МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

И. Б. ЛЯПУНОВ

ВАРИАНТЫ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ СУНЦ НГУ ЗА 2021 ГОД

Методическое пособие

НОВОСИБИРСК
2021

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
Л 97

Ляпунов, И. Б.

Л 97 Варианты конкурсных задач по математике СУНЦ НГУ за 2021 год : метод. пособие / И. Б. Ляпунов ; СУНЦ НГУ. — Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2021. — 60 с.

ISBN 978–5–4437–1197–3

Сборник содержит конкурсные задачи по математике для 9 и 11-х классов СУНЦ НГУ за 2021 г. Все задачи снабжены решениями или подробными указаниями, ответами и критериями оценивания. Данное методическое пособие предназначено для оканчивающих школу учащихся СУНЦ НГУ, учителей старших классов, а также для всех, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7

ISBN 978–5–4437–1197–3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое издание содержит варианты конкурсных задач по математике 9 и 11-х классов СУНЦ НГУ за 2021 г. Расположение задач традиционное для такого рода изданий — по классам и вариантам. Продолжительность работы выпускников над задачами одного варианта составляет 3 ч 55 мин. Из-за различия в программах выпускникам физико-математического и химико-биологического профиля предлагались различные по трудности варианты задач, для 11 класса сответственно, 111—114 и 121—124, а для 9 класса — 1911—1914 и 1921—1924. Задачи для 9 класса по традиции размещены после задач для 11 класса. Все задачи снабжены решениями или подробными указаниями, критериями оценивания и ответами. Задачи настоящего сборника позволяют составить представление о требованиях к подготовке выпускников СУНЦ НГУ по математике.

Все задачи являются оригинальными, в том смысле, что составлены заново, именно для этого этапа конкурса, при этом, часть идей по составлению задач заимствована из материалов вступительных испытаний ведущих вузов страны разных лет.

Пособие будет полезно как учащимся СУНЦ НГУ, оканчивающим школу, так и учителям старших классов, а также всем, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

И. Б. Ляпунов

РАЗДЕЛ 1
УСЛОВИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ

2021 год, 11 класс

Вариант 111

1. а) Решить уравнение
$$\sin x \cdot \cos^5 x - \sin^5 x \cdot \cos x + \tfrac{1}{4} \cdot \sin 2\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = 0.$$
б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{\left(1-\left(\frac{x-3}{5}\right)^2\right)} \log_3 \dfrac{x+1}{x-1} \geqslant 0.$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором известно $AB = BC = 6$, $\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{55}}{8}$. Через середину P стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке Q и продолжение стороны BC в точке R. Площади треугольников APQ и QCR равны. Найти длину отрезка PQ.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно значение переменной x удовлетворяет равенству
$$\frac{(a-7)\cdot 3^{2x+2}}{9^x - 3^{x+\log_3 4} + 7} = a^2 - 7a.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной 13, боковое ребро параллелепипеда равно 16. Один из двух равных шаров касается трех граней параллелепипеда, сходящихся в одной из его вершин, второй шар касается первого шара и трех остальных граней параллелепипеда. Найти площадь поверхности одного шара, а также угол между линией центров шаров и плоскостью боковой грани данного параллелепипеда.

Вариант 112

1. а) Решить уравнение

$$\sin x \cdot \cos^5 x - \sin^5 x \cdot \cos x + \tfrac{1}{4} \cdot \cos 2\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{\left(1-\left(\frac{x-5}{8}\right)^2\right)} \log_3 \dfrac{x+2}{x-2} \geqslant 0.$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором известно $AB = BC = 12$, $\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Через середину L стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке N и продолжение стороны BC в точке K. Площади треугольников ALN и NCK равны. Найти длину отрезка LN.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно значение переменной x удовлетворяет равенству

$$\frac{(a-4) \cdot 5^{2x+1}}{25^x - 5^{x+\log_5 4} + 6} = a^2 - 4a.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной 29, боковое ребро параллелепипеда равно 18. Один из двух равных шаров касается трех граней параллелепипеда, сходящихся в одной из его вершин, второй шар касается первого шара и трех остальных граней параллелепипеда. Найти площадь поверхности одного шара, а также угол между линией центров шаров и плоскостью боковой грани данного параллелепипеда.

Вариант 113

1. а) Решить уравнение

$$\sin x \cdot \cos^5 x - \sin^5 x \cdot \cos x - \tfrac{1}{4} \cdot \sin 2\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{\left(1-\left(\frac{x-4}{7}\right)^2\right)} \log_5 \dfrac{x+2}{x-2} \geqslant 0.$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором известно $AB = BC = 12$, $\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Через середину E стороны AB

проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке F и продолжение стороны BC в точке G. Площади треугольников AEF и FCG равны. Найти длину отрезка EF.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно значение переменной x удовлетворяет равенству
$$\frac{(a-5)\cdot 6^{2x+1}}{36^x - 6^{x+\log_6 4}+7} = a^2-5a.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной 25, боковое ребро параллелепипеда равно 36. Один из двух равных шаров касается трех граней параллелепипеда, сходящихся в одной из его вершин, второй шар касается первого шара и трех остальных граней параллелепипеда. Найти площадь поверхности одного шара, а также угол между линией центров шаров и плоскостью боковой грани данного параллелепипеда.

Вариант 114

1. а) Решить уравнение
$$\sin x\cdot\cos^5 x - \sin^5 x\cdot\cos x - \tfrac{1}{4}\cdot\cos 2\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)=0.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{\left(1-\left(\frac{x-6}{10}\right)^2\right)}\log_4\dfrac{x+3}{x-3}\geqslant 0.$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором известно $AB=BC=6$, $\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{39}}{8}$. Через середину D стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке L и продолжение стороны BC в точке T. Площади треугольников ADL и LCT равны. Найти длину отрезка DL.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно значение переменной x удовлетворяет равенству
$$\frac{(a-6)\cdot 7^{2x+1}}{49^x - 7^{x+\log_7 2}+8} = a^2-6a.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной 17, боковое ребро параллелепипеда равно 18. Один из двух равных шаров касается трех граней параллелепипеда, сходящихся в одной из его вершин, второй шар касается первого шара и трех остальных граней параллелепипеда. Найти площадь поверхности одного шара, а также угол между линией центров шаров и плоскостью боковой грани данного параллелепипеда.

Вариант 121

1. а) Решить уравнение

$$\sin x \cdot \cos^3 x - \sin^3 x \cdot \cos x + \tfrac{1}{4} \cdot \sin 2\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{\left(1-\left(\frac{x-3}{5}\right)^2\right)} \log_3 \dfrac{x+1}{x-1} \geqslant 0.$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором известно $AB = BC = 6$, $\angle ABC = \arcsin \frac{\sqrt{55}}{8}$. Через середину P стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке Q и продолжение стороны BC в точке R. Площади треугольников APQ и QCR равны. Найти длину отрезка PQ.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно положительное значение переменной x удовлетворяет равенству

$$\frac{9 \cdot (a-7) \cdot x^2}{x^2 - 4x + 7} = a^2 - 7a.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной 13, боковое ребро параллелепипеда равно 16. Один из двух равных шаров касается трех граней параллелепипеда, сходящихся в одной из его вершин, второй шар касается первого шара и трех остальных граней параллелепипеда. Найти площадь поверхности одного шара, а также угол между линией центров шаров и плоскостью основания данного параллелепипеда.

Вариант 122

1. а) Решить уравнение

$$\sin x \cdot \cos^3 x - \sin^3 x \cdot \cos x + \tfrac{1}{4} \cdot \cos 2\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{\left(1-\left(\frac{x-5}{8}\right)^2\right)} \log_3 \dfrac{x+2}{x-2} \geqslant 0.$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором известно $AB = BC = 12$, $\angle ABC = \arcsin \frac{\sqrt{15}}{4}$. Через середину L стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке N и продолжение стороны BC в точке K. Площади треугольников ALN и NCK равны. Найти длину отрезка LN.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно положительное значение переменной x удовлетворяет равенству

$$\frac{5 \cdot (a-4) \cdot x^2}{x^2 - 4x + 6} = a^2 - 4a.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной 29, боковое ребро параллелепипеда равно 18. Один из двух равных шаров касается трех граней параллелепипеда, сходящихся в одной из его вершин, второй шар касается первого шара и трех остальных граней параллелепипеда. Найти площадь поверхности одного шара, а также угол между линией центров шаров и плоскостью основания данного параллелепипеда.

Вариант 123

1. а) Решить уравнение

$$\sin x \cdot \cos^3 x - \sin^3 x \cdot \cos x - \tfrac{1}{4} \cdot \sin 2\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{\left(1-\left(\frac{x-4}{7}\right)^2\right)} \log_5 \dfrac{x+2}{x-2} \geqslant 0.$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором известно $AB = BC = 12$, $\angle ABC = \arcsin \frac{\sqrt{7}}{4}$. Через середину E стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке F и продолжение стороны BC в точке G. Площади треугольников AEF и FCG равны. Найти длину отрезка EF.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно положительное значение переменной x удовлетворяет

равенству
$$\frac{6\cdot(a-5)\cdot x^2}{x^2-4x+7}=a^2-5a.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной 25, боковое ребро параллелепипеда равно 36. Один из двух равных шаров касается трех граней параллелепипеда, сходящихся в одной из его вершин, второй шар касается первого шара и трех остальных граней параллелепипеда. Найти площадь поверхности одного шара, а также угол между линией центров шаров и плоскостью основания данного параллелепипеда.

Вариант 124

1. а) Решить уравнение
$$\sin x\cdot\cos^3 x-\sin^3 x\cdot\cos x-\tfrac{1}{4}\cdot\cos 2\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)=0.$$

б) Указать все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$.

2. Решить неравенство $\log_{\left(1-\left(\frac{x-6}{10}\right)^2\right)}\log_4\dfrac{x+3}{x-3}\geqslant 0.$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором известно $AB=BC=6$, $\angle ABC=\arcsin\frac{\sqrt{39}}{8}$. Через середину D стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке L и продолжение стороны BC в точке T. Площади треугольников ADL и LCT равны. Найти длину отрезка DL.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно положительное значение переменной x удовлетворяет равенству
$$\frac{7\cdot(a-6)\cdot x^2}{x^2-2x+8}=a^2-6a.$$

5. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной 17, боковое ребро параллелепипеда равно 18. Один из двух равных шаров касается трех граней параллелепипеда, сходящихся в одной из его вершин, второй шар касается первого шара и трех остальных граней параллелепипеда. Найти площадь поверхности одного шара, а также угол между линией центров шаров и плоскостью основания данного параллелепипеда.

2021 год, 9 класс

Вариант 1911

1. Одна бригада начала строить дом. Через 15 дней вторая бригада начала строить другой такой же дом и закончила его строительство одновременно с первой. Если бы первый дом строили две бригады вместе, то им понадобилось бы 10 дней. За сколько дней построила дом одна первая бригада?

2. Числа $9\cdot(1-\cos 2\alpha)$, $\left(\sqrt{-\sin\alpha}\right)^2$ и $9\cdot(1+\cos 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

3. В треугольнике ABC дано $AB = BC = 11$, $\sin\angle ABC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, медиана AE продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке D. Найти площадь треугольника BDC.

4. Решить неравенство $|\sqrt{3+x}+x|\cdot(\sqrt{4-x}+x+2) > 0$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+|y-a| = a, \\ x^2+(y-10)^2 = 50 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 1912

1. Одна бригада начала строить дом. Через 7 дней вторая бригада начала строить другой такой же дом и закончила его строительство одновременно с первой. Если бы первый дом строили две бригады вместе, то им понадобилось бы 12 дней. За сколько дней построила дом одна первая бригада?

2. Числа $8\cdot(1+\cos 2\alpha)$, $\left(\sqrt{-\sin\alpha}\right)^2$ и $8\cdot(1-\cos 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

3. В треугольнике FGH дано $FG = GH = 7$, $\sin\angle FGH = \frac{\sqrt{5}}{3}$, медиана FL продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке K. Найти площадь треугольника GKH.

4. Решить неравенство $|\sqrt{5+x}+x|\cdot(\sqrt{9-x}+x+3)>0$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+|y-a|=a, \\ x^2+(y-8)^2=32 \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

Вариант 1913

1. Одна бригада начала строить дом. Через 15 дней вторая бригада начала строить другой такой же дом и закончила его строительство одновременно с первой. Если бы первый дом строили две бригады вместе, то им понадобилось бы 18 дней. За сколько дней построила дом одна первая бригада?

2. Числа $7\cdot(1-\cos 2\alpha)$, $\left(\sqrt{-\sin\alpha}\right)^2$ и $7\cdot(1+\cos 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

3. В треугольнике PQR дано $PQ=QR=8$, $\sin\angle PQR=\frac{\sqrt{15}}{4}$, медиана PT продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке S. Найти площадь треугольника QSR.

4. Решить неравенство $|\sqrt{7+x}+x|\cdot(\sqrt{16-x}+x+4)>0$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y|+|x-a|=a, \\ y^2+(x-14)^2=98 \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 1914

1. Одна бригада начала строить дом. Через 9 дней вторая бригада начала строить другой такой же дом и закончила его строительство одновременно с первой. Если бы первый дом строили две бригады вместе, то им понадобилось бы 6 дней. За сколько дней построила дом одна первая бригада?

2. Числа $6\cdot(1+\cos 2\alpha)$, $\left(\sqrt{-\sin\alpha}\right)^2$ и $6\cdot(1-\cos 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

3. В треугольнике KNP дано $KN = NP = 4$, $\sin\angle KNP = \frac{\sqrt{7}}{4}$, медиана KR продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке Q. Найти площадь треугольника NQP.

4. Решить неравенство $|\sqrt{8+x}+x|\cdot(\sqrt{25-x}+x+5) > 0$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y| + |x-a| = a, \\ y^2 + (x-12)^2 = 72 \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

Вариант 1921

1. Растояние между городами 640 км. Одновременно выходят навстречу друг другу два поезда и встречаются через 4 ч. Если бы один поезд вышел на 48 мин раньше, то поезда встретились бы через 3 ч 30 мин после выхода другого поезда. Найти скорости обоих поездов.

2. Числа $9\cdot(1-\cos 2\alpha)$, $-\sin\alpha$ и $9\cdot(1+\cos 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\alpha$.

3. В тупоугольном треугольнике ABC дано $AB = BC = 11$, $\sin\angle ABC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, медиана AE продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке D. Найти площадь треугольника BDC.

4. Решить неравенство $(\sqrt{3+x}+x)^2\cdot(\sqrt{4-x}+x+2) > 0$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a = |x| + |y-a|, \\ y = 10 - \sqrt{50-x^2} \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 1922

1. Растояние между городами 900 км. Одновременно выходят навстречу друг другу два поезда и встречаются через 6 ч. Если бы один поезд вышел на 1 ч 12 мин раньше, то поезда встретились бы через 5 ч 12 мин после выхода другого поезда. Найти скорости обоих поездов.

2. Числа $8 \cdot (1 + \cos 2\alpha)$, $-\sin\alpha$ и $8 \cdot (1 - \cos 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\alpha$.

