1

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x^3-1)(x^2-16)}{lg(15a-x)-lg(x-a)} = 0$$ **имеет единственное решение.**

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \\ x = -4 \end{array}\right. \\ 15a - x > 0 \\ x - a > 0 \\ 15a - x \neq x - a \\ (x \neq 8a) \end{cases}$$

Условия существования корней:

$$x = 1, \text{если} \begin{cases} 15a - 1 > 0 \\ 1 - a > 0 \\ 1 \neq 8a \end{cases} <=> \begin{cases} a > 1/15 \\ a < 1 \\ a \neq 1/8 \end{cases}$$

$$x = 4, \text{если} \begin{cases} 15a - 4 > 0 \\ 4 - a > 0 \\ 4 \neq 8a \end{cases} <=> \begin{cases} a > 4/15 \\ a < 4 \\ a \neq 1/2 \end{cases}$$

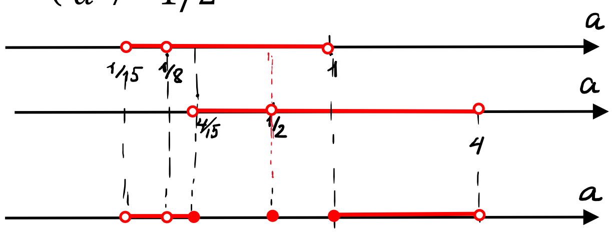
$$x = -4, \text{если} \begin{cases} 15a + 4 > 0 \\ -4 - a > 0 \\ -4 \neq 8a \end{cases} <=>$$

$$> \begin{cases} a > -4/15 \\ a < -4 \\ a \neq -1/2 \end{cases} \text{ несовместна}$$

$x = 1$

$x = 4$

Итог



В итоге уравнение имеет единственное решение при

$$a \in \left(\frac{1}{15}; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; \frac{4}{15}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1; 4)$$

Ответ: $\left(\frac{1}{15}; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; \frac{4}{15}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1; 4)$

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$(a-3)x^2 - 2ax + 5a = 0$$ **положительные.**

$a - 3 = 0$

$a = 3$

$-6x + 15 = 0$

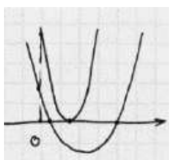
$x = \frac{15}{6} > 0$

В ответ:

$a = 3$

Пусть $f(x) = (a-3)x^2 - 2ax + 5a$

$a - 3 > 0$

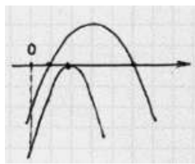


$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_в > 0 \\ f(0) > 0 \\ a - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 5a(a-3) \geq 0 \\ \frac{a}{a-3} > 0 \\ 5a > 0 \\ a - 3 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a(15 - 4a) \geq 0 \\ a > 0 \\ a > 3 \end{cases}$$

$3 < a \leq \frac{15}{4}$

$a - 3 < 0$



$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_в > 0 \\ f(0) < 0 \\ a - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 5a(a-3) \geq 0 \\ \frac{a}{a-3} > 0 \\ 5a < 0 \\ a - 3 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a(15 - 4a) \geq 0 \\ a < 0 \\ a < 3 \end{cases}$$

Система несовместна.

Ответ: $\left[3; \frac{15}{4}\right]$

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\boldsymbol{(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0}$$

имеет два корня, один из которых больше 3, а другой меньше 2.

