УДК 531.01

Полярное отображение для бильярда Биркгофа

Пыльцын И. О.
Специализированный учебно-научный центр НГУ, г. Новосибирск

Данная работа посвящена изучению бильярда Биркгофа с помощью введённого нами полярного отображения на дополнении к бильярдной области. Пусть γ–гладкая выпуклая кривая, которая ограничивает область $D \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что внутри области D движется частица с постоянной скоростью v. Когда частица достигает границы γ, она упруго отражается по закону геометрической оптики (угол падения равен углу отражения). Предположим, что евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$ вложена естественным образом в проективную плоскость $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}P^2$. Пусть AB-звено траектории движения частицы, $A, B \in \gamma$ (частица движется по отрезку AB). Этому звену сопоставим точку M_{AB} пересечения касательных к кривой γ в точках A и B (если касательные параллельны, то точка пересечения лежит на бесконечно удалённой прямой проективной плоскости). После отражения в точке B границы γ частица движется по отрезку $BC,\ C \in \gamma$. Так же как и раньше звену BC сопоставим точку M_{BC} пересечения касательных к γ в точках B и C. Таким образом бильярдная траектория внутри D задаёт нам последовательность точек $M_{AB}, M_{BC}, \dots$ в $\mathbb{R}P^2$. Если зафиксировать ориентацию на γ и рассматривать только бильярдные траектории, близкие к γ и согласованные с ориентацией γ, то определено отображение окрестности γ в себя. Это отображение назовём полярным отображением для бильярда Биркгофа. В общем случае каждая точка в $\mathbb{R}P^2 \setminus D$ лежит в некоторой последовательности точек, определяемой бильярдной траекторией (но корректно определить порядок в последовательности нельзя, т.к. нельзя каноническим образом определить направление бильярдной траектории). Цель этой работы - изучить полярное отображение в случае, когда кривая γ является эллипсом.

Теорема. *Пусть кривая γ является эллипсом, заданным каноническим уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0,$$

тогда все траектории точек в $\mathbb{R}P^2 \setminus D$ лежат на инвариантных кривых, заданных уравнением вида

$$a^2 b^2 \frac{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}{b^4x^2 + a^4y^2} = \lambda, \textit{ где } \lambda \textit{-некоторая константа.}$$

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, Миронов А. Е.