МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

В. П. Чуваков

УСКОЛЬЗАЮЩАЯ ПАРАБОЛА
ИЛИ
ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ
К КВАДРАТИЧНЫМ

Учебно-методическое пособие

Новосибирск
2019

УДК 513(075.4)
ББК 22.15я7
Ч 82

Рецензент
????????

Чуваков, В. П.

Ч 82 Ускользающая парабола или задачи, сводящиеся к квадратичным : учеб.-метод. пособие / В. П. Чуваков ; СУНЦ НГУ. – Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2019. – 32 с.

ISBN 978-5-4437-0985-7

В пособии рассматриваются задачи повышенного уровня сложности с параметрами, сводящиеся к квадратичным функциям. Подобные задачи часто встречаются на вузовских олимпиадах и ЕГЭ.

Для некоторого класса задач сведение к квадратичным функциям происходит за один шаг (замена переменных и начальных условий), для других – сведение к квадратичным целое искусство, требующее больших усилий и математического изящества.

Пособие составлено на основе материала факультатива для 11 класса по решению задач повышенной сложности.

Адресовано школьникам старших классов и преподавателям.

УДК 53(075.8)
ББК 22.15я7
Ч 82

Издано при финансовой поддержке Минобрнауки РФ
грант № 075-15-2019-1459

ISBN 978-5-4437-0985-7

РАЗДЕЛ 1

Основные сведения о квадратичной функции

Квадратным трехчленом называется выражение вида, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант квадратного трехчлена.

1. Выделение «полного квадрата»

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

2. График квадратного трехчлена – парабола с вершиной в точке

$$(x_b; y_b) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-D}{4a}\right).$$

3. График функции пересекается с осью OY в точке $y_0 = f(0) = c$.

4. Если $a > 0$, то функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ монотонно убывает на интервале $(-\infty; x_b]$ и монотонно возрастает на интервале $[x_b; \infty)$.

5. Если $a < 0$, то функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ монотонно возрастает на интервале $(-\infty; x_b]$ и монотонно убывает на интервале $[x_b; \infty)$.

6. Если $a > 0$, то $ax^2 + bx + c \geq \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

7. Если $a < 0$, то $ax^2 + bx + c \leq \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

8. Парабола $f(x) = ax^2 + bx + c$ симметрична относительно оси $x = x_b = \dfrac{-b}{2a}$.

9. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

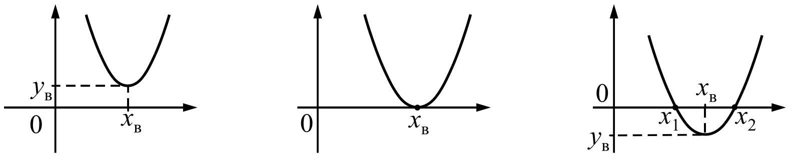
– если $D < 0$, то уравнение не имеет корней;

– если $D = 0$, то имеет один корень $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$;

– если $D > 0$, то два различных корня $x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 - x_1 = \dfrac{\sqrt{D}}{a}$.

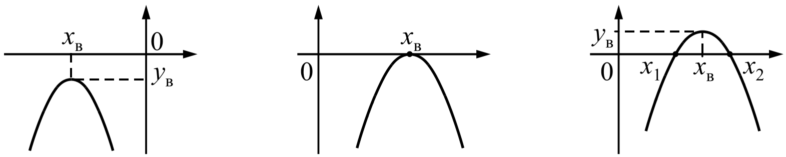
10. Графическая интерпретация теоремы о существовании корней.

$a > 0$



$D < 0$ (нет корней) $D = 0$ (один корень) $D > 0$ (два корня)

$a < 0$



$D < 0$ (нет корней) $D = 0$ (один корень) $D > 0$ (два корня)

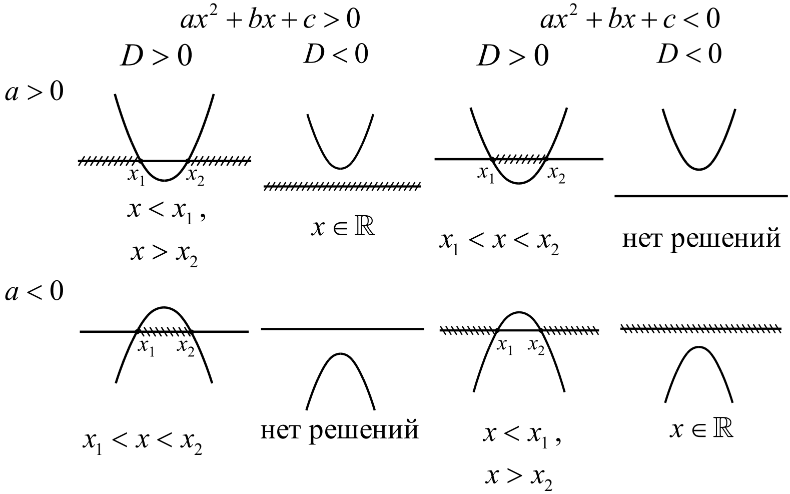
11. Теорема Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$

12. Обратная теорема Виета. Если числа x_1, x_2 удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1, x_2 являются корнями приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

13. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$.

14. Корни x_1, x_2 одного знака, если $D > 0$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} > 0$. Если $\dfrac{-b}{a} = x_1 + x_2 > 0$, то оба корня положительны, а если $\dfrac{-b}{a} = x_1 + x_2 < 0$, то оба корня отрицательны.

15. Решение квадратных неравенств и их графическая интерпретация.



16. Используя теорему Виета, можно вычислять некоторые симметрические выражения от корней, не вычисляя самих корней:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}, \; x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 x_2 .$$

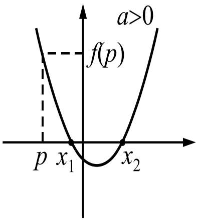
Например: $\left(x_1 - x_2\right)^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1 x_2$,

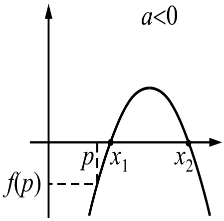
$$x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)^2 \left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right) = \left(x_1 + x_2\right)\left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1 x_2\right),$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}, \; \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} .$$

17. Расположение корней квадратного уравнения и их графическая интерпретация [1].

