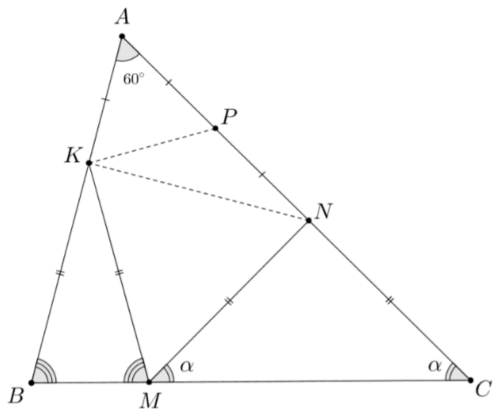
Решения и критерии проверки задач Третьего этапа Всесибирской олимпиады школьников 2018-2019 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Несколько гномиков несли конфеты своему вождю Шмебулоку. По дороге каждый гномик украл и съел по одной конфете у каждого другого. В результате Шмебулоку принесли только 53 конфеты. Сколько конфет было у каждого гномика изначально, если известно, что у всех было поровну?

Ответ: 53
Решение: Если изначально у всех было поровну, а затем у каждого украли одинаковое количество конфет, то поровну и осталось. Значит, если всего гномиков было x, и у каждого было y конфет, то всего они принесли $xy = 53$ конфеты. Но 53 – простое число, а гномиков больше одного, поэтому x = 53, y = 1. Значит, у каждого украли 52 конфеты, а изначально было по 53.
Критерии: Ответ, ответ с проверкой – 1 балл.
Если ребёнок дополнительно считает, что мог быть ровно один гномик, баллы не снимать.

7.2. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Точки M, N и K лежат на сторонах BC, AC и AB соответственно, причём $BK = KM = MN = NC$. Оказалось, что $AN = 2AK$. Найдите углы B и C.



Ответ: $\angle C = 45°$, $\angle B = 75°$.
Решение: Отметим точку P – середину отрезка AN. Тогда $AP = AK$ и, так как мы получили равнобедренный треугольник AKP с углом 60°, $KP = AP = KP$. Тогда в равнобедренном треугольнике KNP угол $\angle KPN = 120°$, откуда $\angle PKN = \angle PNK = 30°$.
Обозначим $\angle NCK = \angle NMC = \alpha$, тогда из суммы углов треугольник ABC следует, что $\angle ABC = \angle KMB = 120° - \alpha$, откуда $\angle KMN = 180° - \angle KMB - \angle NMC = 60°$. Значит, KMN тоже равносторонний, откуда $\angle MNK = 60°$.
Объединяя полученные результаты, видим, что $\angle ANM = 90°$, откуда $\angle C = 45°$, $\angle B = 180° - 45° - 60° = 75°$.
Критерии: только ответ, ответ с проверкой – 0 баллов.
Доказано, что KMN равносторонний – 2 балла.
Доказано, что $\angle PNK = 30°$ – 3 балла, суммируется с предыдущим.

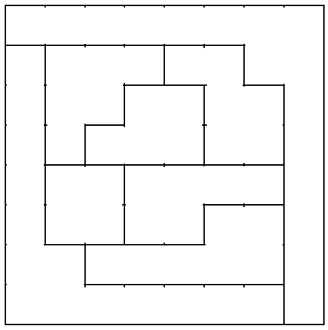
7.3. В городе модников живут 15 человек, каждый из которых носит по одной серёжке в каждом ухе. Всего у них 10 медных серёжек, 10 серебряных и 10 золотых. Однажды все жители встали в круг, и оказалось, что любые два соседа не носят серёжек из одного материала. Какое максимальное количество человек в этом городе может носить две серёжки из разных металлов?

Ответ: 6
Решение: Будем обозначать ММ – человек с двумя медными серёжками, МЗ – с медной и золотой и т.д. Пусть в кругу есть X людей МЗ. Тогда все их соседи только СС. Но тогда всего соседей у этих X людей суммарно хотя бы X+1. Тогда людей СС хотя бы X+1. Аналогично, если МС людей всего Y, то ЗЗ людей хотя бы Y+1, ЗС – Z, то ММ – хотя бы Z+1.
Но тогда всего людей ровно 15, а с другой стороны хотя бы $X+Y+Z+X+1+Y+1+Z+1 = 2(X+Y+Z)+3$. Значит, $X+Y+Z$, то есть, искомое количество, не больше 6.
Пример: СС, МЗ, СС, МЗ, СС, ЗЗ, МС, ЗЗ, МС, ЗЗ, ММ, СЗ, ММ, СЗ, ММ. В этом ряду ровно 6 человек носят разные серёжки.
Критерии: Только ответ – 0 баллов.

