Всесибирская открытая олимпиада школьников по астрономии

Заключительный этап

7-8 класс

1. Сколько примерно земных лет потребуется космическому аппарату, чтобы с постоянной скоростью 15 км/с долететь до Плутона? гипотетического Облака Оорта (расстояние 50000 а.е.)? Проксимы Центавра (расстояние 4,24 светового года)? Приведите расчет.

Решение. Эта задача «без хитростей», просто на знание мер длины и аккуратный расчет.

Плутон – 40 а.е./15км/с = 12,7 лет

Облако Оорта – 50000 а.е./15км/с = 15,8 тыс. лет

Проксима Центавра – 4,24 св. г./15км/с = 84,8 тыс. лет

2. Если в конце января Луна была в новолунии, а Венера находилась примерно в 15 градусах от Луны и в западной элонгации (не максимальной), в каком созвездии могла в это время находиться Венера? Ответ поясните.

Решение. Если Луна в новолунии, она в том же созвездии, что и Солнце. Для конца января это созвездие Козерог. Пренебрегая наклонами орбит Луны и Венеры к эклиптике, можем сказать, что Венера находилась вблизи эклиптики на 15°/360° = 1/24 длины эклиптики от Солнца, т.е. на «половине месячного пути Солнца» от Солнца. Поскольку Венера в западной элонгации, и Солнце в конце января недавно зашло в созвездие Козерога, Венера находится в созвездии Стрельца (предыдущем, в котором находилось Солнце до Козерога).

3. Сколько примерно земных суток пройдет между максимальной западной элонгацией Венеры и ее верхним соединением? Приведите расчет.

Решение. Гелиоцентрический угол (с вершиной в Солнце) между Венерой в максимальной западной элонгации и Землей равен arccos 0,7 ~ 45°. В верхнем соединении этот угол равен 180°.

Угловая скорость Венеры относительно Солнца равна 360° / 224,7 = 1,6°/сутки, угловая скорость Земли – 1° / сутки. Разница – 0,6°/сутки.

Требуемое время = (180° – 45°) / 0,6°/сут = 225 суток.

4. Известно, что сутки на Земле увеличиваются на 2 мс за 100 лет. Как далеко от нас отстоит та эпоха, в которой юлианский календарь был максимально точен (год юлианского календаря близок к тропическому году)? В 1900 году

продолжительность тропического года была равна 31556926 секунд или 365.242199 суток. Ход решения подробно объясните.

Решение. Разумны два взаимоисключающих решения, базирующиеся на разных исходных предположениях и дающие принципиально разные ответы. Максимальный балл (8) дается за первое решение. За второе ставится + 2 дополнительных балла. За оба решения – 4 дополнительных балла.

1. Считаем, что продолжительность тропического года в сутках остаётся постоянной. (365,25 – 365,242199) · 24 · 3600 / 0,002 · 100 лет = 33,7 млн лет;

2. Считаем, что продолжительность тропического года в секундах остаётся постоянной. Тогда получаем 31556926*(1/365,242199 – 1/365,25) / 0,002 · 100 лет = 92,3 тыс. лет от 1900 г.

Именно второе решение представляется более правильным, что не отменяет оценивание первого решения по максимальному баллу.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по астрономии

Заключительный этап

9 класс

1. На каких широтах на Земле высота незаходящего Солнца в течение суток может изменяться ровно в три раза? Рефракцией и видимыми размерами Солнца пренебречь.

Решение. Незаходящее Солнце бывает только в приполярных широтах в полярный день. Соответственно, ответ сразу обретает ограничение: $\varphi \geq 66{,}5°$.

При широте φ и склонении Солнца, равном δ, максимальная (полуденная) его высота равна $90° - \varphi + \delta$, а минимальная (полуночная) высота равна $-90° + \varphi + \delta$.

Если полуденная высота в 3 раза больше полуночной, то $90° - \varphi + \delta = 3\cdot(-90° + \varphi + \delta)$.

Отсюда $4\varphi + 2\delta = 360°$. Отсюда и из ограничения на склонение Солнца ($\delta < 23{,}5°$) получаем ограничение на широту: $360° = 4\varphi + 2\delta < 4\varphi + 2\cdot 23{,}5°$, то есть $\varphi > 313°/4 = 78{,}25°$.

Итого – севернее параллели 78°25’ с.ш. хотя бы раз в году условие задачи будет выполнено.

В конечном ответе не забываем про южное полушарие, где условие выполняется южнее параллели 78°25’ ю.ш.

