведем



в равнобедренном треугольнике ABC биссектрису CF, которая является его высотой и медианой. Центр O_1 окружности, описанной около треугольника ABD, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам (в нашем случае он лежит на продолжении отрезка CF в пересечении с серединой гипотенузы BD). По теореме Пифагора $CF = \sqrt{78^2 - 30^2} = 72$. Пусть $r = OF$ — радиус вписанной в треугольник ABC окружности, а $R = O_1B$ — радиус описанной около треугольника ABD окружности, равный половине гипотенузы. Пусть $S_{\triangle ABC}$ — площадь треугольника ABC, а $P_{\triangle ABC}$ — его периметр. Справедливы формулы $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CF$ и $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot P_{\triangle ABC} \cdot r$, откуда $r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABC}}$. Подставляя числовые значения, находим $r = \dfrac{60 \cdot 72}{78+78+60}$, $r = 20$. В треугольнике O_1BF, по теореме Пифагора, имеем $(R-20)^2 + 30^2 = R^2$, откуда $R = \frac{65}{2}$. Найдем $FO_1 = R - r$, $FO_1 = \frac{65}{2} - 20 = \frac{25}{2}$. Заметим, FO_1 — средняя линия треугольника ABD, поэтому $AD = 2FO_1 = 25$. Опустим перпендикуляр OM на продолжение отрезка DA, тогда $OM = FA = 30$, $MA = OF = 20$, $MD = MA + AD = 20 + 25 = 45$. По теореме Пифагора, в треугольнике ODM, имеем $OD = \sqrt{OM^2 + MD^2}$, $OD = \sqrt{30^2 + 45^2}$, $\boxed{OD = 15\sqrt{13}}$ — в ответ.

Ответ: $15\sqrt{13}$.

4. Указание: равенство имеет смысл при $x \neq \pm 2$, перепишем его в виде $\dfrac{(a-3)x^4 - a(a-3)(4a-1)x^2 - 4(a-3)a^3}{x^2-4} = 0$, после вынесения за скобки имеем $(a-3)\cdot\dfrac{x^4 - a(4a-1)x^2 - 4a^3}{x^2-4} = 0$.

При $a = 3$ имеет место верное числовое равенство $0 = 0$ для всех допустимых x. Таким образом, более двух значений x удовлетворяют данному равенству, и $a = 3$ не входит в ответ.

При $a \neq 3$ избавимся от знаменателя и получим биквадратное уравнение $x^4 - a(4a-1)x^2 - 4a^3 = 0$, оно должно иметь ровно два корня, отличных от ± 2. Преобразуем уравнение еще раз, получим $x^4 - (4a^2 + (-a))x^2 + 4a^2 \cdot (-a) = 0$. По обратной теореме Виета находим, что $x^2 = 4a^2$ или $x^2 = -a$. Такой же результат можно получить, вычислив дискриминант и выделив в нем полный квадрат $D = a^2(4a-1)^2 + 4\cdot 4a^3 = a^2(4a+1)^2$. Откуда $x^2_{1,2} = \frac{a(4a-1)\pm a(4a+1)}{2}$.

Таким образом, установлено, что при любых a уравнение имеет корни $x = -2a$ и $x = 2a$. Если $a = 0$, уравнение имеет единственное решение $x = 0$, поэтому в дальнейшем $a \neq 0$.

Первый случай, $a > 0$, уравнение имеет всего два корня $x = -2a$ и $x = 2a$. Надо, чтобы они не были посторонними, $2a \neq 2$ и $-2a \neq -2$, откуда $a \neq 1$. Других ограничений нет, поэтому $\boxed{a \in (0;1) \cup (1;3) \cup (3;+\infty)}$ — в ответ.

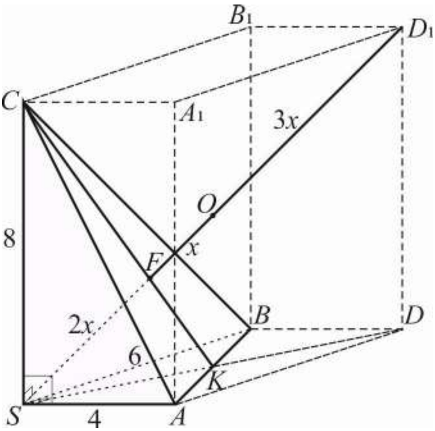
Второй случай, $a < 0$, уравнение имеет уже четыре корня $x = \pm 2a$ и $x = \pm\sqrt{-a}$. Надо, чтобы корни либо попарно совпали, либо одна из пар была посторонней.

Условие совпадения корней с учетом их знаков $-2a = \sqrt{-a}$, $4a^2 = -a$, $\boxed{a = -\frac{1}{4}}$ — в ответ.

Первая пара корней посторонняя $2a = -2$, $\boxed{a = -1}$ — в ответ, поскольку совпадающих корней нет. Вторая пара корней посторонняя $\sqrt{-a} = 2$, $\boxed{a=-4}$ — в ответ, аналогично совпадающих корней нет.

Ответ: $a \in \{-4; -1; -\frac{1}{4}\} \cup (0;1) \cup (1;3) \cup (3;+\infty)$.

5. Указание: расположим данную пирамиду, выбрав в качестве основания треугольник SAB, тогда ее высотой будет ребро SC.



Центр O сферы, описанной около пирамиды, будет лежать на пересечении плоскостей серединных перпендикуляров к ребрам SC, SA, SB. Достроим данную пирамиду до прямоугольного паралелепипеда $SADBCA_1D_1B_1$, все его вершины будут равноудалены от точки O, поскольку плоскости серединных перпендикуляров к равным и параллельным ребрам совпадают, таким образом трех перечисленных плоскостей достаточно. Тогда центр O и радиус описанной около пирамиды сферы совпадают с центром и радиусом сферы, описанной около достроенного прямоугольного паралелепипеда. Радиус сферы равен половине диагонали прямоугольного параллелепипеда, $R = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2}$, $R = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{29}$, площадь сферы $S_{\text{сферы}} = 4\pi \cdot 29$, $\boxed{S_{\text{сферы}} = 116\pi}$ — в ответ.

Пусть точка F — пересечение диагонали SD_1 с плоскостью ABC. Для построения пересечения отрезка с плоскостью рассмотрим вспомогательную плоскость $CSDD_1$, которая пересекает плоскость ABC по прямой CK, где K — точка пересечения диагоналей прямоугольника $SADB$. Тогда F — пересечение отрезков CK и SD_1, а треугольники KSF и CD_1F подобны с $k = \frac{1}{2}$, откуда $SF : FD_1 = 1 : 2$, если $SF = 2x$, то $FD_1 = 4x$, вместе $6x$, тогда $SO = 3x$, $FO = 3x - 2x = x$, следовательно $SF : FO = 2 : 1$. Последнее соотношение также верно и для высот пирамид $SABC$ и $OABC$, опущенных на плоскость ABC, что означает, что объем пирамиды $OABC$ равен половине объема пирамиды $SABC$, который легко вычисляется в силу попарной перпендикулярности ее ребер. Имеем $V_{OABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot SC$, после подстановки числовых значений $V_{OABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$, $\boxed{V_{OABC} = 16}$ — в ответ.

Ответ: 116π и 16.

Вариант 012

1. а) Указание: наше уравнение имеет смысл при ограничениях $\begin{cases} 6x - \pi \neq 0, \\ \sin x \neq 0, \end{cases}$ откуда $x \neq \frac{\pi}{6}$, $x \neq \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Перенесем оба слагаемых в одну сторону и преобразуем

$$\frac{4 \cdot \cos x \cdot \sin^2 x - \sin 2x}{\pi^2} - \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x - \sin 2x}{(6x-\pi)^2} = 0,$$

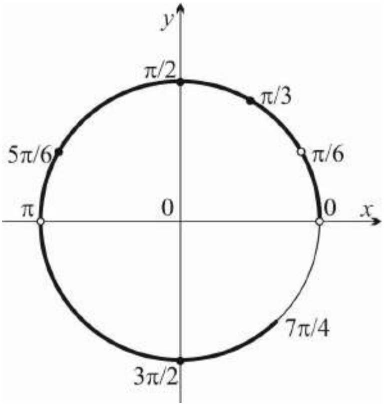
$$\frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x - \sin 2x}{\pi^2} - \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x - \sin 2x}{(6x-\pi)^2} = 0,$$

$$(2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x - \sin 2x) \cdot \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{(6x-\pi)^2}\right) = 0,$$

$\sin 2x \cdot (2\sin x + 1) \cdot ((6x-\pi)^2 - \pi^2) = 0$, так как $\sin x \neq 0$, то

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ 6x - \pi = \pm\pi, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{3}, \\ x = 0, \end{array}\right. \quad \boxed{\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \quad n \neq 0, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{3}. \end{array}\right.}$$

Последняя совокупность выписана с учетом ограничений, в ответ на пункт а) не включены $x = 0$ и $n = 0$ во второй серии.



б) Указание: корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[0; \frac{7\pi}{4}\right]$, отберем с помощью тригонометрического круга.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \neq 0$, $n \in Z$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in Z$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$.

2. Указание: наше неравенство имеет смысл при ограничениях
$$\begin{cases} (x-7)^2 > 0, \\ (x-7)^2 \neq 1, \\ \dfrac{9x-45}{x-3} > 0, \\ \dfrac{x-1}{13x-65} > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 7, \\ x \neq 6,\ x \neq 8, \\ \dfrac{x-5}{x-3} > 0, \\ \dfrac{x-1}{x-5} > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 7, \\ x \neq 6, \\ x \neq 8, \\ x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty), \\ x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty), \end{cases}$$
откуда имеем ограничение $x \in (-\infty; 1) \cup (5; 6) \cup (6; 7) \cup (7; 8) \cup (8; +\infty)$.

Перепишем неравенство в равносильном виде
$$\log_{(x-7)^2}\left(\frac{x-1}{13x-65}\right) \leqslant \log_{(x-7)^2}\left(\frac{x-3}{9x-45}\right).$$

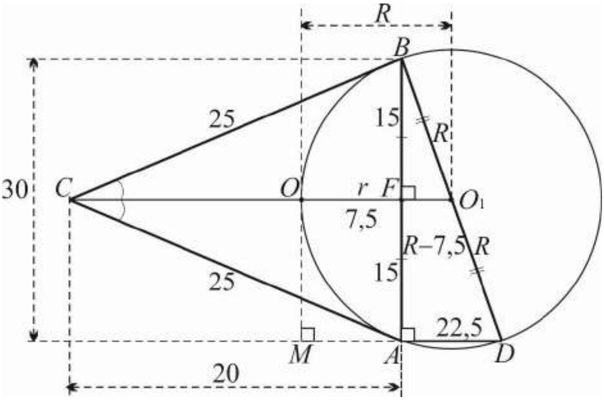
Первый случай, $0 < (x-7)^2 < 1$, $x \in (6; 7) \cup (7; 8)$ — ограничение. Знак неравенства при потенцировании сменим, получим $\dfrac{x-1}{13 \cdot (x-5)} \geqslant \dfrac{x-3}{9 \cdot (x-5)}$, $\dfrac{9 \cdot (x-1) - 13 \cdot (x-3)}{13 \cdot 9 \cdot (x-5)} \geqslant 0$. Преобразуя и сокращая обе части неравенства на отрицательный множитель со сменой знака неравенства, получим $\dfrac{x - \frac{15}{2}}{x-5} \leqslant 0$, откуда $x \in \left(5; \frac{15}{2}\right]$, с учетом ограничения $\boxed{x \in (6; 7) \cup \left(7; \frac{15}{2}\right]}$ — в ответ.

Второй случай, $(x-7)^2 > 1$, $x \in (-\infty; 1) \cup (5; 6) \cup (8; +\infty)$ — ограничение. Знак неравенства при потенцировании сохраняем $\dfrac{x-1}{13(x-5)} \leqslant \dfrac{x-3}{9(x-5)}$. Действуя аналогично первому случаю, по-

лучим неравенство противоположного знака $\dfrac{x-\frac{15}{2}}{x-5} \geqslant 0$, откуда $x \in (-\infty; 5) \cup \left[\frac{15}{2}; +\infty\right)$, $\boxed{x \in (-\infty; 1) \cup (8; +\infty)}$ — в ответ с учетом ограничения.

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (6; 7) \cup \left(7; \frac{15}{2}\right] \cup (8; +\infty)$.

3. Указание: центр O окружности, вписанной в данный треугольник ABC, лежит на пересечении его биссектрисс. Проведем в равнобедренном треугольнике ABC биссектрису CF, которая является его высотой и медианой. Центр O_1 окружности, описанной около треугольника ABD, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам (в нашем случае он лежит на продолжении отрезка CF в пересечении с серединой гипотенузы BD). По теореме Пифагора $CF = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$. Пусть $r = OF$ — радиус вписанной в треугольник ABC окружности, а $R = O_1B$ — радиус описанной около треугольника ABD окружности, равный половине гипотенузы. Пусть $S_{\triangle ABC}$ — площадь треугольника ABC, а $P_{\triangle ABC}$ — его периметр. Справедливы формулы $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CF$ и $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot P_{\triangle ABC} \cdot r$, откуда $r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABC}}$. Подставляя числовые значения, находим $r = \dfrac{30 \cdot 20}{25+25+30}$, $r = \frac{15}{2}$. В треугольнике O_1BF, по теореме Пифагора, имеем $(R - \frac{15}{2})^2 + 15^2 = R^2$, откуда $R = \frac{75}{4}$. Найдем $FO_1 = R - r$, $FO_1 = \frac{75}{4} - \frac{15}{2} = \frac{45}{4}$. Заметим, FO_1 — средняя линия треугольника ABD, поэтому $AD = 2FO_1 = \frac{45}{2}$. Опустим перпендикуляр OM на продолже-



ние отрезка DA, тогда $OM = FA = 15$, $MA = OF = \frac{15}{2}$, $MD = MA + AD = \frac{15}{2} + \frac{45}{2} = 30$. По теореме Пифагора, в треугольнике ODM, имеем $OD = \sqrt{OM^2 + MD^2}$, $OD = \sqrt{15^2 + 30^2}$, $\boxed{OD = 15\sqrt{5}}$ — в ответ.

Ответ: $15\sqrt{5}$.

4. Указание: равенство имеет смысл при $x \neq \pm 6$, перепишем его в виде $\dfrac{(a-4)x^4 - a(a-4)(9a-1)x^2 - 9(a-4)a^3}{x^2 - 36} = 0$, после вынесения за скобки имеем $(a-4) \cdot \dfrac{x^4 - a(9a-1)x^2 - 9a^3}{x^2 - 36} = 0$.

При $a = 4$ имеет место верное числовое равенство $0 = 0$ для всех допустимых x. Таким образом, более двух значений x удовлетворяют данному равенству, и $a = 4$ не входит в ответ.

При $a \neq 4$ избавимся от знаменателя и получим биквадратное уравнение $x^4 - a(9a-1)x^2 - 9a^3 = 0$, оно должно иметь ровно два корня, отличных от ± 6. Преобразуем уравнение еще раз, получим $x^4 - (9a^2 + (-a))x^2 + 9a^2 \cdot (-a) = 0$. По обратной теореме Виета находим, что $x^2 = 9a^2$ или $x^2 = -a$. Такой же результат можно получить, вычислив дискриминант и выделив в нем полный квадрат $D = a^2(9a-1)^2 + 4 \cdot 9a^3 = a^2(9a+1)^2$. Откуда $x^2_{1,2} = \frac{a(9a-1) \pm a(9a+1)}{2}$.

Таким образом, установлено, что при любых a уравнение имеет корни $x = -3a$ и $x = 3a$. Если $a = 0$, уравнение имеет единственное решение $x = 0$, поэтому в дальнейшем $a \neq 0$.

Первый случай, $a > 0$, уравнение имеет всего два корня $x = -3a$ и $x = 3a$. Надо, чтобы они не были посторонними, $3a \neq 6$ и $-3a \neq -6$, откуда $a \neq 2$. Других ограничений нет, поэтому $\boxed{a \in (0;2) \cup (2;4) \cup (4;+\infty)}$ — в ответ.