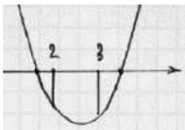
Пусть $f(x)=(a-2)x^2-2(a+3)x+4a$

$a-2=0$

Не подходит (корней не два)

$a-2>0$

$$\begin{cases} a-2>0 \\ f(2)<0 \\ f(3)<0 \end{cases}$$

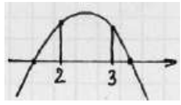


$$\begin{cases} a>2 \\ 4(a-2)-4(a+3)+4a<0 \\ 9(a-2)-6(a+3)+4a<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>2 \\ a<5 \\ a<\dfrac{36}{7} \end{cases} <=> \ a \in (2;5)$$

$a-2<0$

$$\begin{cases} a-2<0 \\ f(2)>0 \\ f(3)>0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a<2 \\ 4(a-2)-4(a+3)+4a>0 \\ 9(a-2)-6(a+3)+4a>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a<2 \\ a>5 \\ a>\dfrac{36}{7} \end{cases}$$

Система несовместна.

Ответ: $(2;5)$

3. При каких значениях a уравнение

$$(a-1)\cdot 4^x+(2a-3)\cdot 6^x=(3a-4)\cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

Указание: свести задачу к поиску единственного положительного решения и проверить «неквадратность.»

Ответ: $(-\infty;1]\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$

При каких значениях a уравнение $\boldsymbol{2|x-2a|-a^2+15+x=0}$

а) не имеет решений?

б) имеет решения и все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-9;10]$?

а) АНАЛИТИЧЕСКИ.

1 случай. $\begin{cases} x-2a\geq 0 \\ 2(x-2a)-a^2+15+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2a \\ x=\frac{a^2+4a-15}{3} \end{cases}$ Так как решений нет, то должно быть верным неравенство

$$\frac{a^2+4a-15}{3}<2a \Leftrightarrow a^2-2a-15<0 \Leftrightarrow (a+3)(a-5)<0 \Leftrightarrow$$

$a\in(-3;5)$

2 случай. $\begin{cases} x-2a<0 \\ 2(-x+2a)-a^2+15+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2a \\ x=-a^2+4a+15 \end{cases}$ Так как решений нет, то должно быть верным неравенство

$$-a^2+4a+15 \geq 2a \Leftrightarrow a^2-2a-15 \leq 0 \Leftrightarrow (a+3)(a-5) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$a \in [-3; 5]$ 3

Следовательно, уравнение не имеет решений на пересечении полученных множеств.

Ответ к пункту а): $(-3; 5)$

б) АНАЛИТИЧЕСКИ.

Из пункта а) видим, что уравнение имеет решения при

$a \in (-\infty; -3] \cup [5; +\infty)$

Решение одно в краевых точках указанных промежутков, и по два решения при остальных значениях параметра a.

1 случай. Проверяем краевые значения.

При $a = -3 \Rightarrow x = -6 \in [-9; 10]$, при $a = 5 \Rightarrow x = 10 \in [-9; 10]$.

Оба значения (–3) и 5 в ОТВЕТ.

2 случай.

Если $a \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$, то

$$\begin{cases} -9 \leq \frac{a^2+4a-15}{3} \leq 10 \\ -9 \leq -a^2+4a+15 \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a+12 \geq 0 \\ a^2+4a-45 \leq 0 \\ a^2-4a-24 \leq 0 \\ a^2-4a-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq a \leq 5 \\ 2-2\sqrt{7} \leq a \leq 2+2\sqrt{7} \\ \left[\begin{array}{l} a \geq 5 \\ a \leq -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$a \in [2-2\sqrt{7}; -1] \cup \{5\}$$

$2-2\sqrt{7} \vee -3$
$5 \vee 2\sqrt{7}$
$25 < 28$

С учетом первоначального условия 2-го случая получим $a \in \left[2-2\sqrt{7}; -3\right)$

Итоговый ответ получим объединением результатов двух случаев:

$$a \in [2-2\sqrt{7}; -3] \cup \{5\}$$

Ответ: $\in [2-2\sqrt{7}; -3] \cup \{5\}$

Найдите все значения p, при каждом из которых множество решений неравенства

$$(p-x^2)(p+x-2)<0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 1$.

Решение. Покажем, как можно решить при помощи метода областей. На рис. 1 изображены кривые $p=x^2$ и $p+x=2$.