Только пример на 6 человек – 2 балла.
Только оценка, что больше 6 быть не может – 3 балла.
Только идея того, что на X человек приходится хотя бы $X+1$ соответствующего типа – 1 балл, может складываться с примером.

7.4. Можно ли квадрат со стороной 8 см разрезать на 8 различных многоугольников, у каждого из которых площадь, выраженная в квадратных сантиметрах, в два раза меньше периметра, выраженного в сантиметрах? Многоугольники, получаемые друг из друга поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.

Ответ: да
Решение: Например, так:



Критерии: Любой верный пример без проверки – 7 баллов.
Замечания: Внимательно проверять, что фигур ровно 8, что периметр каждой ровно в два раза больше площади, и что все они различны. Кроме того, все фигуры должны быть многоугольниками (фигуры с пустотами внутри многоугольниками не являются!)

7.5. В некоторой стране есть 2019 городов, любые два из которых соединены двусторонним рейсом одной из многочисленных авиакомпаний. Известно, что каждая авиакомпания обслуживает не более 2017 рейсов. Докажите, что найдутся три таких города, что все попарные рейсы между ними обслуживают разные авиакомпании.

Решение: Для простоты будем вместо “номер авиакомпании” говорить “цвет рейса”.
Предположим противное, т.е. что среди любых трёх городов найдутся два рейса одного цвета. Рассмотрим город, из которого выходит наибольшее количество рейсов одного цвета. Пусть это город A, и он соединён рейсом цвета 1 с городами $B_1,\ldots,B_k$ (всего k штук). Так как $k < 2018$, найдутся города $C_{k+1},\ldots,C_{2018}$, с которым A соединён рейсами других цветов.

Зафиксируем произвольный город C_i, который, без ограничения общности, соединён с A рейсом цвета 2. Рассмотрим произвольный город B_j и тройку городов AC_iB_j. Очевидно, что города C_i и B_j соединены рейсом цвета либо 1, либо 2, так как иначе эта тройка искомая. Но если город C_i соединён цветом 2 со **всеми** городами B_j, то из C_i выходит хотя бы $k+1$ рейс цвета 2, что противоречит выбору города A.

Значит, из города C_i выходит хотя бы один рейс цвета 1. В силу произвольности выбора города C_i, такой же рейс выходит из всех городов $C_{k+1},\ldots,C_{2018}$. Но тогда всего рейсов цвета 1 хотя бы 2018. Это противоречит тому, что их максимум 2017.

Критерии: возможны решения, использующие свойства деревьев и связных графов (так как любой цвет рейсов образует несвязный граф), все факты про них считать общеизвестными.

Решения и критерии проверки задач Третьего этапа Всесибирской олимпиады школьников 2018-2019 г.г. по математике
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Юра задумал четыре числа и выписал на доску все их попарные суммы. Когда Юра отвернулся, Сева стёр одну из сумм, после чего на доске остались написаны числа 19, 21, 22, 26 и 28. Какое число было стёрто?

Ответ: 25
Решение: Заметим, что все 6 сумм разбиваются на три пары, в каждой из которых они дополняют друг друга до суммы всех четырёх чисел. Значит, из оставшихся пяти сумм нужно найти две пары, дающих одну и ту же сумму (что является суммой всех четырёх чисел).
19 + 21 = 40
19 + 22 = 41
19 + 26 = 45
19 + 28 = 47
21 + 22 = 43
21 + 26 = 47
21 + 28 = 49
22 + 26 = 48
22 + 28 = 50
26 + 28 = 54
Сумма всех четырёх чисел должна встречаться тут по крайней мере дважды, единственное такое число – это 47 = 19 + 28 = 21 + 26. Значит третья пара состоит из чисел 22 и стёртой суммы, т.е. стёрто было число 47 – 22 = 25.
Критерии: только ответ – 0 баллов
Только ответ с примером загаданных чисел – 1 балл.