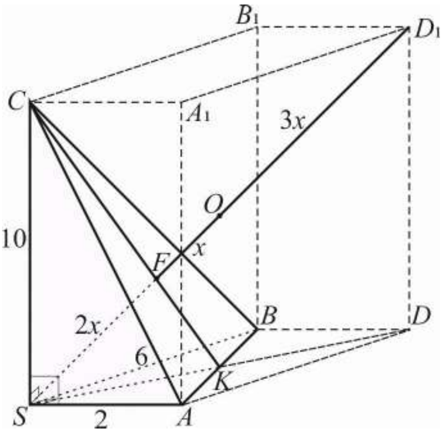
Второй случай, $a < 0$, уравнение имеет уже четыре корня $x = \pm 3a$ и $x = \pm\sqrt{-a}$. Надо, чтобы корни либо попарно совпали, либо одна из пар была посторонней.

Условие совпадения корней с учетом их знаков $-3a = \sqrt{-a}$, $9a^2 = -a$, $\boxed{a = -\frac{1}{9}}$ — в ответ.

Первая пара корней посторонняя $3a = -6$, $\boxed{a = -2}$ — в ответ, поскольку совпадающих корней нет. Вторая пара корней посторонняя $\sqrt{-a} = 6$, $\boxed{a = -36}$ — в ответ, аналогично совпадающих корней нет.

Ответ: $a \in \{-36; -2; -\frac{1}{9}\} \cup (0; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$.

5. Указание: расположим данную пирамиду, выбрав в качестве основания треугольник SAB, тогда ее высотой будет ребро SC.



Центр O сферы, описанной около пирамиды, будет лежать на пересечении плоскостей серединных перпендикуляров к ребрам SC, SA, SB. Достроим данную пирамиду до прямоугольного паралелепипеда $SADBCA_1D_1B_1$, все его вершины будут равноудалены от точки O, поскольку плоскости серединных перпендикуляров к равным и параллельным ребрам совпадают, таким образом трех перечисленных плоскостей достаточно. Тогда центр O и радиус описанной около пирамиды сферы совпадают с центром и радиусом сферы, описанной около достроенного прямоугольного паралелепипеда. Радиус сферы равен половине диагонали прямоугольного параллелепипеда, $R = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2}$, $R = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 6^2 + 10^2} = \sqrt{35}$, площадь сферы $S_{\text{сферы}} = 4\pi \cdot 35$, $\boxed{S_{\text{сферы}} = 140\pi}$ — в ответ.

Пусть точка F — пересечение диагонали SD_1 с плоскостью ABC. Для построения пересечения отрезка с плоскостью рассмотрим вспомогательную плоскость $CSDD_1$, которая пересекает плоскость ABC по прямой CK, где K — точка пересечения диагоналей прямоугольника $SADB$. Тогда F — пересечение отрезков CK и SD_1, а треугольники KSF и CD_1F подобны с $k = \frac{1}{2}$, откуда $SF : FD_1 = 1 : 2$, если $SF = 2x$, то $FD_1 = 4x$, вместе $6x$, тогда $SO = 3x$, $FO = 3x - 2x = x$, следовательно $SF : FO = 2 : 1$. Последнее соотношение также верно и для высот пирамид $SABC$ и $OABC$, опущенных на плоскость ABC, что означает, что объем пирамиды $OABC$ равен половине объема пирамиды $SABC$, который легко вычисляется в силу попарной перпендикулярности ее ребер. Имеем $V_{OABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot SC$, после подстановки числовых значений $V_{OABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10$, $\boxed{V_{OABC} = 10}$ — в ответ.

Ответ: 140π и 10.

Вариант 013

1. а) Указание: наше уравнение имеет смысл при ограничениях $\begin{cases} 3x - 2\pi \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases}$ откуда $x \neq \frac{2\pi}{3}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Перенесем оба слагаемых в одну сторону и преобразуем

$$\frac{16 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \sin 2x}{\pi^2} - \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x}{(3x - 2\pi)^2} = 0,$$

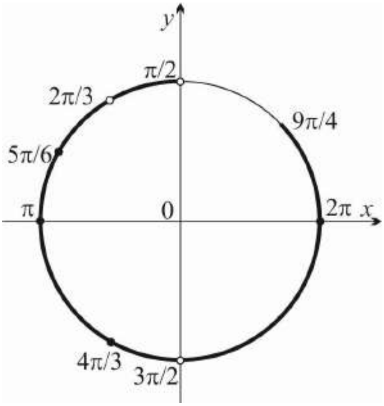
$$\frac{8 \cdot \sin 2x \cdot \cos x + 4 \cdot \sin 2x}{\pi^2} - \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x}{(3x - 2\pi)^2} = 0,$$

$$(2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x) \cdot \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{(3x - 2\pi)^2} \right) = 0,$$

$\sin 2x \cdot (2\cos x + 1) \cdot (4(3x - 2\pi)^2 - \pi^2) = 0$, так как $\cos x \neq 0$, то

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}, \\ 3x - 2\pi = \pm\dfrac{\pi}{2}, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m, \\ \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{6}, \\ x = \dfrac{\pi}{2}, \end{array} \right. \quad \boxed{\left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \quad n \neq 0, \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m, \\ \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{6}. \end{array} \right.}$$

Последняя совокупность выписана с учетом ограничений, в ответ на пункт а) не включены $x = \frac{\pi}{2}$ и $n = 0$ во второй серии.



б) Указание: корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}\right]$, отберем с помощью тригонометрического круга.

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \neq 0$, $n \in Z$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$; $\frac{5\pi}{6}$; πk, $k \in Z$; б) $\frac{5\pi}{6}$, π, $\frac{4\pi}{3}$, 2π.

2. Указание: наше неравенство имеет смысл при ограничениях $\begin{cases} (x-6)^2 > 0, \\ (x-6)^2 \neq 1, \\ \dfrac{7x-28}{x-3} > 0, \\ \dfrac{x-2}{9x-36} > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 6, \\ x \neq 5,\ x \neq 7, \\ \dfrac{x-4}{x-3} > 0, \\ \dfrac{x-2}{x-4} > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 6, \\ x \neq 5, \\ x \neq 7, \\ x \in (-\infty; 3) \cup (4; +\infty), \\ x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty), \end{cases}$ откуда имеем ограничение $x \in (-\infty; 2) \cup (4; 5) \cup (5; 6) \cup (6; 7) \cup (7; +\infty)$.

Перепишем неравенство в равносильном виде

$$\log_{(x-6)^2}\left(\frac{x-2}{9x-36}\right) \leqslant \log_{(x-6)^2}\left(\frac{x-3}{7x-28}\right).$$

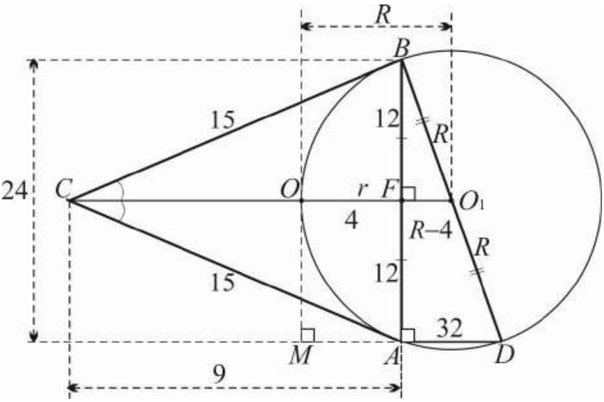
Первый случай, $0 < (x-6)^2 < 1$, $x \in (5; 6) \cup (6; 7)$ — ограничение. Знак неравенства при потенцировании сменим, получим $\dfrac{x-2}{9 \cdot (x-4)} \geqslant \dfrac{x-3}{7 \cdot (x-4)}$, $\dfrac{7 \cdot (x-2) - 9 \cdot (x-3)}{9 \cdot 7 \cdot (x-4)} \geqslant 0$. Преобразуя и сокращая обе части неравенства на отрицательный множитель со сменой знака неравенства, получим $\dfrac{x - \frac{13}{2}}{x-4} \leqslant 0$, откуда $x \in \left(4; \frac{13}{2}\right]$, с учетом ограничения $\boxed{x \in (5; 6) \cup \left(6; \frac{13}{2}\right]}$ — в ответ.

Второй случай, $(x-6)^2 > 1$, $x \in (-\infty; 2) \cup (4; 5) \cup (7; +\infty)$ — ограничение. Знак неравенства при потенцировании сохраняем $\dfrac{x-2}{9(x-4)} \leqslant \dfrac{x-3}{7(x-4)}$. Действуя аналогично первому случаю, по-

лучим неравенство противоположного знака $\dfrac{x-\frac{13}{2}}{x-4} \geqslant 0$, откуда $x \in (-\infty; 4) \cup \left[\frac{13}{2}; +\infty\right)$, $\boxed{x \in (-\infty; 2) \cup (7; +\infty)}$ — в ответ с учетом ограничения.

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (5; 6) \cup \left(6; \frac{13}{2}\right] \cup (7; +\infty)$.

3. Указание: центр O окружности, вписанной в данный треугольник ABC, лежит на пересечении его биссектрисс. Проведем в равнобедренном треугольнике ABC биссектрису CF, которая является его высотой и медианой. Центр O_1 окружности, описанной около треугольника ABD, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам (в нашем случае он лежит на продолжении отрезка CF в пересечении с серединой гипотенузы BD). По теореме Пифагора $CF = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Пусть $r = OF$ — радиус вписанной в треугольник ABC окружности, а $R = O_1B$ — радиус описанной около треугольника ABD окружности, равный половине гипотенузы. Пусть $S_{\triangle ABC}$ — площадь треугольника ABC, а $P_{\triangle ABC}$ — его периметр. Справедливы формулы $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CF$ и $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot P_{\triangle ABC} \cdot r$, откуда $r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABC}}$. Подставляя числовые значения, находим $r = \dfrac{24 \cdot 9}{15+15+24}$, $r = 4$. В треугольнике O_1BF, по теореме Пифагора, имеем $(R-4)^2 + 12^2 = R^2$, откуда $R = 20$. Найдем $FO_1 = R - r$, $FO_1 = 20 - 4 = 16$. Заметим, FO_1 — средняя линия треугольника ABD, поэтому $AD = 2FO_1 = 32$. Опустим перпендикуляр OM на продолже-



ние отрезка DA, тогда $OM = FA = 12$, $MA = OF = 4$, $MD = MA + AD = 4 + 32 = 36$. По теореме Пифагора, в треугольнике ODM, имеем $OD = \sqrt{OM^2 + MD^2}$, $OD = \sqrt{12^2 + 36^2}$, $\boxed{OD = 12\sqrt{10}}$ — в ответ.

Ответ: $12\sqrt{10}$.

4. Указание: равенство имеет смысл при $x \neq \pm 2$, перепишем его в виде $\dfrac{(a-1)x^4 - a(a-1)(16a-1)x^2 - 16(a-1)a^3}{x^2-4} = 0$, после вынесения за скобки имеем $(a-1) \cdot \dfrac{x^4 - a(16a-1)x^2 - 16a^3}{x^2-4} = 0$.

При $a = 1$ имеет место верное числовое равенство $0 = 0$ для всех допустимых x. Таким образом, более двух значений x удовлетворяют данному равенству, и $a = 1$ не входит в ответ.

При $a \neq 1$ избавимся от знаменателя и получим биквадратное уравнение $x^4 - a(16a-1)x^2 - 16a^3 = 0$, оно должно иметь ровно два корня, отличных от ± 2. Преобразуем уравнение еще раз, получим $x^4 - (16a^2 + (-a))x^2 + 16a^2 \cdot (-a) = 0$. По обратной теореме Виета находим, что $x^2 = 16a^2$ или $x^2 = -a$. Такой же результат можно получить, вычислив дискриминант и выделив в нем полный квадрат $D = a^2(16a-1)^2 + 4 \cdot 16a^3 = a^2(16a+1)^2$. Откуда $x^2_{1,2} = \frac{a(16a-1) \pm a(16a+1)}{2}$.

Таким образом, установлено, что при любых a уравнение имеет корни $x = -4a$ и $x = 4a$. Если $a = 0$, уравнение имеет единственное решение $x = 0$, поэтому в дальнейшем $a \neq 0$.

Первый случай, $a > 0$, уравнение имеет всего два корня $x = -4a$ и $x = 4a$. Надо, чтобы они не были посторонними, $4a \neq 2$ и $-4a \neq -2$, откуда $a \neq \frac{1}{2}$. Других ограничений нет, поэтому $\boxed{a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)}$ — в ответ.

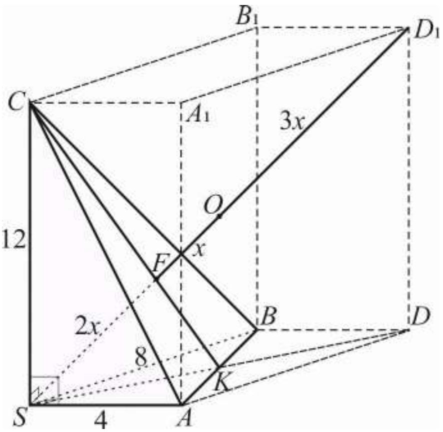
Второй случай, $a < 0$, уравнение имеет уже четыре корня $x = \pm 4a$ и $x = \pm\sqrt{-a}$. Надо, чтобы корни либо попарно совпали, либо одна из пар была посторонней.

Условие совпадения корней с учетом их знаков $-4a = \sqrt{-a}$, $16a^2 = -a$, $\boxed{a = -\frac{1}{16}}$ — в ответ.

Первая пара корней посторонняя $4a = -2$, $\boxed{a = -\frac{1}{2}}$ — в ответ, поскольку совпадающих корней нет. Вторая пара корней посторонняя $\sqrt{-a} = 2$, $\boxed{a = -4}$ — в ответ, аналогично совпадающих корней нет.

Ответ: $a \in \{-4; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{16}\} \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

5. Указание: расположим данную пирамиду, выбрав в качестве основания треугольник SAB, тогда ее высотой будет ребро SC.



Центр O сферы, описанной около пирамиды, будет лежать на пересечении плоскостей серединных перпендикуляров к ребрам SC, SA, SB. Достроим данную пирамиду до прямоугольного паралелепипеда $SADBCA_1D_1B_1$, все его вершины будут равноудалены от точки O, поскольку плоскости серединных перпендикуляров к равным и параллельным ребрам совпадают, таким образом трех перечисленных плоскостей достаточно. Тогда центр O и радиус описанной около пирамиды сферы совпадают с центром и радиусом сферы, описанной около достроенного прямоугольного паралелепипеда. Радиус сферы равен половине диагонали прямоугольного параллелепипеда, $R = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2}$, $R = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 8^2 + 12^2} = 2\sqrt{14}$, площадь сферы $S_{\text{сферы}} = 4\pi \cdot 56$, $\boxed{S_{\text{сферы}} = 224\pi}$ — в ответ.

Пусть точка F — пересечение диагонали SD_1 с плоскостью ABC. Для построения пересечения отрезка с плоскостью рассмотрим вспомогательную плоскость $CSDD_1$, которая пересекает плоскость ABC по прямой CK, где K — точка пересечения диагоналей прямоугольника $SADB$. Тогда F — пересечение отрезков CK и SD_1, а треугольники KSF и CD_1F подобны с $k = \frac{1}{2}$, откуда $SF : FD_1 = 1 : 2$, если $SF = 2x$, то $FD_1 = 4x$, вместе $6x$, тогда

$SO = 3x$, $FO = 3x - 2x = x$, следовательно $SF : FO = 2 : 1$. Последнее соотношение также верно и для высот пирамид $SABC$ и $OABC$, опущенных на плоскость ABC, что означает, что объем пирамиды $OABC$ равен половине объема пирамиды $SABC$, который легко вычисляется в силу попарной перпендикулярности ее ребер. Имеем $V_{OABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot SC$, после подстановки числовых значений $V_{OABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12$, $\boxed{V_{OABC} = 32}$ — в ответ.

Ответ: 224π и 32.