Расставляем знаки функции, стоящей в левой части неравенства, в областях, образованных этими кривыми. Заметим (рис. 2), что при

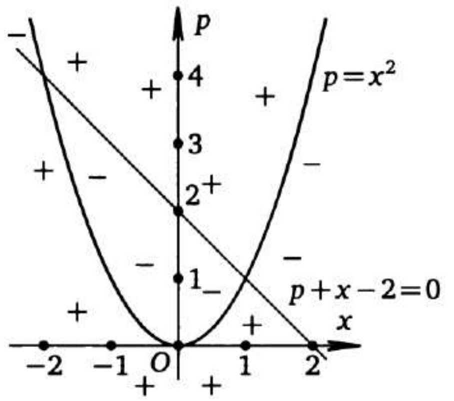


Рис. 1

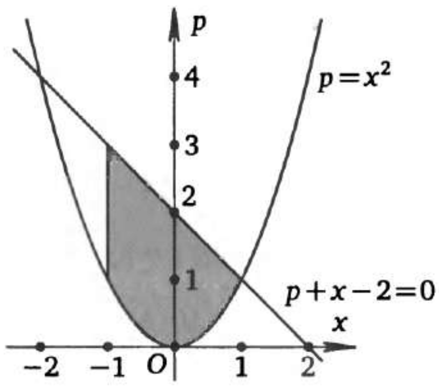


Рис. 2

$p\in(0;3)$ существуют решения x исходного неравенства из отрезка $[-1;1]$, а для оставшихся $p\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$ решений x из отрезка $[-1;1]$ не существует.

Ответ: $p\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$.

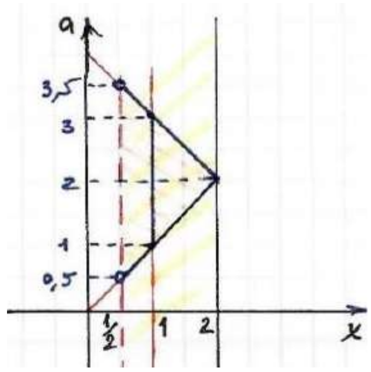
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\boldsymbol{log_4(2x-1)\cdot\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[\mathbf{0};\mathbf{2}]$

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 2x-1>0 \\ (x-a)(x+a-4)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{ll} x=1 & (1) \\ x=a & (2) \\ x=4-a & (3) \end{array}\right. \end{cases}$$



Аналитический способ:

Совпадения: (1)=(2) при $a=1$; (1)=(3) при $a=3$; (2)=(3) при $a=2$

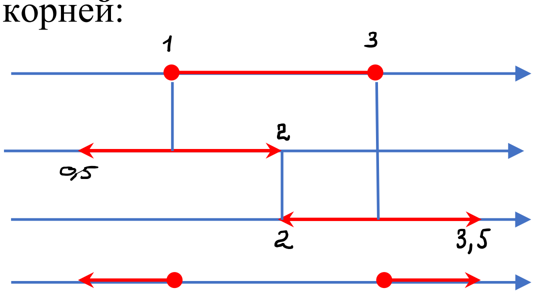
Условия существования корней:

(1): $a\in[1;3]$

(2): $a\in(0{,}5;2)$

(3): $a\in(2;3{,}5)$

Ответ: $(0{,}5;1]\cup[3;3{,}5)$



Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство

$$\left|3\sin^2 x + 2a\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + a\right| \le 3.$$

Решение. Упростим подмодульное выражение

$$f(x) = 3\sin^2 x + 2a\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + a =$$

$$= 3 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} + a\sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2} + a = = a\sin 2x - \cos 2x + 2 + a =$$

$$= \sqrt{a^2+1}\sin(2x - \varphi) + 2 + a, \text{ где } \varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы наименьшее (m) и набольшее (M) значения функции $f(x)$ удовлетворяли системе

$$\begin{cases} m \ge -3 \\ M \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{a^2+1} + 2 + a \ge -3 \\ \sqrt{a^2+1} + 2 + a \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a^2 + 1 \le (a+5)^2 \\ a + 5 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 + 1 \le (1-a)^2 \\ 1 - a \ge 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -2{,}4 \\ a \le 0. \end{cases}$$

Ответ: $[-2{,}4;0]$.