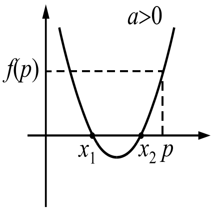
Вопрос: оба корня больше числа p?

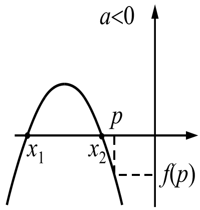




$$\begin{cases} a > 0, \\ D > 0, \\ x_b = \dfrac{-b}{2a} > p, \\ f(p) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0, \\ D > 0, \\ x_b = \dfrac{-b}{2a} > p, \\ f(p) < 0 \end{cases}$$

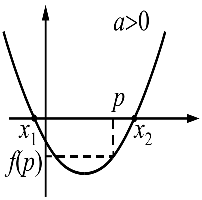
Вопрос: оба корня меньше числа p?

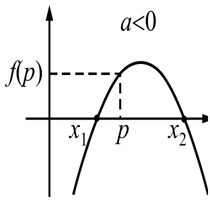




$$\begin{cases} a > 0, \\ D > 0, \\ x_b = \dfrac{-b}{2a} < p, \\ f(p) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0, \\ D > 0, \\ x_b = \dfrac{-b}{2a} < p, \\ f(p) < 0 \end{cases}$$

Вопрос: число p находится между корнями?





$$\begin{cases} a > 0, \\ f(p) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0, \\ f(p) > 0 \end{cases}$$

[1]В данном учебно-методическом пособии рассматриваются решения задач из [1–8], задач с ЕГЭ или вузовских олимпиад, авторских задач или задач с сайта alexlarin.net.

РАЗДЕЛ 2

Решение задач с помощью замены переменных

Алгоритм решения:

– сделайте замену переменных;

– сформулируйте условие задачи для новой переменной;

– сведите исходную задачу к классической задаче на квадратичную функцию с новыми условиями и решите ее;

– вернитесь к исходным переменным и запишите ответ.

Некоторые варианты замены переменных:

$y = a^x \ (y > 0)$, $a^{|x|} = y$ ($y > 0$ при $a > 1$, $y < 1$ при $a < 1$),

$y = \sin x$, $y = \cos x \ (|y| \le 1)$, $a^{-|x|} = y \ (0 < y < 1)$, $y = \sqrt{x} \ (y \ge 0)$,

$y = x^2 \ (y \ge 0)$, $\log_a \sin x = y$ ($y < 0$ при $a > 1$, $y > 0$ при $a < 1$),

$y = \sin x \cdot \cos x \ (-0{,}5 \le y \le 0{,}5)$, $a^{\sin x} = y \ (a > 1 \Rightarrow 1/a < y < a)$,

$y = x + \dfrac{1}{x} \ (|y| \ge 2)$, $y = \sin x + \cos x \ \left(-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}\right)$.

Пример 2.1. При каких значениях параметра p уравнение $(p-4)9^x + (p+1)3^x + 2p - 1 = 0$ не имеет решений?

Комментарии. Пусть $y = 3^x > 0$ Новое условие: при каких значениях параметра уравнение $(p-4)y^2 + (p+1)y + 2p - 1 = 0$ не имеет положительных решений? Уравнение может вообще не иметь решений, а может иметь решения, но не положительные.

Возможны следующие варианты:

1) $p - 4 = 0$, т. е. уравнение превращается в линейное $5t + 7 \Rightarrow t = \dfrac{-7}{5} < 0$;

2) $p - 4 \ne 0$:

– $D < 0$, уравнение вообще не имеет решений;

– $D \ge 0$ и решения не положительные.

Рассмотрим эти случаи:

$$D = (p+1)^2 - 4(p-4)(2p-1) = -7p^2 + 38p - 15 = -(7p-3)(p-5)$$

$-\ D<0 \Rightarrow p<\frac{3}{7},\ p>5$;

– при $p-4>0,\ D \ge 0,\ f(0) \ge 0,\ x_b<0 \Rightarrow -\frac{3}{7} \le p \le 5,\ 2p-1 \ge 0,$
$-\frac{p+1}{p-4}<0 \Rightarrow p>4$;

– при $p-4<0,\ D \ge 0,\ f(0) \le 0,\ x_b<0 \Rightarrow 2p-1 \ge 0,\ -\frac{p+1}{p-4}<0,$
$-\frac{3}{7} \le p \le 5 \Rightarrow \varnothing$.

Ответ: $p<\frac{3}{7},\ p \ge 4$.

Пример 2.2. При каких значениях параметра a уравнение $5^{2x}-10^x+4^{x-1}(a-2)=0$ имеет единственное решение?

Комментарии. Легко заметить, что уравнение легко сводится к квадратному, заменой $t=\frac{5^x}{2^x}>0$.

Новое условие: при каких значениях параметра уравнение $t^2-t+\frac{a-2}{4}=0$ имеет единственное положительное решение.

Возможны следующие варианты решения задачи:

1) $D=0$, т. е. уравнение имеет единственное решение и оно положительное;

2) $D \ge 0$, но одно из решений не положительное.

Рассмотрим эти случаи.

$$D=3-a=0 \Rightarrow a=3 \Rightarrow t^2-1+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}>0;$$

$$D=a-3 \ge 0,\ f(0)=\frac{a-2}{4}<0 \Rightarrow a \le 2.$$

Ответ: $a \le 2,\ a=3$.

Пример 2.3. При каких значениях параметра a уравнение $7^{2x}-2\cdot 21^x+(2a-1)9^x=0$ имеет единственное решение?

Ответ: $a \le 0{,}5$, $a = 1$.

Пример 2.4. При каких значениях параметра a неравенство $(a-1)9^x - (2a-1)3^x - 1 = 0$ имеет два различных корня?

Ответ: $a \ge 1$.

Пример 2.5. При каких значениях параметра a неравенство $a9^x + 4(a-1)3^x + a > 1$ справедливо для всех x ?

Ответ: $a \ge 1$.

Пример 2.6. При каких значениях параметра a уравнение $4^x + 2^{x+2} + 7 = a - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$ имеет решение?

Ответ: $[17; \infty)$.

Пример 2.7. При каких значениях параметра a уравнение $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$ имеет два различных корня?