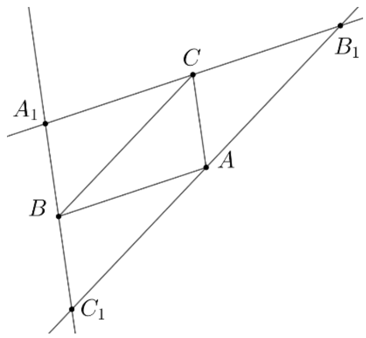
8.2. Про число N известно, что оно равно произведению десяти простых чисел (не обязательно различных). Кроме того, оказалось, что если каждый из этих десяти множителей увеличить на единицу, то полученное произведение будет делиться на N. Чему может быть равно N?

Ответ: $N = 2^5 3^5$ или $N = 2^6 3^4$.
Решение: Рассмотрим среди изначальных простых чисел наибольшее число p. Допустим, оно больше 3. Тогда после увеличения всех множителей на 1 новое произведение не может делиться на p. Действительно, p и p+1 взаимно просты, а все меньшее множители q после увеличения на 1 всё ещё меньше p. Так как новое число не делится на p, то и на N оно делиться не может.

Тогда все простые числа в разложении N – это 2 и 3, т.е. $N = 2^a 3^{10-a}$. После увеличения всех множителей на 1 получаем число $3^a 4^{10-a} = 2^{20-2a} 3^a$. Для того, чтобы новое число делилось на N, необходимо и достаточно, чтобы $20 - 2a \geq a$; $a \geq 10 - a$, то есть $20/3 \geq a$; $a \geq 5$. Подходят числа a = 5;6, то есть $N = 2^5 3^5$ или $N = 2^6 3^4$.
Критерии: Оба ответа, оба ответа с проверкой – 1 балл.
Не доказано, что все простые не больше 3 – не более 3 баллов.
Доказано только, что все простые не больше 3 – 2 балла (может складываться с баллом за ответ).
Потерян один ответ в верном решении – минус 2 балла.

8.3. Про $n > 2$ точек на плоскости известно, что любые три из них можно накрыть треугольником площади не более 1 см^2 (разные тройки, возможно, разными треугольниками). Докажите, что все точки можно одновременно накрыть треугольником площади не более 4 см^2.

Решение: Если все точки лежат на одной прямой, то любой треугольник, содержащий крайние две, содержит и все остальные. Поэтому все точки можно накрыть даже треугольником площади не более 1. Пусть теперь не все точки лежат на одной прямой.



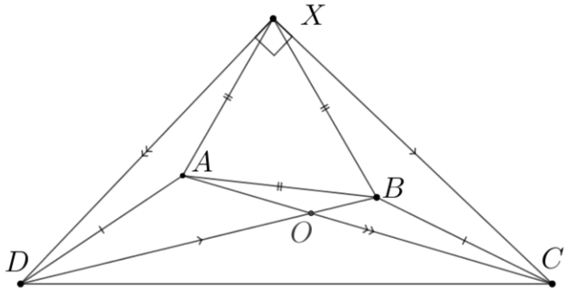
Пусть точки A,B,C образуют треугольник наибольшей площади из всех треугольников, образованных точками данного множества. По условию площадь ABC не превосходит 1. Проведём через точку A прямую, параллельную BC, через B – параллельную AC, через C – параллельную AB. Пусть эти прямые точками пересечения образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Заметим, что все его стороны в два раза больше, чем соответствующие у ABC (например, потому что A_1CAB и все такие четырёхугольники – параллелограммы), значит, он подобен ABC с коэффициентом 2, а его площадь в 4 раза больше, т.е. не превосходит четырёх.

Поймём теперь, что любая точка D из исходного множества лежит с той же стороны от прямой B_1C_1, что и отрезок BC. Действительно, если она лежит с другой стороны, то треугольник BCD имеет большую площадь, чем ABC, так как основание у них общее, а расстояние от D до BC (т.е. высота) больше, чем от A до BC. А треугольник мы выбирали наибольшей площади.
Аналогично понимаем, что D лежит внутри (или на границе) треугольника $A_1B_1C_1$. Но тогда произвольная точка нашего множества попадает внутрь этого треугольника, т.е. мы смогли накрыть сразу все точки треугольником $A_1B_1C_1$.

Критерии: не объяснено, почему площадь $A_1B_1C_1$ в четыре раза больше – баллы не снимать.
Не рассмотрен случай, когда все точки лежат на одной прямой – снимать 1 балл.