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$ не имеет действительных решений.

Решение. Обозначим $y = x^2 - 5x + 4a$. Тогда $x^2 = y + 5x - 4a$. В новых обозначениях уравнение примет вид $64^{x+a} = y + 5x - 4a - 8x + a + 4^y$, откуда

$$3x + 3a + 4^{3x+3a} = y + 4^y.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t + 4^t$. Последнее уравнение примет вид

$$f(3x+3a) = f(y).$$

Функция $f(t) = t + 4^t$ определена при всех t и является возрастающей на всей числовой прямой (как сумма двух возрастающих функций). Тогда уравнение $f(3x+3a) = f(y)$ равносильно уравнению $3x + 3a = y$.

Выполнив обратную замену, получим $3x + 3a = x^2 - 5x + 4a$ или

$$x^2 - 8x + a = 0.$$

Последнее уравнение, а значит и исходное, не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен: $8^2 - 4a < 0$, то есть при $a > 16$.

Ответ. $a > 16$.

$$64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$$

6

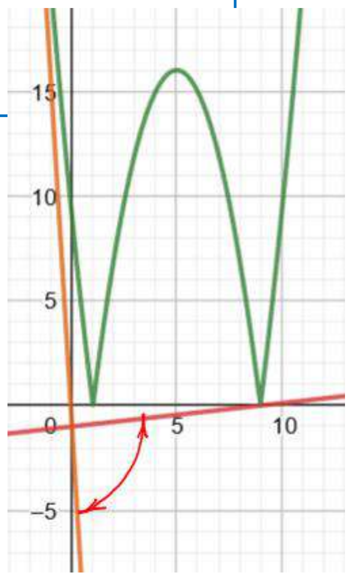
Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = 2ax - |x^2 - 10x + 9|$ меньше 1.

Заметим, что если наибольшее значение функции меньше 1, то и все значения этой функции должны быть меньше 1.

Тогда имеет смысл свести задачу к следующей:

Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$2ax - |x^2 - 10x + 9| < 1$ верно для всех значений x.



А эту задачу несложно решить графически с двумя аналитическими расчетами.

Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$ имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Положим $\sqrt{4x - x^2} = t$, где $0 \le t \le 2$, так как $0 \le 4x - x^2 \le 4$ и рассмотрим функцию $f(t) = t^4 - 32t - a^2 + 14a$. Так как ее производная $f'(t) = 4t^3 - 32 = 4(t^3 - 8) < 0$ на промежутке [0; 2), то функция убывает на отрезке [0; 2], и, значит, имеет на нем не более одного корня. Этот корень есть тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия $f(0) \ge 0$ и $f(2) \le 0$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} a^2 - 14a \le 0, \\ a^2 - 14a + 48 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le a \le 14, \\ \left[\begin{array}{l} a \le 6, \\ a \ge 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le a \le 6, \\ 8 \le a \le 14. \end{array}\right.$$

Ответ: $[0; 6] \cup [8; 14]$

Найдите все значения параметра a, при которых любое число из отрезка $2 \le x \le 3$ является решением уравнения $|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5$.

Графически. **Ответ:** $a \ge 1$

Пример. Указать все значения параметра a, для которых имеет решение уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$.