3. В тупоугольном треугольнике FGH дано $FG = GH = 7$, $\sin\angle FGH = \frac{\sqrt{5}}{3}$, медиана FL продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке K. Найти площадь треугольника GKH.

4. Решить неравенство $(\sqrt{5+x} + x)^2 \cdot (\sqrt{9-x} + x + 3) > 0$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a = |x| + |y - a|, \\ y = 8 - \sqrt{32 - x^2} \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 1923

1. Растояние между городами 1200 км. Одновременно выходят навстречу друг другу два поезда и встречаются через 10 ч. Если бы один поезд вышел на 2 ч 42 мин раньше, то поезда встретились бы через 8 ч 12 мин после выхода другого поезда. Найти скорости обоих поездов.

2. Числа $7 \cdot (1 - \cos 2\alpha)$, $-\sin\alpha$ и $7 \cdot (1 + \cos 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\alpha$.

3. В тупоугольном треугольнике PQR дано $PQ = QR = 8$, $\sin\angle PQR = \frac{\sqrt{15}}{4}$, медиана PT продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке S. Найти площадь треугольника QSR.

4. Решить неравенство $(\sqrt{7+x}+x)^2 \cdot (\sqrt{16-x}+x+4) > 0$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a = |y| + |x-a|, \\ x = 14 - \sqrt{98-y^2} \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Вариант 1924

1. Растояние между городами 980 км. Одновременно выходят навстречу друг другу два поезда и встречаются через 7 ч. Если бы один поезд вышел на 1 ч 24 мин раньше, то поезда встретились бы через 6 ч 12 мин после выхода другого поезда. Найти скорости обоих поездов.

2. Числа $6 \cdot (1+\cos 2\alpha)$, $-\sin\alpha$ и $6 \cdot (1-\cos 2\alpha)$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти числовое значение $\operatorname{tg}\alpha$.

3. В тупоугольном треугольнике KNP дано $KN = NP = 4$, $\sin\angle KNP = \frac{\sqrt{7}}{4}$, медиана KR продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке Q. Найти площадь треугольника NQP.

4. Решить неравенство $(\sqrt{8+x}+x)^2 \cdot (\sqrt{25-x}+x+5) > 0$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a = |y| + |x-a|, \\ x = 12 - \sqrt{72-y^2} \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Р А З Д Е Л 2

УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

2021 год, 11 класс

Вариант 111

1. а) Указание: данное уравнение имеет смысл при любых действительных x, последовательно преобразуя его, имеем

$$\sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^4 x - \sin^4 x) + \tfrac{1}{4} \cdot \sin(2x + \pi) = 0,$$

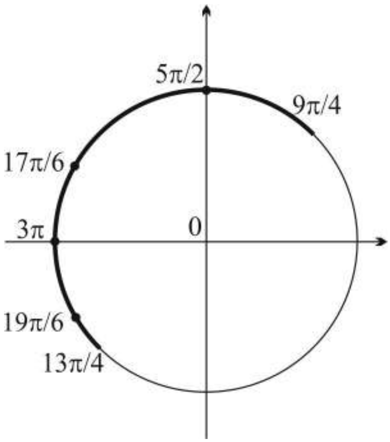
$$4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) - \sin 2x = 0,$$

$$2 \sin 2x \cdot \cos 2x - \sin 2x = 0, \ \sin 2x \cdot (2 \cdot \cos 2x - 1) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



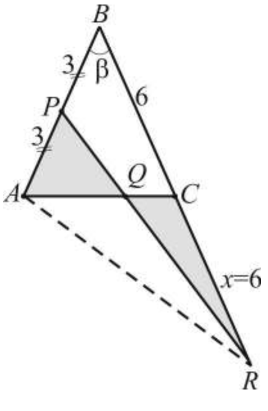
б) Указание: корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$, отберем с помощью тригонометрического круга.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{6}$, 3π, $\frac{19\pi}{6}$.

2. Указание: данное неравенство имеет смысл при условиях
$$\begin{cases} 1-\dfrac{(x-3)^2}{25}>0, \\ 1-\dfrac{(x-3)^2}{25}\neq 1, \\ \log_3\dfrac{x+1}{x-1}>0, \\ \dfrac{x+1}{x-1}>0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-3)^2<25, \\ x\neq 3, \\ \dfrac{x+1}{x-1}>1, \\ \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>\ \ 1, \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} -2<x<8, \\ x\neq 3, \\ x>1, \\ \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>\ \ 1, \end{array}\right. \end{cases}$$
откуда находим ограничение $x\in(1;3)\cup(3;8)$.

Заметим, что основание внешнего логарифма всегда меньше 1, при потенцировании знак неравенства изменится, $\log_3\frac{x+1}{x-1}\leqslant 1$, снова потенцируем, сохранив знак неравенства, так как основание логарифма $3>1$, откуда $\frac{x+1}{x-1}\leqslant 3$, $\frac{x+1}{x-1}-3\leqslant 0$, $\frac{x-2}{x-1}\geqslant 0$, $x\in(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$, $\boxed{x\in[2;3)\cup(3;8)}$ — в ответ с учетом ограничения. Ответ: $x\in[2;3)\cup(3;8)$.

3. Указание: из условия вытекает, что $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PBR}$. Пусть $CR=x$, тогда равенство площадей, с учетом данных задачи, можно записать в виде $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(6+x)\cdot\sin\beta$, $2\cdot 6=6+x$, $x=6=CR$, откуда Q — точка пересечения медиан треугольника ABR, следовательно, $PQ=\frac{1}{3}PR$.



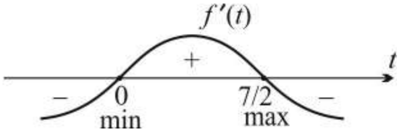
Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ находим $\cos\beta=\pm\frac{3}{8}$. По теореме косинусов имеем $PR^2=PB^2+BR^2-2\cdot PB\cdot BR\cdot\cos\beta$.

Первый случай, когда $\cos\beta=\frac{3}{8}$, тогда $PQ=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3^2+12^2-2\cdot 3\cdot 12\cdot\frac{3}{8}}$, $\boxed{PQ=\sqrt{14}}$ — в ответ.

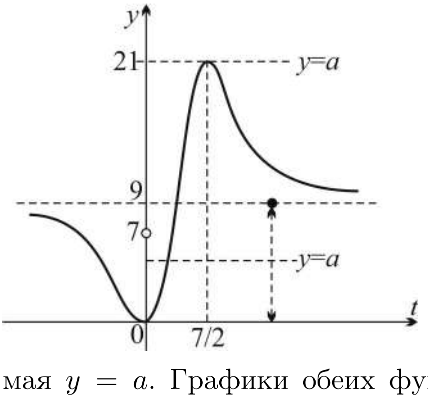
Второй случай, $\cos\beta=-\frac{3}{8}$, $PQ=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3^2+12^2+2\cdot 3\cdot 12\cdot\frac{3}{8}}$, $\boxed{PQ=\sqrt{20}}$ — в ответ. Ответ: $\sqrt{14}$, $\sqrt{20}$.

4. Указание: равенство имеет смысл при $9^x - 3^{x+\log_3 4} + 7 \neq 0$, $(3^x)^2 - 4\cdot 3^x + 7 \neq 0$, замена $t = 3^x > 0$, $t^2 - 4\cdot t + 7 \neq 0$, полученный квадратный трехчлен действительных корней не имеет, так как у него отрицательный дискриминант. Таким образом, левая часть равенства задана при любом действительном x. Перепишем его с учетом введенной замены в виде $\dfrac{(a-7)\cdot 9\cdot t^2}{t^2 - 4\cdot t + 7} = a\cdot(a-7)$. Теперь требуется найти все a, при которых новое равенство верно при ровно одном $t > 0$.

При $a = 7$ получается верное при любых t числовое равенство, что не соответствует условию, поэтому в дальнейшем рассмотрении $a \neq 7$, и можно сократить обе части равенства на $a - 7 \neq 0$. Имеем $\dfrac{9\cdot t^2}{t^2 - 4\cdot t + 7} = a$. Введем функции $f(t) = \dfrac{9\cdot t^2}{t^2 - 4\cdot t + 7}$, $g(t) = a$ и применим графический метод в системе координат $(t; y)$. Исследуем обе функции и построим эскизы их графиков. Найдем $f'(t) = 18\cdot\dfrac{t\cdot(7-2\cdot t)}{(t^2 - 4\cdot t + 7)^2}$ и исследуем функцию $y = f(t)$ на экстремумы. Вычислим $f(0) = 0$,



$f(\frac{7}{2}) = 21$, заметим, что имеется горизонтальная асимптота $y = 9$.



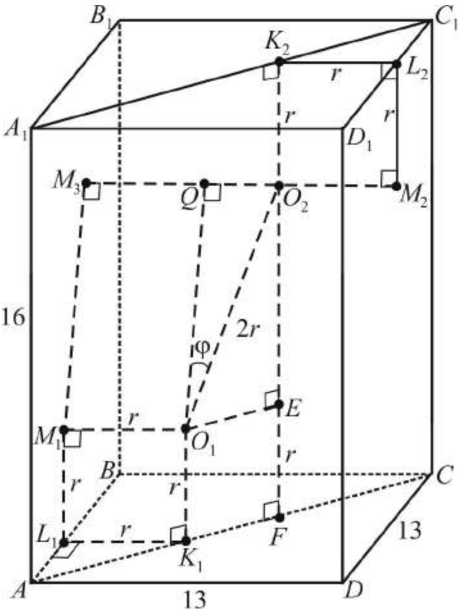
При $t \to -\infty$ верно $f(t) < 9$, график подходит к асимптоте снизу. При $t \to +\infty$ верно $f(t) > 9$, график подходит к асимптоте сверху. Функция $y = f(t)$ непрерывна в любой точке, поскольку всюду имеет производную. Эскиз графика $y = f(t)$ приведен на рисунке. Второй функции $y = g(t)$ соответствует горизонтальная прямая $y = a$. Графики обеих функций имеют ровно одну общую точку при $t > 0$, когда прямая $y = a$ расположена от нуля исключительно до асимптоты включительно, или касается первого графика в точке максимума. Кроме того, надо учесть $a \neq 7$. Ответ: $a \in (0; 7) \cup (7; 9] \cup \{21\}$.

Второй способ. После замены $t = 3^x > 0$ и сокращения на $a - 7 \neq 0$, умножим обе части равенства на неравный нулю знаменатель, получим уравнение $9 \cdot t^2 = a \cdot (t^2 - 4 \cdot t + 7)$, приводящееся к $(a-9) \cdot t^2 - 4a \cdot t + 7a = 0$, которое должно иметь ровно один положительный корень.

При $a = 9$ уравнение линейное, имеет один положительный корень, поэтому $\boxed{a = 9}$ — в ответ.

При $a \neq 9$ уравнение квадратное. Если $D = 0$, то уравнение имеет единственное решение при $a = 0$, или $a = 21$. Если $a = 0$, то $t = 0$, не подходит. При $a = 21$ верно $t > 0$, поэтому $\boxed{a = 21}$ — в ответ. Если $D > 0$, то $a \in (0; 21)$, корни должны быть разных знаков, а значит их произведение $\frac{7a}{a-9} < 0$, откуда $a \in (0; 9)$, с учетом $a \neq 7$, получим $\boxed{a \in (0;7) \cup (7;9)}$ — в ответ.

5. Указание: обозначения параллелепипеда приведены на рисунке, центры данных шаров обозначим O_1 и O_2, соответственно.



Поскольку каждый шар касается трех плоскостей, то он касается двух — боковых граней, а значит, центр каждого шара лежит в биссекторной плоскости соответствующего двугранного угла, совпадающей с плоскостью ACC_1A_1. Проведем из центра каждого шара радиусы в точки касания с соответствующим основанием и одной из боковых граней. Пусть r — радиус шаров, тогда $O_1O_2 = 2r$, проведем $K_1L_1 \perp AB$, тогда $K_1L_1 = r$, аналогично построим $K_2L_2 = r$, получим $A_1K_1 = C_1K_2 = r\sqrt{2}$. Продолжим радиус K_2O_2 до пересечения с нижним основанием $ABCD$ в точке F. Выполним дополнительное построение $O_1E \perp K_2F$, тогда $K_2C_1 = FC = r\sqrt{2}$,

$EF = O_1K_1 = r$. В прямоугольном треугольнике O_1O_2E имеем $O_2E = 16 - 2r$, $O_1E = 13\sqrt{2} - 2r\sqrt{2}$. По теореме Пифагора $O_1O_2^2 = O_1E^2 + O_2E^2$. Пусть $d = 2r$, тогда $d^2 = 2(13-d)^2 + (16-d)^2$, находим $d_1 = 9$, $d_2 = 33$ — посторонний корень, он превышает размеры паралелепипеда и не может являться диаметром находящегося внутри него шара. Площадь поверхности шара найдем по формуле $S = \pi d^2$, $\boxed{S = 81\pi}$ — в ответ.

Для нахождения угла между линией центров и боковой гранью продолжим M_2O_2 до пересечения с плоскостью ABB_1A_1 в точке M_3. Тогда M_1M_3 — проекция O_1O_2 на плоскость ABB_1A_1. Проведем дополнительно $O_1Q || M_1M_3$, угол $\varphi = \angle QO_1O_2$ — искомый, $\sin\varphi = \frac{13-d}{d}$, откуда $\boxed{\varphi = \arcsin\frac{4}{9}}$ — в ответ. Ответ: 81π, $\arcsin\frac{4}{9}$.

Вариант 112

1. а) Указание: данное уравнение имеет смысл при любых действительных x, последовательно преобразуя его, имеем

$$\sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^4 x - \sin^4 x) + \frac{1}{4} \cdot \cos(2x + \pi) = 0,$$

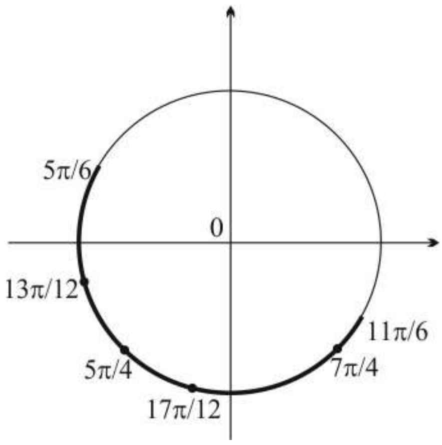
$$4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) - \cos 2x = 0,$$

$$2\sin 2x \cdot \cos 2x - \cos 2x = 0,\ \cos 2x \cdot (2 \cdot \sin 2x - 1) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



б) Указание: корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$, отберем с помощью тригонометрического круга.

Ответ: а) $\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2},\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{12},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{17\pi}{12},\ \frac{7\pi}{4}$.

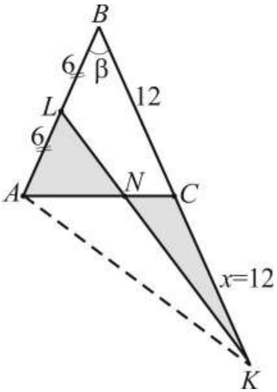
2. Указание: данное неравенство имеет смысл при условиях

$$\begin{cases} 1-\dfrac{(x-5)^2}{64}>0,\\ 1-\dfrac{(x-5)^2}{64}\neq 1,\\ \log_3\dfrac{x+2}{x-2}>0,\\ \dfrac{x+2}{x-2}>0, \end{cases}\qquad \begin{cases} (x-5)^2<64,\\ x\neq 5,\\ \dfrac{x+2}{x-2}>1,\\ \left[\begin{array}{l} x<-2,\\ x>\ \ 2, \end{array}\right. \end{cases}\qquad \begin{cases} -3<x<13,\\ x\neq 5,\\ x>2,\\ \left[\begin{array}{l} x<-2,\\ x>\ \ 2, \end{array}\right. \end{cases}$$

откуда находим ограничение $x\in(2;5)\cup(5;13)$.