Комментарии. Пусть $y = 3^{-|x-2|}$ $(0 < y \le 1)$. Новое условие: при каких значениях параметра уравнение $y^2 - 4y - a = 0$ имеет только один корень из промежутка $(0; 1]$? Тогда уравнение $y = 3^{-|x-2|}$ будет иметь два корня:

1) $D = 16 + 4a = 0 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2 > 1 \Rightarrow \varnothing$;

2) $D > 0$, но только один корень из отрезка $(0; 1]$

$D = 16 + 4a > 0 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow a(a+3) < 0 \Rightarrow -3 < a < 0$.

Если $D = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = -3$.

При $a = 0$ уравнение имеет вид $t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t = 0$, $t = 4 \Rightarrow \varnothing$.

При $a = -3$ уравнение имеет вид $t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 3,\ t = 1$.

Ответ: $-3 \le a < 0$.

Пример 2.8. Найдите все значения параметра a, при которых значения функции $y = a4^x + (a+2)2^x + 2$ не положительны для всех x из промежутка $[0; 1]$.

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = 2^x$ $(0 \le x \le 1 \Rightarrow 1 \le t \le 2)$.

Ответ: $a \le -2$.

Пример 2.9. При каких значениях параметра a неравенство $4^{\cos x} - 2(a-3)2^{\cos x} + a + 3 > 0$ выполняется для всех x ?

Ответ: $a < \dfrac{19}{3}$.

Пример 2.10. При каких значениях параметра b уравнение $2(b^2+1)\cos^2 x + 4b^2\cos x + 1 = 0$ не имеет решений?

Комментарии. Сделаем замену переменных $y = \cos x$ $(|y| \le 1)$. Новое условие: при каких значениях параметра уравнение $2(b^2+1)y^2 + 4b^2 y + 1 = 0$ не имеет корней из промежутка $[-1; 1]$:

1) $D < 0$ уравнение вообще не имеет решений;

2) $D > 0$ но корни не принадлежат интервалу $[-1; 1]$:

$D = 16b^4 - 8(b^2+1) = 8(2b^4 - b^2 - 1) = 8(2b^2+1)(b^2-1)$;

$D < 0 \Rightarrow b^2 < 1$;

$D > 0 \Rightarrow b^2 > 1$ и отрезок $[-1; 1]$ должен либо лежать справа от параболы, либо внутри параболы, либо слева от параболы. Рассмотрим эти случаи:

– $f(1) = 6b^2 + 3 > 0$, $f(-1) = 3 - 2b^2$ – поэтому второй случай невозможен;

– $f(-1) = 3 - 2b^2 > 0$, $x_b = \dfrac{-b^2}{b^2+1} < -1 \Rightarrow \varnothing$;

– $f(1) = 6b^2 + 3 > 0$, $x_b = \dfrac{-b^2}{b^2+1} > 1 \Rightarrow \varnothing$;

– $D = 0 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow 4t^2 + 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow b^2 = 1$.

Ответ: $|b| \le 1$.

Пример 2.11. При каких значениях параметра a уравнение $\left(a^2+1\right)\sin^2 x+2a^2\sin x+\dfrac{1}{2}=0$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $|a|\geq 1$.

Пример 2.12. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x=a$ имеет решение?

Ответ: $-1\leq a\leq 0{,}5+\sqrt{2}$.

Пример 2.13. При каких значениях параметра a, неравенство $\sin^6 x+\cos^6 x+a\sin x\cdot\cos x\geq 0$ выполняется для всех x?

Комментарии:

$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$.

Сделаем замену переменных $y=\sin x\cdot\cos\left(|y|\leq\dfrac{1}{2}\right)$.

Ответ: $|a|\leq\dfrac{1}{2}$.

Пример 2.14. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $a^2+a-\sin^2 x-2a\cos x>1$, справедливо для любого x?

Ответ: $a<\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$, $a>2$.

Пример 2.15. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=a$ имеет корни.

Ответ: $a=1$, $-\dfrac{\sqrt{10}+1}{2}\leq a\leq\dfrac{\sqrt{10}-1}{2}$.

Пример 2.16. Найдите множество значений функции $f\left(x\right)=2\cos 2x+2\cos x+1$.

Комментарии. Сделаем замену переменных $t=\cos x$. Новое условие: найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f\left(t\right)=4t^2+2t-1=0$ на отрезке $\left[-1;1\right]$.

Так как вершина параболы расположена в точке $x_b = -\frac{1}{4} \in [-1; 1]$, то наименьшее значение на отрезке будет $f(x_b) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{-5}{4}$, а наибольшее – $f(1) = 5$.

Ответ: $\left[-\frac{5}{4}; 5\right]$.

Пример 2.17. Найдите множество значений функции $f(x) = 2\cos 2x + 2\sin x - 1$.

Ответ: $\left[-5; \frac{5}{4}\right]$.

Пример 2.18. При каких значениях a уравнение $\lg^2(\sin x) - 2a\lg(\sin x) - a^2 + 2 = 0$ имеет решение?

Комментарии. Сделаем замену переменных $y = \lg(\sin x) < 0$. Новое условие: при каких значениях параметра a уравнение $y^2 - 2ay - a^2 + 2 = 0$ имеет хотя бы одно отрицательное решение?

Ответ: $-\sqrt{2} \le a < -1,\ a \ge \sqrt{2}$.

Пример 2.19. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2 + 4x - 3y + 3 = 0, \\ y^2 + (5-2a)y + a^2 - 2a = 0 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $\frac{3}{2} - \sqrt{2} \le a < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$.

Пример 2.20. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{a(2^x - 2)} = 1 - 2^x$ имеет единственное решение?

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = 2^x > 0,\ 1 - t \ge 0$. Новое условие: при каких значениях параметра уравнение

$(1-t)^2 = a(t-2)$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0 < t \le 1$?

Ответ: $0 < a \le 1$.

Пример 2.21. При каких значениях параметра a уравнения $\log_{4x}(1+ax) = \frac{1}{2}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a < 0,\ a = 1$.

Пример 2.22. При каких значениях параметра a уравнения $\log_{(x+1)} ax = 2$ имеет единственное решение?

Ответ: $a < 0,\ a = 4$.

Пример 2.23. Найдите все значения $b < 0$, при которых неравенство $2b\cos 2(x-y) + 8b^2\cos(x-y) + 8b^2(b+1) + 5b < 0$ выполняется для любых x, y.