---

2. Над землёй произошла автоматическая стыковка двух спутников, летевших до стыковки по разным круговым орбитам с одинаковой высотой 450 км. При каких углах между начальными направлениями спутников итоговая «сцепка» не упадёт на Землю? Считать, что спутники при стыковке и после неё двигатели не включают.

Решение. Сцепка спутников без включения двигателей – это неупругое столкновение тел, при котором выполняется закон сохранения импульса.

Если массы спутников равны m, начальные скорости спутников были равны V_0 (на одинаковых по радиусу круговых орбитах скорости одинаковые), а угол между орбитами равен α, то общий импульс системы равен $P = 2mV_0 \cdot \cos \alpha/2$.

После стыковки спутники образовали единую систему с таким же импульсом и массой 2m. Тогда скорость сцепки равна $V_1 = V_0 \cdot \cos \alpha/2$. Поскольку начальная скорость равнялась первой космической, а $V_1 < V$, спутники не смогут остаться на той же орбите. Новая орбита будет эллиптической с апогеем в точке столкновения. Это, впрочем, не означает, что спутники упадут – действительно, если расстояние от центра Земли до точки перигея будет больше радиуса Земли, то хотя бы несколько оборотов сцепка сделает успешно.

Скорость в апоцентре орбиты можно вычислить по формуле $V_a^2 = GM/R_a\ (1 - e)$. Поскольку Ra – это начальный радиус орбит, а V_0 – это первая космическая скорость на исходной орбите, то $V_0^2 = GM/R_a$. Отсюда эксцентриситет новой орбиты равен $e = 1 - \cos \alpha/2$.

Перицентрическое расстояние орбиты равно $R_п = a\ (1 - e) = R_a\ (1 - e) / (1 + e)$. Приравнивая его к радиусу Земли (6400 км), получим:

$6400 = 6850\ (1 - e) / (1 + e)$, откуда максимально допустимый эксцентриситет новой орбиты равен $e = 0{,}034$.

Для такого эксцентриситета нужно, чтобы угол между начальными орбитами был не больше $2 \cdot \arccos 0{,}966 = 30°$.

---

3. В двойной системе звёзд, состоящей из компонент массами 2 Мс и 1,5 Мс, массивная звезда начинает «уходить» с главной последовательности, постепенно превращаясь в красного гиганта и увеличивая свой радиус. При каком значении радиуса массивной звезды в системе начнётся аккреция – перетекание вещества гиганта на звезду-компаньон? Считаем, что общая масса звезды при «раздувании» сохраняется. Расстояние между компонентами системы – 20 а.е. [Мс – масса Солнца]

Решение. Если не учитывать вращение звезды-гиганта вокруг своей оси, то аккреция начнётся, когда внешние слои звезды-гиганта будут сильнее притягиваться звездой-компаньоном, чем ядром самого гиганта.

Пограничный случай реализуется, когда сила притяжения элемента поверхности гиганта к ядру гиганта равна силе притяжение звезды-компаньона, находящейся в зените.

Приравниваем силы:

$-GM_1m/R_1^2 = - GM_2m/(L - R_1)^2$

Отсюда $(L - R_1) / R_1 = (M_2/M_1)^{0,5} = 0{,}87$

Получаем необходимый для начала аккреции радиус звезды-гиганта: $R_1 = L / 1{,}87 = 10{,}7$ а.е. Это большой, но не экстремальный радиус для звезды – например, радиус Бетельгейзе превышает 4 а.е., а радиус мю Цефея составляет от 6 до 8,5 а.е.

Учёт других факторов – вращения звезды-гиганта, тепловой скорости вещества на поверхности – несколько уменьшит границу необходимого радиуса.

---

4. Звезда Лейтена находится на расстоянии 12 св. лет от Солнца, её прямое восхождение – 07ч 27м 24.49с и склонение +05° 13′ 32.82″. Ближайшая к Звезде Лейтена система – это Процион, чьё прямое восхождение 07ч 39м 18с, склонение +05° 13′ 29/20″, а расстояние от Солнца – 11,4 св. года. Определить яркость Проциона на небе планеты в системе Лейтена, если на земном небе его видимый блеск составляет +0,4m.

Решение. Склонения звёзд настолько близки, что разницей в несколько секунд можно пренебречь и считать звёзды находящимися на одном большом круге небесной сферы. Тогда угловое расстояние между ними на земном небе равно $\alpha = (RA_1 - RA_2) \cos \delta = 2{,}96°$.

Зная расстояния до обеих звёзд и угол между ними, можем по теореме косинусов вычислить и расстояние между ними.