Вариант 014

1. а) Указание: наше уравнение имеет смысл при ограничениях $\begin{cases} 6x + \pi \neq 0, \\ \sin x \neq 0, \end{cases}$ откуда $x \neq -\frac{\pi}{6}$, $x \neq \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Перенесем оба слагаемых в одну сторону и преобразуем

$$\frac{4 \cdot \cos x \cdot \sin^2 x + \sin 2x}{\pi^2} - \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x + \sin 2x}{(6x + \pi)^2} = 0,$$

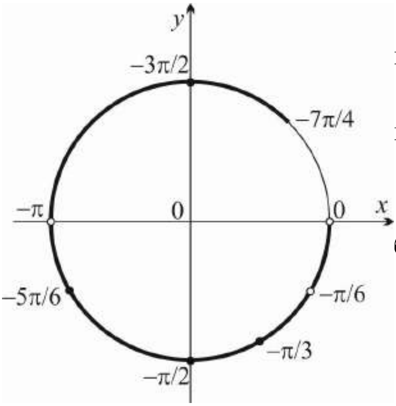
$$\frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x + \sin 2x}{\pi^2} - \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x + \sin 2x}{(6x + \pi)^2} = 0,$$

$$(2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x + \sin 2x) \cdot \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{(6x + \pi)^2} \right) = 0,$$

$\sin 2x \cdot (2 \sin x + 1) \cdot ((6x + \pi)^2 - \pi^2) = 0$, так как $\sin x \neq 0$, то

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = -\dfrac{1}{2}, \\ 6x + \pi = \pm\pi, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m, \\ \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{3}, \\ x = 0, \end{array} \right. \quad \boxed{\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \quad n \neq 0, \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m, \\ \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{3}. \end{array} \right.}$$

Последняя совокупность выписана с учетом ограничений, в ответ на пункт а) не включены $x = 0$ и $n = 0$ во второй серии.



б) Указание: корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{4};0\right]$, отберем с помощью тригонометрического круга.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \neq 0$, $n \in Z$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m \in Z$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$.

2. Указание: наше неравенство имеет смысл при ограничениях
$$\begin{cases} (x-5)^2 > 0, \\ (x-5)^2 \neq 1, \\ \dfrac{7x-21}{x-2} > 0, \\ \dfrac{x-1}{9x-27} > 0, \end{cases} \begin{cases} x \neq 5, \\ x \neq 4,\ x \neq 6, \\ \dfrac{x-3}{x-2} > 0, \\ \dfrac{x-1}{x-3} > 0, \end{cases} \begin{cases} x \neq 5, \\ x \neq 4, \\ x \neq 6, \\ x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty), \\ x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty), \end{cases} \text{откуда}$$
имеем ограничение $x \in (-\infty; 1) \cup (3; 4) \cup (4; 5) \cup (5; 6) \cup (6; +\infty)$.

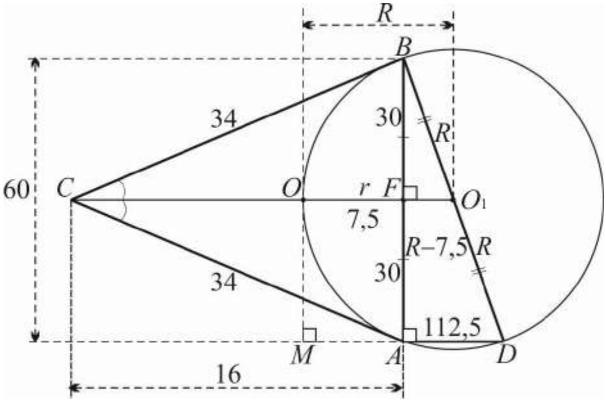
Перепишем неравенство в равносильном виде
$$\log_{(x-5)^2}\left(\frac{x-1}{9x-27}\right) \leqslant \log_{(x-5)^2}\left(\frac{x-2}{7x-21}\right).$$

Первый случай, $0 < (x-5)^2 < 1$, $x \in (4;5) \cup (5;6)$ — ограничение. Знак неравенства при потенцировании сменим, получим $\dfrac{x-1}{9\cdot(x-3)} \geqslant \dfrac{x-2}{7\cdot(x-3)}$, $\dfrac{7\cdot(x-1)-9\cdot(x-2)}{9\cdot 7\cdot(x-3)} \geqslant 0$. Преобразуя и сокращая обе части неравенства на отрицательный множитель со сменой знака неравенства, получим $\dfrac{x-\frac{11}{2}}{x-3} \leqslant 0$, откуда $x \in \left(3; \frac{11}{2}\right]$, с учетом ограничения $\boxed{x \in (4;5) \cup \left(5; \frac{11}{2}\right]}$ — в ответ.

Второй случай, $(x-5)^2 > 1$, $x \in (-\infty;1) \cup (3;4) \cup (6;+\infty)$ — ограничение. Знак неравенства при потенцировании сохраняем $\dfrac{x-1}{9(x-3)} \leqslant \dfrac{x-2}{7(x-3)}$. Действуя аналогично первому случаю, получим неравенство противоположного знака $\dfrac{x-\frac{11}{2}}{x-3} \geqslant 0$, откуда $x \in (-\infty;3) \cup \left[\frac{11}{2};+\infty\right)$, $\boxed{x \in (-\infty;1) \cup (6;+\infty)}$ — в ответ с учетом ограничения.

Ответ: $x \in (-\infty;1) \cup (4;5) \cup \left(5;\frac{11}{2}\right] \cup (6;+\infty)$.

3. Указание: центр O окружности, вписанной в данный треугольник ABC, лежит на пересечении его биссектрисс. Проведем



в равнобедренном треугольнике ABC биссектрису CF, которая является его высотой и медианой. Центр O_1 окружности, описанной около треугольника ABD, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам (в нашем случае он лежит на продолжении отрезка CF в пересечении с серединой гипотенузы BD). По теореме Пифагора $CF = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16$. Пусть $r = OF$ — радиус вписанной в треугольник ABC окружности, а $R = O_1B$ — радиус описанной около треугольника ABD окружности, равный половине гипотенузы. Пусть $S_{\triangle ABC}$ — площадь треугольника ABC, а $P_{\triangle ABC}$ — его периметр. Справедливы формулы $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CF$ и $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot P_{\triangle ABC} \cdot r$, откуда $r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABC}}$. Подставляя числовые значения, находим $r = \dfrac{60 \cdot 16}{34+34+60}$, $r = \frac{15}{2}$. В треугольнике O_1BF, по теореме Пифагора, имеем $(R-\frac{15}{2})^2+30^2=R^2$, откуда $R=\frac{255}{4}$. Найдем $FO_1=R-r$, $FO_1=\frac{255}{4}-\frac{15}{2}=\frac{225}{4}$. Заметим, FO_1 — средняя линия треугольника ABD, поэтому $AD=2FO_1=\frac{225}{2}$. Опустим перпендикуляр OM на продолжение отрезка DA, тогда $OM=FA=30$, $MA=OF=\frac{15}{2}$, $MD=MA+AD=\frac{15}{2}+\frac{225}{2}=120$. По теореме Пифагора, в треугольнике ODM, имеем $OD=\sqrt{OM^2+MD^2}$, $OD=\sqrt{30^2+120^2}$, $\boxed{OD=30\sqrt{17}}$ — в ответ.

Ответ: $30\sqrt{17}$.

4. Указание: равенство имеет смысл при $x\neq\pm6$, перепишем его в виде $\dfrac{(a-5)x^4-a(a-5)(4a-3)x^2-12(a-5)a^3}{x^2-36}=0$, после вынесения за скобки имеем $(a-5)\cdot\dfrac{x^4-a(4a-3)x^2-12a^3}{x^2-36}=0$.

При $a=5$ имеет место верное числовое равенство $0=0$ для всех допустимых x. Таким образом, более двух значений x удовлетворяют данному равенству, и $a=5$ не входит в ответ.

При $a\neq5$ избавимся от знаменателя и получим биквадратное уравнение $x^4-a(4a-3)x^2-12a^3=0$, оно должно иметь ровно два корня, отличных от ±6. Преобразуем уравнение еще раз, получим $x^4-(4a^2+(-3a))x^2+4a^2\cdot(-3a)=0$. По обратной теореме Виета находим, что $x^2=4a^2$ или $x^2=-3a$. Такой же результат можно получить, вычислив дискриминант и выделив в нем полный квадрат $D=a^2(4a-3)^2+4\cdot12a^3=a^2(4a+3)^2$. Откуда $x^2_{1,2}=\frac{a(4a-3)\pm a(4a+3)}{2}$.

Таким образом, установлено, что при любых a уравнение имеет корни $x=-2a$ и $x=2a$. Если $a=0$, уравнение имеет единственное решение $x=0$, поэтому в дальнейшем $a\neq0$.

Первый случай, $a>0$, уравнение имеет всего два корня $x=-2a$ и $x=2a$. Надо, чтобы они не были посторонними, $2a\neq6$ и $-2a\neq-6$, откуда $a\neq3$. Других ограничений нет, поэтому $\boxed{a\in(0;3)\cup(3;5)\cup(5;+\infty)}$ — в ответ.

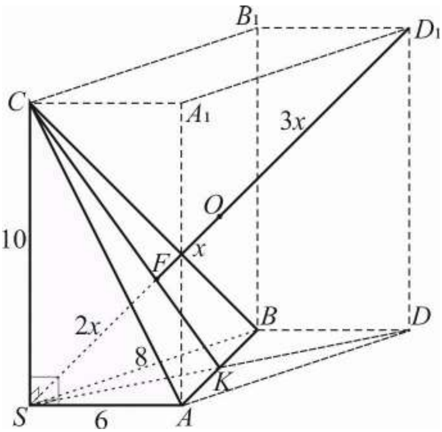
Второй случай, $a<0$, уравнение имеет уже четыре корня $x=\pm2a$ и $x=\pm\sqrt{-3a}$. Надо, чтобы корни либо попарно совпали, либо одна из пар была посторонней.

Условие совпадения корней с учетом их знаков $-2a = \sqrt{-3a}$, $4a^2 = -3a$, $\boxed{a = -\frac{3}{4}}$ — в ответ.

Первая пара корней посторонняя $2a = -6$, $\boxed{a = -3}$ — в ответ, поскольку совпадающих корней нет. Вторая пара корней посторонняя $\sqrt{-3a} = 6$, $\boxed{a = -12}$ — в ответ, аналогично совпадающих корней нет.

Ответ: $a \in \{-12; -3; -\frac{3}{4}\} \cup (0; 3) \cup (3; 5) \cup (5; +\infty)$.

5. Указание: расположим данную пирамиду, выбрав в качестве основания треугольник SAB, тогда ее высотой будет ребро SC.



Центр O сферы, описанной около пирамиды, будет лежать на пересечении плоскостей серединных перпендикуляров к ребрам SC, SA, SB. Достроим данную пирамиду до прямоугольного паралелепипеда $SADBCA_1D_1B_1$, все его вершины будут равноудалены от точки O, поскольку плоскости серединных перпендикуляров к равным и параллельным ребрам совпадают, таким образом трех перечисленных плоскостей достаточно. Тогда центр O и радиус описанной около пирамиды сферы совпадают с центром и радиусом сферы, описанной около достроенного прямоугольного паралелепипеда. Радиус сферы равен половине диагонали прямоугольного параллелепипеда, $R = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2}$, $R = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 8^2 + 10^2} = 5\sqrt{2}$, площадь сферы $S_{\text{сферы}} = 4\pi \cdot 50$, $\boxed{S_{\text{сферы}} = 200\pi}$ — в ответ.

Пусть точка F — пересечение диагонали SD_1 с плоскостью ABC. Для построения пересечения отрезка с плоскостью рассмотрим вспомогательную плоскость $CSDD_1$, которая пересекает плоскость ABC по прямой CK, где K — точка пересечения диагоналей прямоугольника $SADB$. Тогда F — пересечение отрезков CK

и SD_1, а треугольники KSF и CD_1F подобны с $k=\frac{1}{2}$, откуда $SF:FD_1=1:2$, если $SF=2x$, то $FD_1=4x$, вместе $6x$, тогда $SO=3x$, $FO=3x-2x=x$, следовательно $SF:FO=2:1$. Последнее соотношение также верно и для высот пирамид $SABC$ и $OABC$, опущенных на плоскость ABC, что означает, что объем пирамиды $OABC$ равен половине объема пирамиды $SABC$, который легко вычисляется в силу попарной перпендикулярности ее ребер. Имеем $V_{OABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot SA\cdot SB\cdot SC$, после подстановки числовых значений $V_{OABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot 10$, $\boxed{V_{OABC}=40}$ — в ответ.

Ответ: 200π и 40.

Вариант 021

Каждая задача варианта либо является частным случаем задачи с таким же номером из варианта 011, либо совпадает с ней.

1. Задача отличается от задачи из варианта 011 отсутствием дополнительного ограничения $x\neq\frac{\pi}{3}$ и дополнительной точки в решении $x=\frac{\pi}{6}$. Отбор корней аналогичен, его можно посмотреть в решении задачи 1 варианта 011.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z; -\frac{\pi}{3}+2\pi m, m\in Z; \pi k, k\in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{3}$, 0, π.

2. Совпадает с задачей из варианта 011.

3. Совпадает с задачей из варианта 011.

4. Указание: задача имеет смысл при $x\neq 4$, перепишем наше равенство в виде $\dfrac{(a-3)x^2-a(a-3)(4a-1)x-4(a-3)a^3}{x-4}=0$, после вынесения за скобки $(a-3)\cdot\dfrac{x^2-a(4a-1)x-4a^3}{x-4}=0$.

При $a=3$ имеет место верное числовое равенство $0=0$ для всех допустимых x. Таким образом, более одного положительного значения x удовлетворяют данному равенству, и $a=3$ не входит в ответ.

При $a\neq 3$ избавимся от знаменателя и получим квадратное уравнение $x^2-a(4a-1)x-4a^3=0$, оно должно иметь ровно один положительный корень, отличный от 4, либо два положительных корня, один из которых равен 4. Преобразуем уравнение еще раз, получим $x^2 - (4a^2 + (-a))x + 4a^2 \cdot (-a) = 0$. По обратной теореме Виета находим, что $x = 4a^2$ или $x = -a$. Такой же результат можно получить, вычислив дискриминант и выделив в нем полный квадрат $D = a^2(4a-1)^2 + 4 \cdot 4a^3 = a^2(4a+1)^2$. Откуда $x_{1,2} = \frac{a(4a-1) \pm a(4a+1)}{2}$.

Таким образом, установлено, что при любых a уравнение имеет корни. Если $a = 0$, уравнение имеет единственное решение $x = 0$, которое нам не подходит, поэтому в дальнейшем $a \neq 0$.

Первый случай, $a > 0$, уравнение имеет ровно один положительный корень $x = 4a^2$. Надо, чтобы он не был посторонним, $4a^2 \neq 4$, откуда $a \neq 1$, $\boxed{a \in (0;1) \cup (1;3) \cup (3;+\infty)}$ — в ответ, так как других ограничений нет.

Второй случай, $a < 0$, уравнение имеет два корня $x = 4a^2$ и $x = -a$. Надо, чтобы корни либо совпали, либо один из них был посторонним.

Условие совпадения корней $4a^2 = -a$, $\boxed{a = -\frac{1}{4}}$ — в ответ.

Первый корень посторонний $4a^2 = 4$, $\boxed{a = -1}$ — в ответ, поскольку второй корень допустимый.

Второй корень посторонний $-a = 4$, $\boxed{a = -4}$ — в ответ, аналогично, поскольку оставшийся корень допустимый.

Ответ: $a \in \{-4; -1; -\frac{1}{4}\} \cup (0;1) \cup (1;3) \cup (3;+\infty)$.

5. Частный случай задачи из варианта 011. Ответ: 116π.

Вариант 022

Каждая задача варианта либо является частным случаем задачи с таким же номером из варианта 012, либо совпадает с ней.

1. Задача отличается от задачи из варианта 012 отсутствием дополнительного ограничения $x \neq \frac{\pi}{6}$ и дополнительной точки в решении $x = \frac{\pi}{3}$. Отбор корней аналогичен, его можно посмотреть в решении задачи 1 варианта 012.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in Z$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$.

2. Совпадает с задачей из варианта 012.

3. Совпадает с задачей из варианта 012.

