

Полярное отображение для бильярда Биркгофа

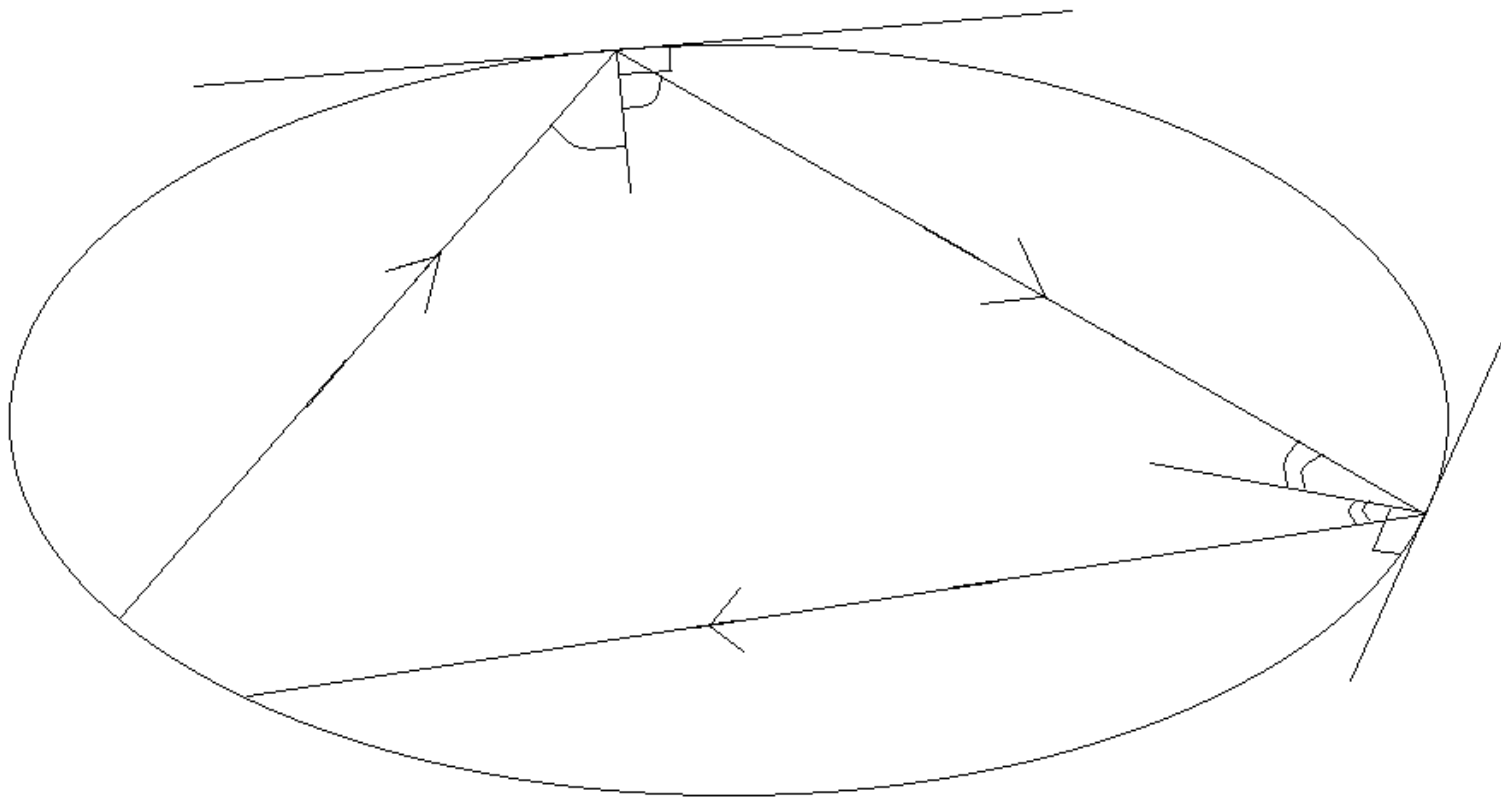
Иван Пыльцын

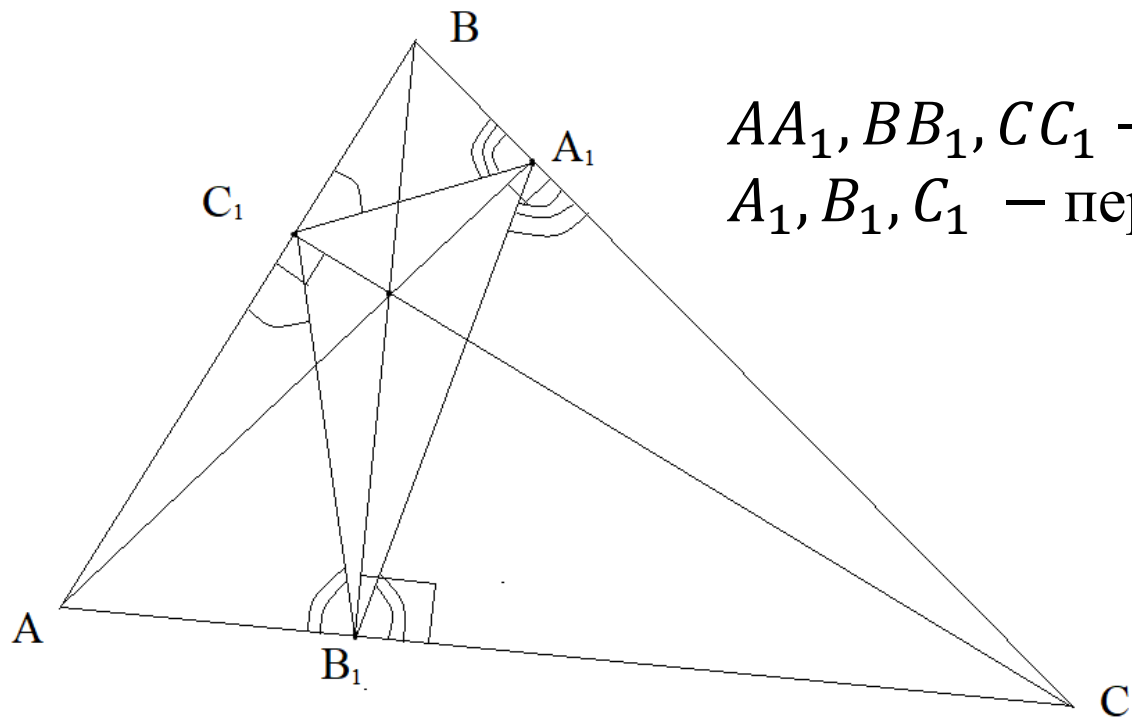
СУНЦ НГУ, 9 – класс

Научный руководитель – д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН А.Е. Миронов