$L^2 = 12^2 + 11{,}4^2 - 12 \cdot 11{,}4 \cdot \cos 2.96° \approx (0{,}86 \text{ св. лет})^2$

На расстоянии 11,4 световых года Процион виден как звезда $+0{,}4^m$, значит, с расстояния 0,86 св. лет он будет в $(11{,}4/0{,}86)^2 \approx 176$ раз ярче, что соответствует разнице звёздных величин $5{,}6^m$.

Итоговая видимая звёздная величина Проциона из системы звезды Лейтена равна $-5{,}2^m$. Процион будет виден как удивительно яркая звезда, ярче, чем любой объект на земном небе, кроме Солнца и Луны.

5. Допустим, на экзопланете Kepler-442b есть высокоразвитая цивилизация. Их астрономы, заинтересовавшись нашим Солнцем, измерили его параллакс и получили значение 2,1 угловых миллисекунд. Оцените продолжительность года на планете Kepler-452b. Звезда Kepler-452 является двойником Солнца, расстояние до неё – 1830 св. лет.

Решение. Параллакс есть отношение радиуса орбиты планеты к расстоянию (в данном случае) от экзопланеты до Солнца, переведённое в угловые величины. Поэтому по известному расстоянию и параллаксу можно найти величину местной «астрономической единицы» – среднего расстояния от планеты до звезды.

Имеем: $r / L = \text{tg}\, \pi$, значит, $r = 1830$ св. лет $\cdot\ \text{tg}\,(0.0021'') = 1{,}18$ а.е. Что-то между орбитами Земли и Марса, так что планета точно в зоне обитаемости своей звезды.

Период обращения и радиус орбиты связаны третьим законом Кеплера, который можно применять в упрощённой форме, так как звезда – двойник Солнца.

$T^2 = a^3$, значит, «год» на планете длится 1,28 земных года = 468 дней.

---

6. Определите, до какой температуры можно нагреть абсолютно черный шар радиусом r с помощью солнечного излучения, собираемого зеркалом диаметром D и фокусным расстоянием F. Считать температуру всех точек шара одинаковой. Потерями энергии на пути к шару пренебречь.

Решение. Поток солнечной энергии на расстоянии Земли равен $J_0 = \sigma T_0^4 R_0^2 / L^2$. Здесь T_0 – эффективная температура Солнца, R_0 – радиус Солнца, L – расстояние от Солнца до Земли.

Количество солнечной энергии, попадающее за единицу времени на зеркало, составит

$E = J_0\, \pi D^2 / 4 = \pi \sigma T_0^4 R_0^2 D^2 / (4L^2)$.

Радиус изображения Солнца в фокальной плоскости равен фокусному расстоянию объектива, умноженному на видимый угловой радиус Солнца: $\rho = FR_0 / L$.

Возможны два различных случая. Если радиус шара больше радиуса изображения Солнца, то вся солнечная энергия, попавшая на зеркало, будет поглощаться шаром и идти на его нагрев. В свою очередь, шар будет излучать как абсолютно чёрное тело. При некоторой температуре шара T величины энергии, поглощаемой и излучаемой шаром, сравняются.

$$\pi\sigma T_0^4 R_0^2 D^2 / (4L^2) = 4\pi\sigma r^2 T^4$$

Отсюда получаем температуру шара: $T = 290\ \text{К} \cdot (D/2r)^{0.5}$

Если радиус шара меньше радиуса изображения Солнца, то он будет поглощать не всю солнечную энергию, попавшую в телескоп. Количество солнечной энергии, попадающее на единичную площадь в фокальной плоскости за 1 секунду, составит

$$J = E / (\pi\rho^2) = \sigma T_0^4 D^2 / (4F^2)$$

Приравнивая величины поглощаемой и излучаемой энергии, получаем температуру шара: $T = 3000\ \text{K} \cdot (D/F)^{0.5}$

Стоит обратить внимание, что в первом случае температура шара не зависит от фокусного расстояния объектива, а во втором случае – от размеров шара.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по астрономии

Заключительный этап

10 класс

1. Звезда Лейтена находится на расстоянии 12 св. лет от Солнца, её прямое восхождение – 07ч 27м 24.49с и склонение +05° 13′ 32.82″. Ближайшая к Звезде Лейтена система – это Процион, чьё прямое восхождение 07ч 39м 18с, склонение +05° 13′ 29/20″, а расстояние от Солнца – 11,4 св. года. Определить яркость Проциона на небе планеты в системе Лейтена, если на земном небе его видимый блеск составляет +0,4m.