4. Указание: задача имеет смысл при $x \neq 36$, перепишем наше равенство в виде $\dfrac{(a-4)x^2 - a(a-4)(9a-1)x - 9(a-4)a^3}{x-36} = 0$, после вынесения за скобки $(a-4) \cdot \dfrac{x^2 - a(9a-1)x - 9a^3}{x-36} = 0$.

При $a = 4$ имеет место верное числовое равенство $0 = 0$ для всех допустимых x. Таким образом, более одного положительного значения x удовлетворяют данному равенству, и $a = 4$ не входит в ответ.

При $a \neq 4$ избавимся от знаменателя и получим квадратное уравнение $x^2 - a(9a-1)x - 9a^3 = 0$, оно должно иметь ровно один положительный корень, отличный от 36, либо два положительных корня, один из которых равен 36. Преобразуем уравнение еще раз, получим $x^2 - (9a^2 + (-a))x + 9a^2 \cdot (-a) = 0$. По обратной теореме Виета находим, что $x = 9a^2$ или $x = -a$. Такой же результат можно получить, вычислив дискриминант и выделив в нем полный квадрат $D = a^2(9a-1)^2 + 4 \cdot 9a^3 = a^2(9a+1)^2$. Откуда $x_{1,2} = \frac{a(9a-1) \pm a(9a+1)}{2}$.

Таким образом, установлено, что при любых a уравнение имеет корни. Если $a = 0$, уравнение имеет единственное решение $x = 0$, которое нам не подходит, поэтому в дальнейшем $a \neq 0$.

Первый случай, $a > 0$, уравнение имеет ровно один положительный корень $x = 9a^2$. Надо, чтобы он не был посторонним, $9a^2 \neq 36$, откуда $a \neq 2$, $\boxed{a \in (0;2) \cup (2;4) \cup (4;+\infty)}$ — в ответ, так как других ограничений нет.

Второй случай, $a < 0$, уравнение имеет два корня $x = 9a^2$ и $x = -a$. Надо, чтобы корни либо совпали, либо один из них был посторонним.

Условие совпадения корней $9a^2 = -a$, $\boxed{a = -\frac{1}{9}}$ — в ответ.

Первый корень посторонний $9a^2 = 36$, $\boxed{a = -2}$ — в ответ, поскольку второй корень допустимый.

Второй корень посторонний $-a = 36$, $\boxed{a = -36}$ — в ответ, аналогично, поскольку оставшийся корень допустимый.

Ответ: $a \in \{-36; -2; -\frac{1}{9}\} \cup (0;2) \cup (2;4) \cup (4;+\infty)$.

5. Частный случай задачи из варианта 012. Ответ: 140π.

Вариант 023

Каждая задача варианта либо является частным случаем задачи с таким же номером из варианта 013, либо совпадает с ней.

1. Задача отличается от задачи из варианта 013 отсутствием дополнительного ограничения $x \neq \frac{2\pi}{3}$ и дополнительной точки в решении $x = \frac{5\pi}{6}$. Отбор корней аналогичен, его можно посмотреть в решении задачи 1 варианта 013.

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$; πk, $k \in Z$; б) $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$, 2π.

2. Совпадает с задачей из варианта 013.

3. Совпадает с задачей из варианта 013.

4. Указание: задача имеет смысл при $x \neq 4$, перепишем наше равенство в виде $\dfrac{(a-1)x^2 - a(a-1)(16a-1)x - 16(a-1)a^3}{x-4} = 0$, после вынесения за скобки $(a-1) \cdot \dfrac{x^2 - a(16a-1)x - 16a^3}{x-4} = 0$.

При $a = 1$ имеет место верное числовое равенство $0 = 0$ для всех допустимых x. Таким образом, более одного положительного значения x удовлетворяют данному равенству, и $a = 1$ не входит в ответ.

При $a \neq 1$ избавимся от знаменателя и получим квадратное уравнение $x^2 - a(16a-1)x - 16a^3 = 0$, оно должно иметь ровно один положительный корень, отличный от 4, либо два положительных корня, один из которых равен 4. Преобразуем уравнение еще раз, получим $x^2 - (16a^2 + (-a))x + 16a^2 \cdot (-a) = 0$. По обратной теореме Виета находим, что $x = 16a^2$ или $x = -a$. Такой же результат можно получить, вычислив дискриминант и выделив в нем полный квадрат $D = a^2(16a-1)^2 + 4 \cdot 16a^3 = a^2(16a+1)^2$. Откуда $x_{1,2} = \frac{a(16a-1) \pm a(16a+1)}{2}$.

Таким образом, установлено, что при любых a уравнение имеет корни. Если $a = 0$, уравнение имеет единственное решение $x = 0$, которое нам не подходит, поэтому в дальнейшем $a \neq 0$.

Первый случай, $a > 0$, уравнение имеет ровно один положительный корень $x = 16a^2$. Надо, чтобы он не был посторонним, $16a^2 \neq 4$, откуда $a \neq \frac{1}{2}$, $\boxed{a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)}$ — в ответ, так как других ограничений нет.

Второй случай, $a < 0$, уравнение имеет два корня $x = 16a^2$ и $x = -a$. Надо, чтобы корни либо совпали, либо один из них был посторонним.

Условие совпадения корней $16a^2 = -a$, $\boxed{a = -\frac{1}{16}}$ — в ответ.

Первый корень посторонний $16a^2 = 4$, $\boxed{a = -\frac{1}{2}}$ — в ответ, поскольку второй корень допустимый.

Второй корень посторонний $-a = 4$, $\boxed{a = -4}$ — в ответ, аналогично, поскольку оставшийся корень допустимый.

Ответ: $a \in \{-4; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{16}\} \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

5. Частный случай задачи из варианта 013. Ответ: 224π.

Вариант 024

Каждая задача варианта либо является частным случаем задачи с таким же номером из варианта 014, либо совпадает с ней.

1. Задача отличается от задачи из варианта 014 отсутствием дополнительного ограничения $x \neq -\frac{\pi}{6}$ и дополнительной точки в решении $x = -\frac{\pi}{3}$. Отбор корней аналогичен, его можно посмотреть в решении задачи 1 варианта 014.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in Z$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6}$.

2. Совпадает с задачей из варианта 014.

3. Совпадает с задачей из варианта 014.

4. Указание: задача имеет смысл при $x \neq 36$, перепишем наше равенство в виде $\dfrac{(a-5)x^2 - a(a-5)(4a-3)x - 12(a-5)a^3}{x-36} = 0$, после вынесения за скобки $(a-5) \cdot \dfrac{x^2 - a(4a-3)x - 12a^3}{x-36} = 0$.

При $a = 5$ имеет место верное числовое равенство $0 = 0$ для всех допустимых x. Таким образом, более одного положительного значения x удовлетворяют данному равенству, и $a = 5$ не входит в ответ.

При $a \neq 5$ избавимся от знаменателя и получим квадратное уравнение $x^2 - a(4a-3)x - 12a^3 = 0$, оно должно иметь ровно один положительный корень, отличный от 36, либо два положительных корня, один из которых равен 36. Преобразуем уравнение еще раз, получим $x^2 - (4a^2 + (-3a))x + 4a^2 \cdot (-3a) = 0$. По обратной теореме Виета находим, что $x = 4a^2$ или $x = -3a$. Такой же результат можно получить, вычислив дискриминант и выделив в нем полный квадрат $D = a^2(4a-3)^2+4\cdot 12a^3 = a^2(4a+3)^2$. Откуда $x_{1,2} = \frac{a(4a-3)\pm a(4a+3)}{2}$.

Таким образом, установлено, что при любых a уравнение имеет корни. Если $a = 0$, уравнение имеет единственное решение $x = 0$, которое нам не подходит, поэтому в дальнейшем $a \neq 0$.

Первый случай, $a > 0$, уравнение имеет ровно один положительный корень $x = 4a^2$. Надо, чтобы он не был посторонним, $4a^2 \neq 36$, откуда $a \neq 3$, $\boxed{a \in (0; 3) \cup (3; 5) \cup (5; +\infty)}$ — в ответ, так как других ограничений нет.

Второй случай, $a < 0$, уравнение имеет два корня $x = 4a^2$ и $x = -3a$. Надо, чтобы корни либо совпали, либо один из них был посторонним.

Условие совпадения корней $4a^2 = -3a$, $\boxed{a = -\frac{3}{4}}$ — в ответ.

Первый корень посторонний $4a^2 = 36$, $\boxed{a = -3}$ — в ответ, поскольку второй корень допустимый.

Второй корень посторонний $-3a = 36$, $\boxed{a = -12}$ — в ответ, аналогично, поскольку оставшийся корень допустимый.

Ответ: $a \in \{-12; -3; -\frac{3}{4}\} \cup (0; 3) \cup (3; 5) \cup (5; +\infty)$.

5. Частный случай задачи из варианта 014. Ответ: 200π.

Критерии оценок, 11 класс

Полное и обоснованное решение каждой задачи с правильным ответом оценивалось по 7 баллов. Частично верные решения оценивались в соответствии с таблицей, 0 баллов выставлялось, если решение не удовлетворяло ни одному из критериев. Границы итоговых оценок: «2» — менее 4, «3» — с 4 по 16, «4» — с 17 по 24, «5» — с 25 баллов.

Физико-математические классы

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 1	7
Потеряна одна отдельная точка в ответе на пункт а).	6
Получены только верные серии решений пункта а), запретная отдельная точка выколота при неверном отборе в пункте б), ответ выписан.	5
Получены только верные серии решений пункта а) с включенной отдельной запрещенной точкой при неверном отборе в пункте б), ответ выписан.	4
Не исключена бесконечная серия посторонних корней в пункте а), или неверно решено простейшее, или найдены и верно решены неверные простейшие тригонометрические уравнения, ответ выписан.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 2	7
В ответе потеряна одна допустимая граничная точка.	6
Арифметическая ошибка, приведшая к неверному неравенству, либо задача решена верно только на половине области определения справа, или слева, относительно нуля основания логарифма.	4
Неверные преобразования логарифмов, или выставлен неверный знак неравенства при потенцировании, при остальных верных действиях до ответа, или в ответе присутствует хотя бы одна запрещенная точка.	2
Во всех остальных случаях.	0

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 3	7
Задача доведена до ответа с одной арифметической ошибкой на стадии вычисления последнего искомого отрезка.	6
При верном ходе решения найдены радиусы обеих окружностей, допущено более одной арифметической ошибки при дальнейших вычислениях, или решение с этой стадии не доведено до ответа.	4
Имеется верное геометрическое рассуждение (найден один из радиусов, выписана формула для второго радиуса), которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 4	7
В ответе потеряна ровно одна из отдельных точек, отвечающая за совпадение корней.	6
В ответе потеряны одна, или две из отдельных точек, отвечающих за посторонние корни.	5
Не исключено a, приводящее к тождеству $0 = 0$.	4
Найдены верно только 2, или 3 отдельные точки, либо верно найдены все $a > 0$.	2
Найдена верно только одна отдельная точка.	1
Во всех остальных случаях.	0
Задача 5	7
Одна арифметическая ошибка, ход решения верный.	6
Более одной арифметической ошибки при верном ходе решения до ответов, либо верно найден только объем.	4
Найдена только площадь сферы.	3
Найден только радиус сферы, ответ не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0

Химико-биологические классы

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 1	7
Получены только верные серии решений пункта а) при неверном отборе в пункте б), ответ выписан.	4
Не исключены серия посторонних корней в пункте а), или неверно решено простейшее, ответ выписан.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 2	7
В ответе потеряна одна допустимая граничная точка.	6
Арифметическая ошибка, либо задача решена верно только на половине области определения справа, или слева относительно нуля основания логарифма.	4
Неравносильные переходы или в ответе присутствует хотя бы одна запрещенная точка.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 3	7
Ответ получен с одной арифметической ошибкой при вычислении последнего искомого отрезка.	6
Верно найдены радиусы обеих окружностей, допущено более одной арифметической ошибки, или решение с этой стадии не доведено до ответа.	4
Найден один из радиусов и выписана формула для второго радиуса, ответ не получен.	2
Задача 4	7
В ответе потеряна ровно одна из отдельных точек, отвечающая за совпадение корней.	6
В ответе потеряны одна или две из отдельных точек, отвечающих за посторонние корни.	5
Не исключено a, приводящее к тождеству $0 = 0$.	4
Найдены верно только две, или три отдельные точки, либо верно найдены все $a > 0$.	2
Найдена верно только одна отдельная точка.	1
Во всех остальных случаях.	0

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 5	7
Одна арифметическая ошибка, ход решения верный.	6
Более одной арифметической ошибки при верном ходе решения до ответа.	4
Найден только радиус сферы, ответ не получен.	3
Во всех остальных случаях.	0

2020 год, 9 класс

Вариант 0911

1. Указание: пусть весь объем работы равен 1, первая бригада строит дом за x дней, а вторая — за y дней, искомое — x.

Условия задачи дадут $\begin{cases} x-8=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}, \\ y-2=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}, \end{cases}$ $\begin{cases} x-8=\dfrac{xy}{x+y}, \\ y-2=\dfrac{xy}{x+y}, \end{cases}$ откуда $x-8=y-2$, $y=x-6$, кроме того $x-8>0$. Преобразуем первое уравнение к виду $(x-8)(x+y)=xy$. Подставляя в него выражение для y, получим $(x-8)(2x-6)=x(x-6)$, преобразуя, имеем квадратное уравнение $x^2-16x+8\cdot 6=0$, $\frac{D}{4}=8^2-8\cdot 6=8\cdot(8-6)=4^2$, $x_1=8-4=4$ — посторонний с учетом условия $x-8>0$, $x_2=8+4=12$, этот корень удовлетворяет ограничению $x-8>0$, поэтому $\boxed{x_2=12}$ — в ответ.

Ответ: 12.

2. Указание: по свойству арифметической прогрессии имеем

$$\sin\alpha+\cos\alpha=2\cdot 4\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha.$$

По определению $\operatorname{ctg}2\alpha$, при $\sin 2\alpha\neq 0$, имеем

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\cdot 4\cdot\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

По формулам двойного угла при $\sin\alpha\neq 0$ и $\cos\alpha\neq 0$ получим

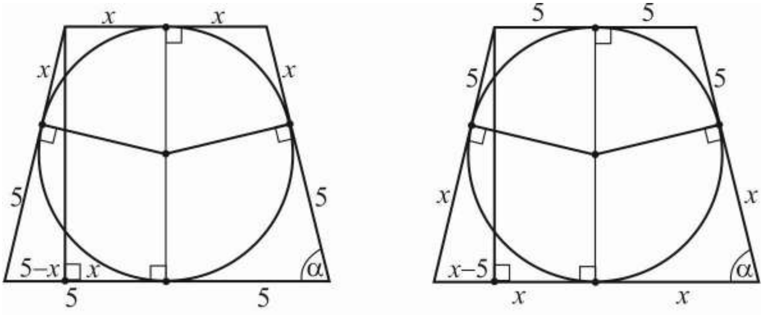
$$\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{2\cdot 4\cdot\sin\alpha\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Пусть $\cos\alpha + \sin\alpha = 0$, тогда $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = -1}$ — в ответ.

При $\cos\alpha + \sin\alpha \neq 0$, сокращая на это выражение обе части равенства, получим $1 = \dfrac{4\cdot(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha}$, умножая на знаменатель, находим $\cos\alpha = 4\cdot\cos\alpha - 4\cdot\sin\alpha$, $4\cdot\sin\alpha = 3\cdot\cos\alpha$, $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}}$ — в ответ.

Ответ: $-1; \frac{3}{4}$.

3. Указание: в условии не сказано, какое из оснований трапеции дано, синусы всех углов в равнобедренной трапеции одинаковы, отсюда возможны 2 случая, когда дано большее или меньшее из оснований. Из центра вписанной окружности проведем радиусы в точки касания, они будут перпендикулярны сторонам трапеции, диаметр окружности, перпендикулярный основаниям, является высотой трапеции. Выполним дополнительное построение, опустив высоту из вершины меньшего основания трапеции, она будет равна диаметру окружности.



первый случай второй случай

Первый случай. Задано большее основание, точкой касания оно разбивается на два равных отрезка длиной 5, обозначим длину меньшего основания $2x$, как на рисунке. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Тогда боковая сторона будет равна $x + 5$, она же гипотенуза прямоугольного треугольника, полученного дополнительным построением. Один из катетов этого треугольника равен высоте трапеции, его длина равна $(x+5)\cdot\sin\alpha = (x+5)\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$, второй катет с учетом равенства отрезков касательных равен $5 - x$, откуда $0 < x < 5$.