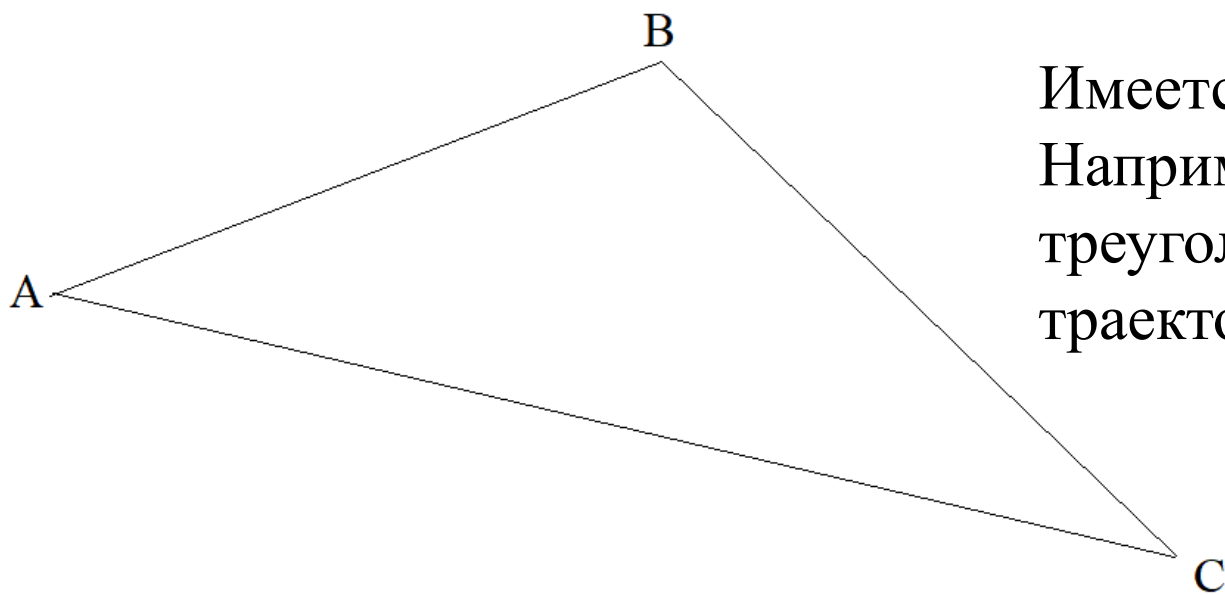
МНСК - 2019

Бильярд Биркгофа



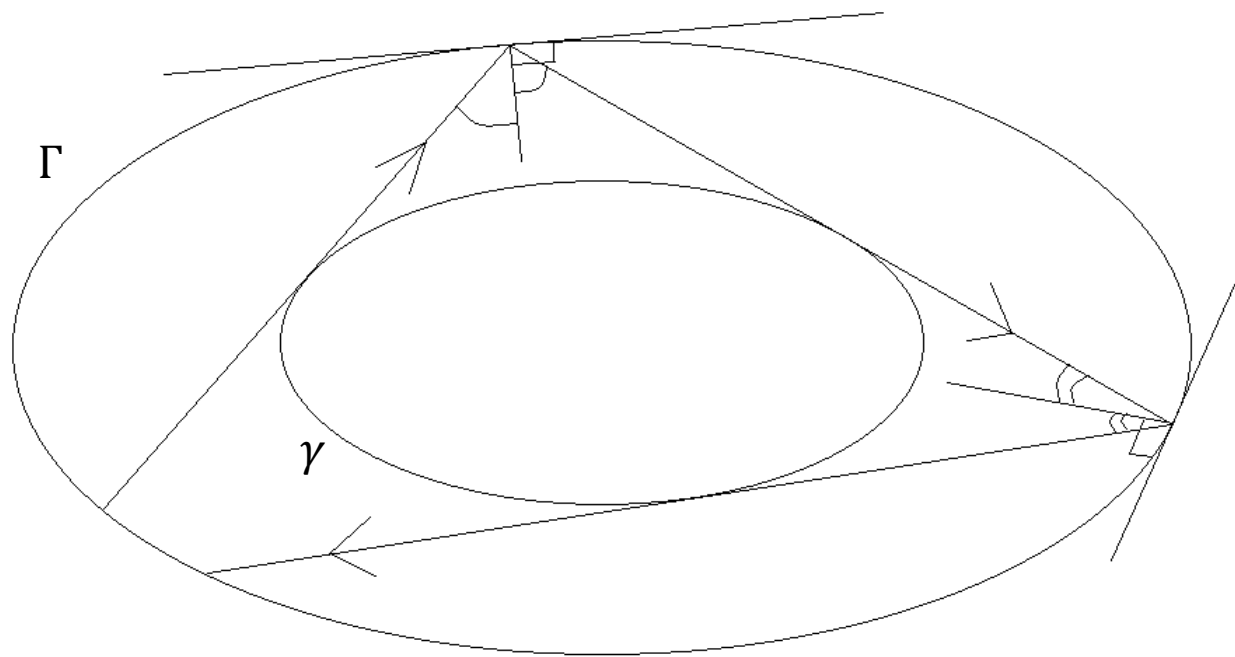


AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC
 A_1, B_1, C_1 — периодическая траектория