См. решение задачи № 4 для 9 класса.

---

2. 7 февраля 2018 года ракетой-носителем Falcon Heavy на гелиоцентрическую орбиту был выведен автомобиль Tesla Roadster, принадлежащий Илону Маску. Параметры орбиты приведены ниже.

Наклонение 1,05° (к эклиптике)
Апоцентр 1,67 а. е.
Перицентр 0,98 а. е.

На каком расстоянии от Земли машина находится сейчас? Если бы запуск был совершён в «самый правильный» для полёта к Марсу момент, на каком минимальном расстоянии от планеты прошла бы машина?

Решение. С момента запуска машины прошёл с хорошей точностью 1 год, поэтому можно считать, что Земля сейчас находится в той же точке орбиты, что и при запуске.

Положение автомобиля можно вычислить точно по средним аномалиям орбиты и уравнению Кеплера, но можно с достаточной точностью оценить из более простых соображений.

Большая полуось орбиты $a = (1{,}67 + 0{,}98) / 2 = 1{,}32$ а.е., период обращения $T = (1{,}32)^{3/2} = 1{,}52$ года. Эксцентриситет орбиты $e = 1{,}67 / 1{,}32 – 1 = 0{,}265$. Малая полуось $b = a (1 – e)^{1/2} = 1{,}43$ а.е. Параметр орбиты $p = b^2/a = 1{,}22$ а.е.

Точку запуска с хорошей точностью можно считать точкой перигелия орбиты.

Оценим гелиоцентрический угол между направлениями на Землю (= на точку запуска ≈ на перигелий) и направлением на текущее положение Теслы. За 1,52 года радиус-вектор заметает всю площадь орбиты $S_0 = \pi ab$. За 1 год по второму закону Кеплера заметена площадь $S_1 = \pi ab/1{,}52 = (½ + 0{,}158)\ S_0$.

Если считать, что за 0,158 периода после апоцентра угловая скорость машины меняется слабо и практически равна афелийной, то гелиоцентрический угол равен $\omega_A \cdot 0{,}158\ T = (GM/R_A^3\ (1 - e))^{1/2} \cdot 0{,}158\ T = 0{,}6$ радиана.

По уравнению эллипса в полярных координатах можно найти расстояние от центра до машины при угле 0,6 рад от точки апоцентра:

$r = p / (1 - e \cos \varphi) = 1{,}22 / (1 - 0{,}265 \cos 0{,}6) = 1{,}56$ а.е.

Попутно замечаем, что на самом деле угловая скорость, конечно, увеличилась примерно в $(1{,}67/1{,}56)^{3/2} \approx 1{,}1$ раза, что означает, что наше приближённое решение будет иметь погрешность не более 10%. Кроме того, при дальнейших вычислениях эта погрешность даже несколько уменьшится.

Итоговое расстояние от Земли до машины оценивается по теореме косинусов:

$D = (1^2 + 1{,}56^2 + 2\cdot 1{,}56\cdot \cos 0.6)^{1/2} = 2{,}45$ а.е.

Для ответа на второй вопрос сравним орбиты Теслы ($R_П = 0.98$ а.е., $R_A = 1{,}67$ а.е, $\varepsilon = 1{,}05^o$) и Марса ($R_П = 1{,}38$ а.е., $R_A = 1{,}666$ а.е, $\varepsilon = 1{,}85^o$). При запуске Теслы мы не ограничены другими параметрами орбиты, то есть машина может перемещаться по орбите с любым аргументом перицентра и любой долготой восходящего узла.

Другими словами, поскольку области возможных значений радиусов орбит перекрываются, мы можем так «настроить» плоскость орбиты Теслы и положение точки афелия этой орбиты, чтобы она в двух точках пересеклась с орбитой Марса.

В итоге, если чётко настроить момент запуска и неуказанные в условии параметры орбиты, минимально возможное расстояние от Теслы до Марса будет равно нулю.

---

3. Сколько звёзд увидит на тёмном ясном ночном небе наблюдатель на воздушном шаре на высоте 100 м, если наблюдатель на поверхности Земли в эту же ночь насчитал 2000 звёзд? Считать, что острота зрения у наблюдателей одинакова, облачности и других помех наблюдениям нет, рефракцией пренебречь.

Решение. Для наблюдателя на воздушном шаре истинный горизонт ниже математического. Поэтому с его точки зрения к «верхней» полусфере неба, которую наблюдает его коллега на поверхности Земли, добавляется дополнительно узкая полоса звёзд у горизонта.