По теореме Пифагора $(x+5)^2 = (5-x)^2 + (x+5)^2\cdot\frac{5}{9}$, откуда $4\cdot(x+5)^2 = 9\cdot(5-x)^2$.

Второй случай. Задано меньшее основание, точкой касания оно разбивается на два равных отрезка длиной 5, обозначим длину большего основания $2x$, как на рисунке. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Тогда боковая сторона будет равна $x+5$, она же гипотенуза прямоугольного треугольника, полученного дополнительным построением. Один из катетов этого треугольника равен высоте трапеции, его длина равна $(x+5)\cdot\sin\alpha = (x+5)\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$, второй катет с учетом равенства отрезков касательных равен $x-5$, откуда $x>5$.

По теореме Пифагора $(x+5)^2 = (x-5)^2 + (x+5)^2\cdot\frac{5}{9}$, откуда $4\cdot(x+5)^2 = 9\cdot(x-5)^2$.

В конечном итоге по каждому из случаев мы пришли к одинаковым уравнениям с ограничениями, которые легко решаются, например, сводятся к линейным $2\cdot(x+5) = \pm 3\cdot(x-5)$ или квадратному уравнению $x^2-26x+25=0$, корни которых $x_1=1$ и $x_2=25$ подходят для первого и второго случаев соответственно.

Пусть $x=1$, тогда боковая сторона равна $5+1=6$, высота равна $6\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$, искомая площадь для первого случая составит $S=\frac{1}{2}\cdot(2\cdot 1+10)\cdot 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$, $\boxed{S=12\sqrt{5}}$ — в ответ.

Пусть $x=25$, тогда боковая сторона равна $5+25=30$, высота равна $30\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = 10\sqrt{5}$, искомая площадь для второго случая составит $S=\frac{1}{2}\cdot(2\cdot 25+10)\cdot 10\sqrt{5} = 300\sqrt{5}$, $\boxed{S=300\sqrt{5}}$ — в ответ.

Ответ: $12\sqrt{5}$ или $300\sqrt{5}$.

4. Указание: наше неравенство имеет смысл при ограничениях

$$\begin{cases} 2x^2-5x-3\geqslant 0,\\ \sqrt{2x^2-5x-3}+x\neq 0,\end{cases}\quad \begin{cases} (x-3)\cdot(2x+1)\geqslant 0,\\ \sqrt{2x^2-5x-3}\neq -x,\end{cases}\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leqslant -\frac{1}{2},\\ x\geqslant 3,\end{array}\right.\\ x\neq \frac{5-\sqrt{37}}{2}.\end{cases}$$

Остановимся более подробно на $\sqrt{2x^2-5x-3}\neq -x$, для этого найдем корни уравнения $\sqrt{2x^2-5x-3}=-x$ и исключим их. Имеем $\begin{cases} -x\geqslant 0,\\ 2x^2-5x-3=(-x)^2,\end{cases}$ $\begin{cases} x\leqslant 0,\\ x^2-5x-3=0,\end{cases}$ $\begin{cases} x\leqslant 0,\\ x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2},\end{cases}$ в итоге $x\neq\frac{5-\sqrt{37}}{2}$. Ограничение примет вид $x\in\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)\cup$

$\cup\left(\frac{5-\sqrt{37}}{2};-\frac{1}{2}\right]\cup[3;+\infty)$. Перепишем наше неравенство в виде

$$\frac{\left(\sqrt{2x^2-5x-3}-x\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2-5x-3}+x\right)}{\sqrt{2x^2-5x-3}+x}\geqslant x-6.$$

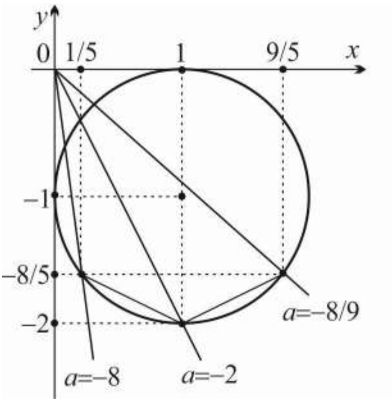
После сокращения получим равносильное исходному при найденных ограничениях неравенство $\sqrt{2x^2-5x-3}-x\geqslant x-6$, равносильное в свою очередь $\sqrt{2x^2-5x-3}\geqslant 2x-6$, которое решается по стандартной схеме.

Первый случай, $2x-6<0$, $x<3$, подходящее ограничение на этот случай $x\in\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{5-\sqrt{37}}{2};-\frac{1}{2}\right]$. Неравенство верно, так как отрицательное выражение всегда меньше неотрицательного корня, поэтому найденное ограничение является частью ответа, $\boxed{x\in\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{5-\sqrt{37}}{2};-\frac{1}{2}\right]}$ — в ответ.

Второй случай, $2x-6\geqslant 0$, $x\geqslant 3$, подходящее ограничение на этот случай $x\in[3;+\infty)$. Обе части неравенства неотрицательны, при возведении их в квадрат получим равносильное неравенство $(x-3)\cdot(2x+1)\geqslant 4\cdot(x-3)^2$, $(x-3)\cdot(2x-13)\leqslant 0$, в этом случае $x-3\geqslant 0$, поэтому $2x-13\leqslant 0$, $x\leqslant\frac{13}{2}$, с учетом ограничения $\boxed{x\in\left[3;\frac{13}{2}\right]}$ — в ответ.

Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{5-\sqrt{37}}{2};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[3;\frac{13}{2}\right]$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество —



прямая $y=ax$, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом a. Второе множество — объединение окружности с центром $(1;-1)$ и радиусом 1, с ограничивающей ею части ломаной с уравнением $|x-1|=2\cdot(y+2)$, как на рисунке. Найдем координаты точек пересечения ломаной и окружности, осуществляя подстановку в уравнение окружности выражения для $|x-1|$, получим уравнение относительно y вида $1 - 4 \cdot (y+2)^2 - (y+1)^2 = 0$, которое приводится к $5y^2+18y+16=0$ с корнями $y_1 = -2$ и $y_2 = -\frac{8}{5}$. Первому корню соответствует уравнение $|x-1| = 0$, откуда $x_1 = 1$, а еще две точки пересечения получаются из уравнения $|x-1| = \frac{4}{5}$, откуда $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = \frac{9}{5}$. Нанесем найденные точки на рисунок. Так как нас интересуют прямые, проходяшие через начало координат и пересекающие наше множество ровно в двух точках, то найденные точки подходят, они являются граничными для множеств угловых коэффициентов a. Угловые коэффициенты прямых, проходящих через граничные точки, легко найти из соответствующих прямоугольных треугольников. Найдем их для каждой такой точки. Если прямая проходит через точку $(1; -2)$, то $a = -2$, прямой проходящей через точку $\left(\frac{1}{5}; -\frac{8}{5}\right)$, соответствует $a = -8$, а прямой проходящей через точку $\left(\frac{9}{5}; -\frac{8}{5}\right)$, соответствует $a = -\frac{8}{9}$. Подходящие области изменения a найдем с помощью рисунка.

Ответ: $a \in (-\infty; -8] \cup \{-2\} \cup \left[-\frac{8}{9}; 0\right)$.

Вариант 0912

1. Указание: пусть весь объем работы равен 1, первая бригада строит дом за x дней, а вторая — за y дней, искомое — x.

Условия задачи дадут $\begin{cases} x - 16 = \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}, \\ y - 4 = \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}, \end{cases}$ $\begin{cases} x - 16 = \dfrac{xy}{x+y}, \\ y - 4 = \dfrac{xy}{x+y}, \end{cases}$

откуда $x - 16 = y - 4$, $y = x - 12$, кроме того $x - 16 > 0$. Преобразуем первое уравнение к виду $(x-16)(x+y) = xy$. Подставляя в него выражение для y, получим $(x-16)(2x-12) = x(x-12)$, преобразуя, имеем квадратное уравнение $x^2 - 32x + 16 \cdot 12 = 0$, $\frac{D}{4} = 16^2 - 16 \cdot 12 = 16 \cdot (16-12) = 8^2$, $x_1 = 16 - 8 = 8$ — посторонний с учетом условия $x - 16 > 0$, $x_2 = 16 + 8 = 24$, этот корень удовлетворяет ограничению $x - 16 > 0$, поэтому $\boxed{x_2 = 24}$ — в ответ.

Ответ: 24.

2. Указание: по свойству арифметической прогрессии имеем

$$17\cos\alpha - 17\sin\alpha = 2 \cdot 5 \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

По определению $\operatorname{ctg} 2\alpha$, при $\sin 2\alpha \neq 0$, имеем

$$17 \cdot (\cos\alpha - \sin\alpha) = \frac{2 \cdot 5 \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

По формулам двойного угла при $\sin\alpha \neq 0$ и $\cos\alpha \neq 0$ получим

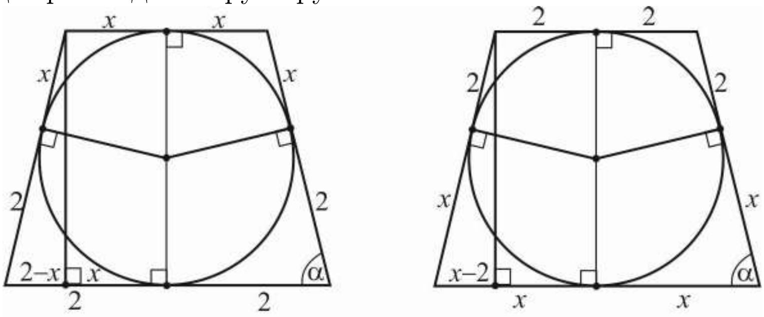
$$17 \cdot (\cos\alpha - \sin\alpha) = \frac{2 \cdot 5 \cdot \cos\alpha \cdot (\cos\alpha - \sin\alpha) \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha)}{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}.$$

Пусть $\cos\alpha - \sin\alpha = 0$, тогда $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = 1}$ — в ответ.

При $\cos\alpha - \sin\alpha \neq 0$, сокращая на это выражение обе части равенства, получим $17 = \dfrac{5 \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha)}{\sin\alpha}$, умножая на знаменатель, находим $17 \cdot \sin\alpha = 5 \cdot \cos\alpha + 5 \cdot \sin\alpha$, $12 \cdot \sin\alpha = 5 \cdot \cos\alpha$, $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}}$ — в ответ.

Ответ: $\frac{5}{12}$; 1.

3. Указание: в условии не сказано, какое из оснований трапеции дано, синусы всех углов в равнобедренной трапеции одинаковы, отсюда возможны 2 случая, когда дано большее или меньшее из оснований. Из центра вписанной окружности проведем радиусы в точки касания, они будут перпендикулярны сторонам трапеции, диаметр окружности, перпендикулярный основаниям, является высотой трапеции. Выполним дополнительное построение, опустив высоту из вершины меньшего основания трапеции, она будет равна диаметру окружности.



первый случай второй случай

Первый случай. Задано большее основание, точкой касания оно разбивается на два равных отрезка длиной 2, обозначим длину меньшего основания $2x$, как на рисунке. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Тогда боковая сторона будет равна $x + 2$, она же гипотенуза прямоугольного треугольника, полученного дополнительным построением. Один из катетов этого треугольника равен высоте трапеции, его длина равна $(x+2)\cdot\sin\alpha = (x+2)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$, второй катет с учетом равенства отрезков касательных равен $2 - x$, откуда $0 < x < 2$.

По теореме Пифагора $(x + 2)^2 = (2 - x)^2 + (x + 2)^2 \cdot \frac{8}{9}$, откуда $(x + 2)^2 = 9 \cdot (2 - x)^2$.

Второй случай. Задано меньшее основание, точкой касания оно разбивается на два равных отрезка длиной 2, обозначим длину большего основания $2x$, как на рисунке. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Тогда боковая сторона будет равна $x + 2$, она же гипотенуза прямоугольного треугольника, полученного дополнительным построением. Один из катетов этого треугольника равен высоте трапеции, его длина равна $(x+2)\cdot\sin\alpha = (x+2)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$, второй катет с учетом равенства отрезков касательных равен $x - 2$, откуда $x > 2$.

По теореме Пифагора $(x + 2)^2 = (x - 2)^2 + (x + 2)^2 \cdot \frac{8}{9}$, откуда $(x + 2)^2 = 9 \cdot (x - 2)^2$.

В конечном итоге по каждому из случаев мы пришли к одинаковым уравнениям с ограничениями, которые легко решаются, например, сводятся к линейным $(x+2) = \pm 3\cdot(x-2)$ или квадратному уравнению $x^2 - 5x + 4 = 0$, корни которых $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$ подходят для первого и второго случаев соответственно.

Пусть $x = 1$, тогда боковая сторона равна $2 + 1 = 3$, высота равна $3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$, искомая площадь для первого случая составит $S = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 1 + 4) \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, $\boxed{S = 6\sqrt{2}}$ — в ответ.

Пусть $x = 4$, тогда боковая сторона равна $2 + 4 = 6$, высота равна $6\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$, искомая площадь для второго случая составит $S = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 4 + 4) \cdot 4\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$, $\boxed{S = 24\sqrt{2}}$ — в ответ.

Ответ: $6\sqrt{2}$ или $24\sqrt{2}$.

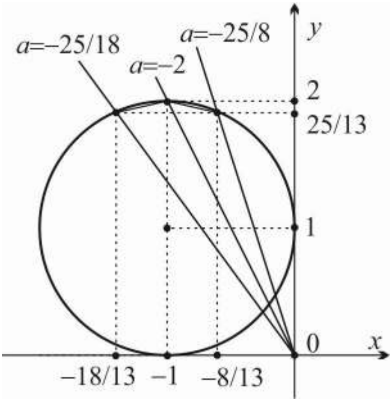
4. Указание: наше неравенство имеет смысл при ограничениях
$$\begin{cases} 2x^2-3x-2\geqslant 0,\\ \sqrt{2x^2-3x-2}+x\neq 0,\end{cases}\quad \begin{cases}(x-2)\cdot(2x+1)\geqslant 0,\\ \sqrt{2x^2-3x-2}\neq -x,\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x\leqslant -\frac{1}{2},\\ x\geqslant 2,\end{array}\right.\\ x\neq \frac{3-\sqrt{17}}{2}.\end{cases}$$
Остановимся более подробно на $\sqrt{2x^2-3x-2}\neq -x$, для этого найдем корни уравнения $\sqrt{2x^2-3x-2}=-x$ и исключим их. Имеем $\begin{cases} -x\geqslant 0,\\ 2x^2-3x-2=(-x)^2,\end{cases}$ $\begin{cases} x\leqslant 0,\\ x^2-3x-2=0,\end{cases}$ $\begin{cases} x\leqslant 0,\\ x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2},\end{cases}$ в итоге $x\neq\frac{3-\sqrt{17}}{2}$. Ограничение примет вид $x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};-\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$. Перепишем наше неравенство в виде
$$\frac{\left(\sqrt{2x^2-3x-2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2-3x-2}+x\right)}{\sqrt{2x^2-3x-2}+x}\geqslant x-4.$$
После сокращения получим равносильное исходному при найденных ограничениях неравенство $\sqrt{2x^2-3x-2}-x\geqslant x-4$, равносильное в свою очередь $\sqrt{2x^2-3x-2}\geqslant 2x-4$, которое решается по стандартной схеме.

Первый случай, $2x-4<0$, $x<2$, подходящее ограничение на этот случай $x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};-\frac{1}{2}\right]$. Неравенство верно, так как отрицательное выражение всегда меньше неотрицательного корня, поэтому найденное ограничение является частью ответа, $\boxed{x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};-\frac{1}{2}\right]}$ — в ответ.

Второй случай, $2x-4\geqslant 0$, $x\geqslant 2$, подходящее ограничение на этот случай $x\in[2;+\infty)$. Обе части неравенства неотрицательны, при возведении их в квадрат получим равносильное неравенство $(x-2)\cdot(2x+1)\geqslant 4\cdot(x-2)^2$, $(x-2)\cdot(2x-9)\leqslant 0$, в этом случае $x-2\geqslant 0$, поэтому $2x-9\leqslant 0$, $x\leqslant\frac{9}{2}$, с учетом ограничения $\boxed{x\in\left[2;\frac{9}{2}\right]}$ — в ответ.

Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[2;\frac{9}{2}\right]$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — прямая $y = ax$, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом a. Второе множество — объединение окружности с центром $(-1; 1)$ и радиусом 1, с ограничивающей ею части ломаной с уравнением $|x + 1| = -5 \cdot (y - 2)$, как на рисунке. Найдем координаты точек пересечения ломаной и окружности, осуществляя подстановку в уравнение окружности выражения для $|x+1|$, получим уравнение относительно y вида $1-25\cdot(y-2)^2-(y-1)^2 = 0$, которое приводится к $13y^2 - 51y + 50 = 0$ с корнями $y_1 = 2$ и $y_2 = \frac{25}{13}$. Первому корню соответствует уравнение $|x + 1| = 0$, откуда $x_1 = -1$, а еще две точки пересечения получаются из уравнения $|x+1| = \frac{5}{13}$, откуда $x_2 = -\frac{18}{13}$, $x_3 = -\frac{8}{13}$. Нанесем найденные точки на рисунок. Так как нас интересуют прямые, проходяшие через начало координат и пересекающие наше множество ровно в двух точках, то найденные точки подходят, они являются граничными для множеств угловых коэффициентов a. Угловые коэффициенты прямых, проходящих через граничные точки, легко найти из соответствующих прямоугольных треугольников. Найдем их для каждой такой точки. Если прямая проходит через точку $(-1; 2)$, то $a = -2$, прямой проходящей через точку $(-\frac{18}{13}; \frac{25}{13})$, соответствует $a = -\frac{25}{18}$, а прямой проходящей через точку $(-\frac{8}{13}; \frac{25}{13})$, соответствует $a = -\frac{25}{8}$. Подходящие области изменения a найдем с помощью рисунка.



Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{25}{8}\right] \cup \{-2\} \cup \left[-\frac{25}{18}; 0\right)$.

Вариант 0913

1. Указание: пусть весь объем работы равен 1, первая бригада строит дом за x дней, а вторая — за y дней, искомое — x.

Условия задачи дадут $\begin{cases} x-32=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}, \\ y-2=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}, \end{cases}$ $\begin{cases} x-32=\dfrac{xy}{x+y}, \\ y-2=\dfrac{xy}{x+y}, \end{cases}$ откуда $x-32=y-2$, $y=x-30$, кроме того $x-32>0$. Преобразуем первое уравнение к виду $(x-32)(x+y)=xy$. Подставляя в него выражение для y, получим $(x-32)(2x-30)=x(x-30)$, преобразуя, имеем квадратное уравнение $x^2-64x+32\cdot 30=0$, $\frac{D}{4}=32^2-32\cdot 30=32\cdot(32-30)=8^2$, $x_1=32-8=24$ — посторонний с учетом условия $x-32>0$, $x_2=32+8=40$, этот корень удовлетворяет ограничению $x-32>0$, поэтому $\boxed{x_2=40}$ — в ответ.

Ответ: 40.

2. Указание: по свойству арифметической прогрессии имеем

$$-7\sin\alpha+7\cos\alpha=2\cdot 4\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha.$$

По определению $\operatorname{ctg}2\alpha$, при $\sin 2\alpha\neq 0$, имеем

$$7\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{2\cdot 4\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

По формулам двойного угла при $\sin\alpha\neq 0$ и $\cos\alpha\neq 0$ получим

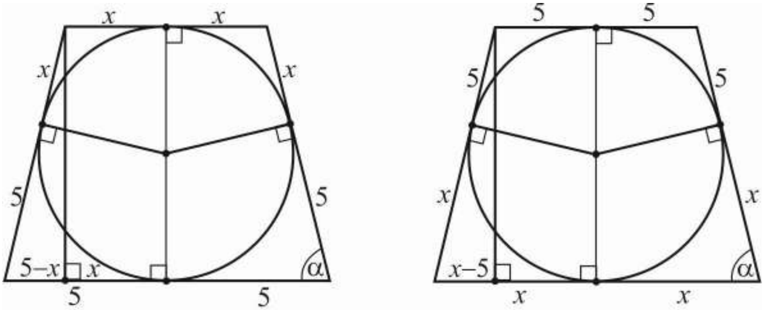
$$7\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{2\cdot 4\cdot\cos\alpha\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Пусть $\cos\alpha-\sin\alpha=0$, тогда $\boxed{\operatorname{tg}\alpha=1}$ — в ответ.

При $\cos\alpha-\sin\alpha\neq 0$, сокращая на это выражение обе части равенства, получим $7=\dfrac{4\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$, умножая на знаменатель, находим $7\cdot\sin\alpha=4\cdot\cos\alpha+4\cdot\sin\alpha$, $3\cdot\sin\alpha=4\cdot\cos\alpha$, $\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}}$ — в ответ.

Ответ: $1;\ \frac{4}{3}$.

3. Указание: в условии не сказано, какое из оснований трапеции дано, синусы всех углов в равнобедренной трапеции одинаковы, отсюда возможны 2 случая, когда дано большее или меньшее из оснований. Из центра вписанной окружности проведем радиусы в точки касания, они будут перпендикулярны сторонам трапеции, диаметр окружности, перпендикулярный основаниям, является высотой трапеции. Выполним дополнительное построение, опустив высоту из вершины меньшего основания трапеции, она будет равна диаметру окружности.



первый случай второй случай

Первый случай. Задано большее основание, точкой касания оно разбивается на два равных отрезка длиной 5, обозначим длину меньшего основания $2x$, как на рисунке. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Тогда боковая сторона будет равна $x+5$, она же гипотенуза прямоугольного треугольника, полученного дополнительным построением. Один из катетов этого треугольника равен высоте трапеции, его длина равна $(x+5)\cdot\sin\alpha = (x+5)\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$, второй катет с учетом равенства отрезков касательных равен $5-x$, откуда $0<x<5$.

По теореме Пифагора $(x+5)^2 = (5-x)^2 + (x+5)^2\cdot\frac{15}{16}$, откуда $(x+5)^2 = 16\cdot(5-x)^2$.

Второй случай. Задано меньшее основание, точкой касания оно разбивается на два равных отрезка длиной 5, обозначим длину большего основания $2x$, как на рисунке. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Тогда боковая сторона будет равна $x+5$, она же гипотенуза прямоугольного треугольника, полученного дополнительным построением. Один из катетов этого треугольника равен высоте трапеции, его длина равна $(x+5)\cdot\sin\alpha = (x+5)\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$, второй катет с учетом равенства отрезков касательных равен $x-5$, откуда $x>5$.

По теореме Пифагора $(x+5)^2 = (x-5)^2 + (x+5)^2\cdot\frac{15}{16}$, откуда $(x+5)^2 = 16\cdot(x-5)^2$.

В конечном итоге по каждому из случаев мы пришли к одинаковым уравнениям с ограничениями, которые легко решаются, например, сводятся к линейным $(x+5) = \pm4\cdot(x-5)$ или квадратному уравнению $x^2 - \frac{34}{3}x + 25 = 0$, корни которых $x_1 = 3$ и $x_2 = \frac{25}{3}$ подходят для первого и второго случаев соответственно.

Пусть $x = 3$, тогда боковая сторона равна $5+3 = 8$, высота равна $8 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 2\sqrt{15}$, искомая площадь для первого случая составит $S = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 3 + 10) \cdot 2\sqrt{15} = 16\sqrt{15}$, $\boxed{S = 16\sqrt{15}}$ — в ответ.

Пусть $x = \frac{25}{3}$, тогда боковая сторона равна $5 + \frac{25}{3} = \frac{34}{3}$, высота равна $\frac{34}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{10\sqrt{15}}{3}$, искомая площадь для второго случая составит $S = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \frac{25}{3} + 10) \cdot \frac{10\sqrt{15}}{3} = \frac{400\sqrt{15}}{9}$, $\boxed{S = \dfrac{400\sqrt{15}}{9}}$ — в ответ.

Ответ: $16\sqrt{15}$ или $\frac{400\sqrt{15}}{9}$.

4. Указание: наше неравенство имеет смысл при ограничениях

$$\begin{cases} 2x^2 - 9x - 5 \geqslant 0, \\ \sqrt{2x^2 - 9x - 5} + x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (x-5) \cdot (2x+1) \geqslant 0, \\ \sqrt{2x^2 - 9x - 5} \neq -x, \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} & x \leqslant -\tfrac{1}{2}, \\ & x \geqslant 5, \end{aligned} \right. \\ x \neq \frac{9-\sqrt{101}}{2}. \end{cases}$$

Остановимся более подробно на $\sqrt{2x^2 - 9x - 5} \neq -x$, для этого найдем корни уравнения $\sqrt{2x^2 - 9x - 5} = -x$ и исключим их. Имеем $\begin{cases} -x \geqslant 0, \\ 2x^2 - 9x - 5 = (-x)^2, \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x^2 - 9x - 5 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x = \frac{9 \pm \sqrt{101}}{2}, \end{cases}$ в итоге $x \neq \frac{9-\sqrt{101}}{2}$. Ограничение примет вид $x \in \left(-\infty; \frac{9-\sqrt{101}}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{9-\sqrt{101}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup [5; +\infty)$. Перепишем наше неравенство в виде

$$\frac{\left(\sqrt{2x^2 - 9x - 5} - x\right) \cdot \left(\sqrt{2x^2 - 9x - 5} + x\right)}{\sqrt{2x^2 - 9x - 5} + x} \geqslant x - 10.$$

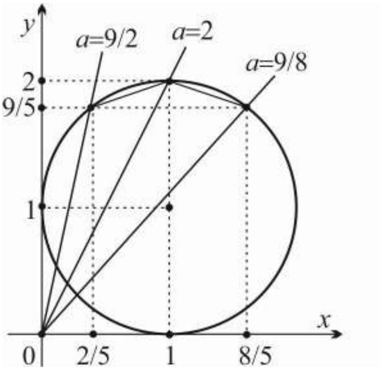
После сокращения получим равносильное исходному при найденных ограничениях неравенство $\sqrt{2x^2 - 9x - 5} - x \geqslant x - 10$, равносильное в свою очередь $\sqrt{2x^2 - 9x - 5} \geqslant 2x - 10$, которое решается по стандартной схеме.

Первый случай, $2x - 10 < 0$, $x < 5$, подходящее ограничение на этот случай $x \in \left(-\infty; \frac{9-\sqrt{101}}{2}\right) \cup \left(\frac{9-\sqrt{101}}{2}; -\frac{1}{2}\right]$. Неравенство верно, так как отрицательное выражение всегда меньше неотрицательного корня, поэтому найденное ограничение является частью ответа, $\boxed{x \in \left(-\infty; \frac{9-\sqrt{101}}{2}\right) \cup \left(\frac{9-\sqrt{101}}{2}; -\frac{1}{2}\right]}$ — в ответ.

Второй случай, $2x - 10 \geqslant 0$, $x \geqslant 5$, подходящее ограничение на этот случай $x \in [5; +\infty)$. Обе части неравенства неотрицательны, при возведении их в квадрат получим равносильное неравенство $(x-5)\cdot(2x+1) \geqslant 4\cdot(x-5)^2$, $(x-5)\cdot(2x-21) \leqslant 0$, в этом случае $x - 5 \geqslant 0$, поэтому $2x - 21 \leqslant 0$, $x \leqslant \frac{21}{2}$, с учетом ограничения $\boxed{x \in \left[5; \frac{21}{2}\right]}$ — в ответ.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{9-\sqrt{101}}{2}\right) \cup \left(\frac{9-\sqrt{101}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[5; \frac{21}{2}\right]$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — прямая $y = ax$, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом a. Второе множество — объединение окружности с центром $(1; 1)$ и радиусом 1, с ограничивающей ею части ломаной с уравнением $|x - 1| = -3\cdot(y - 2)$, как на рисунке. Найдем координаты точек пересечения ломаной и окружности, осуществляя подстановку в уравнение окружности выражения для $|x-1|$, получим уравнение относительно y вида $1 - 9\cdot(y-2)^2 - (y-1)^2 = 0$, которое приводится к $5y^2 - 19y + 18 = 0$ с корнями $y_1 = 2$ и $y_2 = \frac{9}{5}$. Первому корню соответствует уравнение $|x - 1| = 0$, откуда $x_1 = 1$, а еще две точки пересечения получаются из уравнения $|x - 1| = \frac{3}{5}$, откуда $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{8}{5}$. Нанесем найденные точки на рисунок. Так как нас интересуют прямые, проходяшие через начало координат и пересекающие наше множество ровно в двух точках, то найденные точки подходят, они являются граничными для множеств угловых коэффициентов a. Угловые коэффициенты прямых, проходящих через граничные точки, легко найти из соответствующих прямоугольных треугольников. Найдем их для каждой такой точки. Если прямая проходит через точку $(1; 2)$, то $a = 2$, прямой



проходящей через точку $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right)$, соответствует $a = \frac{9}{2}$, а прямой проходящей через точку $\left(\frac{8}{5}; \frac{9}{5}\right)$, соответствует $a = \frac{9}{8}$. Подходящие области изменения a найдем с помощью рисунка.

Ответ: $a \in \left(0; \frac{9}{8}\right] \cup \{2\} \cup \left[\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

Вариант 0914

1. Указание: пусть весь объем работы равен 1, первая бригада строит дом за x дней, а вторая — за y дней, искомое — x.

Условия задачи дадут $\begin{cases} x - 25 = \dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}, \\ y - 4 = \dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}, \end{cases}$ $\begin{cases} x - 25 = \dfrac{xy}{x + y}, \\ y - 4 = \dfrac{xy}{x + y}, \end{cases}$ откуда $x - 25 = y - 4$, $y = x - 21$, кроме того $x - 25 > 0$. Преобразуем первое уравнение к виду $(x - 25)(x + y) = xy$. Подставляя в него выражение для y, получим $(x - 25)(2x - 21) = x(x - 21)$, преобразуя, имеем квадратное уравнение $x^2 - 50x + 25 \cdot 21 = 0$, $\frac{D}{4} = 25^2 - 25 \cdot 21 = 25 \cdot (25 - 21) = 10^2$, $x_1 = 25 - 10 = 15$ — посторонний с учетом условия $x - 25 > 0$, $x_2 = 25 + 10 = 35$, этот корень удовлетворяет ограничению $x - 25 > 0$, поэтому $\boxed{x_2 = 35}$ — в ответ.

Ответ: 35.

2. Указание: по свойству арифметической прогрессии имеем

$$-7\cos\alpha - 7\sin\alpha = 2 \cdot 5 \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

По определению $\operatorname{ctg} 2\alpha$, при $\sin 2\alpha \neq 0$, имеем

$$-7 \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha) = \frac{2 \cdot 5 \cdot \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

По формулам двойного угла при $\sin\alpha \neq 0$ и $\cos\alpha \neq 0$ получим

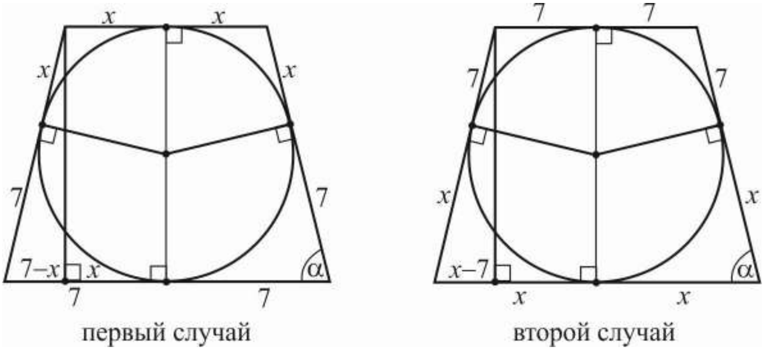
$$-7 \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha) = \frac{2 \cdot 5 \cdot \sin\alpha \cdot (\cos\alpha - \sin\alpha) \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha)}{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}.$$

Пусть $\cos\alpha + \sin\alpha = 0$, тогда $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = -1}$ — в ответ.