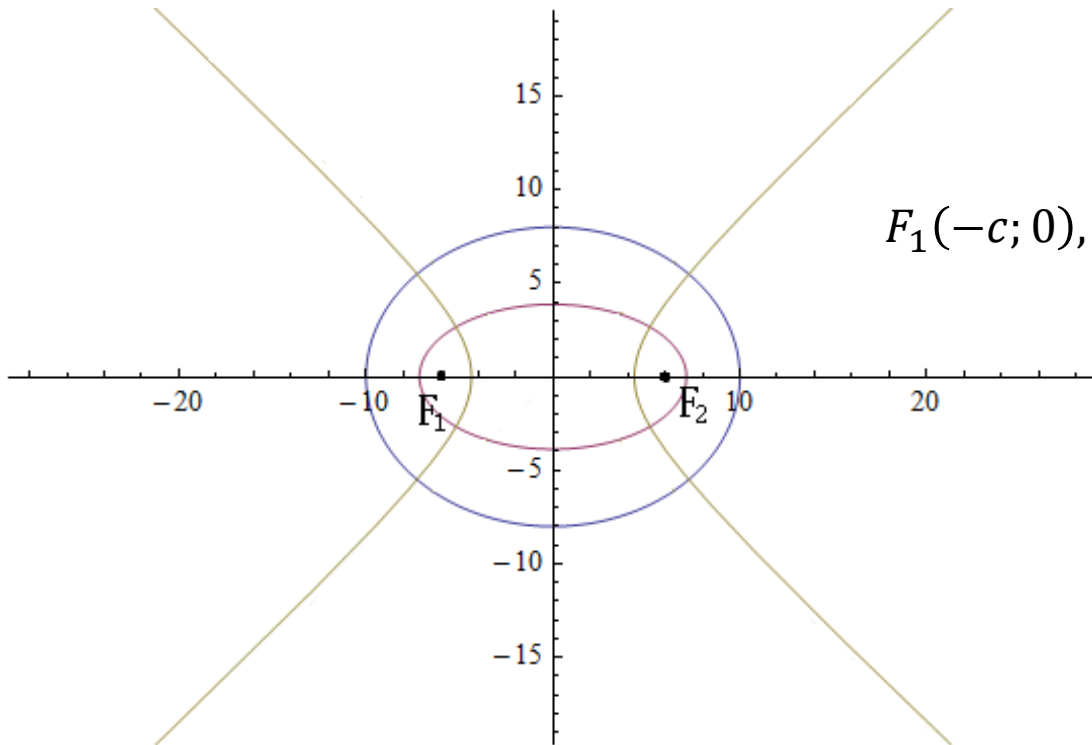
Имеется много не решенных задач.
 Например, для всякого ли тупоугольного
 треугольника имеется периодическая
 траектория?

Каустика



Теорема Лазуткина. В окрестности кривой существует бесконечно много каустик.

Эллипс



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0;$$

$F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ - фокусы эллипса, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Софокусный эллипс

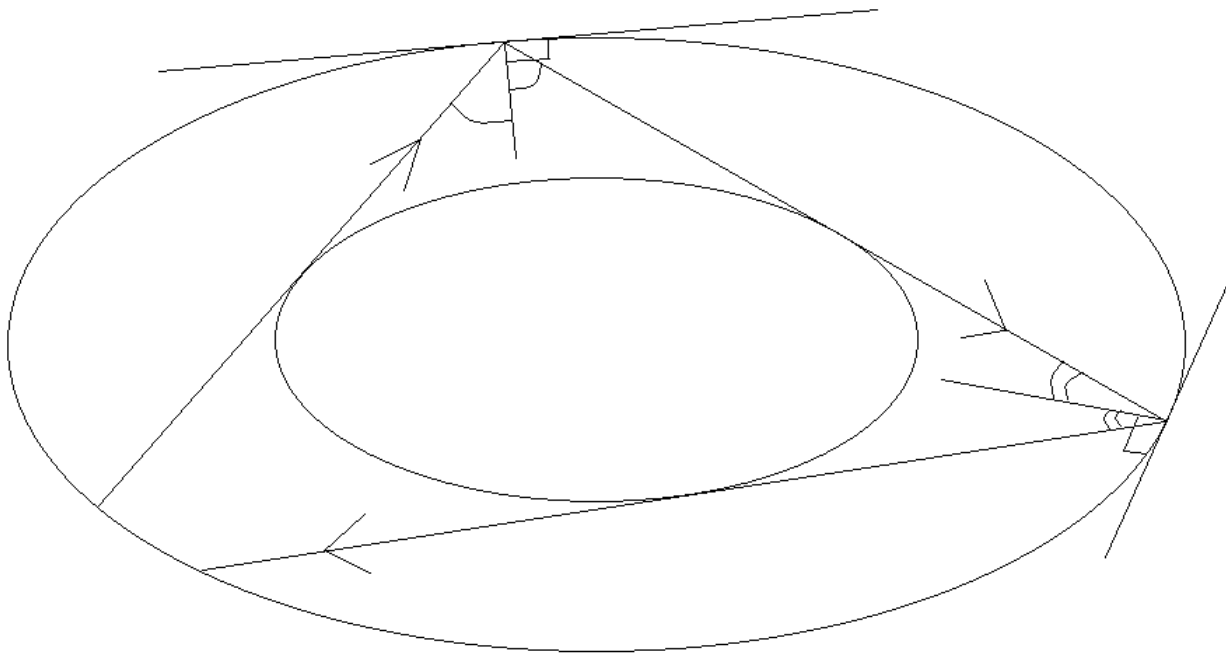
$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} = 1$$

является каустикой.