Угол наклона истинного горизонта вычисляется из прямоугольного треугольника с вершиной в центре Земли и равен $\arccos (R / R+h) = 0{,}32^o$. Таким образом, наблюдатель на шаре видит звёзды вплоть до высоты $-0{,}32^o$.

Вычислим площадь «пояса» сферы, ограниченного экватором и кругом высоты $-0{,}32^o$. Из-за малости угла пояс можно представить боковой поверхностью цилиндра, тогда его площадь равна $2\pi R_0 \cdot R_0 \sin 0.32^o = 0{,}035\ R_0^2$, ($R_0$ – «радиус небесной сферы») а доля поверхности сферы, видимая наблюдателем на шаре, равна $½ + 0{,}035/4\pi = 0{,}5028$.

Если на всей небесной сфере, из условия, видно 4000 звёзд, то на указанной доле их 2011.

---

4. В 1952 году известный американский философ Бертран Рассел в своих рассуждениях о доказательной базе современной науки ввел понятие «чайника Рассела»: *«Если бы я стал утверждать, что между Землей и Марсом вокруг Солнца по эллиптической орбите вращается фарфоровый чайник, никто не смог бы опровергнуть моё утверждение, добавь я предусмотрительно, что чайник слишком мал, чтобы обнаружить его даже при помощи самых мощных телескопов.»*

Предположим, что «чайник Рассела» вращается строго по орбите Земли с отставанием от неё ровно на полгода. Можем ли мы с помощью идеального наземного телескопа его увидеть? В какое время года лучше всего его искать? Определите видимую звёздную величину этого чайника и диаметр объектива телескопа, который требуется для наблюдений за ним. Считаем, что чайник абсолютно белый, то есть отражает весь падающий на него солнечный свет. Размеры чайника задайте, исходя из здравого смысла. Влиянием атмосферы и дифракционными ограничениями пренебречь.

Решение. Сначала оценим конфигурацию, в которой мы имеем максимальный шанс разглядеть чайник нашим идеальным телескопом на Земле. Понятно, что в точках перигелия и афелия земной орбиты Земля, Солнце и чайник будут находиться строго на одной прямой, и чайник будет в принципе ненаблюдаемым.

Допустим, Земля постепенно уходит от точки перигелия, а чайник, соответственно, от симметричной точки афелия орбиты. Поскольку угловые скорости земли и чайника в этот период неодинаковы (Земля быстрее), чайник будет «отставать» по орбите, получать ненулевой возрастающий угол элонгации и постепенно выходить из-за солнечного диска. Максимальный угол элонгации будет достигнут, когда линия «Земля – чайник» будет перпендикулярна линии апсид земной орбиты. С точки зрения календаря с хорошей точностью это произойдёт чуть позже осеннего равноденствия и чуть раньше весеннего равноденствия. Так что в году есть два периода наилучшей видимости чайника Рассела – начало марта и начало октября.

Для оценки звёздной величины можно из-за малого эксцентриситета орбиты с хорошей точностью принять расстояние между Землёй и чайником за 2 а.е., а «фазу» чайника за 1.

Тогда светимость чайника будет равна $L_ч = L_c / (4\pi D_0^2)\ \pi R^2 = 96$ Вт (здесь R = 15 см – радиус чайника, $D_0 = 1$ а.е., L_c – светимость Солнца), а световой поток от чайника на Землю равен $W = L_ч / 4\pi (2D_0)^2 = 8{,}5 \cdot 10^{-23}$ Вт/м^2.

По закону Погсона, сравнивая, например, с Солнцем ($m = –26.7^m$, $W = 1360$ Вт/м^2), получим видимую звёздную величину чайника $m_ч = +36.3^m$.

Диаметр телескопа оценивается опять же по закону Погсона или по формуле проницающей способности $m = 2 + 5 \lg D$ [мм].

Получаем D = 7,24 км. Разумеется, такой телескоп построить нереально, то есть даже при идеальных условиях чайник Рассела остаётся ненаблюдаемым. Рассел был прав.

---

5. Двойная система состоит из нейтронной звезды (R = 20 км, M = Mc) и красного гиганта (R = 25 Rc, M = Mc). Орбитальный период системы составляет 40 дней. Будет ли в этой системе наблюдаться эффект аккреции, то есть перетекания вещества с красного гиганта на нейтронную звезду? Подтвердите ответ расчётами. [Mc и Rc – масса и радиус Солнца соответственно]

Решение. Если не учитывать вращение звезды-гиганта вокруг своей оси, то аккреция начнётся, когда внешние слои звезды-гиганта будут сильнее притягиваться звездой-компаньоном, чем ядром самого гиганта.