Заметим, что основание внешнего логарифма всегда меньше 1, при потенцировании знак неравенства изменится, $\log_3\frac{x+2}{x-2}\leqslant 1$, снова потенцируем, сохранив знак неравенства, так как основание логарифма $3>1$, откуда $\frac{x+2}{x-2}\leqslant 3$, $\frac{x+2}{x-2}-3\leqslant 0$, $\frac{x-4}{x-2}\geqslant 0$, $x\in(-\infty;2)\cup[4;+\infty)$, $\boxed{x\in[4;5)\cup(5;13)}$ — в ответ с учетом ограничения. Ответ: $x\in[4;5)\cup(5;13)$.

3. Указание: из условия вытекает, что $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle LBK}$. Пусть



$CK=x$, тогда равенство площадей, с учетом данных задачи, можно записать в виде $\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 12\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(12+x)\cdot\sin\beta$, $2\cdot 12=12+x$, $x=12=CK$, откуда N — точка пересечения медиан треугольника ABK, следовательно, $LN=\frac{1}{3}LK$.

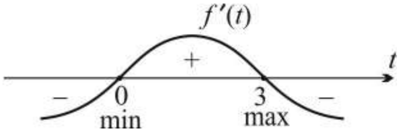
Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ находим $\cos\beta=\pm\frac{1}{4}$. По теореме косинусов имеем $LK^2=LB^2+BK^2-2\cdot LB\cdot BK\cdot\cos\beta$.

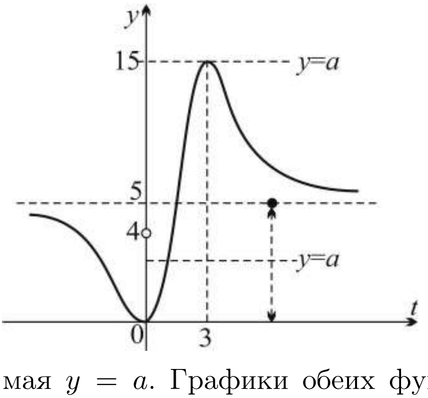
Первый случай, когда $\cos\beta=\frac{1}{4}$, тогда $LN=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6^2+24^2-2\cdot 6\cdot 24\cdot\frac{1}{4}}$, $\boxed{LN=2\sqrt{15}}$ — в ответ.

Второй случай, $\cos\beta=-\frac{1}{4}$, $LN=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6^2+24^2+2\cdot 6\cdot 24\cdot\frac{1}{4}}$, $\boxed{LN=2\sqrt{19}}$ — в ответ. Ответ: $2\sqrt{15}$, $2\sqrt{19}$.

4. Указание: равенство имеет смысл при $25^x - 5^{x+\log_5 4} + 6 \neq 0$, $(5^x)^2 - 4\cdot 5^x + 6 \neq 0$, замена $t = 5^x > 0$, $t^2 - 4\cdot t + 6 \neq 0$, полученный квадратный трехчлен действительных корней не имеет, так как у него отрицательный дискриминант. Таким образом, левая часть равенства задана при любом действительном x. Перепишем его с учетом введенной замены в виде $\dfrac{(a-4)\cdot 5\cdot t^2}{t^2 - 4\cdot t + 6} = a\cdot(a-4)$. Теперь требуется найти все a, при которых новое равенство верно при ровно одном $t > 0$.

При $a = 4$ получается верное при любых t числовое равенство, что не соответствует условию, поэтому в дальнейшем рассмотрении $a \neq 4$, и можно сократить обе части равенства на $a - 4 \neq 0$. Имеем $\dfrac{5\cdot t^2}{t^2 - 4\cdot t + 6} = a$. Введем функции $f(t) = \dfrac{5\cdot t^2}{t^2 - 4\cdot t + 6}$, $g(t) = a$ и применим графический метод в системе координат $(t; y)$. Исследуем обе функции и построим эскизы их графиков. Найдем $f'(t) = 20\cdot\dfrac{t\cdot(3-t)}{(t^2 - 4\cdot t + 6)^2}$ и исследуем функцию $y = f(t)$ на экстремумы. Вычислим $f(0) = 0$, $f(3) = 15$, заметим, что имеется горизонтальная асимптота $y = 5$.





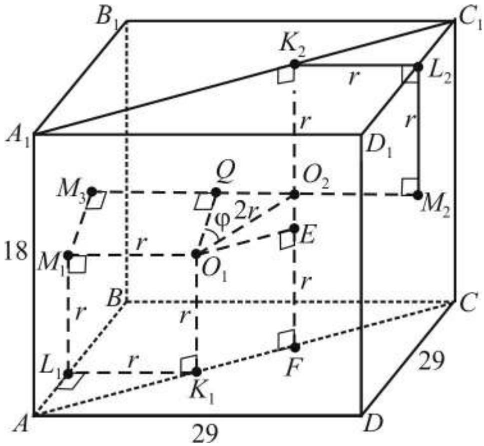
При $t \to -\infty$ верно $f(t) < 5$, график подходит к асимптоте снизу. При $t \to +\infty$ верно $f(t) > 5$, график подходит к асимптоте сверху. Функция $y = f(t)$ непрерывна в любой точке, поскольку всюду имеет производную. Эскиз графика $y = f(t)$ приведен на рисунке. Второй функции $y = g(t)$ соответствует горизонтальная прямая $y = a$. Графики обеих функций имеют ровно одну общую точку при $t > 0$, когда прямая $y = a$ расположена от нуля исключительно до асимптоты включительно, или касается первого графика в точке максимума. Кроме того, надо учесть $a \neq 4$. Ответ: $a \in (0; 4) \cup (4; 5] \cup \{15\}$.

Второй способ. После замены $t = 5^x > 0$ и сокращения на $a - 4 \neq 0$, умножим обе части равенства на неравный нулю знаменатель, получим уравнение $5 \cdot t^2 = a \cdot (t^2 - 4 \cdot t + 6)$, приводящееся к $(a-5) \cdot t^2 - 4a \cdot t + 6a = 0$, которое должно иметь ровно один положительный корень.

При $a = 5$ уравнение линейное, имеет один положительный корень, поэтому $\boxed{a = 5}$ — в ответ.

При $a \neq 5$ уравнение квадратное. Если $D = 0$, то уравнение имеет единственное решение при $a = 0$, или $a = 15$. Если $a = 0$, то $t = 0$, не подходит. При $a = 15$ верно $t > 0$, поэтому $\boxed{a = 15}$ — в ответ. Если $D > 0$, то $a \in (0; 15)$, корни должны быть разных знаков, а значит их произведение $\frac{6a}{a-5} < 0$, откуда $a \in (0; 5)$, с учетом $a \neq 4$, получим $\boxed{a \in (0; 4) \cup (4; 5)}$ — в ответ.

5. Указание: обозначения параллелепипеда приведены на рисунке, центры данных шаров обозначим O_1 и O_2, соответственно.



Поскольку каждый шар касается трех плоскостей, то он касается двух — боковых граней, а значит, центр каждого шара лежит в биссекторной плоскости соответствующего двугранного угла, совпадающей с плоскостью ACC_1A_1. Проведем из центра каждого шара радиусы в точки касания с соответствующим основанием и одной из боковых граней. Пусть r — радиус шаров, тогда $O_1O_2 = 2r$, проведем $K_1L_1 \perp AB$, тогда $K_1L_1 = r$, аналогично построим $K_2L_2 = r$, получим $A_1K_1 = C_1K_2 = r\sqrt{2}$. Продолжим радиус K_2O_2 до пересечения с нижним основанием $ABCD$ в точке F. Выполним дополнительное построение $O_1E \perp K_2F$, тогда $K_2C_1 = FC = r\sqrt{2}$, $EF = O_1K_1 = r$. В прямоугольном треугольнике O_1O_2E имеем $O_2E = 18 - 2r$, $O_1E = 29\sqrt{2} - 2r\sqrt{2}$. По теореме Пифагора $O_1O_2^2 = O_1E^2 + O_2E^2$. Пусть $d = 2r$, тогда

$d^2 = 2(29-d)^2 + (18-d)^2$, находим $d_1 = 17$, $d_2 = 59$ — посторонний корень, он превышает размеры паралелепипеда и не может являться диаметром находящегося внутри него шара. Площадь поверхности шара найдем по формуле $S = \pi d^2$, $\boxed{S = 289\pi}$ — в ответ.

Для нахождения угла между линией центров и боковой гранью продолжим M_2O_2 до пересечения с плоскостью ABB_1A_1 в точке M_3. Тогда M_1M_3 — проекция O_1O_2 на плоскость ABB_1A_1. Проведем дополнительно $O_1Q||M_1M_3$, угол $\varphi = \angle QO_1O_2$ — искомый, $\sin\varphi = \frac{29-d}{d}$, откуда $\boxed{\varphi = \arcsin\frac{12}{17}}$ — в ответ. Ответ: 289π, $\arcsin\frac{12}{17}$.

Вариант 113

1. а) Указание: данное уравнение имеет смысл при любых действительных x, последовательно преобразуя его, имеем

$$\sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^4 x - \sin^4 x) - \frac{1}{4} \cdot \sin(2x - \pi) = 0,$$

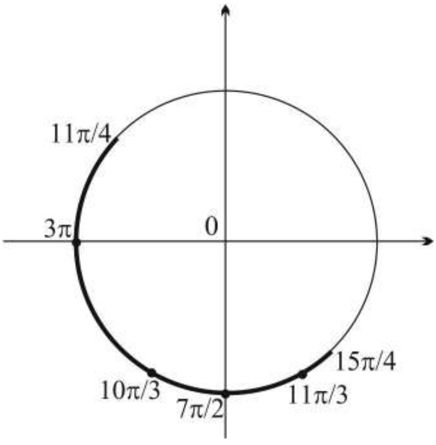
$$4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin 2x = 0,$$

$$2\sin 2x \cdot \cos 2x + \sin 2x = 0,\ \sin 2x \cdot (2 \cdot \cos 2x + 1) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



б) Указание: корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}\right]$, отберем с помощью тригонометрического круга. Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$; б) 3π, $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{3}$.

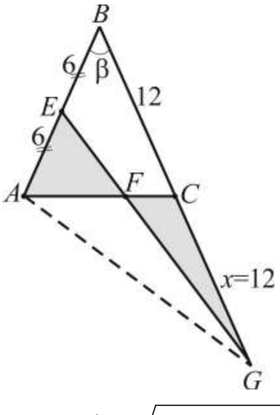
2. Указание: данное неравенство имеет смысл при условиях

$$\begin{cases} 1-\dfrac{(x-4)^2}{49}>0, \\ 1-\dfrac{(x-4)^2}{49}\neq 1, \\ \log_5\dfrac{x+2}{x-2}>0, \\ \dfrac{x+2}{x-2}>0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-4)^2<49, \\ x\neq 4, \\ \dfrac{x+2}{x-2}>1, \\ \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>\ \ 2, \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} -3<x<11, \\ x\neq 4, \\ x>2, \\ \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>\ \ 2, \end{array}\right. \end{cases}$$

откуда находим ограничение $x\in(2;4)\cup(4;11)$.

Заметим, что основание внешнего логарифма всегда меньше 1, при потенцировании знак неравенства изменится, $\log_5\frac{x+2}{x-2}\leqslant 1$, снова потенцируем, сохранив знак неравенства, так как основание логарифма $5>1$, откуда $\frac{x+2}{x-2}\leqslant 5$, $\frac{x+2}{x-2}-5\leqslant 0$, $\frac{x-3}{x-2}\geqslant 0$, $x\in(-\infty;2)\cup[3;+\infty)$, $\boxed{x\in[3;4)\cup(4;11)}$ — в ответ с учетом ограничения. Ответ: $x\in[3;4)\cup(4;11)$.

3. Указание: из условия вытекает, что $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle EBG}$. Пусть



$CG=x$, тогда равенство площадей, с учетом данных задачи, можно записать в виде $\frac12\cdot 12\cdot 12\cdot\sin\beta=\frac12\cdot 6\cdot(12+x)\cdot\sin\beta$, $2\cdot 12=12+x$, $x=12=CG$, откуда F — точка пересечения медиан треугольника ABG, следовательно, $EF=\frac13 EG$.

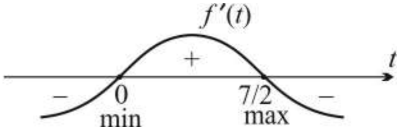
Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ находим $\cos\beta=\pm\frac34$. По теореме косинусов имеем $EG^2=EB^2+BG^2-2\cdot EB\cdot BG\cdot\cos\beta$.

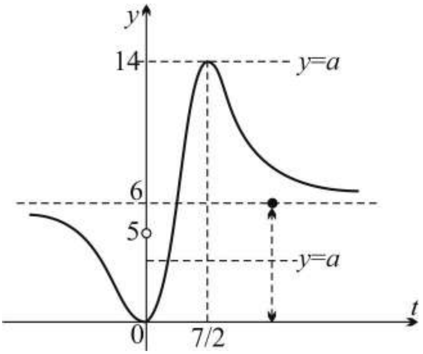
Первый случай, когда $\cos\beta=\frac34$, тогда $EF=\frac13\cdot\sqrt{6^2+24^2-2\cdot 6\cdot 24\cdot\frac34}$, $\boxed{EF=2\sqrt{11}}$ — в ответ.

Второй случай, $\cos\beta=-\frac34$, $EF=\frac13\cdot\sqrt{6^2+24^2+2\cdot 6\cdot 24\cdot\frac34}$, $\boxed{EF=2\sqrt{23}}$ — в ответ. Ответ: $2\sqrt{11}$, $2\sqrt{23}$.

4. Указание: равенство имеет смысл при $36^x-6^{x+\log_6 4}+7\neq 0$, $(6^x)^2-4\cdot 6^x+7\neq 0$, замена $t=6^x>0$, $t^2-4\cdot t+7\neq 0$, полученный квадратный трехчлен действительных корней не имеет, так как у него отрицательный дискриминант. Таким образом, левая часть равенства задана при любом действительном x. Перепишем его с учетом введенной замены в виде $\dfrac{(a-5)\cdot 6\cdot t^2}{t^2-4\cdot t+7}=a\cdot(a-5)$. Теперь требуется найти все a, при которых новое равенство верно при ровно одном $t>0$.