Комментарии. Если x, y принимают все возможные значения, то $\cos(x-y)$ принимает все значения от -1 до 1. Сделаем замену переменных $\cos(x-y) = t$, $\cos 2(x-y) = 2t^2 - 1$. Новое условие: при каких значениях b неравенство $2b(2t^2-1) + 8b^2t + 8b^2(b+1) < 0$ выполняется для всех x на отрезке $[-1; 1]$?

Ответ: $b < -1 - \frac{1}{2\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2} < b < 0$.

Пример 2.24. Найдите все значения параметра a, при которых для каждого x из промежутка $[1; 2)$ выражение $x^6 - 6x^3 - 1$ не равно выражению ax^3?

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = x^3$. Новое условие: При каких значениях параметра корни уравнения $t^2 - 6t - 1 = at$ не принадлежат отрезку $[1; 8)$?

Возможны два варианта:

1) $D < 0$, уравнение вообще не имеет решений;

2) $D \ge 0$, но корни не принадлежат промежутку $[1; 8)$.

Но, $D = (6+a)^2 + 4 > 0$ поэтому первый случай не реализуется.

Если промежуток $[1; 8)$ лежит между корнями, то $f(1) = -6 - a < 0$, $f(8) \le 0 \Rightarrow a \ge \frac{15}{8} \Rightarrow b^2 < 1$.

Если промежуток $[1; 8)$ лежит слева от корней, то $f(8) \ge 0,\ x_b = \frac{6+a}{2} > 8 \Rightarrow a > 5$.

Если промежуток $[1; 8)$ справа от корней, то $f(1) = -6 - a > 0,\ x_b = \frac{6+a}{2} < 1 \Rightarrow a < -6$.

Ответ: $a < -6,\ a \ge \frac{15}{8}$.

Пример 2.25. Найдите все значения параметра a, для которых при всех $b > 0$ в интервале $(0; 0,5)$ существуют решения уравнения $\log_2\left(1 - x - x^2\right) = a \log_{1-x-x^2} 2 + b$.

Комментарии. Сделаем замену переменных $y = \log_2 2\left(1 - x - x^2\right)$. Так как $0 < x < 0,5$, то $\frac{1}{4} < 1 - x - x^2 < 1$ и $-2 < \log_2\left(1 - x - x^2\right) < 0$. Новое условие: пи каких значениях параметра a для любого $b > 0$ уравнение $y^2 - by - a = 0$ имеет хотя бы один корень в интервале $(-2; 0)$?

Ответ: $0 < a \le 4$.

Пример 2.26. При каких значениях параметра a уравнения $\log_2\left(4^x - a\right) = x$ имеет два решения?

Ответ: $a < -0,25,\ a > 0$.

Пример 2.27. Найдите все значения a, при которых уравнение $(a-1)\cos^2 x-(a^2+a-2)\cos x+2a^2-4a=2=0$ имеет более одного решения на отрезке $[0; 4\pi/3]$.

Ответ: $\frac{1}{3}<a\le\frac{3}{10}$; $a=1$.

Пример 2.28. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых отрезок $[-3; -1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\frac{x-3a}{a-2x}<0$.

Ответ: $a<-6,\ a>-\frac{1}{3}$.

Пример 2.29. При каких значениях параметра a функция $y=4^{-x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\cdot\frac{5a}{2}+\frac{a^2+12}{6}$ принимает во всех точках отрезка $[-1; 1]$ значение больше 2?

Ответ: $a<\frac{-15-\sqrt{129}}{2},\ a>\frac{-15+\sqrt{129}}{8}$.

Пример 2.30. При каких значениях параметра a уравнение $27\cdot 9^{-x-\frac{3}{2}}-(a+2)\cdot 3^{-x}+(1-a)(2a+1)=0$ имеет единственное решение?

Ответ: $a\in(-\infty; -0,5)\cup\{0\}\cup[1; \infty)$.

Пример 2.31. При каких значениях параметра a уравнение $2(|x-2|+|x|)^2-3(a-2)(|2-x|+|x|)+a^2-3a=0$ имеет более трех решений?

Комментарии. Сделаем замену переменных: $t = |x-2| + |x|$ График функции $t = |x-2| + |x|$ – ломаная: $t = \begin{cases} 2x-2/x \le 2, \\ 2/0 \le x \le 2, \\ 2-2x/2 \ge 2. \end{cases}$

Уравнение $t_1 = |x-2| + |x|$ имеет два корня, если $t_1 > 2$, имеет бесконечно много корней, если $t_1 = 2$, не имеет корней при $t_1 < 2$.

Таким образом, исходное уравнение будет иметь более трех (4 или бесконечно много) решений, если один из корней уравнения $3t^2 - 3(a-2)t + a^2 - 3a = 0$ равен двум, либо уравнение имеет два корня, каждый из которых больше 2.

Если $t_1 = 2$ – решение, то $a^2 - 9a + 20 = 0 \Rightarrow a = 4, a = 5.$

Если оба корня уравнения больше двух, то $f(2) > 0,\ D > 0,\ x_{\text{в}} = \dfrac{-b}{2a} > 2$; $f(2) = a^2 - 9a + 20 > 0 \Rightarrow a < 4, a > 5$; $D = (a-6)^2 > 0 \Rightarrow a \ne 6$; $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3(a-2)}{4} > 2 \Rightarrow a > \dfrac{14}{3}$.

Ответ: $\{4\}; [5; 6); (6; \infty)$.

Пример 2.32. При каких значениях параметра a уравнение $6\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2 - (6a+1)\dfrac{x}{x^2+1} - 12a^2 + 8a - 1 = 0$ имеет ровно четыре решения?

Комментарии. Сделаем замену переменных: $t = \dfrac{x}{x^2+1}$. График непрерывной функции $t = \dfrac{x}{x^2+1}$ – кривая, имеющая минимум а- $f(-1) = -0{,}5$, максимум $f(1) = 0{,}5$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to \pm\infty$. Таким образом, область значений функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ отрезок $[-0{,}5; 0{,}5]$, причем, уравнение $t = \dfrac{x}{x^2+1}$ имеет два решения при $-0{,}5 < t < 0;\ 0 < t < 0{,}5$.