Пограничный случай реализуется, когда сила притяжения элемента поверхности гиганта к ядру гиганта равна силе притяжения звезды-компаньона, находящейся в зените.

Приравниваем силы:

$-GM_1m/R_1^2 = -GM_2m/(L - R_1)^2$

Отсюда $(L - R_1) / R_1 = (M_2/M_1)^{0,5} = 1$

Получаем необходимое для начала аккреции расстояние между центрами звёзд:

$L = 2R_1 = 50$ Rc = 0,23 а.е.

Осталось выяснить, реализуется ли такое расстояние в двойной системе заданных параметров. Среднее расстояние между компонентами системы можно определить из обобщённого третьего закона Кеплера: $a^3 / (T^2 (M_1+M_2)) = 1$ [а.е.^{3} / год^2 / Mc]

Получаем a = 0,29 а.е.

Если пренебречь вращением звезды-гиганта и тепловым движением молекул поверхности звезды (оба фактора стимулируют аккрецию), то аккреция возможна, когда в перицентре расстояние между звёздами меньше 0,23 а.е.

Такая ситуация возможна при эксцентриситете орбит (он очевидно одинаков у обеих орбит), равном или большем, чем величина 1 – 0,23/0,29 = 0,2.

Итоговый ответ – аккреция безусловно возникает при эллиптических орбитах с эксцентриситетами, большими 0,2. На практике аккреция в таких системах возникает и при круговых орбитах за счёт вращения и теплового движения поверхности звезды-гиганта.

---

6. Центральная звезда планетной системы – голубая звезда с температурой T = 10000 К, радиусом R = 10 Rc и массой M = 6,7 Mc. Определите радиус орбиты и период обращения планеты, климат которой такой же, как на Земле. [Mc и Rc – масса и радиус Солнца соответственно]

Решение. Для того, чтобы климат на иной планете, был таким же, как на Земле, при условии, что она имеет такое же строение, необходимо, чтобы планета получала такое же количество тепла от своей звезды. Плотность потока энергии (Вт/м^2), получаемого поверхностью планеты, находится по формуле $W = \sigma T^4 R_S^2 / r^2$, где R_S – радиус звезды, σ – постоянная Стефана-Больцмана, T – температура поверхности звезды, r – радиус орбиты планеты. Тогда, исходя из того, что температура звезды 10000 К, а радиус 10 R_C, радиус орбиты планеты составит $\approx$28,9 а.е.

Далее, из третьего закона Кеплера в обобщённом виде $R^3 / (t^2 M_S) = 1$ [а.е.^{3} / год^2 / Мс] находится период обращения по орбите, который составит 60 лет.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по астрономии

Заключительный этап

11 класс

1. Вокруг Земли на круговых орбитах с высотами 450 км и 650 км вращаются два спутника. Над безопасным районом Тихого океана однократным включением двигателей спутников их геоцентрическую скорость обратили в ноль. Оцените скорость, с которой спутники упадут в океан. Считать, что спутники имеют идеальные аэродинамические характеристики, и торможением в атмосфере можно пренебречь.

Решение. По закону сохранения энергии при пренебрежении потерями на трение полная механическая энергия системы сохраняется. Соответственно, полная энергия спутников в первый момент после торможения равна полной энергии при столкновении с поверхностью океана.

В начальный момент кинетическая энергия каждого спутника равна нулю, а потенциальная (и, соответственно, полная) равна $E = –GMm/(R+h)$, где M – масса Земли, m – масса спутника, R – радиус Земли, h – высота спутника над поверхностью.

В момент столкновения с поверхностью планеты кинетическая энергия равна $E_к = mV^2/2$, а потенциальная $E_п = –GMm/R$.

Приравнивая эти величины, получаем: $–GMm/(R+h) = –GMm/R + mV^2/2$

Отсюда $V^2 = 2GM \cdot (1/R – 1/(R+h)) = 2GM/R \cdot h/(R+h)$

Первый множитель – это квадрат второй космической скорости у поверхности Земли. Замечаем, что если h >> R, то скорость столкновения логично равна второй космической.

В нашем случае для первого спутника получим $V_1 \approx 11{,}2 \cdot (450/6850)^{1/2} = 2{,}87$ км/с, для второго $V_2 \approx 11{,}2 \cdot (650/7050)^{1/2} = 3{,}40$ км/с.