При $a=5$ получается верное при любых t числовое равенство, что не соответствует условию, поэтому в дальнейшем рассмотрении $a\neq 5$, и можно сократить обе части равенства на $a-5\neq 0$. Имеем $\dfrac{6\cdot t^2}{t^2-4\cdot t+7}=a$. Введем функции $f(t)=\dfrac{6\cdot t^2}{t^2-4\cdot t+7}$, $g(t)=a$ и применим графический метод в системе координат $(t;y)$. Исследуем обе функции и построим эскизы их графиков. Найдем $f'(t)=12\cdot\dfrac{t\cdot(7-2\cdot t)}{(t^2-4\cdot t+7)^2}$ и исследуем функцию $y=f(t)$ на экстремумы. Вычислим $f(0)=0$, $f(\frac{7}{2})=14$, заметим, что имеется горизонтальная асимптота $y=6$.





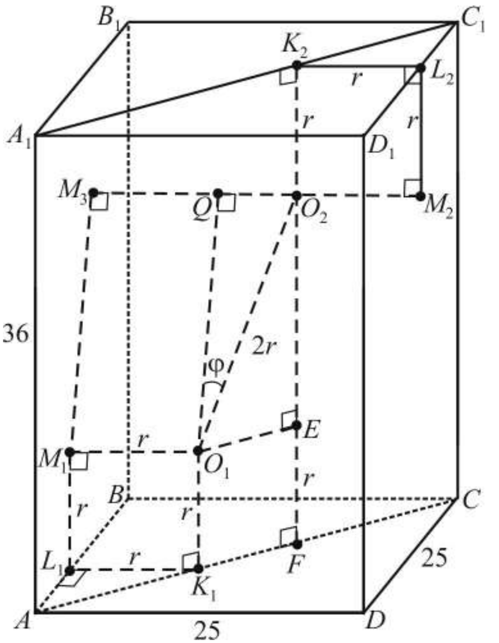
При $t\to-\infty$ верно $f(t)<6$, график подходит к асимптоте снизу. При $t\to+\infty$ верно $f(t)>6$, график подходит к асимптоте сверху. Функция $y=f(t)$ непрерывна в любой точке, поскольку всюду имеет производную. Эскиз графика $y=f(t)$ приведен на рисунке. Второй функции $y=g(t)$ соответствует горизонтальная прямая $y=a$. Графики обеих функций имеют ровно одну общую точку при $t>0$, когда прямая $y=a$ расположена от нуля исключительно до асимптоты включительно, или касается первого графика в точке максимума. Кроме того, надо учесть $a\neq 5$. Ответ: $a\in(0;5)\cup(5;6]\cup\{14\}$.

Второй способ. После замены $t=6^x>0$ и сокращения на $a-5\neq 0$, умножим обе части равенства на неравный нулю знаменатель, получим уравнение $6\cdot t^2=a\cdot(t^2-4\cdot t+7)$, приводящееся к $(a-6)\cdot t^2 - 4a\cdot t + 7a = 0$, которое должно иметь ровно один положительный корень.

При $a = 6$ уравнение линейное, имеет один положительный корень, поэтому $\boxed{a = 6}$ — в ответ.

При $a \neq 6$ уравнение квадратное. Если $D = 0$, то уравнение имеет единственное решение при $a = 0$, или $a = 14$. Если $a = 0$, то $t = 0$, не подходит. При $a = 14$ верно $t > 0$, поэтому $\boxed{a = 14}$ — в ответ. Если $D > 0$, то $a \in (0;14)$, корни должны быть разных знаков, а значит их произведение $\frac{7a}{a-6} < 0$, откуда $a \in (0;6)$, с учетом $a \neq 5$, получим $\boxed{a \in (0;5)\cup(5;6)}$ — в ответ.

5. Указание: обозначения параллелепипеда приведены на рисунке, центры данных шаров обозначим O_1 и O_2, соответственно.



Поскольку каждый шар касается трех плоскостей, то он касается двух — боковых граней, а значит, центр каждого шара лежит в биссекторной плоскости соответствующего двугранного угла, совпадающей с плоскостью ACC_1A_1. Проведем из центра каждого шара радиусы в точки касания с соответствующим основанием и одной из боковых граней. Пусть r — радиус шаров, тогда $O_1O_2 = 2r$, проведем $K_1L_1 \perp AB$, тогда $K_1L_1 = r$, аналогично построим $K_2L_2 = r$, получим $A_1K_1 = C_1K_2 = r\sqrt{2}$. Продолжим радиус K_2O_2 до пересечения с нижним основанием $ABCD$ в точке F. Выполним дополнительное построение $O_1E \perp K_2F$, тогда $K_2C_1 = FC = r\sqrt{2}$, $EF = O_1K_1 = r$. В прямоугольнике треугольнике O_1O_2E имеем $O_2E = 36 - 2r$, $O_1E = 25\sqrt{2} - 2r\sqrt{2}$. По теореме Пифагора

$O_1O_2^2 = O_1E^2 + O_2E^2$. Пусть $d = 2r$, тогда $d^2 = 2(25-d)^2 + (36-d)^2$, находим $d_1 = 19$, $d_2 = 67$ — посторонний корень, он превышает размеры паралелепипеда и не может являться диаметром находящегося внутри него шара. Площадь поверхности шара найдем по формуле $S = \pi d^2$, $\boxed{S = 361\pi}$ — в ответ.

Для нахождения угла между линией центров и боковой гранью продолжим M_2O_2 до пересечения с плоскостью ABB_1A_1 в точке M_3. Тогда M_1M_3 — проекция O_1O_2 на плоскость ABB_1A_1. Проведем дополнительно $O_1Q||M_1M_3$, угол $\varphi = \angle QO_1O_2$ — искомый, $\sin\varphi = \frac{25-d}{d}$, откуда $\boxed{\varphi = \arcsin\frac{6}{19}}$ — в ответ. Ответ: 361π, $\arcsin\frac{6}{19}$.

Вариант 114

1. а) Указание: данное уравнение имеет смысл при любых действительных x, последовательно преобразуя его, имеем

$$\sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^4 x - \sin^4 x) - \frac{1}{4} \cdot \cos(2x - \pi) = 0,$$

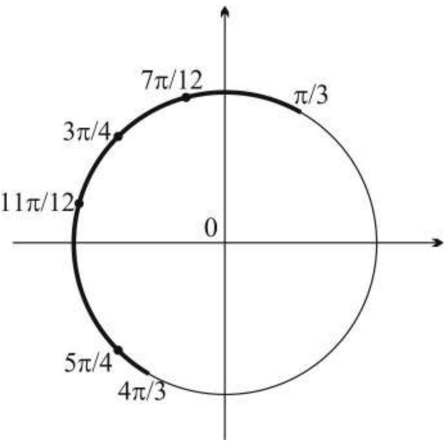
$$4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) + \cos 2x = 0,$$

$$2\sin 2x \cdot \cos 2x + \cos 2x = 0,\ \cos 2x \cdot (2 \cdot \sin 2x + 1) = 0,$$

$$\left[\begin{aligned} &\cos 2x = 0, \\ &\sin 2x = -\frac{1}{2}, \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ &2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ &2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}, \\ &x = -\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ &x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$



б) Указание: корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$, отберем с помощью тригонометрического круга.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ -\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2},\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{12},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{11\pi}{12},\ \frac{5\pi}{4}$.

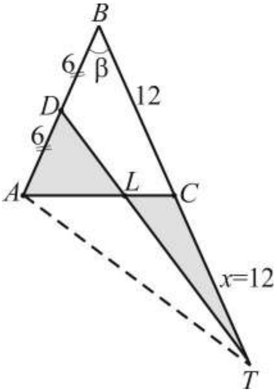
2. Указание: данное неравенство имеет смысл при условиях

$$\begin{cases} 1-\dfrac{(x-6)^2}{100}>0,\\ 1-\dfrac{(x-6)^2}{100}\neq 1,\\ \log_4\dfrac{x+3}{x-3}>0,\\ \dfrac{x+3}{x-3}>0, \end{cases} \quad \begin{cases} (x-6)^2<100,\\ x\neq 6,\\ \dfrac{x+3}{x-3}>1,\\ \left[\begin{array}{l} x<-3,\\ x>\ \ 3, \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} -4<x<16,\\ x\neq 6,\\ x>3,\\ \left[\begin{array}{l} x<-3,\\ x>\ \ 3, \end{array}\right. \end{cases}$$

откуда находим ограничение $x\in(3;6)\cup(6;16)$.

Заметим, что основание внешнего логарифма всегда меньше 1, при потенцировании знак неравенства изменится, $\log_4\frac{x+3}{x-3}\leqslant 1$, снова потенцируем, сохранив знак неравенства, так как основание логарифма $4>1$, откуда $\frac{x+3}{x-3}\leqslant 4$, $\frac{x+3}{x-3}-4\leqslant 0$, $\frac{x-5}{x-3}\geqslant 0$, $x\in(-\infty;3)\cup[5;+\infty)$, $\boxed{x\in[5;6)\cup(6;16)}$ — в ответ с учетом ограничения. Ответ: $x\in[5;6)\cup(6;16)$.

3. Указание: из условия вытекает, что $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBT}$. Пусть $CT=x$, тогда равенство площадей, с учетом данных задачи, можно записать в виде $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(6+x)\cdot\sin\beta$, $2\cdot 6=6+x$, $x=6=CT$, откуда L — точка пересечения медиан треугольника ABT, следовательно, $DL=\frac{1}{3}DT$.



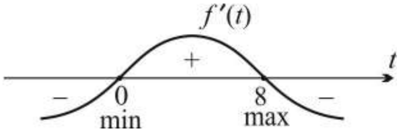
Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ находим $\cos\beta=\pm\frac{5}{8}$. По теореме косинусов имеем $DT^2=DB^2+BT^2-2\cdot DB\cdot BT\cdot\cos\beta$.

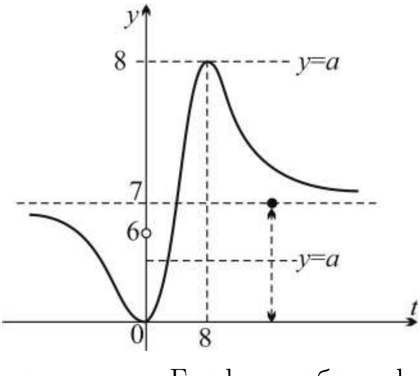
Первый случай, когда $\cos\beta=\frac{5}{8}$, тогда $DL=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3^2+12^2-2\cdot 3\cdot 12\cdot\frac{5}{8}}$, $\boxed{DL=\sqrt{12}}$ — в ответ.

Второй случай, $\cos\beta=-\frac{5}{8}$, $DL=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3^2+12^2+2\cdot 3\cdot 12\cdot\frac{5}{8}}$, $\boxed{DL=\sqrt{22}}$ — в ответ. Ответ: $\sqrt{12}$, $\sqrt{22}$.

4. Указание: равенство имеет смысл при $49^x - 7^{x+\log_7 2} + 8 \neq 0$, $(7^x)^2 - 2\cdot 7^x + 8 \neq 0$, замена $t = 7^x > 0$, $t^2 - 2\cdot t + 8 \neq 0$, полученный квадратный трехчлен действительных корней не имеет, так как у него отрицательный дискриминант. Таким образом, левая часть равенства задана при любом действительном x. Перепишем его с учетом введенной замены в виде $\dfrac{(a-6)\cdot 7\cdot t^2}{t^2 - 2\cdot t + 8} = a\cdot(a-6)$. Теперь требуется найти все a, при которых новое равенство верно при ровно одном $t > 0$.

При $a = 6$ получается верное при любых t числовое равенство, что не соответствует условию, поэтому в дальнейшем рассмотрении $a \neq 6$, и можно сократить обе части равенства на $a - 6 \neq 0$. Имеем $\dfrac{7\cdot t^2}{t^2 - 2\cdot t + 8} = a$. Введем функции $f(t) = \dfrac{7\cdot t^2}{t^2 - 2\cdot t + 8}$, $g(t) = a$ и применим графический метод в системе координат $(t; y)$. Исследуем обе функции и построим эскизы их графиков. Найдем $f'(t) = 14\cdot\dfrac{t\cdot(8-t)}{(t^2 - 2\cdot t + 8)^2}$ и исследуем функцию $y = f(t)$ на экстремумы. Вычислим $f(0) = 0$, $f(8) = 8$, заметим, что имеется горизонтальная асимптота $y = 7$.





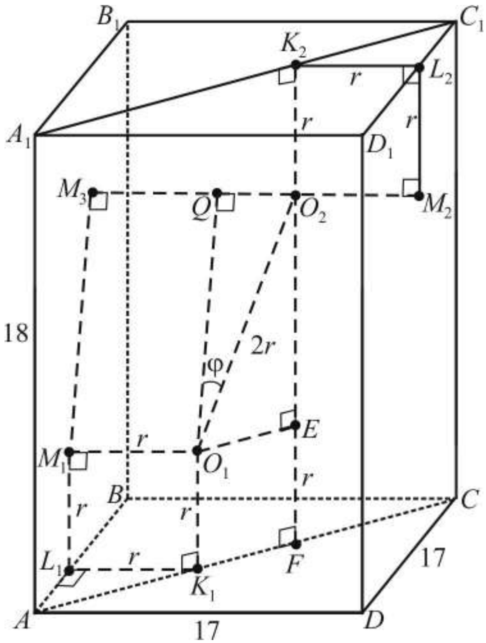
При $t \to -\infty$ верно $f(t) < 7$, график подходит к асимптоте снизу. При $t \to +\infty$ верно $f(t) > 7$, график подходит к асимптоте сверху. Функция $y = f(t)$ непрерывна в любой точке, поскольку всюду имеет производную. Эскиз графика $y = f(t)$ приведен на рисунке. Второй функции $y = g(t)$ соответствует горизонтальная прямая $y = a$. Графики обеих функций имеют ровно одну общую точку при $t > 0$, когда прямая $y = a$ расположена от нуля исключительно до асимптоты включительно, или касается первого графика в точке максимума. Кроме того, надо учесть $a \neq 6$. Ответ: $a \in (0;6) \cup (6;7] \cup \{8\}$.

Второй способ. После замены $t = 7^x > 0$ и сокращения на $a-6 \neq 0$, умножим обе части равенства на неравный нулю знаменатель, получим уравнение $7 \cdot t^2 = a \cdot (t^2 - 2 \cdot t + 8)$, приводящееся к $(a-7) \cdot t^2 - 2a \cdot t + 8a = 0$, которое должно иметь ровно один положительный корень.

При $a = 7$ уравнение линейное, имеет один положительный корень, поэтому $\boxed{a = 7}$ — в ответ.

При $a \neq 7$ уравнение квадратное. Если $D = 0$, то уравнение имеет единственное решение при $a = 0$, или $a = 8$. Если $a = 0$, то $t = 0$, не подходит. При $a = 8$ верно $t > 0$, поэтому $\boxed{a = 8}$ — в ответ. Если $D > 0$, то $a \in (0; 8)$, корни должны быть разных знаков, а значит их произведение $\frac{8a}{a-7} < 0$, откуда $a \in (0; 7)$, с учетом $a \neq 6$, получим $\boxed{a \in (0;6) \cup (6;7)}$ — в ответ.

5. Указание: обозначения параллелепипеда приведены на рисунке, центры данных шаров обозначим O_1 и O_2, соответственно.