Таким образом, исходное уравнение имеет 4 решения, если уравнение $6t^2-(6a+1)t-12a^2+8a-1=0$ имеет два корня t_1, t_2 и каждое уравнение $t_k=\dfrac{x}{x^2+1}$ $(k=1,2)$ имеет по два корня. Это соответствует условиям: $D>0, -0,5<t_1<t_2<0,5,\ t_1, t_2\neq 0$:

– $D=(18a-5)^2>0 \Rightarrow a\neq -\dfrac{5}{8}$;

– $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-12a^2+11a+1=-(a-1)(12a+1)$;

– $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-12a^2+5a=-a(12a-5)>0$;

– $-\dfrac{1}{2}<x_{\text{в}}=\dfrac{6a+1}{12}<\dfrac{1}{2}\Rightarrow -\dfrac{7}{6}<a<\dfrac{5}{6}$;

– $f(0)=-12a^2+8a-1\neq 0\Rightarrow a\neq\dfrac{1}{2},\ a\neq\dfrac{1}{6}$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{5}{12}\right),\ a\neq\dfrac{1}{6},\ a\neq\dfrac{5}{18}$.

РАЗДЕЛ 3

Задачи повышенной сложности

В данный раздел включены задачи, в которых трудности не только технические, а логические или идейные.

Пример 3.1. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $2^x - a$, -2^{-x-1}, $4^x + 4^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

Комментарии.

Признак арифметической прогрессии: числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию $\Leftrightarrow$ когда $2b = a + c$.

Из признака арифметической прогрессии получаем: $-2\dfrac{1}{2^{x+1}} = 2^x - a + 4^x + 4^{-x}$. Сделаем замену переменных $t = 2^x + 2^{-x}$, $t \ge 2$, $t^2 = 4^x + 4^{-x} + 2$. Новое условие: при каких значениях параметра уравнение $t^2 + t - 2 - a = 0$ имеет хотя бы одно решение больше 2?

Ответ: $a \ge 4$.

Пример 3.2. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $5^{1+x} - a, -\dfrac{9}{2}5^{1-x}, 25^x + 25^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

Ответ: $a \ge 48$.

Пример 3.3. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + 4x + a = 0$, y_1, y_2 – корни уравнения $y^2 + 8y + b = 0$. Известно, что y_1, x_1, y_2, x_2 образуют арифметическую прогрессию. Найдите a, b.

Ответ: $a = 0, b = 12$.

Пример 3.4. При каких значениях параметра a множество решений системы $\begin{cases} x^2 - (a-2)x - 2 \le y, \\ 2x + y - a \le 0 \end{cases}$ содержит отрезок $[-1; 0]$ оси OX?

Ответ: $[0; 3]$.

Пример 3.5. При каких значениях параметра a множество решений системы $\begin{cases} 8x^2+4(a+2)x-4\le y, \\ 2x+3y+(a+2)\ge 0 \end{cases}$ содержит отрезок $[0;1/2]$ оси OX?

Ответ: $[-2;-1]$.

Пример 3.6. При каких значениях параметра p уравнение $(2p-5,75)\cdot 32^{0,8x+0,4}+(11p-38)\cdot 0,25^{-x}+13-3p=0$ имеет ровно $(2-p)(p-4)$ решений?

Комментарии. Легко заметить, что $32^{0,4}=2^4=16$, $32^{0,8x}=\left(32^{4/5}\right)^x=16^x=\left(4^x\right)^2$, $(0,25)^{-x}=4^x$. Сделаем замену переменных: $t=4^x, t>0$. Новое условие: при каких значениях параметра p уравнение $16(2p-5,75)t^2+(11p-38)t+13-3p=0$ имеет $(2-p)(p-4)$ положительных решений? Число решений полученного уравнения $(2-p)(p-4)$ может быть равно 0, 1 или 2. Рассмотрев все случаи, можно получить ответ.

Ответ: $p=4$.

Пример 3.7. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $f(x)=4^x-a2^{3+x}+7a^2$ на отрезке $[-2;0]$ отрицательно?

Ответ: $1/28<a<1$.

Пример 3.8. Найдите точку с наибольшей ординатой, удовлетворяющую системе неравенств $\begin{cases} y-2x\ge 0, \\ -x^2=2ax-a^2+a+1-y\ge 0. \end{cases}$

Комментарии. Второе неравенство задает множество точек плоскости, лежащих под графиком параболы $y=-x^2+2ax-a^2+a+1$. Вершины этих парабол имеют координаты $(x_b;y_b)=(a;a+1)$ и лежат на прямой $y=x+1$.

Первое неравенство системы задает множество точек плоскости над графиком прямой $y = 2x$.

Если вершина параболы лежит выше прямой $y = 2x$, то вершина и будет искомой точкой, а если вершина параболы лежит ниже прямой, то точкой с наибольшей ординатой будет верхняя точка пересечения прямой и параболы.

Прямые $y = 2x$ и $y = x + 1$ пересекаются в точке $x = 1$. Таким образом, если $a \le 1$, то вершина лежит выше прямой, а если $a > 1$, то ниже.

Ответ: $x = a\ (a \le 1)$; $x = a - 1 + \sqrt{2 - a}\ \ (1 < a \le 2)$.

Пример 3.9. Действительные числа x, y таковы, что система $\begin{cases} x + y = 2a - 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$ имеет единственное решение. При каких значениях a произведение xy принимает наименьшее значение?

Комментарии. Из симметрии системы следует, что если пара (x, y) – решение, то и пара (y, x) – тоже решение. Тогда из условия единственности следует, что $x = y$.

Ответ: $a = 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 3.10. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2 - (2a + 1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a + 1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a = -2$.

Пример 3.11. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \log_2(3 - x + y) + 3 = \log_2(25 - 6x + 7y), \\ y + 2 = (x - 2a)^2 + a + 2x \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Комментарии. Решим первое уравнение

$$\begin{cases} 3-x+y>0, \\ 8(3-x+y)=25-6x+7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>x-3, \\ y=2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-4, \\ y=2x+1. \end{cases}$$

Подставим выражение y во второе уравнение. Новое условие: при каких значениях параметра оба корня уравнения $2x+3=(x-2a)^2+a+2x$ больше -4?

Ответ: $(-1;3)$.

Пример 3.12. Найдите все значения параметра a, при которых $\underbrace{\min}_{[0;2]}\left(4x^2-4ax+a^2-2a+2\right)=3$.

Комментарии. Рассмотрим график параболы $f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a+2$ с вершиной $x_b=a/2$. Исследуем зависимость наименьшего значения параболы на отрезке $[0;2]$ от расположения вершины параболы по отношению к этому отрезку.