Стоит отметить, что вообще-то мы нашли только вертикальную компоненту скорости столкновения. Несмотря на то, что спутники падают на Землю вертикально к её центру, суточное вращение Земли обеспечивает их в точке столкновения и горизонтальной компонентой скорости относительно поверхности. Однако линейная скорость вращения Земли составляет не более 0,5 км/с, и её вклад в общую величину модуля скорости (по теореме Пифагора) составит не более 0,04 км/с. В итоговом ответе этим вкладом можно пренебречь, если явно указать, что горизонтальная скорость много меньше вертикальной.

---

2. Определите продолжительность астрономических сумерек (высота Солнца от –12° до –18°) в день летнего солнцестояния для наблюдателя а) в Пекине (40° с.ш.); б) в Новосибирске (55° с.ш.).

Решение. В день летнего солнцестояния склонение Солнца составляет +23,5°, что позволяет нам легко вычислить его полуночную высоту. Для Пекина она получается равной –26,5°, а для более северного Новосибирска –11,5°. Последняя величина сразу даёт нам ответ на второй вопрос задачи – в дни около летнего солнцестояния астрономические сумерки в Новосибирске не наступают совсем.

Для Пекина необходимо вычислить время (или часовые углы) пересечения Солнцем альмукантаратов h = –12° и h = –18°. Очевидно, что это достаточно сделать только для вечерних астрономических сумерек, а потом не забыть удвоить полученный результат.

Простой метод вычисления – принять, что участок траектории Солнца на небесной сфере, соответствующий периоду астрономических сумерек, близок к прямой с углом наклона (90°–φ). Тогда длина участка траектории получается равной 6° / sin (90°–φ) ≈ 7,8°, а скорость Солнца = 15°/час · cos 23,5° ≈ 13,75°/час. Продолжительность вечерних астрономических сумерек получается равной 34 минутам.

Однако нижняя граница рассматриваемого нами интервала высот (–18°) находится гораздо ближе к высоте нижней кульминации Солнца (–26,5°), где Солнце перемещается горизонтально, чем к уровню горизонта, где Солнце заходит под углом 50°. Этот факт намекает, что наше упрощённое решение может привести к значительному отличию ответа от реальности, что и подтверждается более точными расчётами.

Более точный метод предполагает классическое для сферической астрономии исследование параллактического треугольника на небесной сфере, соединяющего северный полюс мира (N), точку зенита (Z) и центр Солнца (S). В этом треугольнике угол N – это искомый часовой угол точки пересечения альмукантарата, сторона NZ равна зенитному расстоянию точки полюса (NZ = 90°– φ = 50°), сторона NS равна полярному расстоянию Солнца (NS = 90°– 23,5° = 66,5°), а сторона ZS равна зенитному расстоянию Солнца на интересующем нас альмукантарате (ZS = 102° в начале астрономических сумерек и 108° в момент начала астрономической ночи).

По сферической теореме косинусов cos ZS = cos NZ cos NS + sin NZ sin NS cos N.

Отсюда для «верхней» высоты –12° получаем часовой угол (в часовой мере) 8ч 44,5м, а для «нижней» высоты –18° получаем часовой угол 9ч 33м. Поскольку по часовому углу Солнце двигается в течение суток равномерно, продолжительность вечерних астрономических сумерек составит 48,5 минут, что в полтора раза превышает оценку, полученную простым «линейным» методом.

Общая продолжительность астрономических сумерек в день летнего солнцестояния в Пекине составляет 97 минут, или 1 час 37 минут.

---

3. 7 февраля 2018 года ракетой-носителем Falcon Heavy на гелиоцентрическую орбиту был выведен автомобиль Tesla Roadster, принадлежащий Илону Маску. Параметры орбиты приведены ниже.

Наклонение 1,05° (к плоскости эклиптики)
Апоцентр 1,67 а. е.
Перицентр 0,98 а. е.

Оцените расстояние от Земли, на котором машина находится сейчас. Если бы запуск был совершён в «самый правильный» для полёта к Марсу момент, на каком минимальном расстоянии от планеты прошла бы машина?

См. решение задачи № 2 для 10 класса.