Решение. Пусть $t=\sin x$, где $-1\le t\le 1$. Тогда уравнение будет равносильно смешанной системе

$$\begin{cases}\sqrt{a+t}=t^2-a,\\ 0\le t\le 1.\end{cases}$$

Функция $y=t^2-a$ на отрезке $[0;1]$ обратима. Обратной будет $y=\sqrt{a+t}$. Обе функции являются возрастающими на $[0;1]$, поэтому общие их точки лежат на прямой $y=t$. Получаем равносильную систему

$$\begin{cases}t^2-a=t,\\ 0\le t\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t^2-t=a,\\ 0\le t\le 1.\end{cases}$$

Так как из $0\le t\le 1$ следует $-0,25\le t^2-t\le 0$, то исходное уравнение имеет решение при $-0,25\le a\le 0$. *Ответ.* $-0,25\le a\le 0$.

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$(x+7)^2+(a-6)^2=|x-a+13|+|x+a+1|$ имеет единственный корень

Сделаем замены переменной и параметра: $t=x+7; p=a-6$

Получим уравнение $t^2+p^2=|t-p|+|t+p|$. Очевидна четность левой и правой частей уравнения. Следовательно, нечетное число корней (один корень) можно поучить только, если число $t=0$ является корнем.

Тогда, $p^2=|-p|+|p|, p^2-2|p|=0, p=0; p=\pm 2$.

При $p=0$ уравнение имеет три корня (не удовлетворяет условию задачи).

При $p=\pm 2$ уравнение имеет единственный корень.

Тогда искомые значения параметра a будут равны 8 и 4.

Ответ: 4; 8

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + (a - x)^3 + 2x^2 = x - a$$

имеет хотя бы один корень.

8. $a \in \left(-\infty; \frac{1}{8}\right]$.

функциональный (монотонность функции)

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 11|x+2| + 3\sqrt{x^2+4x+13} = 5a + 2|x - 2a + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

9. $\left[\frac{9-3\sqrt{5}}{2}; \frac{9+3\sqrt{5}}{2}\right]$.

наименьшее значение функции в x= –2

При каких значениях a имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} y + \sqrt{25-(x+2)^2} = 3 \\ \sqrt{(x-a-1)^2+(y-a-1)^2} + \sqrt{(x-a+1)^2+(y-a+1)^2} = 2\sqrt{2} \end{cases} ?$$

Заметим, что с точки зрения метода координат на плоскости задача имеет красивую графическую иллюстрацию:

Первое уравнение представляет собой график полуокружности (нижняя часть) с центром O(–2;3) и радиусом 5.

Второе уравнение интерпретируется следующим образом. Геометрическое место точек M $(x; y)$, сумма расстояний от которых до точек A $(a+1; a+1)$(первый радикал)и B $(a-1; a-1)$ (второй радикал) равна $2\sqrt{2}$.

Но длина отрезка AB также равна $2\sqrt{2}$. Значит точка M – это точка на отрезке AB.

Таким образом второе уравнение представляет графически отрезок AB, который перемещается по прямой $y = x$ в зависимости от значений параметра a.

Далее остается определить возможные пересечения полуокружности и отрезка.

Ответ: $[-3; -1] \cup [2; 4]$

При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|}\log_{1/3}\left(x^2-2x+4\right)+2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}\left(2|x-a|+3\right)=0$$

имеет ровно три различных решения.

- ОДЗ: вся числовая ось.
- Заметим, что после некоторых преобразований уравнение такой вид:

$$-2^{2|x-a|}\log_3\left((x-1)^2+3\right)+2^{(x-1)^2}\log_3\left(2|x-a|+3\right)=0$$

- Далее, $$2^{(x-1)^2}\log_3\left(2|x-a|+3\right)=2^{2|x-a|}\log_3\left((x-1)^2+3\right)$$
- И наконец :

$$\frac{2^{(x-1)^2}}{\log_3\left((x-1)^2+3\right)}=\frac{2^{2|x-a|}}{\log_3\left(2|x-a|+3\right)}$$

- Уравнение примет вид: $f\left((x-1)^2\right)=f\left(2|x-a|\right)$
- такой вид: $f(t)=\dfrac{2^t}{\log_3(t+3)}$ и $t\geq 0$.