Пусть скорость частицы $v(v_1; v_2)$,
а её координаты $(x; y)$, тогда
имеется первый интеграл

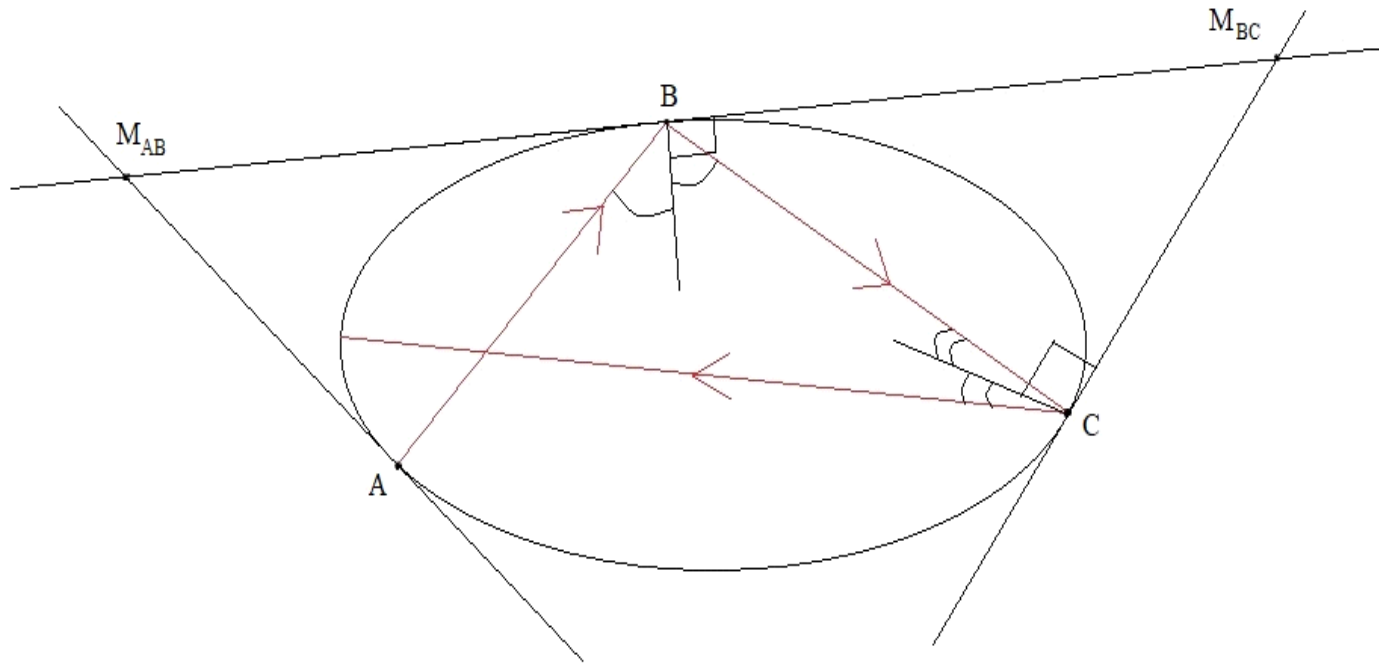
$$F = b^2 v_1^2 + a^2 v_2^2 - (x v_2 - y v_1)^2$$

Гипотеза Биркгофа



Если через каждую точку в области, ограниченной кривой, проходит каустика, то кривая является эллипсом.

Полярное отображение



$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$$

Каждая траектория задает последовательность точек в $\mathbb{RP}^2 \setminus D$, $\partial D = \gamma$.