Если $x_b\in[0;2]$, то

$$\underbrace{\min}_{[0;2]}\left(4x^2-4ax+a^2-2a+2\right)=f(a/2)=3\Rightarrow -2a^2+2a+1=3\Rightarrow\varnothing.$$

Если $x_b<0$, то

$$\underbrace{\min}_{[0;2]}\left(4x^2-4ax+a^2-2a+2\right)=f(0)=3\Rightarrow a^2-2a-1=0\Rightarrow a=1-\sqrt{2}.$$

Если $x_b>2$, то

$$\underbrace{\min}_{[0;2]}\left(4x^2-4ax+a^2-2a+2\right)=f(2)=3\Rightarrow a^2-10a+15=0\Rightarrow a=5+\sqrt{10}.$$

Ответ: $a=1-\sqrt{2};\ a=5+\sqrt{10}$.

Пример 3.13. Найдите все значения параметра a, при которых расстояние между вершинами парабол $y=2x^2+3ax+1$ и $y=x^2+ax-\frac{3}{8}a^2$ меньше $\sqrt{5}/2$.

Ответ: $|a|<2$.

Пример 3.14. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases}(a-1)y^2-2(3a+1)y+9a=0,\\ y=-\sqrt{x-3}+2\end{cases}$ имеет решение.

Комментарии. Из второго уравнения следует, что $y\le 2$. Новое условие: при каких значениях параметра a первое уравнение имеет хотя бы один корень ≤ 2.

Ответ: $-1/15\le a\le 8$.

Пример 3.15. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2+5x+4a^2+5=0$ имеет только целые корни.

Комментарии. Если $a=0$, то $x=-1$ – целое решение.

Если $a\ne 0$, то по теореме Виета $x_1+x_2=-5/a$, $x_1x_2=4a+5/a$.

Так как x_1, x_2 – целые, то числа $5/a, 4a$ – тоже целые.

Рассмотрим эти условия:

$5/a$ – целое $\Rightarrow a=\pm 1,\ \pm 5,\ \pm 1/n,\ \pm 5/n$; $4a$ – целое $\Rightarrow a=\pm p,\ \pm p/2,\ \pm p/4$, где n, p – натуральные числа. Так как должны выполняться оба этих условия, то возможны варианты $a=\pm 1,\ \pm 5,\ \pm 1/2,\ \pm 5/2,\ \pm 1/4,\ \pm 5/4$.

Доказательство заканчивается перебором всех претендентов и проверкой корней получающихся уравнений.

При $a=-1/4$ уравнение $x^2-20x-21=0\Rightarrow x_1=21,\ x_2=-1$.

При $a=5/2$ уравнение $x^2+2x+4=0\Rightarrow x_1=x_2=-2$.

При остальных значениях a либо дискриминант полученного уравнения отрицательный, либо корни не являются целыми числами.

Ответ: $a=0, -1/4,\ 5/2$.

Пример 3.16. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2+3x+2a^2-3=0$ имеет только целые корни.

Ответ: $a=0, -1/2,\ -3/2$.

Пример 3.17. При каких значениях параметра a уравнение $\log_a^2\sin x+\log_a\sin x-a=0$ имеет решение.

Комментарии. Сделаем замену переменных $y = \log_a \sin x$. Так как $0 < \sin x \le 1$, то $\log_a \sin x \le 0$, при $a > 1$ и $\log_a \left(\sin x \ge 0\right)$, при $a < 1$. Новые задачи:

– при каких значениях параметра $a > 1$ существует хотя бы одно неположительное решение уравнения $y^2 + y - a = 0$.

– при каких значениях параметра $0 < a < 1$ существует хотя бы одно неотрицательное решение уравнения $y^2 + y - a = 0$.

Ответ: $0 < a < 1$, $a > 1$.

Пример 3.18. Найдите все значения a, при каждом из которых числа $3a \cdot 8^a$ и $12a \cdot 8^a + 2 - 72a^2 \cdot 64^{a-0,5}$ лежат в интервалах $\left(1,5; 2,5\right)$ и $\left[6; 7\right)$.

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = 3a \cdot 8^a$. Новое условие: при каких значениях параметра a оба числа t и $f\left(t\right) = 2 + 4t - t^2$ лежат в интервалах $\left(1,5; 2,5\right)$ и $\left[6; 7\right)$.

Из свойств параболы следует, что:

– если $t \in \left(1,5; 2,5\right)$, то $f\left(t\right) \in \left(5,75; 6\right]$, причем $f\left(2\right) = 6$. Условие задачи будет выполнено, если

$$3a \cdot 8^a = 2 \Rightarrow 8^a = 2/3a \Rightarrow a = 1/3.$$

Из свойств монотонности последнее равенство имеет единственное решение относительно параметра a;

– если $t \in \left[6; 7\right)$, то $f\left(t\right) \in \left(-19; -10\right]$ и условие исходной задачи не выполнено.

Ответ: $a = 1/3$.

Пример 3.19. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $\sin^2 x + \left(p-2\right)^2 \sin x + p\left(p-2\right)\left(p-3\right) = 0$ имеет на отрезке $\left[0; 2\pi\right]$ ровно три корня.

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = \sin x$, $t \in \left[-1; 1\right]$. Если $\left|t\right| < 1$, то уравнение $\sin x = t$ имеет на отрезке $\left[0; 2\pi\right]$ ровно два корня.

Пусть t_1, t_2 корни уравнения $t^2+(p-2)^2 t-p(p-2)(p-3)=0$.

Исходное уравнение имеет три корня, если:

– $t_1=t_2=0 \Rightarrow p_1=0, p_2=2, p_3=3$;

– $t_1=1,\ 0<|t_2|<1 \Rightarrow 1+t_2=-(p-2)^2 \Rightarrow t_2=-1-(p-2)^2<1$;

– $t_1=1,\ |t_2|<1 \Rightarrow 1-(p-2)^2+p(p-2)(p-3)=0,$

$p=3,\ p=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{5}$;

– $t_1=0,\ |t_2|>1 \Rightarrow p_1=0, p_2=2, p_3=3$.