---

4. В 1952 году известный американский философ Бертран Рассел в своих рассуждениях о доказательной базе современной науки ввел понятие «чайника Рассела»: *«Если бы я стал утверждать, что между Землей и Марсом вокруг Солнца по эллиптической орбите вращается фарфоровый чайник, никто не смог бы опровергнуть моё утверждение, добавь я предусмотрительно, что чайник слишком мал, чтобы обнаружить его даже при помощи самых мощных телескопов.»*

Предположим, что «чайник Рассела» вращается строго по орбите Земли с отставанием от неё ровно на полгода. Можем ли мы с помощью идеального наземного телескопа его увидеть? В какое время года лучше всего его искать? Определите видимую звёздную величину этого чайника и диаметр объектива телескопа, который требуется для наблюдений за ним. Считаем, что чайник абсолютно белый, то есть отражает весь падающий на него солнечный свет. Размеры чайника задайте, исходя из здравого смысла. Влиянием атмосферы и дифракционными ограничениями пренебречь.

См. решение задачи № 4 для 10 класса.

---

5. Двойная система состоит из нейтронной звезды (R = 20 км, M = Mс) и красного гиганта (R = 25 Rс, M = Mс). Орбитальный период системы составляет 40 дней. Будет ли в этой системе наблюдаться эффект аккреции, то есть перетекания вещества с красного гиганта на нейтронную звезду? Подтвердите ответ расчётами. [Mс и Rс – масса и радиус Солнца соответственно]

См. решение задачи № 5 для 10 класса.

---

6. Одна из ближайших к Солнечной системе звёзд – это Звезда Лейтена в созвездии Малый Пёс. А ближайшая система к Звезде Лейтена – это Процион, альфа Малого

Пса. Параметры этих систем приведены в таблице ниже. Определите, когда эти системы были (или будут) максимально близко друг от друга, и на каком расстоянии.

Параметр	**Звезда Лейтена**	**Процион А**
Расстояние от Солнца	12,4 св. года	11,40 св. года
Прямое восхождение	07ч 27м 24.49с	07ч 39м 18.1с
Склонение	+05° 13′ 32.82″	+05° 13′ 29″
Лучевая скорость	+18,2 км/с	−4,1 км/с
Собственное движение:	RA: 571,26 mas в год Dec: –3694,25 mas в год	RA: −714.590 mas в год Dec.: −1036.80 mas в год
Параллакс	263 mas	284 mas
Видимая звёздная величина	+9,9m	+0,37m

Решение. Разница склонений звёзд крайне мала, поэтому во всех расчётах можно ей пренебречь без потери точности, и считать, что звёзды имеют одинаковое склонение.

Разница прямых восхождений звёзд составляет около 3°. С учётом склонения пренебрежение этой разницей приведёт к округлению до единицы коэффициентов порядка $\cos 3° \cdot \cos 5° = 0{,}995$. Погрешности, внесённые таким округлением, не превысят 1% от искомых величин, что очевидно является допустимым.

Поэтому для оценочных расчётов можно считать, что в настоящее время обе звезды в небе Земли обладают одинаковыми координатами – склонением +05°13,5′ и прямым восхождением 07ч33м (усреднили).

Определим компоненты скоростей звёзд в декартовой системе отсчёта, где ось Z направлена от нас на звёзды, ось X направлена вдоль круга склонений, а ось Y – вдоль меридиана, проходящего через звёзды.

В такой системе отсчёта $V_Z = V_R$, $V_X = R \cdot \omega_\delta$, $V_X = R \cdot \cos\delta \cdot \omega_{RA}$. Получаем:

Параметр	**Звезда Лейтена**	**Процион А**	**Относительно**
Радиальная скорость V_Z	+18,2 км/с	−4,1 км/с	+22,3 км/с
Скорость по оси δ V_X	–10,4 км/с	–17,3 км/с	+6,9 км/с
Скорость по оси RA V_Y	+10,3 км/с	–11,8 км/с	+22,1 км/с
Расстояние до звёзд	12,4 св. года	11,4 св. года	1,0 св. года

Относительная скорость звёзд положительна по всем осям. Это означает, что их относительное расстояние со временем увеличивается, значит, точка максимального сближения была в прошлом.

Относительная скорость звёзд по модулю равна 32,1 км/с и направлена под углом $\arccos(22{,}3/32{,}1) = 45{,}8°$ к прямой, соединяющей звёзды. Значит, минимальное расстояние между звёздами было равно $1{,}0 \cdot \sin 45{,}8° = 0{,}72$ св. года.

Время достижения минимального расстояния вычисляется как отношение величины $1{,}0 \cdot \cos 45{,}8° = 0{,}70$ (св. лет) к относительной скорости движения 32,1 км/с = $1{,}07 \cdot 10^{-4}$ св. лет/год. Получаем, что звёзды были ближе всего примерно 6,5 тыс. лет назад.