Поскольку каждый шар касается трех плоскостей, то он касается двух — боковых граней, а значит, центр каждого шара лежит в биссекторной плоскости соответствующего двугранного угла, совпадающей с плоскостью ACC_1A_1. Проведем из центра каждого шара радиусы в точки касания с соответствующим основанием и одной из боковых граней. Пусть r — радиус шаров, тогда $O_1O_2 = 2r$, проведем $K_1L_1 \perp AB$, тогда $K_1L_1 = r$, аналогично построим $K_2L_2 = r$, получим $A_1K_1 = C_1K_2 = r\sqrt{2}$. Продолжим радиус K_2O_2 до пересечения с нижним основанием $ABCD$ в точке F. Выполним дополнительное построение $O_1E \perp K_2F$, тогда $K_2C_1 = FC = r\sqrt{2}$, $EF = O_1K_1 = r$. В прямоугольном треугольнике O_1O_2E имеем $O_2E = 18 - 2r$, $O_1E = 17\sqrt{2} - 2r\sqrt{2}$. По теореме Пифагора $O_1O_2^2 = O_1E^2 + O_2E^2$. Пусть $d = 2r$, тогда $d^2 = 2(17-d)^2 + (18-d)^2$, находим $d_1 = 11$, $d_2 = 41$ — посторонний корень, он превышает размеры паралелепипеда и не может являться диаметром находящегося внутри него шара. Площадь поверхности шара найдем по формуле $S = \pi d^2$, $\boxed{S = 121\pi}$ — в ответ.

Для нахождения угла между линией центров и боковой гранью продолжим M_2O_2 до пересечения с плоскостью ABB_1A_1 в точке M_3. Тогда M_1M_3 — проекция O_1O_2 на плоскость ABB_1A_1. Проведем дополнительно $O_1Q||M_1M_3$, угол $\varphi = \angle QO_1O_2$ — искомый, $\sin\varphi = \frac{17-d}{d}$, откуда $\boxed{\varphi = \arcsin\frac{6}{11}}$ — в ответ. Ответ: 121π, $\arcsin\frac{6}{11}$.

Варианты 121–124

Каждая задача варианта 12N либо является частным случаем задачи с таким же номером из варианта 11N, либо совпадает с ней в большей части.

1. Решение совпадает с решением задачи из варианта 11N, после применения в ней основного тригонометрического тождества.

2. Совпадает с задачей из варианта 11N.

3. Частный случай задачи из варианта 11N.

4. Решение совпадает с решением задачи из варианта 11N, после введения в ней замены неизвестного.

5. Решение совпадает с решением задачи из варианта 11N до момента вычисления угла. Вместо проектирования на боковую грань, надо спроектировать линию центров на основание и в формуле вычисления синуса угла длину стороны основания параллелепипеда заменить длиной его высоты, угол EO_1O_2 — искомый, равен $\arcsin\frac{AA_1-d}{d}$, площадь поверхности шара такая же. Ответы размещены в конце сборника.

Критерии оценивания, 11 класс

Полное и обоснованное решение каждой задачи с правильным ответом оценивалось по 7 баллов. Частично верные решения оценивались в соответствии с таблицей, 0 баллов выставлялось, если решение не удовлетворяло ни одному из критериев.

Физико-математические классы

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 1	7
Описка в ответе при верном решении.	6
Верно решена аналогичная задача при неверном применении формулы приведения.	5
Получены только верные серии решений пункта а) при неверном отборе в пункте б), ответ выписан.	4
Для аналогичной задачи, при неверном применении формулы приведения, получены только верные серии решений пункта а) при неверном отборе в пункте б), ответ выписан.	3
Неверно решено простейшее, или найдены и верно решены неверные простейшие тригонометрические уравнения при верном отборе из этих серий, ответ выписан.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 2	7
В ответе потеряна одна допустимая граничная точка.	6
Одно из: арифметическая ошибка, приведшая к другому неравенству, либо имеются все верные шаги решения без учета положительности вложенного логарифма, ответ выписан.	4
Одно из: выставлен неверный знак неравенства при потенцировании, при остальных верных действиях до ответа, или в ответе присутствует хотя бы одна запрещенная точка.	2
Во всех остальных случаях.	0

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 3	7
Задача доведена до ответа с одной арифметической ошибкой на стадии вычисления последнего искомого отрезка.	6
Одно из: оба случая в ответе при верном ходе решения и более чем одной арифметической ошибке, или верно рассмотрен только один из двух случаев до ответа.	4
Имеется верное геометрическое рассуждение (установлено, что сторона треугольника продолжается на ту же длину и искомый отрезок является частью медианы другого треугольника), которое можно довести до правильного ответа, ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 4	7
В ответе потеряно ровно одно значение параметра.	6
В ответе потеряны ровно два значения параметра.	5
Не исключено a, приводящее к тождеству $0 = 0$.	4
Найдены верно только два значения параметра.	2
Найдено верно только одно значение параметра.	1
Во всех остальных случаях.	0
Задача 5	7
Одно из: только одна арифметическая ошибка, ход решения верный, либо вместо угла в ответе записана его функция.	6
Одно из: более одной арифметической ошибки при верном ходе решения до ответов, либо верно найден только угол.	4
Найдена только площадь поверхности шара.	3
Найден только радиус шара, ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0

Химико-биологические классы

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 1	7
Описка в ответе при верном решении.	6
Верно решена аналогичная задача при неверном применении формулы приведения.	5
Получены только верные серии решений пункта а) при неверном отборе в пункте б), ответ выписан.	4
Для аналогичной задачи при неверном применении формулы приведения получены только верные серии решений пункта а) при неверном отборе в пункте б), ответ выписан.	3
Неверно решено простейшее, или найдены и верно решены неверные простейшие тригонометрические уравнения при верном отборе из этих серий, ответ выписан.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 2	7
В ответе потеряна одна допустимая граничная точка.	6
Одно из: арифметическая ошибка, приведшая к другому неравенству, либо имеются все верные шаги решения без учета положительности вложенного логарифма, ответ выписан.	4
Одно из: выставлен неверный знак неравенства при потенцировании, при остальных верных действиях до ответа, или в ответе присутствует хотя бы одна запрещенная точка.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 3	7
Задача доведена до ответа с одной арифметической ошибкой на стадии вычисления последнего искомого отрезка.	6
Одно из: ответ получен при верном ходе решения и более чем одной арифметической ошибке, или задача доведена до верного ответа для другого случая.	4

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 3	
Имеется верное геометрическое рассуждение (установлено, что сторона треугольника продолжается на ту же длину и искомый отрезок является частью медианы другого треугольника), которое можно довести до правильного ответа, ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 4	7
В ответе потеряно ровно одно значение параметра.	6
В ответе потеряны ровно два значения параметра.	5
Не исключено a, приводящее к тождеству $0 = 0$.	4
Найдены верно только два значения параметра.	2
Найдено верно только одно значение параметра.	1
Во всех остальных случаях.	0
Задача 5	7
Одно из: только одна арифметическая ошибка, ход решения верный, либо вместо угла в ответе записана его функция.	6
Одно из: более одной арифметической ошибки при верном ходе решения до ответов, либо верно найден только угол.	4
Найдена только площадь поверхности шара.	3
Найден только радиус шара, ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0

2021 год, 9 класс

Вариант 1911

1. Указание: пусть весь объем работ равен 1, первая бригада строит дом за x дней — искомое, а вторая — за $x-15$ дней, тогда в день первая бригада выполняет $\frac{1}{x}$ всей работы, а вторая — $\frac{1}{x-15}$. По условию обе бригады вместе строят дом за 10 дней, откуда $10\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-15}\right)=1$, имеем квадратное уравнение $x^2-35x+150=0$, (корни которого:) $\boxed{x_1=30}$ — в ответ, и $x_2=5$ — посторонний, не удовлетворяет $x-15\geqslant 0$. Ответ: 30 дней.

2. Указание: из определения геометрической прогрессии следует $\sin\alpha\neq 0$, а вместе с условием существования корня имеем $(-\sin\alpha)>0$, откуда $\sin\alpha<0$.

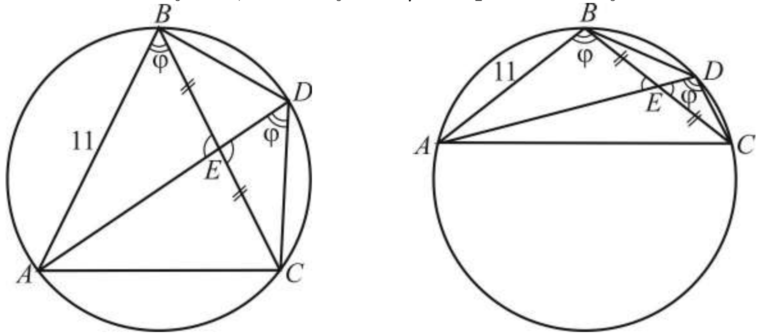
Применяя определение геометрической прогрессии, имеем уравнение $\frac{\left(\sqrt{-\sin\alpha}\right)^2}{9\cdot(1-\cos 2\alpha)}=\frac{9\cdot(1+\cos 2\alpha)}{\left(\sqrt{-\sin\alpha}\right)^2}$, откуда $81\cdot(1-\cos^2 2\alpha)=\sin^2\alpha$. По основному тригонометрическому тождеству $81\cdot\sin^2 2\alpha=\sin^2\alpha$. По формулам двойного угла $81\cdot 4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$. Сократим обе части уравнения на $\sin\alpha\neq 0$, получим $\cos^2\alpha=\frac{1}{81\cdot 4}$, откуда $\cos\alpha=\pm\frac{1}{18}$. По формуле половинного угла искомое $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ найдем $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{18^2}}=-\frac{\sqrt{323}}{18}$ (с учетом, в нашем случае, $\sin\alpha<0$).

Первый случай, $\cos\alpha=\frac{1}{18}$, подставляя найденные значения тригонометрических функций в формулу тангенса половиного угла, имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-\frac{\sqrt{323}}{18}}{1+\frac{1}{18}}=-\frac{\sqrt{323}}{19}$, откуда $\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{17}{19}}}$ — в ответ.

Второй случай, $\cos\alpha=-\frac{1}{18}$, подставляя найденные значения тригонометрических функций в формулу тангенса половиного угла, имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-\frac{\sqrt{323}}{18}}{1-\frac{1}{18}}=-\frac{\sqrt{323}}{17}$, откуда $\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{19}{17}}}$ — в ответ.

Ответ: $-\sqrt{\frac{17}{19}}$, $-\sqrt{\frac{19}{17}}$.

3. Указание: медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника, откуда искомая площадь $S_{\triangle BDC} = 2 \cdot S_{\triangle CDE}$. Опирающиеся на одну и ту же дугу вписанные углы ABC и ADC равны, пусть $\varphi = \angle ABC$. В условии задан только $\sin\varphi$, поэтому возможны два случая, когда угол φ острый или тупой.



В обоих случаях треугольники ABE и CDE подобны по двум углам, поскольку кроме $\varphi = \angle ABE = \angle ABC = \angle ADC = \angle EDC$ у них имеются равные вертикальные углы AEB и DEC. Коэффициет подобия $k = \frac{CE}{AE}$, тогда $S_{\triangle CDE} = k^2 \cdot S_{\triangle ABE}$. Подставим в формулу $S_{\triangle BDC} = 2 \cdot S_{\triangle CDE}$ найденное соотношение и продолжим выкладки, $S_{\triangle BDC} = k^2 \cdot 2 \cdot S_{\triangle ABE} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC}$. По формуле площади треугольника $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 11^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Осталось найти k^2.

По теореме косинусов $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2 - 2 \cdot AB \cdot BE \cdot \cos\varphi}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ найдем $\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \pm\frac{1}{3}$. Подставим найденные и данные величины в формулу, $AE = \sqrt{11^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2 \mp 2 \cdot 11 \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{3}}$, откуда, при $\cos\varphi > 0$, имеем $AE_1 = \frac{11}{2} \cdot \sqrt{\frac{11}{3}}$, $k = \sqrt{\frac{3}{11}}$, $k^2 = \frac{3}{11}$, искомая площадь $S_{\triangle BDC} = \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{2} \cdot 11^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 11\sqrt{2}$, $\boxed{S_1 = 11\sqrt{2}}$ — в ответ, при $\cos\varphi < 0$, имеем $AE_2 = \frac{11}{2} \cdot \sqrt{\frac{19}{3}}$, $k = \sqrt{\frac{3}{19}}$, $k^2 = \frac{3}{19}$, искомая площадь $S_{\triangle BDC} = \frac{3}{19} \cdot \frac{1}{2} \cdot 11^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{121\sqrt{2}}{19}$, $\boxed{S_2 = \frac{121\sqrt{2}}{19}}$ — в ответ. Ответ: $11\sqrt{2}$, $\frac{121\sqrt{2}}{19}$.

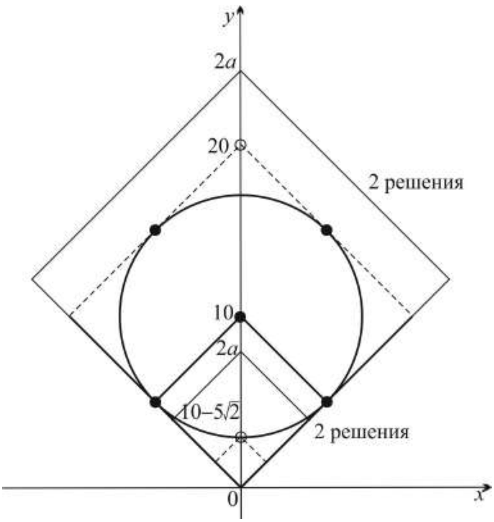
4. Указание: исходное неравенство имеет смысл при условиях $\begin{cases} 3+x \geqslant 0, \\ 4-x \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant 4, \end{cases}$, откуда $x \in [-3; 4]$. Если $\sqrt{3+x}+x=0$, то при допустимых x неравенство примет вид $0>0$, что неверно. Решим отдельно $\sqrt{3+x}=-x$ и исключим найденное значение x. При $-x \geqslant 0$, $x \leqslant 0$, имеем $3+x=x^2$, $x^2-x-3=0$, откуда $x_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}>0$ — посторонний.

Итак, при ограничении $x \in \left[-3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 4\right]$ имеем $\sqrt{4-x}+x+2>0$, $\sqrt{4-x}>-x-2$, что равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x-2 \geqslant 0, \\ 4-x>(x+2)^2, \end{cases} \\ -x-2<0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -2, \\ x^2+5x<0, \end{cases} \\ x>-2, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in (-5; -2], \\ x>-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left[-3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 4\right]$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — квадрат, имеющий одной из вершин начало координат, а противоположную ей вершину на оси Oy, с координатами $(0; 2a)$. Второе множество — окружность с центром $(0; 10)$ и радиусом $5\sqrt{2}$, она пересекает ось Oy в ближней к началу координат точке $(0; 10-5\sqrt{2})$. При небольших a квадрат и окружность не пересекаются, при $10-5\sqrt{2}<2a \leqslant 10$ они имеют две общие точки, при $10<2a<10+5\sqrt{2}$ — четыре, потом 5, далее 6 до момента, когда окружность станет вписанной в квадрат, тогда при $2a=20$ будет 4 общие точки, а при $2a>20$ снова 2 общие точки. Число общих точек соответствует числу решений системы. Ответ: $a \in \left(5-\frac{5\sqrt{2}}{2}; 5\right] \cup (10; +\infty)$.