При $\cos\alpha + \sin\alpha \neq 0$, сокращая на это выражение обе части равенства, получим $-7 = \dfrac{5 \cdot (\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha}$, умножая на знаменатель, находим $-7 \cdot \cos\alpha = 5 \cdot \cos\alpha - 5 \cdot \sin\alpha$, $5 \cdot \sin\alpha = 12 \cdot \cos\alpha$, $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}}$ — в ответ.

Ответ: $-1; \frac{12}{5}$.

3. Указание: в условии не сказано, какое из оснований трапеции дано, синусы всех углов в равнобедренной трапеции одинаковы, отсюда возможны 2 случая, когда дано большее или меньшее из оснований. Из центра вписанной окружности проведем радиусы в точки касания, они будут перпендикулярны сторонам трапеции, диаметр окружности, перпендикулярный основаниям, является высотой трапеции. Выполним дополнительное построение, опустив высоту из вершины меньшего основания трапеции, она будет равна диаметру окружности.



Первый случай. Задано большее основание, точкой касания оно разбивается на два равных отрезка длиной 7, обозначим длину меньшего основания $2x$, как на рисунке. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Тогда боковая сторона будет равна $x + 7$, она же гипотенуза прямоугольного треугольника, полученного дополнительным построением. Один из катетов этого треугольника равен высоте трапеции, его длина равна $(x+7) \cdot \sin\alpha = (x+7) \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$, второй катет с учетом равенства отрезков касательных равен $7 - x$, откуда $0 < x < 7$.

По теореме Пифагора $(x+7)^2 = (7-x)^2 + (x+7)^2 \cdot \frac{7}{16}$, откуда $9 \cdot (x+7)^2 = 16 \cdot (7-x)^2$.

Второй случай. Задано меньшее основание, точкой касания оно разбивается на два равных отрезка длиной 7, обозначим длину большего основания $2x$, как на рисунке. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Тогда боковая сторона будет равна $x+7$, она же гипотенуза прямоугольного треугольника, полученного дополнительным построением. Один из катетов этого треугольника равен высоте трапеции, его длина равна $(x+7)\cdot\sin\alpha = (x+7)\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}$, второй катет с учетом равенства отрезков касательных равен $x-7$, откуда $x>7$.

По теореме Пифагора $(x+7)^2 = (x-7)^2 + (x+7)^2\cdot\frac{7}{16}$, откуда $9\cdot(x+7)^2 = 16\cdot(x-7)^2$.

В конечном итоге по каждому из случаев мы пришли к одинаковым уравнениям с ограничениями, которые легко решаются, например, сводятся к линейным $3\cdot(x+7) = \pm 4\cdot(x-7)$ или квадратному уравнению $x^2-50x+49=0$, корни которых $x_1 = 1$ и $x_2 = 49$ подходят для первого и второго случаев соответственно.

Пусть $x=1$, тогда боковая сторона равна $7+1=8$, высота равна $8\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = 2\sqrt{7}$, искомая площадь для первого случая составит $S = \frac{1}{2}\cdot(2\cdot 1+14)\cdot 2\sqrt{7} = 16\sqrt{7}$, $\boxed{S = 16\sqrt{7}}$ — в ответ.

Пусть $x=49$, тогда боковая сторона равна $7+49=56$, высота равна $56\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = 14\sqrt{7}$, искомая площадь для второго случая составит $S = \frac{1}{2}\cdot(2\cdot 49+14)\cdot 14\sqrt{7} = 784\sqrt{7}$, $\boxed{S = 784\sqrt{7}}$ — в ответ.

Ответ: $16\sqrt{7}$ или $784\sqrt{7}$.

4. Указание: наше неравенство имеет смысл при ограничениях

$$\begin{cases} 2x^2-7x-4 \geqslant 0, \\ \sqrt{2x^2-7x-4}+x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (x-4)\cdot(2x+1) \geqslant 0, \\ \sqrt{2x^2-7x-4} \neq -x, \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -\frac{1}{2}, \\ x \geqslant 4, \end{array}\right. \\ x \neq \frac{7-\sqrt{65}}{2}. \end{cases}$$

Остановимся более подробно на $\sqrt{2x^2-7x-4} \neq -x$, для этого найдем корни уравнения $\sqrt{2x^2-7x-4} = -x$ и исключим их. Имеем $\begin{cases} -x \geqslant 0, \\ 2x^2-7x-4 = (-x)^2, \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x^2-7x-4 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x = \frac{7\pm\sqrt{65}}{2}, \end{cases}$ в итоге $x \neq \frac{7-\sqrt{65}}{2}$. Ограничение примет вид $x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{65}}{2}\right) \cup$

$\cup \left(\frac{7-\sqrt{65}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup [4; +\infty)$. Перепишем наше неравенство в виде

$$\frac{\left(\sqrt{2x^2-7x-4}-x\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2-7x-4}+x\right)}{\sqrt{2x^2-7x-4}+x} \geqslant x-8.$$

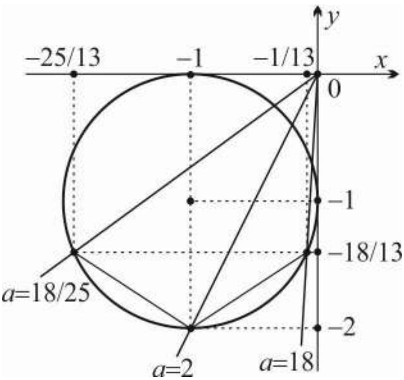
После сокращения получим равносильное исходному при найденных ограничениях неравенство $\sqrt{2x^2-7x-4}-x \geqslant x-8$, равносильное в свою очередь $\sqrt{2x^2-7x-4} \geqslant 2x-8$, которое решается по стандартной схеме.

Первый случай, $2x-8<0$, $x<4$, подходящее ограничение на этот случай $x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{65}}{2}\right) \cup \left(\frac{7-\sqrt{65}}{2}; -\frac{1}{2}\right]$. Неравенство верно, так как отрицательное выражение всегда меньше неотрицательного корня, поэтому найденное ограничение является частью ответа, $\boxed{x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{65}}{2}\right) \cup \left(\frac{7-\sqrt{65}}{2}; -\frac{1}{2}\right]}$ — в ответ.

Второй случай, $2x-8 \geqslant 0$, $x \geqslant 4$, подходящее ограничение на этот случай $x \in [4; +\infty)$. Обе части неравенства неотрицательны, при возведении их в квадрат получим равносильное неравенство $(x-4)\cdot(2x+1) \geqslant 4\cdot(x-4)^2$, $(x-4)\cdot(2x-17) \leqslant 0$, в этом случае $x-4 \geqslant 0$, поэтому $2x-17 \leqslant 0$, $x \leqslant \frac{17}{2}$, с учетом ограничения $\boxed{x \in \left[4; \frac{17}{2}\right]}$ — в ответ.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{65}}{2}\right) \cup \left(\frac{7-\sqrt{65}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[4; \frac{17}{2}\right]$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — прямая $y = ax$, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом a. Второе множество — объединение окружности с центром $(-1; -1)$ и радиусом 1, с ограничивающей ею части ломаной с уравнением $2\cdot|x+1| = 3\cdot(y+2)$, как на рисунке. Найдем координаты точек пересечения ломаной и окружности, осуществляя подстановку в уравнение окружности выражения для $2\cdot|x+1|$, получим



уравнение относительно y вида $4-9\cdot(y+2)^2-4\cdot(y+1)^2=0$, которое приводится к $13y^2+44y+36=0$ с корнями $y_1=-2$ и $y_2=-\frac{18}{13}$. Первому корню соответствует уравнение $2\cdot|x+1|=0$, откуда $x_1=-1$, а еще две точки пересечения получаются из уравнения $|x+1|=\frac{12}{13}$, откуда $x_2=-\frac{25}{13}$, $x_3=-\frac{1}{13}$. Нанесем найденные точки на рисунок. Так как нас интересуют прямые, проходяшие через начало координат и пересекающие наше множество ровно в двух точках, то найденные точки подходят, они являются граничными для множеств угловых коэффициентов a. Угловые коэффициенты прямых, проходящих через граничные точки, легко найти из соответствующих прямоугольных треугольников. Найдем их для каждой такой точки. Если прямая проходит через точку $(-1;-2)$, то $a=2$, прямой проходящей через точку $(-\frac{25}{13};-\frac{18}{13})$, соответствует $a=\frac{18}{25}$, а прямой проходящей через точку $(-\frac{1}{13};-\frac{18}{13})$, соответствует $a=18$. Подходящие области изменения a найдем с помощью рисунка.

Ответ: $a\in\left(0;\frac{18}{25}\right]\cup\{2\}\cup[18;+\infty)$.

Вариант 0921

Каждая задача варианта со второй по четвертую, либо является частным случаем задачи с таким же номером из варианта 0911, либо совпадает с ней.

1. Указание: пусть собственная скорость лодки равна v, тогда время, затраченное ею на путь по озеру, составит $\frac{6}{v}$, а время на путь по реке против течения составит $\frac{5}{v-2}$. По условию, все время в пути составляет 1 час, поэтому имеем уравнение $\frac{6}{v}+\frac{5}{v-2}=1$, которое приводится к квадратному $v^2-13v+12=0$ с корнями $v_1=1$ и $v_2=12$. Поскольку $v_1=1<2$ — скорости течения, то корень v_1 — посторонний, а $\boxed{v_2=12}$ — в ответ.

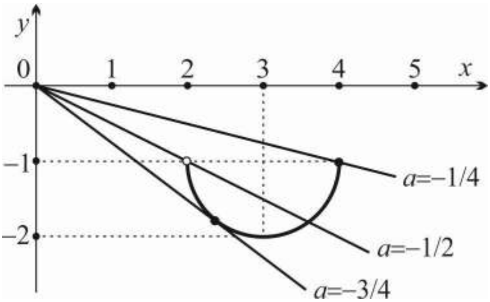
Ответ: 12.

2. Совпадает с задачей из варианта 0911.

3. Частный случай задачи из варианта 0911. Ответ: $12\sqrt{5}$.

4. Совпадает с задачей из варианта 0911.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество —



прямая $y = ax$, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом a. Второе множество — нижняя дуга окружности с центром $(3; -1)$ и радиусом 1, как на рисунке. Найдем координату точки касания прямой и окружности, осуществляя подстановку в уравнение окружности выражения $y = ax$. После переноса слагаемого и возведения в квадрат получим уравнение относительно x, вида $(ax+1)^2 = 1-(x-3)^2$, которое должно иметь единственное решение. Преобразуя, имеем $(a^2+1)\cdot x^2 + 2\cdot(a-3)\cdot x + 9 = 0$. Дискриминант полученного уравнения должен быть равен нулю, $\frac{D}{4} = (a-3)^2 - 9\cdot(a^2+1)$, откуда $a\cdot(a+\frac{3}{4}) = 0$. При $a = 0$, имеется горизонтальное касание с верхней частью окружности, которое нам не подходит, в то время, как $\boxed{a = -\frac{3}{4}}$ — в ответ, соответствует наклонному касанию. Будем поворачивать прямую против часовой стрелки, от точки последнего касания. Если прямая пройдет через левую граничную точку дуги окружности $(2; -1)$, то решений еще два, этому положению соответствует $a = -\frac{1}{2}$, равное тангенсу угла наклона прямой, и полученное делением второй координаты на первую. Найденное a в ответ еще не включается. Продолжим поворот, одно пересечение будет до тех пор, пока прямая не пройдет через точку $(4; -1)$, где $a = -\frac{1}{4}$, откуда $\boxed{a \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right]}$ — в ответ.

Ответ: $a \in \left\{-\frac{3}{4}\right\} \cup \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right]$.

Вариант 0922

Каждая задача варианта со второй по четвертую, либо является частным случаем задачи с таким же номером из варианта 0912, либо совпадает с ней.

1. Указание: пусть собственная скорость лодки равна v, тогда время, затраченное ею на путь по озеру, составит $\frac{9}{v}$, а время на путь по реке против течения составит $\frac{4}{v-5}$. По условию, все время в пути составляет 1 час, поэтому имеем уравнение $\frac{9}{v} + \frac{4}{v-5} = 1$, которое приводится к квадратному $v^2 - 18v + 45 = 0$ с корнями $v_1 = 3$ и $v_2 = 15$. Поскольку $v_1 = 3 < 5$ — скорости течения, то корень v_1 — посторонний, а $\boxed{v_2 = 15}$ — в ответ.

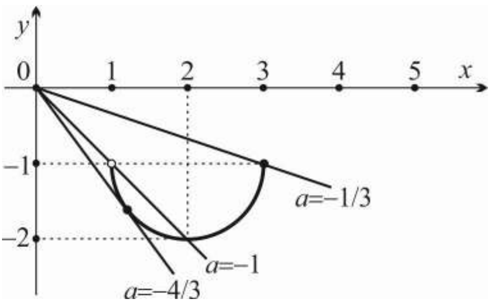
Ответ: 15.

2. Совпадает с задачей из варианта 0912.

3. Частный случай задачи из варианта 0912. Ответ: $6\sqrt{2}$.

4. Совпадает с задачей из варианта 0912.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — прямая $y = ax$, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом a. Второе множество — нижняя дуга окружности с центром $(2; -1)$ и радиусом 1, как на рисунке. Найдем координату точки касания прямой и окружности,



осуществляя подстановку в уравнение окружности выражения $y = ax$. После переноса слагаемого и возведения в квадрат получим уравнение относительно x, вида $(ax+1)^2 = 1 - (x-2)^2$, которое должно иметь единственное решение. Преобразуя, имеем $(a^2+1) \cdot x^2 + 2 \cdot (a-2) \cdot x + 4 = 0$. Дискриминант полученного уравнения должен быть равен нулю, $\frac{D}{4} = (a-2)^2 - 4 \cdot (a^2+1)$, откуда $a \cdot (a + \frac{4}{3}) = 0$. При $a = 0$, имеется горизонтальное касание с верхней частью окружности, которое нам не подходит, в то время, как $\boxed{a = -\frac{4}{3}}$ — в ответ, соответствует наклонному касанию. Будем поворачивать прямую против часовой стрелки, от точки последнего касания. Если прямая пройдет через левую граничную точку дуги окружности $(1; -1)$, то решений еще два, этому положению соответствует $a = -1$, равное тангенсу угла наклона прямой, и полученное делением второй координаты на первую. Найденное a в ответ еще не включается. Продолжим поворот, одно пересечение будет до тех пор, пока прямая не пройдет через точку $(3;-1)$, где $a=-\frac{1}{3}$, откуда $\boxed{a \in \left(-1;-\frac{1}{3}\right]}$ — в ответ.

Ответ: $a \in \left\{-\frac{4}{3}\right\} \cup \left(-1;-\frac{1}{3}\right]$.

Вариант 0923

Каждая задача варианта со второй по четвертую, либо является частным случаем задачи с таким же номером из варианта 0913, либо совпадает с ней.

1. Указание: пусть собственная скорость лодки равна v, тогда время, затраченное ею на путь по озеру, составит $\frac{7}{v}$, а время на путь по реке против течения составит $\frac{5}{v-4}$. По условию, все время в пути составляет 1 час, поэтому имеем уравнение $\frac{7}{v}+\frac{5}{v-4}=1$, которое приводится к квадратному $v^2-16v+28=0$ с корнями $v_1=2$ и $v_2=14$. Поскольку $v_1=2<4$ — скорости течения, то корень v_1 — посторонний, а $\boxed{v_2=14}$ — в ответ.

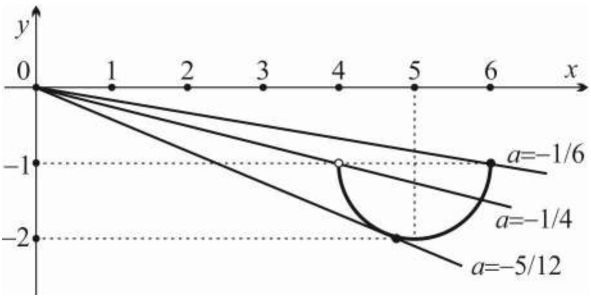
Ответ: 14.

2. Совпадает с задачей из варианта 0913.

3. Частный случай задачи из варианта 0913. Ответ: $16\sqrt{15}$.