- Исследуем эту функцию на монотонность на множестве $t\geq 0$.

$$f'(t)=2^t\ln 3\,\frac{\ln 2\cdot(x+3)\cdot\ln(t+3)-1}{(\ln(x+3))^2}$$

$\ln(t+3)>1;\ \ (t+3)\geq 3;\ \ \ln 2>1/3$

- Следовательно, производная функции $f(t)$ всюду положительна при $t\geq 0$.

- Значит, функция $f(t)=\dfrac{2^t}{\log_3(t+3)}$ возрастает при $t\geq 0$.

$$f\left((x-1)^2\right)=f\left(2|x-a|\right)\ \Leftrightarrow\ (x-1)^2=2|x-a|$$

- Последнее уравнение имеет ровно три решения при a,
- равных 1/2, 1 и 3/2. (Решаем, например, графически: два случая касания ветви параболы и ветви модуля, а также случай совпадения вершин параболы и модуля).
- ОТВЕТ: 1/2; 1; 3/2.

При каких значениях параметра a один из корней уравнения $9^{4x^2-4ax-6a-8}-8=\left|\frac{a+3}{2x-a}\right|$ принадлежит отрезку [–1; 1]

- Уравнение нестандартное и содержит параметр и в показателе, и под модулем.
- Попробуем «облагородить» его.

$$9^{(2x-a)^2-(a+3)^2+1}-8=\left|\frac{a+3}{2x-a}\right|$$

$$9^{(2x-a)^2-(a+3)^2+1}-9=\left|\frac{a+3}{2x-a}\right|-1$$

$$9\left(9^{(2x-a)^2-(a+3)^2}-1\right)=\left|\frac{a+3}{2x-a}\right|-1$$

Сделаем замены переменных

$t = 2x - a$

$p = a + 3$

$$9\left(9^{t^2-p^2}-1\right)=\left|\frac{p}{t}\right|-1$$

$$9\left(9^{t^2-p^2}-1\right)=\left|\frac{p}{t}\right|-1.$$

Рассмотрим две функции

$f(t)=9\left(9^{t^2-p^2}-1\right)$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$

$g(t)=\left|\frac{p}{t}\right|-1$

$D(g)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

- Функция $f(t)$ четная и возрастает на $[0;+\infty)$; убывает на $(-\infty;0]$.
- Функция $g(t)$ четная и убывает на $(0;+\infty)$ возрастает на $(-\infty;0)$.

- Очевидно, что «единственными» корнями уравнения (на каждой полуоси)

$f(t) = g(t)$ являются значения $t = \pm p$

- Теперь вернемся к исходным обозначениям.

$$\left[\begin{array}{l}2x-a=a+3\\2x-a=-(a+3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a+1{,}5\\x=-1{,}5\end{array}\right.$$

- Отрезку [–1; 1] может принадлежать лишь корень $x=a+1{,}5$
- Тогда

$$-1\le a+1{,}5\le 1\quad\Leftrightarrow\quad -2{,}5\le a\le -0{,}5$$

- ОТВЕТ: [–2,5; –0,5].

Самостоятельно:

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение:

а) $\sin(x-3a)+\sin\left(\frac{x^2-6x+7a}{2}\right)=4x-x^2-a$

не имеет действительных решений;

б) $\cos\left(\frac{10x-2x^2-a}{3}\right)-\cos(2x+a)=x^2-8x-a$

имеет единственное решение.

Ответы: а) $a>4$. *Указание.* Привести уравнение к виду

$$2x+\sin(x-3a)=2\left(-\frac{x^2-6x+a}{2}\right)+\sin\left(\left(-\frac{x^2-6x+a}{2}\right)-3a\right).$$

Далее рассмотреть функцию $y(t)=2t+\sin(t-3a)$; **б)** $a=-16$.