Вариант 1912

1. Указание: пусть весь объем работ равен 1, первая бригада строит дом за x дней — искомое, а вторая — за $x-7$ дней, тогда в день первая бригада выполняет $\frac{1}{x}$ всей работы, а вторая — $\frac{1}{x-7}$. По условию обе бригады вместе строят дом за 12 дней, откуда $12\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-7}\right)=1$, имеем квадратное уравнение $x^2-31x+84=0$, (корни которого:) $\boxed{x_1=28}$ — в ответ, и $x_2=3$ — посторонний, не удовлетворяет $x-7\geqslant 0$. Ответ: 28 дней.

2. Указание: из определения геометрической прогрессии следует $\sin\alpha\neq 0$, а вместе с условием существования корня имеем $(-\sin\alpha)>0$, откуда $\sin\alpha<0$.

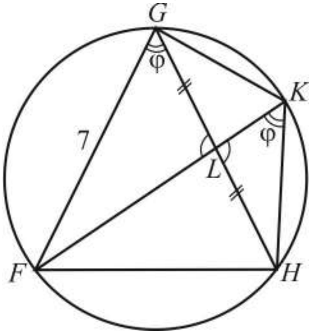
Применяя определение геометрической прогрессии, имеем уравнение $\frac{\left(\sqrt{-\sin\alpha}\right)^2}{8\cdot(1+\cos 2\alpha)}=\frac{8\cdot(1-\cos 2\alpha)}{\left(\sqrt{-\sin\alpha}\right)^2}$, откуда $64\cdot(1-\cos^2 2\alpha)=\sin^2\alpha$. По основному тригонометрическому тождеству $64\cdot\sin^2 2\alpha=\sin^2\alpha$. По формулам двойного угла $64\cdot 4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$. Сократим обе части уравнения на $\sin\alpha\neq 0$, получим $\cos^2\alpha=\frac{1}{64\cdot 4}$, откуда $\cos\alpha=\pm\frac{1}{16}$. По формуле половинного угла искомое $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ найдем $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{16^2}}=-\frac{\sqrt{255}}{16}$ (с учетом, в нашем случае, $\sin\alpha<0$).

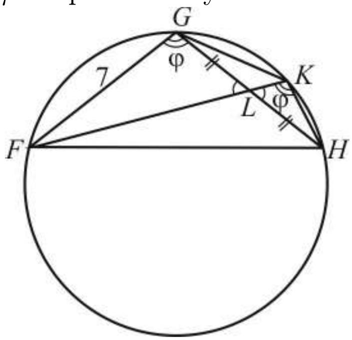
Первый случай, $\cos\alpha=\frac{1}{16}$, подставляя найденные значения тригонометрических функций в формулу тангенса половиного угла, имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-\frac{\sqrt{255}}{16}}{1+\frac{1}{16}}=-\frac{\sqrt{255}}{17}$, откуда $\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{15}{17}}}$ — в ответ.

Второй случай, $\cos\alpha=-\frac{1}{16}$, подставляя найденные значения тригонометрических функций в формулу тангенса половиного угла, имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-\frac{\sqrt{255}}{16}}{1-\frac{1}{16}}=-\frac{\sqrt{255}}{15}$, откуда $\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{17}{15}}}$ — в ответ.

Ответ: $-\sqrt{\frac{15}{17}}$, $-\sqrt{\frac{17}{15}}$.

3. Указание: медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника, откуда искомая площадь $S_{\triangle GKH} = 2 \cdot S_{\triangle HKL}$. Опирающиеся на одну и ту же дугу вписанные углы FGH и FKH равны, пусть $\varphi = \angle FGH$. В условии задан только $\sin\varphi$, поэтому возможны два случая, когда угол φ острый или тупой.





В обоих случаях треугольники FGL и HKL подобны по двум углам, поскольку кроме $\varphi = \angle FGL = \angle FGH = \angle FKH = \angle LKH$ у них имеются равные вертикальные углы FLG и KLH. Коэффициет подобия $k = \frac{HL}{FL}$, тогда $S_{\triangle HKL} = k^2 \cdot S_{\triangle FGL}$. Подставим в формулу $S_{\triangle GKH} = 2 \cdot S_{\triangle HKL}$ найденное соотношение и продолжим выкладки, $S_{\triangle GKH} = k^2 \cdot 2 \cdot S_{\triangle FGL} = k^2 \cdot S_{\triangle FGH}$. По формуле площади треугольника $S_{\triangle FGH} = \frac{1}{2} \cdot 7^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$. Осталось найти k^2.

По теореме косинусов $FL = \sqrt{FG^2 + GL^2 - 2 \cdot FG \cdot GL \cdot \cos\varphi}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ найдем $\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \pm\frac{2}{3}$. Подставим найденные и данные величины в формулу, $FL = \sqrt{7^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \mp 2 \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3}}$, откуда, при $\cos\varphi > 0$, имеем $FL_1 = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$, $k = \sqrt{\frac{3}{7}}$, $k^2 = \frac{3}{7}$, искомая площадь $S_{\triangle GKH} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{7\sqrt{5}}{2}$, $\boxed{S_1 = \frac{7\sqrt{5}}{2}}$ — в ответ, при $\cos\varphi < 0$, имеем $FL_2 = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{\frac{23}{3}}$, $k = \sqrt{\frac{3}{23}}$, $k^2 = \frac{3}{23}$, искомая площадь $S_{\triangle GKH} = \frac{3}{23} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{49\sqrt{5}}{46}$, $\boxed{S_2 = \frac{49\sqrt{5}}{46}}$ — в ответ.
Ответ: $\frac{7\sqrt{5}}{2}$, $\frac{49\sqrt{5}}{46}$.

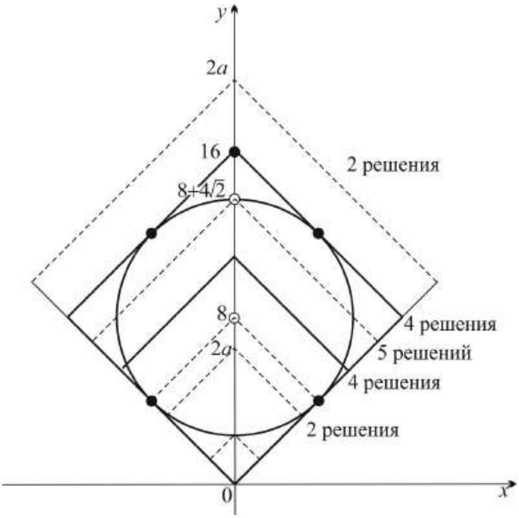
4. Указание: исходное неравенство имеет смысл при условиях $\begin{cases} 5+x \geqslant 0, \\ 9-x \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -5, \\ x \leqslant 9, \end{cases}$, откуда $x \in [-5; 9]$. Если $\sqrt{5+x} + x = 0$, то при допустимых x неравенство примет вид $0 > 0$, что неверно. Решим отдельно $\sqrt{5+x} = -x$ и исключим найденное значение x. При $-x \geqslant 0$, $x \leqslant 0$, имеем $5 + x = x^2$, $x^2 - x - 5 = 0$, откуда $x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{2} > 0$ — посторонний.

Итак, при ограничении $x \in \left[-5; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}; 9\right]$ имеем $\sqrt{9-x} + x + 3 > 0$, $\sqrt{9-x} > -x - 3$, что равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x-3 \geqslant 0, \\ \quad 9-x > (x+3)^2, \end{cases} \\ -x-3 < 0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -3, \\ x^2+7x < 0, \end{cases} \\ x > -3, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \in (-7; -3], \\ x > -3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left[-5; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}; 9\right]$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество —



квадрат, имеющий одной из вершин начало координат, а противоположную ей вершину на оси Oy, с координатами $(0; 2a)$. Второе множество — окружность с центром $(0; 8)$ и радиусом $4\sqrt{2}$, она пересекает ось Oy в ближней к началу координат точке $(0; 8 - 4\sqrt{2})$. При небольших a квадрат и окружность не пересекаются, при $8-4\sqrt{2} < 2a \leqslant 8$ они имеют две общие точки, при $8 < 2a < 8 + 4\sqrt{2}$ — четыре, потом 5, далее 6 до момента, когда окружность станет вписанной в квадрат, тогда при $2a = 16$ будет 4 общие точки, а при $2a > 16$ снова 2 общие точки.

Число общих точек соответствует числу решений системы. Ответ: $a \in \left(4; 4+2\sqrt{2}\right) \cup \{8\}$.

Вариант 1913

1. Указание: пусть весь объем работ равен 1, первая бригада строит дом за x дней — искомое, а вторая — за $x-15$ дней, тогда в день первая бригада выполняет $\frac{1}{x}$ всей работы, а вторая — $\frac{1}{x-15}$. По условию обе бригады вместе строят дом за 18 дней, откуда $18\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-15}\right)=1$, имеем квадратное уравнение $x^2-51x+270=0$, (корни которого:) $\boxed{x_1=45}$ — в ответ, и $x_2=6$ — посторонний, не удовлетворяет $x-15 \geqslant 0$. Ответ: 45 дней.

2. Указание: из определения геометрической прогрессии следует $\sin\alpha \neq 0$, а вместе с условием существования корня имеем $(-\sin\alpha) > 0$, откуда $\sin\alpha < 0$.

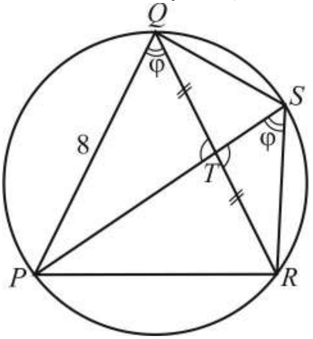
Применяя определение геометрической прогрессии, имеем уравнение $\frac{\left(\sqrt{-\sin\alpha}\right)^2}{7\cdot(1-\cos 2\alpha)} = \frac{7\cdot(1+\cos 2\alpha)}{\left(\sqrt{-\sin\alpha}\right)^2}$, откуда $49\cdot(1-\cos^2 2\alpha)=\sin^2\alpha$. По основному тригонометрическому тождеству $49\cdot\sin^2 2\alpha = \sin^2\alpha$. По формулам двойного угла $49\cdot 4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$. Сократим обе части уравнения на $\sin\alpha \neq 0$, получим $\cos^2\alpha = \frac{1}{49\cdot 4}$, откуда $\cos\alpha = \pm\frac{1}{14}$. По формуле половинного угла искомое $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ найдем $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{14^2}} = -\frac{\sqrt{195}}{14}$ (с учетом, в нашем случае, $\sin\alpha<0$).

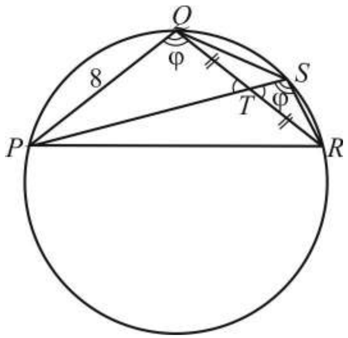
Первый случай, $\cos\alpha = \frac{1}{14}$, подставляя найденные значения тригонометрических функций в формулу тангенса половиного угла, имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-\frac{\sqrt{195}}{14}}{1+\frac{1}{14}} = -\frac{\sqrt{195}}{15}$, откуда $\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{13}{15}}}$ — в ответ.

Второй случай, $\cos\alpha = -\frac{1}{14}$, подставляя найденные значения тригонометрических функций в формулу тангенса половиного угла, имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-\frac{\sqrt{195}}{14}}{1-\frac{1}{14}} = -\frac{\sqrt{195}}{13}$, откуда $\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{15}{13}}}$ — в ответ.

Ответ: $-\sqrt{\frac{13}{15}}$, $-\sqrt{\frac{15}{13}}$.

3. Указание: медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника, откуда искомая площадь $S_{\triangle QSR} = 2 \cdot S_{\triangle RST}$. Опирающиеся на одну и ту же дугу вписанные углы PQR и PSR равны, пусть $\varphi = \angle PQR$. В условии задан только $\sin\varphi$, поэтому возможны два случая, когда угол φ острый или тупой.





В обоих случаях треугольники PQT и RST подобны по двум углам, поскольку кроме $\varphi = \angle PQT = \angle PQR = \angle PSR = \angle TSR$ у них имеются равные вертикальные углы PTQ и STR. Коэффициет подобия $k = \frac{RT}{PT}$, тогда $S_{\triangle RST} = k^2 \cdot S_{\triangle PQT}$. Подставим в формулу $S_{\triangle QSR} = 2 \cdot S_{\triangle RST}$ найденное соотношение и продолжим выкладки, $S_{\triangle QSR} = k^2 \cdot 2 \cdot S_{\triangle PQT} = k^2 \cdot S_{\triangle PQR}$. По формуле площади треугольника $S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} \cdot 8^2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$. Осталось найти k^2.

По теореме косинусов $PT = \sqrt{PQ^2 + QT^2 - 2 \cdot PQ \cdot QT \cdot \cos\varphi}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ найдем $\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \pm\frac{1}{4}$. Подставим найденные и данные величины в формулу, $PT = \sqrt{8^2 + (4)^2 \mp 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4}}$, откуда, при $\cos\varphi > 0$, имеем $PT_1 = 4 \cdot \sqrt{4}$, $k = \sqrt{\frac{1}{4}}$, $k^2 = \frac{1}{4}$, искомая площадь $S_{\triangle QSR} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8^2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 2\sqrt{15}$, $\boxed{S_1 = 2\sqrt{15}}$ — в ответ, при $\cos\varphi < 0$, имеем $PT_2 = 4 \cdot \sqrt{6}$, $k = \sqrt{\frac{1}{6}}$, $k^2 = \frac{1}{6}$, искомая площадь $S_{\triangle QSR} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8^2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{4\sqrt{15}}{3}$, $\boxed{S_2 = \frac{4\sqrt{15}}{3}}$ — в ответ. Ответ: $2\sqrt{15}$, $\frac{4\sqrt{15}}{3}$.

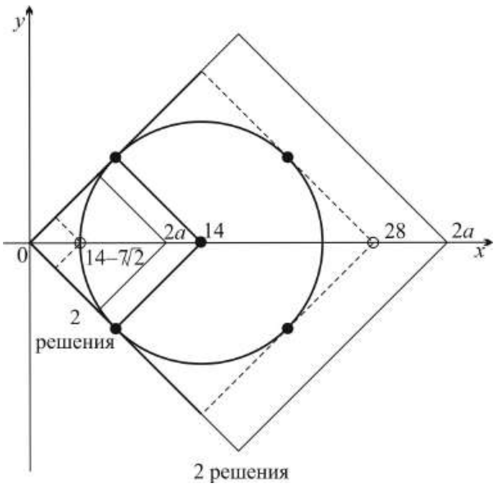
4. Указание: исходное неравенство имеет смысл при условиях $\begin{cases} 7+x \geqslant 0, \\ 16-x \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -7, \\ x \leqslant 16, \end{cases}$ откуда $x \in [-7; 16]$. Если $\sqrt{7+x}+x=0$, то при допустимых x неравенство примет вид $0>0$, что неверно. Решим отдельно $\sqrt{7+x}=-x$ и исключим найденное значение x. При $-x \geqslant 0$, $x \leqslant 0$, имеем $7+x=x^2$, $x^2-x-7=0$, откуда $x_1=\frac{1-\sqrt{29}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{29}}{2}>0$ — посторонний.