4. Совпадает с задачей из варианта 0913.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — прямая $y=ax$, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом a. Второе множество — нижняя дуга окружности с центром $(5;-1)$ и радиусом 1, как на рисунке.



Найдем координату точки касания прямой и окружности, осуществляя подстановку в уравнение окружности выражения $y=ax$. После переноса слагаемого и возведения в квадрат получим уравнение относительно x, вида $(ax+1)^2=1-(x-5)^2$, которое должно иметь единственное решение. Преобразуя, имеем $(a^2+1)\cdot x^2+2\cdot(a-5)\cdot x+25=0$. Дискриминант полученного уравнения должен быть равен нулю, $\frac{D}{4}=(a-5)^2-25\cdot(a^2+1)$, откуда $a\cdot(a+\frac{5}{12})=0$. При $a=0$, имеется горизонтальное касание с верхней частью окружности, которое нам не подходит, в то время, как $\boxed{a=-\frac{5}{12}}$ — в ответ, соответствует наклонному касанию. Будем поворачивать прямую против часовой стрелки, от точки последнего касания. Если прямая пройдет через левую граничную точку дуги окружности $(4;-1)$, то решений еще два, этому положению соответствует $a=-\frac{1}{4}$, равное тангенсу угла наклона прямой, и полученное делением второй координаты на первую. Найденное a в ответ еще не включается. Продолжим поворот, одно пересечение будет до тех пор, пока прямая не пройдет через точку $(6;-1)$, где $a=-\frac{1}{6}$, откуда $\boxed{a\in\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right]}$ — в ответ.

Ответ: $a\in\left\{-\frac{5}{12}\right\}\cup\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right]$.

Вариант 0924

Каждая задача варианта со второй по четвертую, либо является частным случаем задачи с таким же номером из варианта 0914, либо совпадает с ней.

1. Указание: пусть собственная скорость лодки равна v, тогда время, затраченное ею на путь по озеру, составит $\frac{12}{v}$, а время на путь по реке против течения составит $\frac{3}{v-4}$. По условию, все время в пути составляет 1 час, поэтому имеем уравнение $\frac{12}{v}+\frac{3}{v-4}=1$, которое приводится к квадратному $v^2-19v+48=0$ с корнями $v_1=3$ и $v_2=16$. Поскольку $v_1=3<4$ — скорости течения, то корень v_1 — посторонний, а $\boxed{v_2=16}$ — в ответ.

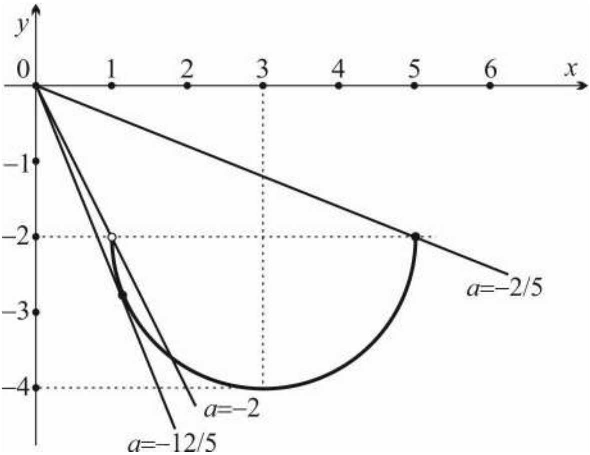
Ответ: 16.

2. Совпадает с задачей из варианта 0914.

3. Частный случай задачи из варианта 0914. Ответ: $16\sqrt{7}$.

4. Совпадает с задачей из варианта 0914.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество —



прямая $y = ax$, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом a. Второе множество — нижняя дуга окружности с центром $(3; -1)$ и радиусом 2, как на рисунке. Найдем координату точки касания прямой и окружности, осуществляя подстановку в уравнение окружности выражения $y = ax$. После переноса слагаемого и возведения в квадрат получим уравнение относительно x, вида $(ax+2)^2 = 4-(x-3)^2$, которое должно иметь единственное решение. Преобразуя, имеем $(a^2+1)\cdot x^2 + 2\cdot(2a-3)\cdot x + 4 = 0$. Дискриминант полученного уравнения должен быть равен нулю, $\frac{D}{4} = (2a-3)^2 - 4\cdot(a^2+1)$, откуда $a\cdot(a+\frac{2}{5}) = 0$. При $a = 0$, имеется горизонтальное касание с верхней частью окружности, которое нам не подходит, в то время, как $\boxed{a = -\frac{2}{5}}$ — в ответ, соответствует наклонному касанию. Будем поворачивать прямую против часовой стрелки, от точки последнего касания. Если прямая пройдет через левую граничную точку дуги окружности $(1; -2)$, то решений еще два, этому положению соответствует $a = -2$, равное тангенсу угла наклона прямой, и полученное делением второй координаты на первую. Найденное a в ответ еще не включается. Продолжим поворот, одно пересечение будет до тех пор, пока прямая не пройдет через точку $(5; -2)$, где $a = -\frac{2}{5}$, откуда $\boxed{a \in \left(-2; -\frac{2}{5}\right]}$ — в ответ.

Ответ: $a \in \left\{-\frac{12}{5}\right\} \cup \left(-2; -\frac{2}{5}\right]$.

Критерии оценок, 9 класс

Полное и обоснованное решение каждой задачи с правильным ответом оценивалось по 7 баллов. Частично верные решения оценивались в соответствии с таблицей, 0 баллов выставлялось, если решение не удовлетворяло ни одному из критериев. Границы итоговых оценок: «2» — менее 11, «3» — с 11 по 19, «4» — с 20 по 27, «5» — с 28 баллов.

Физико-математические классы

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 1	7
Описка в ответе при верном решении.	6
Арифметическая ошибка, задача доведена до ответа.	4
Более одной арифметической ошибки, при этом задача доведена до ответа, либо записана только верная система (уравнение) без ответа.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 2	7
Одна арифметическая ошибка в конце, ответ получен.	6
Более одной арифметической ошибки, при этом ответ получен с двумя решениями, или верно рассмотрен только один случай.	4
Рассмотрен только один случай с неверным ответом или имеется верное рассуждение (выписано уравнение) без ответа, которое можно довести до правильного ответа.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 3	7
Ответ получен с одной арифметической ошибкой или опиской.	6
Рассмотрен только один из двух случаев с верным ответом, либо неверно применена формула площади.	4
Рассмотрен только один верный случай с арифметической ошибкой, ответ получен.	3

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 3	
Имеется верное рассуждение без ответа (найдены равные отрезки, либо выполнены дополнительные построения, либо составлены верные уравнения) с указанием на оба случая, которое можно довести до правильного ответа.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 4	7
Потеря одной граничной точки.	6
Потеря двух граничных точек.	5
Потеря трех граничных точек, или при верном ходе решения допущены арифметические ошибки в вычислениях корней знаменателя или границ промежутков, ответ выписан.	4
Умножение обеих частей неравенства на знаменатель без учета его знака, или из ответа не исключен ноль знаменателя.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 5	7
Описка в ответе при верном решении.	6
Потеряно решение в виде отдельной точки.	5
Арифметическая ошибка при вычислении границ параметра при верном анализе случаев или в ответе содержится только один верный промежуток.	4
Имеется верное рассуждение (верно определены и изображены множества, соответствующие каждому уравнению, их взаимное расположение, намечена схема решения), которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0

Химико-биологические классы

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 1	7
Описка в ответе при верном решении.	6
Арифметическая ошибка, задача доведена до ответа.	4
Более одной арифметической ошибки, при этом задача доведена до ответа, либо записано только верное уравнение без ответа.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 2	7
Одна арифметическая ошибка в конце, ответ получен.	6
Более одной арифметической ошибки, при этом ответ получен с двумя решениями, или верно рассмотрен только один случай.	4
Рассмотрен только один случай с неверным ответом или имеется верное рассуждение (выписано уравнение) без ответа, которое можно довести до правильного ответа.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 3	7
Ответ получен с одной арифметической ошибкой или опиской.	6
Допущено более одной арифметической ошибки, ход решения верный, либо неверно применена формула площади.	4
Имеется верное геометрическое рассуждение без ответа (найдены равные отрезки, либо выполнены дополнительные построения, либо составлены верные уравнения), которое можно довести до правильного ответа.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 4	7
Потеря одной граничной точки.	6
Потеря двух граничных точек.	5

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 4	
Потеря трех граничных точек, или при верном ходе решения допущены арифметические ошибки в вычислениях корней знаменателя или границ промежутков, ответ выписан.	4
Умножение обеих частей неравенства на знаменатель без учета его знака, или из ответа не исключен ноль знаменателя.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 5	7
Описка в ответе при верном решении.	6
Потеряно решение в виде отдельной точки.	5
Ответ отличается от правильного только включением случая, когда прямая проходит через конец дуги и дважды ее пересекает, либо допущена арифметическая ошибка при вычислении границ параметра при верном анализе случаев.	4
Имеется верное рассуждение (верно определены и изображены множества, соответствующие каждому уравнению, их взаимное расположение, намечена схема решения), которое можно довести до правильного ответа, ответ не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0

Р А З Д Е Л 3

ОТВЕТЫ

2020 год, 11 класс

Вариант 011

1. а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\neq 0,\ n\in Z;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z;\ \frac{\pi}{6};\ \pi k,\ k\in Z;$ б) $-\frac{\pi}{3},\ 0,\ \frac{\pi}{6},\ \pi.$ **2.** $x\in(-\infty;2)\cup(7;8)\cup\big(8;\frac{17}{2}\big]\cup(9;+\infty).$ **3.** $15\sqrt{13}.$ **4.** $a\in\{-4;-1;-\frac{1}{4}\}\cup(0;1)\cup(1;3)\cup(3;+\infty).$ **5.** 116π и 16.

Вариант 012

1. а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\neq 0,\ n\in Z;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in Z;\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$ б) $\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2}.$ **2.** $x\in(-\infty;1)\cup(6;7)\cup\big(7;\frac{15}{2}\big]\cup(8;+\infty).$ **3.** $15\sqrt{5}.$ **4.** $a\in\{-36;-2;-\frac{1}{9}\}\cup(0;2)\cup(2;4)\cup(4;+\infty).$ **5.** 140π и 10.

Вариант 013

1. а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\neq 0,\ n\in Z;\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z;\ \frac{5\pi}{6};\ \pi k,\ k\in Z;$ б) $\frac{5\pi}{6},\ \pi,\ \frac{4\pi}{3},\ 2\pi.$ **2.** $x\in(-\infty;2)\cup(5;6)\cup\big(6;\frac{13}{2}\big]\cup(7;+\infty).$ **3.** $12\sqrt{10}.$ **4.** $a\in\{-4;-\frac{1}{2};-\frac{1}{16}\}\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty).$ **5.** 224π и 32.

Вариант 014

1. а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\neq 0,\ n\in Z;\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in Z;\ -\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$ б) $-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3}.$ **2.** $x\in(-\infty;1)\cup(4;5)\cup\big(5;\frac{11}{2}\big]\cup(6;+\infty).$ **3.** $30\sqrt{17}.$ **4.** $a\in\{-12;-3;-\frac{3}{4}\}\cup(0;3)\cup(3;5)\cup(5;+\infty).$ **5.** 200π и 40.

Вариант 021

1. а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi m, m\in Z$; $\pi k, k\in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{3}$, 0, π.
2. $x\in(-\infty;2)\cup(7;8)\cup\left(8;\frac{17}{2}\right]\cup(9;+\infty)$. **3.** $15\sqrt{13}$.
4. $a\in\left\{-4;-1;-\frac{1}{4}\right\}\cup(0;1)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$. **5.** 116π.

Вариант 022

1. а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m, m\in Z$; $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$; б) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$.
2. $x\in(-\infty;1)\cup(6;7)\cup\left(7;\frac{15}{2}\right]\cup(8;+\infty)$. **3.** $15\sqrt{5}$.
4. $a\in\left\{-36;-2;-\frac{1}{9}\right\}\cup(0;2)\cup(2;4)\cup(4;+\infty)$. **5.** 140π.

Вариант 023

1. а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m, m\in Z$; $\pi k, k\in Z$; б) $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$, 2π.
2. $x\in(-\infty;2)\cup(5;6)\cup\left(6;\frac{13}{2}\right]\cup(7;+\infty)$. **3.** $12\sqrt{10}$.
4. $a\in\left\{-4;-\frac{1}{2};-\frac{1}{16}\right\}\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$. **5.** 224π.

Вариант 024

1. а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in Z$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; б) $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6}$. **2.** $x\in(-\infty;1)\cup(4;5)\cup\left(5;\frac{11}{2}\right]\cup(6;+\infty)$.
3. $30\sqrt{17}$. **4.** $a\in\left\{-12;-3;-\frac{3}{4}\right\}\cup(0;3)\cup(3;5)\cup(5;+\infty)$. **5.** 200π.

2020 год, 9 класс

Вариант 0911

1. 12. **2.** -1; $\frac{3}{4}$. **3.** $12\sqrt{5}$ или $300\sqrt{5}$.
4. $x\in\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{5-\sqrt{37}}{2};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[3;\frac{13}{2}\right]$.
5. $a\in(-\infty;-8]\cup\{-2\}\cup\left[-\frac{8}{9};0\right)$.

Вариант 0912

1. 24. **2.** $\frac{5}{12}$; 1. **3.** $6\sqrt{2}$ или $24\sqrt{2}$.
4. $x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[2;\frac{9}{2}\right]$.
5. $a\in\left(-\infty;-\frac{25}{8}\right]\cup\{-2\}\cup\left[-\frac{25}{18};0\right)$.

Вариант 0913

1. 40. **2.** $1; \frac{4}{3}$. **3.** $16\sqrt{15}$ или $\frac{400\sqrt{15}}{9}$.
4. $x \in \left(-\infty; \frac{9-\sqrt{101}}{2}\right) \cup \left(\frac{9-\sqrt{101}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[5; \frac{21}{2}\right]$.
5. $a \in \left(0; \frac{9}{8}\right] \cup \{2\} \cup \left[\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

Вариант 0914

1. 35. **2.** $-1; \frac{12}{5}$. **3.** $16\sqrt{7}$ или $784\sqrt{7}$.
4. $x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{65}}{2}\right) \cup \left(\frac{7-\sqrt{65}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[4; \frac{17}{2}\right]$.
5. $a \in \left(0; \frac{18}{25}\right] \cup \{2\} \cup [18; +\infty)$.

Вариант 0921

1. 12. **2.** $-1; \frac{3}{4}$. **3.** $12\sqrt{5}$.
4. $x \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{37}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[3; \frac{13}{2}\right]$.
5. $a \in \left\{-\frac{3}{4}\right\} \cup \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right]$.

Вариант 0922

1. 15. **2.** $\frac{5}{12}; 1$. **3.** $6\sqrt{2}$.
4. $x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[2; \frac{9}{2}\right]$.
5. $a \in \left\{-\frac{4}{3}\right\} \cup \left(-1; -\frac{1}{3}\right]$.

Вариант 0923

1. 14. **2.** $1; \frac{4}{3}$. **3.** $16\sqrt{15}$.
4. $x \in \left(-\infty; \frac{9-\sqrt{101}}{2}\right) \cup \left(\frac{9-\sqrt{101}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[5; \frac{21}{2}\right]$.
5. $a \in \left\{-\frac{5}{12}\right\} \cup \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}\right]$.

Вариант 0924

1. 16. **2.** $-1; \frac{12}{5}$. **3.** $16\sqrt{7}$.
4. $x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{65}}{2}\right) \cup \left(\frac{7-\sqrt{65}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[4; \frac{17}{2}\right]$.
5. $a \in \left\{-\frac{12}{5}\right\} \cup \left(-2; -\frac{2}{5}\right]$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ляпунов Игорь Борисович

ВАРИАНТЫ ВЫПУСКНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ СУНЦ НГУ ЗА 2020 ГОД

Методическое пособие

Технический редактор *Т. В. Иванова*

Графические работы *А. Г. Иванова*

Верстка *И. Б. Ляпунова*

Подписано в печать 01.06.2020 г.
Формат $60 \times 84/16$ Уч.-изд. л. 4,75. Усл. печ. л. 4,42.
Тираж 300 экз. Заказ № 121
Издательско-полиграфический центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2