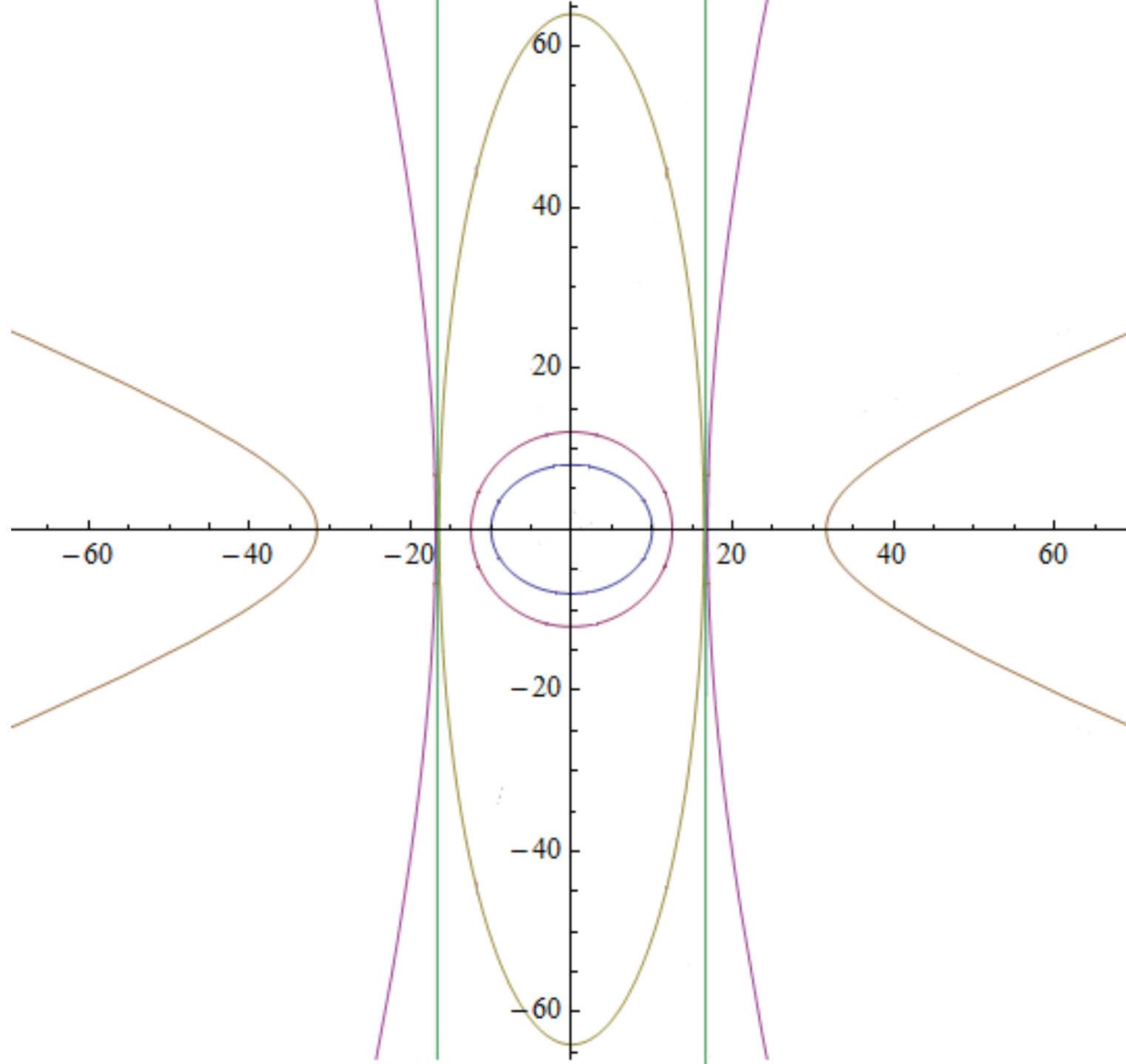
Вопрос: Когда существует функция в $\mathbb{RP}^2 \setminus D$, постоянная на всех траекториях?

Теорема. Пусть кривая γ является эллипсом, заданным каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0,$$

тогда все траектории точек в $\mathbb{R}P^2 \setminus D$ лежат на инвариантных кривых, заданных уравнением вида

$$a^2 b^2 \frac{b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2}{b^4 x^2 + a^4 y^2} = \lambda^2, \text{ где } \lambda - \text{некоторая константа.}$$



Спасибо за внимание!