Итак, при ограничении $x \in \left[-7; \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; 16\right]$ имеем $\sqrt{16-x}+x+4>0$, $\sqrt{16-x}>-x-4$, что равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x-4 \geqslant 0, \\ 16-x>(x+4)^2, \end{cases} \\ -x-4<0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -4, \\ x^2+9x<0, \end{cases} \\ x>-4, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in (-9; -4], \\ x>-4. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left[-7; \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; 16\right]$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — квадрат, имеющий одной из вершин начало координат, а противоположную ей вершину на оси Ox, с координатами $(2a; 0)$. Второе множество — окружность с центром $(14; 0)$ и радиусом $7\sqrt{2}$, она пересекает ось Ox в ближней к началу координат точке $(14-7\sqrt{2}; 0)$. При небольших a квадрат и окружность не пересекаются, при $14-7\sqrt{2}<2a \leqslant 14$ они имеют две общие точки, при $14<2a<14+7\sqrt{2}$ — четыре, потом 5, далее 6 до момента, когда окружность станет вписанной в квадрат, тогда при $2a=28$ будет 4 общие точки, а при $2a>28$ снова 2 общие точки. Число общих точек соответствует числу решений системы. Ответ: $a \in \left(7-\frac{7\sqrt{2}}{2}; 7\right] \cup (14; +\infty)$.



Вариант 1914

1. Указание: пусть весь объем работ равен 1, первая бригада строит дом за x дней — искомое, а вторая — за $x-9$ дней, тогда в день первая бригада выполняет $\frac{1}{x}$ всей работы, а вторая — $\frac{1}{x-9}$. По условию обе бригады вместе строят дом за 6 дней, откуда $6\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-9}\right)=1$, имеем квадратное уравнение $x^2-21x+54=0$, (корни которого:) $\boxed{x_1=18}$ — в ответ, и $x_2=3$ — посторонний, не удовлетворяет $x-9\geqslant 0$. Ответ: 18 дней.

2. Указание: из определения геометрической прогрессии следует $\sin\alpha\neq 0$, а вместе с условием существования корня имеем $(-\sin\alpha)>0$, откуда $\sin\alpha<0$.

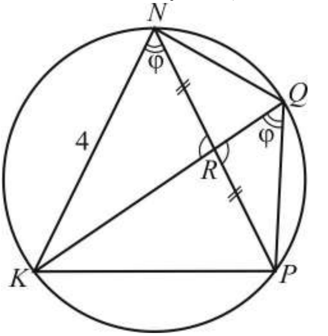
Применяя определение геометрической прогрессии, имеем уравнение $\frac{\left(\sqrt{-\sin\alpha}\right)^2}{6\cdot(1+\cos 2\alpha)}=\frac{6\cdot(1-\cos 2\alpha)}{\left(\sqrt{-\sin\alpha}\right)^2}$, откуда $36\cdot(1-\cos^2 2\alpha)=\sin^2\alpha$. По основному тригонометрическому тождеству $36\cdot\sin^2 2\alpha=\sin^2\alpha$. По формулам двойного угла $36\cdot4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$. Сократим обе части уравнения на $\sin\alpha\neq 0$, получим $\cos^2\alpha=\frac{1}{36\cdot4}$, откуда $\cos\alpha=\pm\frac{1}{12}$. По формуле половинного угла искомое $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ найдем $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{12^2}}=-\frac{\sqrt{143}}{12}$ (с учетом, в нашем случае, $\sin\alpha<0$).

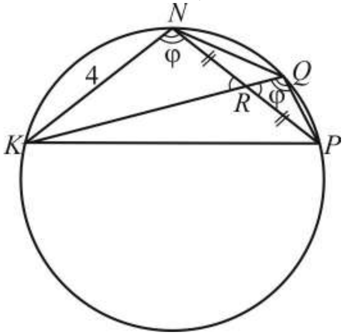
Первый случай, $\cos\alpha=\frac{1}{12}$, подставляя найденные значения тригонометрических функций в формулу тангенса половиного угла, имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-\frac{\sqrt{143}}{12}}{1+\frac{1}{12}}=-\frac{\sqrt{143}}{13}$, откуда $\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{11}{13}}}$ — в ответ.

Второй случай, $\cos\alpha=-\frac{1}{12}$, подставляя найденные значения тригонометрических функций в формулу тангенса половиного угла, имеем $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-\frac{\sqrt{143}}{12}}{1-\frac{1}{12}}=-\frac{\sqrt{143}}{11}$, откуда $\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{13}{11}}}$ — в ответ.

Ответ: $-\sqrt{\frac{11}{13}}$, $-\sqrt{\frac{13}{11}}$.

3. Указание: медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника, откуда искомая площадь $S_{\triangle NQP} = 2 \cdot S_{\triangle PQR}$. Опирающиеся на одну и ту же дугу вписанные углы KNP и KQP равны, пусть $\varphi = \angle KNP$. В условии задан только $\sin\varphi$, поэтому возможны два случая, когда угол φ острый или тупой.





В обоих случаях треугольники KNR и PQR подобны по двум углам, поскольку кроме $\varphi = \angle KNR = \angle KNP = \angle KQP = \angle RQP$ у них имеются равные вертикальные углы KRN и QRP. Коэффициет подобия $k = \frac{PR}{KR}$, тогда $S_{\triangle PQR} = k^2 \cdot S_{\triangle KNR}$. Подставим в формулу $S_{\triangle NQP} = 2 \cdot S_{\triangle PQR}$ найденное соотношение и продолжим выкладки, $S_{\triangle NQP} = k^2 \cdot 2 \cdot S_{\triangle KNR} = k^2 \cdot S_{\triangle KNP}$. По формуле площади треугольника $S_{\triangle KNP} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$. Осталось найти k^2.

По теореме косинусов $KR = \sqrt{KN^2 + NR^2 - 2 \cdot KN \cdot NR \cdot \cos\varphi}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ найдем $\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \pm\frac{3}{4}$. Подставим найденные и данные величины в формулу, $KR = \sqrt{4^2 + (2)^2 \mp 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4}}$, откуда, при $\cos\varphi > 0$, имеем $KR_1 = 2 \cdot \sqrt{2}$, $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $k^2 = \frac{1}{2}$, искомая площадь $S_{\triangle NQP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \sqrt{7}$, $\boxed{S_1 = \sqrt{7}}$ — в ответ, при $\cos\varphi < 0$, имеем $KR_2 = 2 \cdot \sqrt{8}$, $k = \sqrt{\frac{1}{8}}$, $k^2 = \frac{1}{8}$, искомая площадь $S_{\triangle NQP} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\boxed{S_2 = \frac{\sqrt{7}}{4}}$ — в ответ. Ответ: $\sqrt{7}$, $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

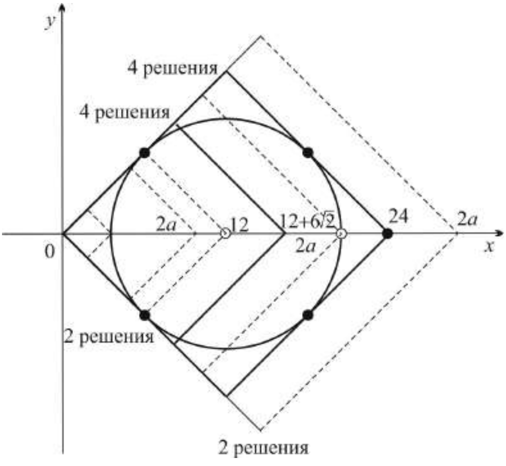
4. Указание: исходное неравенство имеет смысл при условиях $\begin{cases} 8+x \geqslant 0, \\ 25-x \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -8, \\ x \leqslant 25, \end{cases}$, откуда $x \in [-8; 25]$. Если $\sqrt{8+x}+x=0$, то при допустимых x неравенство примет вид $0 > 0$, что неверно. Решим отдельно $\sqrt{8+x}=-x$ и исключим найденное значение x. При $-x \geqslant 0$, $x \leqslant 0$, имеем $8+x=x^2$, $x^2-x-8=0$, откуда $x_1=\frac{1-\sqrt{33}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{33}}{2} > 0$ — посторонний.

Итак, при ограничении $x \in \left[-8; \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{33}}{2}; 25\right]$ имеем $\sqrt{25-x}+x+5>0$, $\sqrt{25-x} > -x-5$, что равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x-5 \geqslant 0, \\ 25-x > (x+5)^2, \end{cases} \\ -x-5<0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -5, \\ x^2+11x<0, \end{cases} \\ x>-5, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in (-11; -5], \\ x > -5. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left[-8; \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{33}}{2}; 25\right]$.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — квадрат, имеющий одной из вершин начало координат, а противоположную ей вершину на оси Ox, с координатами $(2a; 0)$. Второе множество — окружность с центром $(12; 0)$ и радиусом $6\sqrt{2}$, она пересекает ось Ox в ближней к началу координат точке $(12-6\sqrt{2}; 0)$. При небольших a квадрат и окружность не пересекаются, при $12-6\sqrt{2} < 2a \leqslant 12$ они имеют две общие точки, при $12 < 2a < 12+6\sqrt{2}$ — четыре, потом 5, далее 6 до момента, когда окружность станет вписанной в квадрат, тогда при $2a=24$ будет 4 общие точки, а при $2a > 24$ снова 2 общие точки. Число общих точек соответствует числу решений системы. Ответ: $a \in (6; 6+3\sqrt{2}) \cup \{12\}$.



Вариант 1921

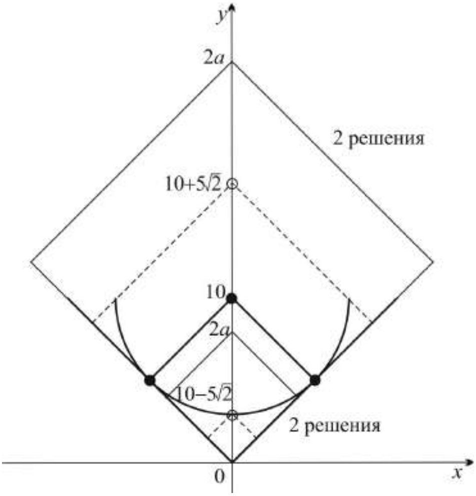
1. Указание: пусть v_1 и v_2 км/ч — искомые скорости поездов. Условие встречи поездов в обычное время дает первое уравнение $4 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2 = 640$. Для составления второго уравнения время, данное в часах и минутах, переведем в часы. Один поезд, пусть первый, находился в пути дольше другого на $\frac{4}{5}$ ч, затем каждый поезд был в пути по $\frac{7}{2}$ ч, вместе прошли весь путь, имеем второе уравнение $\left(\frac{4}{5} + \frac{7}{2}\right) \cdot v_1 + \frac{7}{2} \cdot v_2 = 640$. Решая их совместно, находим $\boxed{v_1 = 100,\ v_2 = 60}$ — в ответ. Ответ: 100 км/ч и 60 км/ч.

2. Совпадает частично с задачей из варианта 1911. Для поиска $\operatorname{tg} \alpha$ в решении указанной задачи имеются все данные.

3. Частный случай задачи из варианта 1911.

4. Совпадает по сути с задачей из варианта 1911, при замене квадрата первого множителя его модулем, решение одинаково.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — квадрат, имеющий одной из вершин начало координат, а противоположную ей вершину на оси Oy, с координатами $(0; 2a)$. Второе множество — полуокружность с центром $(0; 10)$ и радиусом $5\sqrt{2}$, она пересекает ось Oy в точке $(0; 10 - 5\sqrt{2})$. При небольших a квадрат и полуокружность не пересекаются, при $10 - 5\sqrt{2} < 2a \leqslant 10$ они имеют две общие точки, при $10 < 2a \leqslant 10 + 5\sqrt{2}$ — четыре, а при $2a > 10 + 5\sqrt{2}$ снова 2 общие точки. Число общих точек соответствует числу решений системы.



Ответ: $a \in \left(5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}; 5\right] \cup \left(5 + \frac{5\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$.

Вариант 1922

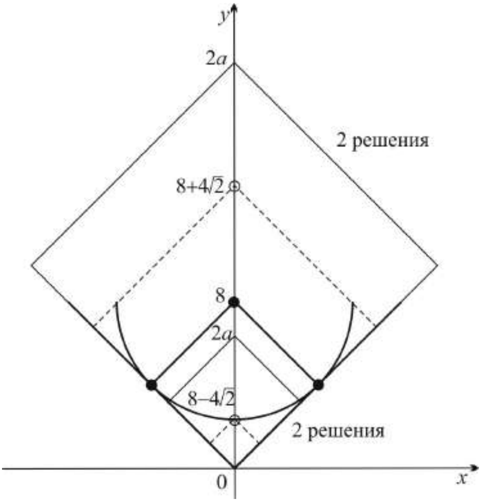
1. Указание: пусть v_1 и v_2 км/ч — искомые скорости поездов. Условие встречи поездов в обычное время дает первое уравнение $6 \cdot v_1 + 6 \cdot v_2 = 900$. Для составления второго уравнения время, данное в часах и минутах, переведем в часы. Один поезд, пусть первый, находился в пути дольше другого на $\frac{6}{5}$ ч, затем каждый поезд был в пути по $\frac{26}{5}$ ч, вместе прошли весь путь, имеем второе уравнение $\left(\frac{6}{5} + \frac{26}{5}\right) \cdot v_1 + \frac{26}{5} \cdot v_2 = 900$. Решая их совместно, находим $\boxed{v_1 = 100,\ v_2 = 50}$ — в ответ. Ответ: 100 км/ч и 50 км/ч.

2. Совпадает частично с задачей из варианта 1912. Для поиска $\operatorname{tg}\alpha$ в решении указанной задачи имеются все данные.

3. Частный случай задачи из варианта 1912.

4. Совпадает по сути с задачей из варианта 1912, при замене квадрата первого множителя его модулем, решение одинаково.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — квадрат, имеющий одной из вершин начало координат, а противоположную ей вершину на оси Oy, с координатами $(0; 2a)$. Второе множество — полуокружность с центром $(0; 8)$ и радиусом $4\sqrt{2}$, она пересекает ось Oy в точке $(0; 8 - 4\sqrt{2})$. При небольших a квадрат и полуокружность не пересекаются, при $8 - 4\sqrt{2} < 2a \leqslant 8$ они имеют две общие точки, при $8 < 2a \leqslant 8 + 4\sqrt{2}$ — четыре, а при $2a > 8 + 4\sqrt{2}$ снова 2 общие точки. Число общих точек соответствует числу решений системы.