Проверка:

– $p=0 \Rightarrow t=0, t=4 \Rightarrow$ три корня,

– $p=2 \Rightarrow t=0 \Rightarrow$ три корня,

– $p=3 \Rightarrow t=0, t=-1 \Rightarrow$ четыре корня,

– $p=\dfrac{3+\sqrt{5}}{5} \Rightarrow -1+t_2=-(p-2)^2 \Rightarrow t_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow$ три корня;

– $p=\dfrac{3-\sqrt{5}}{5} \Rightarrow -1+t_2=-(p-2)^2 \Rightarrow t_2=-\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{2}<-1 \Rightarrow$ один корень.

Ответ: $p=0,\ p=2,\ p=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 3.20. Найдите число целых значений параметра a, при которых множество решений неравенства $(a-1)x^2 \le (3a+2)x+10a$ содержит все члены некоторой возрастающей арифметической прогрессии, первым членом которой является число -8, а разность меньше или равна 6.

Ответ: 5.

Пример 3.21. Найдите длину промежутка значений параметра a или сумму таких промежутков, если их несколько, при которых среди решений неравенства $5-\dfrac{ax-43}{x}\ge 0$ есть хотя бы одно трехзначное число, но нет ни одного четырехзначного числа.

Комментарии. Перепишем наше неравенство в виде $\frac{x(5-a)-43}{x} \geq 0$, решение которого легко получается из решения неравенства $\left(x(5-a)-43\right)x \geq 0$.

Если $(5-a)=0$, то множество решений неравенства $-43x \geq 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Если $(5-a)>0$, то множество решений неравенства можно представить как параболу с корнями $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{43}{5-a} > 0$. Множество точек, в которых парабола больше нуля, – два луча $(-\infty; 0)$ и $\left(\frac{43}{5-a}; \infty\right)$, условие задачи опять не выполнено.

Если $(5-a)<0$, то ветви параболы направлены вниз, а множество точек, в которых парабола больше нуля – отрезок $\left(0; \frac{43}{5-a}\right)$. По условию этот отрезок содержит хотя бы одно трехзначное число, но не содержит ни одного четырехзначного числа. То есть a удовлетворяет неравенству $100 < \frac{43}{5-a} < 1000 \Rightarrow 5{,}043 < a < 5{,}43$, а длина промежутка значений a равна $5{,}43 - 5{,}043 = 0{,}387$.

Ответ: 0,387.

Пример 3.22. Найдите все значения параметра a, для которых неравенство $x^2 + a^2 + 1 < (2a+3)|x|$ не выполняется ни для одного значения x из промежутков $[-4; -2]$ или $(2; 4]$.

Ответ: $\left(2-\sqrt{5}; 4+\sqrt{11}\right)$.

Пример 3.23. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \leq 0, \\ 3 + x - x^2 \geq a \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a = 1$.

Пример 3.24. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left(x^2-6|x|-a\right)^2+12\left(x^2-6|x|-a\right)+37=\cos\frac{18\pi}{a}$ имеет ровно два корня?

Ответ: $a=9/2$.

Пример 3.25. Найдите все значения параметра a, при которых в множестве решений неравенства $\frac{8a^2x}{x}-x(x-2a-8)>16a+a^2$ нельзя расположить два отрезка длиной 2 и 5, не имеющие общих точек.

Ответ: $[1;2]\cup[3;5]\cup[6;7]$.

Пример 3.26. Найдите все значения a, при каждом из которых числа $3a\cdot 8^a$ и $6a\cdot 8^{a+1}-9a^2\cdot 64^a-53$ являются решениями неравенства $\log_{x-7,5}\left(\log_9\frac{x-20}{x-12}\right)\geq 0$.

Ответ: $a=2/3$.

Пример 3.27. При каких значениях параметра p уравнение $(1{,}5p-7)\cdot 32^{0{,}4x+0{,}2}+(29p-154)\cdot 0{,}125^{-x/3}+11p-41=0$ имеет ровно $10p-p^2-24$ решений?

Ответ: $p=6$.

Пример 3.28. Найдите все значения параметра a, при которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+\left|x^2-8x+7\right|$ меньше 1.

Комментарии. «Раскроем модуль». Если $x^2-8x+7\geq 0$, то график $f(x)=x^2+2(a-4)x+7$ – парабола с ветвями, направленными вверх и координатами вершины $x_b=4-a$. А если $x^2-8x+7<0$, то график $f(x)=-x^2+2(a+4)x+7$ – парабола с ветвями, направленными вниз. Возможны два варианта расположения вершины первой параболы:

1) $4-a\in[1;7]$, т. е. $-3\le a\le 3$ тогда наименьшее значение будет достигаться в той точке, которая находится дальше от вершины параболы. При $0\le a\le 3$, наименьшее значение функции будет достигаться в точке $x=1$ и $f(1)=2a<1\Rightarrow 0\le a<1/2$. При $-3\le a\le 0$, наименьшее значение функции будет достигаться в точке $x=7$ и $f(7)=14a<1\Rightarrow -3\le a\le 0$. В итоге в первом случае получаем условие $-3\le a<1/2$;

2) $4-a\notin[1;7]$, т. е. $a<-3$ или $a>3$. Тогда наименьшее значение будет достигаться в вершине параболы $x_b=4-a$ и $f(4-a)=(4-a)^2+2(a-4)(4-a)+7=8a-9-a^2<1$. Отсюда получаем условие $a^2-8a+10>0\Rightarrow a<4-\sqrt{6}$, или $a>4+\sqrt{6}$. То есть во втором случае получим условие $a<-3$ или $a>4+\sqrt{6}$. Объединим оба варианта.

Ответ: $a<1/2$; $a>4+\sqrt{6}$.

Пример 3.29. При каких значениях параметра p уравнение $3\cos^2 x+p\cos x+p(p+3)=0$ имеет ровно три корня на отрезке $[-\pi/2;\pi/2]$.

Комментарии. Сделаем замену переменных: $t=\cos x$. Каждый корень уравнение $3t^2+p\cdot t+p(p+3)=0$ дает на отрезке $[-\pi/2;\pi/2]$ один или два корня уравнения $t=\cos x$.

Учитывая свойства функции $y=\cos x$, исходное уравнение будет иметь три корня, если $t_1=1$, а $0\le t_2<1$.

Тогда корнями исходного уравнения будут $x=0$, $x=\pm\arccos t$.