Ответ: $a \in \left(4 - 2\sqrt{2}; 4\right] \cup \left(4 + 2\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Вариант 1923

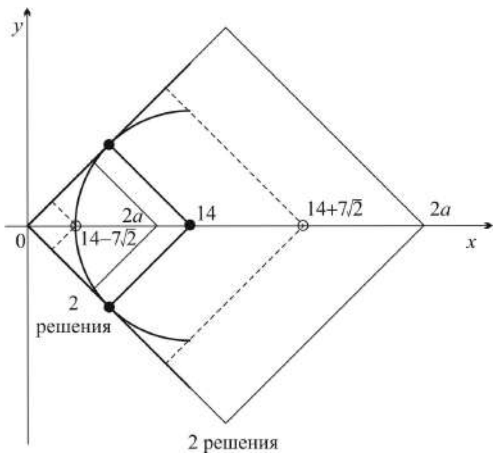
1. Указание: пусть v_1 и v_2 км/ч — искомые скорости поездов. Условие встречи поездов в обычное время дает первое уравнение $10 \cdot v_1 + 10 \cdot v_2 = 1200$. Для составления второго уравнения время, данное в часах и минутах, переведем в часы. Один поезд, пусть первый, находился в пути дольше другого на $\frac{27}{10}$ ч, затем каждый поезд был в пути по $\frac{41}{5}$ ч, вместе прошли весь путь, имеем второе уравнение $\left(\frac{27}{10} + \frac{41}{5}\right) \cdot v_1 + \frac{41}{5} \cdot v_2 = 1200$. Решая их совместно, находим $\boxed{v_1 = 80,\ v_2 = 40}$ — в ответ. Ответ: 80 км/ч и 40 км/ч.

2. Совпадает частично с задачей из варианта 1913. Для поиска $\operatorname{tg}\alpha$ в решении указанной задачи имеются все данные.

3. Частный случай задачи из варианта 1913.

4. Совпадает по сути с задачей из варианта 1913, при замене квадрата первого множителя его модулем, решение одинаково.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — квадрат, имеющий одной из вершин начало координат, а противоположную ей вершину на оси Ox, с координатами $(2a; 0)$. Второе множество — полуокружность с центром $(14; 0)$ и радиусом $7\sqrt{2}$, она пересекает ось Ox в точке $(14 - 7\sqrt{2}; 0)$. При небольших a квадрат и полуокружность не пересекаются, при $14 - 7\sqrt{2} < 2a \leqslant 14$ они имеют две общие точки, при $14 < 2a \leqslant 14 + 7\sqrt{2}$ — четыре, а при $2a > 14 + 7\sqrt{2}$ снова 2 общие точки. Число общих точек соответствует числу решений системы.



Ответ: $a \in \left(7 - \frac{7\sqrt{2}}{2}; 7\right] \cup \left(7 + \frac{7\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$.

Вариант 1924

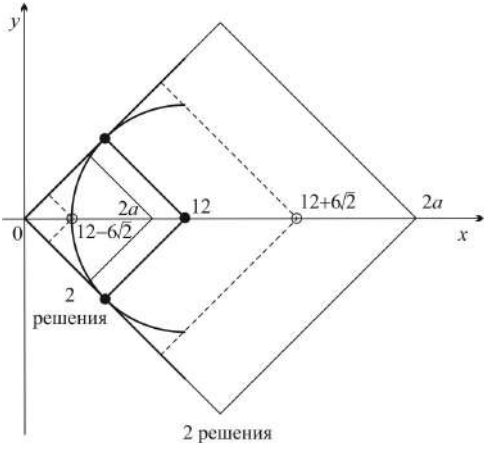
1. Указание: пусть v_1 и v_2 км/ч — искомые скорости поездов. Условие встречи поездов в обычное время дает первое уравнение $7 \cdot v_1 + 7 \cdot v_2 = 980$. Для составления второго уравнения время, данное в часах и минутах, переведем в часы. Один поезд, пусть первый, находился в пути дольше другого на $\frac{7}{5}$ ч, затем каждый поезд был в пути по $\frac{31}{5}$ ч, вместе прошли весь путь, имеем второе уравнение $\left(\frac{7}{5} + \frac{31}{5}\right) \cdot v_1 + \frac{31}{5} \cdot v_2 = 980$. Решая их совместно, находим $\boxed{v_1 = 80,\ v_2 = 60}$ — в ответ. Ответ: 80 км/ч и 60 км/ч.

2. Совпадает частично с задачей из варианта 1914. Для поиска $\operatorname{tg}\alpha$ в решении указанной задачи имеются все данные.

3. Частный случай задачи из варианта 1914.

4. Совпадает по сути с задачей из варианта 1914, при замене квадрата первого множителя его модулем, решение одинаково.

5. Указание: системе уравнений соответствует пересечение двух множеств точек координатной плоскости. Первое множество — квадрат, имеющий одной из вершин начало координат, а противоположную ей вершину на оси Ox, с координатами $(2a; 0)$. Второе множество — полуокружность с центром $(12; 0)$ и радиусом $6\sqrt{2}$, она пересекает ось Ox в точке $(12 - 6\sqrt{2}; 0)$. При небольших a квадрат и полуокружность не пересекаются, при $12 - 6\sqrt{2} < 2a \leqslant 12$ они имеют две общие точки, при $12 < 2a \leqslant 12 + 6\sqrt{2}$ — четыре, а при $2a > 12 + 6\sqrt{2}$ снова 2 общие точки. Число общих точек соответствует числу решений системы.



Ответ: $a \in \left(6 - 3\sqrt{2}; 6\right] \cup \left(6 + 3\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Критерии оценивания, 9 класс

Полное и обоснованное решение каждой задачи с правильным ответом оценивалось по 7 баллов. Частично верные решения оценивались в соответствии с таблицей, 0 баллов выставлялось, если решение не удовлетворяло ни одному из критериев.

Физико-математические классы

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 1	7
Описка в ответе при верном решении.	6
Арифметическая ошибка, задача доведена до ответа.	4
Одно из: более одной арифметической ошибки, при этом задача доведена до ответа, либо записана только верная система (уравнение) без ответа.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 2	7
Одна арифметическая ошибка в конце, ответ получен.	6
Одно из: более одной арифметической ошибки, при этом ответ получен с двумя решениями, либо верно рассмотрен только один случай.	4
Одно из: рассмотрен только один случай с неверным ответом, либо имеется верное рассуждение (выписано уравнение), которое можно довести до правильного ответа, при этом ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 3	7
Ответ получен с одной арифметической ошибкой или опиской.	6
Одно из: рассмотрен только один из двух случаев с верным ответом, либо неверно применена формула площади.	4
Рассмотрен только один верный случай с арифметической ошибкой, ответ получен.	3

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 3	
Имеется верное геометрическое рассуждение (найдены равные углы, либо подобные треугольники, либо составлены верные уравнения) с указанием на оба случая, которое можно довести до правильного ответа. Ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 4	7
Потеря одной граничной точки.	6
Потеря двух граничных точек.	5
Одно из: при верном ходе решения допущена одна арифметическая ошибка в вычислениях корней первого множителя или границ промежутков, либо из ответа не исключен верно найденный ноль первого множителя, ответ выписан.	4
Одно из: сокращение обеих частей неравенства на первый множитель без учета его равенства нулю, либо возведение в квадрат обеих частей неравенства без учета знака части неравенства, не являющейся радикалом, ответ выписан.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 5	7
Описка в ответе при верном решении.	6
При выписанном ответе одно из: потеряно решение в виде граничной (отдельной) точки, либо допущена арифметическая ошибка при вычислении границ параметра при верном анализе случаев, либо в ответе содержится только один верный промежуток.	4
Имеется верное рассуждение (верно определены и изображены множества, соответствующие каждому уравнению, их взаимное расположение, намечена схема решения), которое можно довести до правильного ответа, ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0

Химико-биологические классы

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 1	7
Описка в ответе при верном решении.	6
Арифметическая ошибка, задача доведена до ответа.	4
Одно из: более одной арифметической ошибки, при этом задача доведена до ответа, либо записаны только верные уравнения без ответа.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 2	7
Одна арифметическая ошибка в конце, ответ получен.	6
Одно из: более одной арифметической ошибки, при этом ответ получен с двумя решениями, либо верно рассмотрен только один случай.	4
Одно из: рассмотрен только один случай с неверным ответом или имеется верное рассуждение (выписано уравнение), которое можно довести до правильного ответа, при этом ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 3	7
Ответ получен с одной арифметической ошибкой или опиской.	6
При выписанном ответе одно из: допущено более одной арифметической ошибки, ход решения верный, либо неверно применена формула площади, либо верно решен только противоположный случай.	4
Имеется верное геометрическое рассуждение (найдены равные углы, либо подобные треугольники, либо составлены верные уравнения), которое можно довести до правильного ответа. Ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0

Ошибки или стадии решения	Баллы
Задача 4	7
Потеря одной граничной точки.	6
Потеря двух граничных точек.	5
Одно из: при верном ходе решения допущена одна арифметическая ошибка в вычислениях корней первого множителя или границ промежутков, либо из ответа не исключен верно найденный ноль первого множителя, ответ выписан.	4
Одно из: сокращение обеих частей неравенства на первый множитель без учета его равенства нулю, либо возведение в квадрат обеих частей неравенства без учета знака части неравенства, не являющейся радикалом, ответ выписан.	2
Во всех остальных случаях.	0
Задача 5	7
Описка в ответе при верном решении.	6
Потеряно решение в виде граничной точки.	5
Одно из: ответ отличается от правильного только включением случая, когда стороны квадрата проходят через концы дуги, либо допущена арифметическая ошибка при вычислении границ параметра при верном анализе случаев.	4
Имеется верное рассуждение (верно определены и изображены множества, соответствующие каждому уравнению, их взаимное расположение, намечена схема решения), которое можно довести до правильного ответа, ответ может быть не получен.	2
Во всех остальных случаях.	0

РАЗДЕЛ 3

ОТВЕТЫ

2021 год, 11 класс

Вариант 111

1. а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{6}$, 3π, $\frac{19\pi}{6}$.
2. $x\in[2;3)\cup(3;8)$. **3.** $\sqrt{14}$, $\sqrt{20}$. **4.** $a\in(0;7)\cup(7;9]\cup\{21\}$.
5. 81π, $\arcsin\frac{4}{9}$.

Вариант 112

1. а) $\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{12}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{4}$.
2. $x\in[4;5)\cup(5;13)$. **3.** $2\sqrt{15}$, $2\sqrt{19}$. **4.** $a\in(0;4)\cup(4;5]\cup\{15\}$.
5. 289π, $\arcsin\frac{12}{17}$.

Вариант 113

1. а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$; б) 3π, $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{3}$.
2. $x\in[3;4)\cup(4;11)$. **3.** $2\sqrt{11}$, $2\sqrt{23}$. **4.** $a\in(0;5)\cup(5;6]\cup\{14\}$.
5. 361π, $\arcsin\frac{6}{19}$.

Вариант 114

1. а) $-\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{12}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$;
б) $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{4}$. **2.** $x\in[5;6)\cup(6;16)$. **3.** $\sqrt{12}$, $\sqrt{22}$.
4. $a\in(0;6)\cup(6;7]\cup\{8\}$. **5.** 121π, $\arcsin\frac{6}{11}$.

Вариант 121

1. а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{6}$, 3π, $\frac{19\pi}{6}$.
2. $x\in[2;3)\cup(3;8)$. **3.** $\sqrt{14}$. **4.** $a\in(0;7)\cup(7;9]\cup\{21\}$. **5.** 81π, $\arcsin\frac{7}{9}$.

Вариант 122

1. а) $\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{12}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}, m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{4}$.
2. $x\in[4;5)\cup(5;13)$. **3.** $2\sqrt{15}$. **4.** $a\in(0;4)\cup(4;5]\cup\{15\}$.
5. 289π, $\arcsin\frac{1}{17}$.

Вариант 123

1. а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$; б) 3π, $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{3}$.
2. $x\in[3;4)\cup(4;11)$. **3.** $2\sqrt{11}$. **4.** $a\in(0;5)\cup(5;6]\cup\{14\}$.
5. 361π, $\arcsin\frac{17}{19}$.

Вариант 124

1. а) $-\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{12}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{4}$. **2.** $x\in[5;6)\cup(6;16)$. **3.** $\sqrt{12}$.
4. $a\in(0;6)\cup(6;7]\cup\{8\}$. **5.** 121π, $\arcsin\frac{7}{11}$.

2021 год, 9 класс

Вариант 1911

1. 30 дней. **2.** $-\sqrt{\frac{17}{19}}$, $-\sqrt{\frac{19}{17}}$. **3.** $11\sqrt{2}$, $\frac{121\sqrt{2}}{19}$.
4. $x\in\left[-3;\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};4\right]$. **5.** $a\in\left(5-\frac{5\sqrt{2}}{2};5\right]\cup(10;+\infty)$.

Вариант 1912

1. 28 дней. **2.** $-\sqrt{\frac{15}{17}}$, $-\sqrt{\frac{17}{15}}$. **3.** $\frac{7\sqrt{5}}{2}$, $\frac{49\sqrt{5}}{46}$.
4. $x\in\left[-5;\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2};9\right]$. **5.** $a\in\left(4;4+2\sqrt{2}\right)\cup\{8\}$.

Вариант 1913

1. 45 дней. **2.** $-\sqrt{\frac{13}{15}}$, $-\sqrt{\frac{15}{13}}$. **3.** $2\sqrt{15}$, $\frac{4\sqrt{15}}{3}$.
4. $x \in \left[-7; \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; 16\right]$. **5.** $a \in \left(7 - \frac{7\sqrt{2}}{2}; 7\right] \cup (14; +\infty)$.

Вариант 1914

1. 18 дней. **2.** $-\sqrt{\frac{11}{13}}$, $-\sqrt{\frac{13}{11}}$. **3.** $\sqrt{7}$, $\frac{\sqrt{7}}{4}$.
4. $x \in \left[-8; \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{33}}{2}; 25\right]$. **5.** $a \in \left(6; 6+3\sqrt{2}\right) \cup \{12\}$.

Вариант 1921

1. 100 км/ч и 60 км/ч. **2.** $\pm\sqrt{323}$. **3.** $\frac{121\sqrt{2}}{19}$.
4. $x \in \left[-3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 4\right]$.
5. $a \in \left(5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}; 5\right] \cup \left(5 + \frac{5\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$.

Вариант 1922

1. 100 км/ч и 50 км/ч. **2.** $\pm\sqrt{255}$. **3.** $\frac{49\sqrt{5}}{46}$.
4. $x \in \left[-5; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}; 9\right]$.
5. $a \in \left(4 - 2\sqrt{2}; 4\right] \cup \left(4 + 2\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Вариант 1923

1. 80 км/ч и 40 км/ч. **2.** $\pm\sqrt{195}$. **3.** $\frac{4\sqrt{15}}{3}$.
4. $x \in \left[-7; \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; 16\right]$.
5. $a \in \left(7 - \frac{7\sqrt{2}}{2}; 7\right] \cup \left(7 + \frac{7\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$.

Вариант 1924

1. 80 км/ч и 60 км/ч. **2.** $\pm\sqrt{143}$. **3.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$.
4. $x \in \left[-8; \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{33}}{2}; 25\right]$.
5. $a \in \left(6 - 3\sqrt{2}; 6\right] \cup \left(6 + 3\sqrt{2}; +\infty\right)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ляпунов Игорь Борисович

ВАРИАНТЫ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ СУНЦ НГУ ЗА 2021 ГОД

Методическое пособие

Технический редактор *Т. В. Иванова*

Графические работы *А. Г. Иванова*

Верстка *И. Б. Ляпунова*

Подписано в печать 17.05.2021 г.
Формат $60 \times 84/16$ Уч.-изд. л. 3,75. Усл. печ. л. 3,49.
Тираж 300 экз. Заказ № 101
Издательско-полиграфический центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2