Если $t_1=1$ – решение, то

$$3+p+p^2+3p=0\Rightarrow p^2+4p+3=0\Rightarrow p=-1,\ p=-3,$$

$p=-1\Rightarrow 3t^2-t-2\Rightarrow(3t+2)(t-1)=0\Rightarrow$ нет второго положительного решения;

$p=-3\Rightarrow 3t^2-3t=0\Rightarrow 3t(t-1)=0\Rightarrow t=0,\ t=1\Rightarrow$ три решения исходного уравнения.

Ответ: $p=-3$.

Пример 3.30. При каких значениях параметра p уравнение $3\sin^2 x + p\sin x + p(p+4) = 0$ имеет ровно три корня на отрезке $[0; \pi]$.

Ответ: $p = -4$.

Пример 3.31. При каких значениях параметра a функция $f(x) = x^2 - 2\left|x - a^2\right| - 10x$ имеет хотя бы одну точку максимума?

Ответ: $2 < |a| < \sqrt{6}$.

Пример 3.32. При каких значениях параметра a уравнение $\left(4^x - 3\cdot 2^x + 3a - a^2\right)\cdot\sqrt{2-x} = 0$ имеет ровно два различных корня?

Комментарии. Область определения данного уравнения: $x \le 2$. Исходное уравнение имеет корень $x = 2$, поэтому уравнение $4^x - 3\cdot 2^x + 3a - a^2 = 0$ должно иметь еще один корень, $\ne 2$, лежащий в области определения. Сделаем замену переменных: $t = 2^x$, причем $0 < t \le 4$. Тогда уравнение будет иметь вид: $f(t) = t^2 - 3t + 3a - a^2 = 0$. Исходное уравнение будет иметь ровно два корня в двух случаях: а) уравнение $f(t) = 0$ имеет один корень, лежащий в области определения и он не равен двум; б) уравнение $f(t) = 0$ имеет два корня, но только один из них лежит в области определения и не равен двум. Вычислим $D = 9 - 4\left(3a - a^2\right) = (3-2a)^2$. Если $D = 0$, то $a = 3/2$ и исходное уравнение имеет две различных корня: $t = 2$, $t = 3/2$. Если $D > 0$, то уравнение $f(t) = 0$ имеет два различных корня t_1, t_2. Если t_1 – «хороший», т. е. $0 < t_1 < 4 < t_2$, то $f(0) > 0$, $f(4) < 0$ $\Rightarrow a \in (-1; 0] \cup [3; 4)$. Если t_2 – «хороший», т. е. $t_1 < 0 < t_2 < 4$, то $f(0) < 0$, $f(4) > 0 \Rightarrow \varnothing$. Заметим, что если один из корней этого уравнения равен 2, то второй корень будет равен 1 и исходное уравнение будет иметь ровно два различных корня.

Ответ: $(-1; 0], \{1; 5\}, [3; 4)$.

Пример 3.33. При каких значениях параметра a уравнение $x-2=\frac{(a+1)(a-5)}{x+4}$ имеет ровно один корень на промежутке $(-\infty;0)$?

Комментарии. Область определения данного уравнения: $x\neq -4$. Приведем исходное уравнение к виду $(x-2)(x-4)=(a+1)(a-5)=b$. Исходное уравнение будет иметь один корень на промежутке $(-\infty;0)$, если уравнение $x^2+2x-8-b=0$ имеет один корень на промежутке $(-\infty;0)$ не равный -4. Это возможно в одном из трех случаев:

Уравнение $x^2+2x-8-b=0$ имеет один корень, удовлетворяющий условиям, т. е. $D=36+4b=0\Rightarrow b=-9\Rightarrow a=2$.

Уравнение $x^2+2x-8-b=0$ имеет два корня, но только один удовлетворяет условиям, т. е. $D=36+4b>0$, но $f(0)<0\Rightarrow b>-8\Rightarrow a\in(-\infty;1),(3;\infty)$.

Уравнение $x^2+2x-8-b=0$ имеет корень $x=-4\Rightarrow b=0\Rightarrow$ $a=-1,\ a=5$.

Ответ: $(-\infty;-1),(-1;1],\{2\},[3;5),(5;\infty)$.

Пример 3.34. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{a-(a+1)(2x+4)}=x+1$ имеет ровно один корень?

Комментарии. Область определения данного уравнения: $x+1\geq 0$. Приведем уравнение к виду $x^2+2x(a+2)+3a+5=0$. Исходное уравнение будет иметь один корень, если уравнение $x^2+2x(a+2)+3a+5=0$ имеет один корень, удовлетворяющий условия $x+1\geq 0$. Если $D=4(a+2)^2-4(3a+5)=0$, то $a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, а $x=-a-2$.

Если $D>0$ и $f(-1)<0$, то $a<-2$. Случай $f(-1)=0$, $a=-2$, $x=\pm 1$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $(-\infty;-2)$, $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Список литературы

1. Белоносов В. С., Фокин, М. В. Задачи вступительных экзаменов, Новосибирск: Сиб. Унив. изд-во, 2003.

2. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. М. : Дрофа, 200234. ЕГЭ 2007. Математика : Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся. / ФИПИ – М. : Интеллект-Центр, 2007.

4. Колесникова С. И. Математика : Решение сложных задач ЕГЭ. М. : Айрис-Пресс, 2007.

5. Родионов Е. М. Математика : Решение задач с параметрами. М. : Изд-во НЦ ЭНАС, 2006.

6. Шабунин М. И. Математика для поступающих в вузы. М. : Бином. Лаборатория знаний, 2004.

7. Чуваков В. П. Квадратичная функция. Учеб.-метод. пособие: Новосибирск : РИЦ НГУ ; ЮФМЛ, 2008.

8. Чуваков В. П. Задачи, сводящиеся к квадратичным / БОУ ЮФМЛ, г. Ханты-Мансийск, 2014 г., размещено на сайте http://alexlarin.net/Stat.html

Содержание

Учебное издание

Чуваков Валерий Петрович

УСКОЛЬЗАЮЩАЯ ПАРАБОЛА
ИЛИ
ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ
К КВАДРАТИЧНЫМ

Учебно-методическое пособие

Верстка *Т. В. Ивановой*

Подписано в печать 28.11.2019 г.
Формат 60х84/16. Уч.-изд. л. 2,0. Усл. печ. л. 1,86.
Тираж 100 экз. Заказ №
Издательско-полиграфический центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2