8.4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AD = BC$ и $\angle ADB + \angle ACB = \angle CAB + \angle DBA = 30°$. Докажите, что из отрезков DB, CA и DC можно составить прямоугольный треугольник.

Решение: Для начала заметим, что $\angle ADC + \angle DCB = \angle ADB + \angle BDC + \angle ACD + \angle ACB = 30° + \angle BDC + \angle ACD = 30° + \angle CAB + \angle ABD = 30° + 30° = 60°$. Предпоследнее равенство следует из того, что треугольники AOB и AOC имеют по равному углу. Значит, $\angle DAB + \angle ABC = 300°$.



Построим точку X вовне четырёхугольника $ABCD$ такую, что ABX равносторонний. Теперь заметим, что
$\angle DAX = 360° – \angle XAB – \angle DAB = 300° – \angle DAB = \angle ABC$,
$\angle XBC = 360° – \angle XBA – \angle ABC = 300° – \angle ABC = \angle DAB$.
Но тогда равны треугольники XAD и ABC, откуда $AC = DX$; DAB и XBC, откуда $BD = XC$.

Кроме того, $\angle DXC = \angle DXA + \angle AXB + \angle BXC = \angle BAC + 60° + \angle ABD = 60° + 30° = 90°$.
Значит, треугольник XDC – искомый.
Критерии: доказано, что $\angle DAB + \angle ABC = 300°$ или что $\angle ADC + \angle DCB = 60°$ – 2 балла.
Построена точка X – 1 балл, может суммироваться с предыдущим.
Доказано, что $AC = DX$ или $AC = DX$ - 1 балл, суммируется с предыдущими.

8.5. Пусть m и n – нечётные натуральные числа. Каждую клетку таблицы из m строк и n столбцов покрасили в жёлтый или синий цвет. Назовём строку в этой таблице *желтоватой*, если в ней больше жёлтых клеток, чем синих. Назовём столбец *синеватым*, если в нём больше синих клеток, чем жёлтых. Чему равно наибольшее возможное общее количество желтоватых строк и синеватых столбцов?

Ответ: Если $m = 1$, то n; Если $n = 1$, то m; Если $n, m > 1$, то $n + m - 2$.
Решение: Пусть одно из чисел равно 1, без ограничения общности, $n = 1$. Тогда либо все клетки синие, и искомое количество равно m, либо есть хотя одна жёлтая, и общее количество не больше 1(1 столбец) + m – 1(не более m – 1 строки) = m.
Далее считаем, что оба числа не меньше трёх.

Обозначим общее количество желтоватых строк и синеватых столбцов за X. Предположим, что X = $n + m$. Тогда все строки желтоваты, а все столбцы синеваты. Но тогда, если смотреть по строкам, всего в таблице больше жёлтых клеток, а если по столбцам – то всего больше синих клеток. Противоречие.

Предположим теперь, что X = $n + m - 1$. Без ограничения общности, считаем, что все строки желтоваты, а все, кроме одного, столбцы синеваты. Пусть $m = 2a - 1$, $n = 2b - 1$. Тогда в каждой строке хотя бы b жёлтых клеток, значит, всего в таблице хотя бы $b(2a - 1)$ жёлтых клеток. Во всех, кроме одного, столбцах хотя бы a синих клеток. Значит, всего синих клеток хотя бы $a(2b - 2)$. Значит, всего в таблице хотя бы $b(2a - 1) + a(2b - 2) = 4ab - b - 2a$ клеток. Но всего в таблице клеток ровно $(2a - 1)(2b - 1) = 4ab - 2a - 2b + 1 = (4ab - b - 2a) + (1 - b) < 4ab - b - 2a$, так как b хотя бы 2. Получаем противоречие.

Приведём теперь пример раскраски, при которой X = $n + m - 2$. Покрасим первый столбец целиком в жёлтый, а всю верхнюю строку, кроме самой левой клетки, в синий. Оставшуюся часть заполним в шахматном порядке. Все нижние m-1 строка желтоватые. Все правые n-1 столбцов синеватые. Значит, это и есть искомый пример.
Критерии: только ответ – 0 баллов.
Только верный пример на n+m-2 – 2 балла.
Доказано, что X не может быть равно n+m – 1 балл, может суммироваться с баллами за пример.
Только оценка – 4 балла.
В полной оценке упущен случай $n = 1$ или $m = 1$ – снимать 1 балл.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Заключительный этап **2018-2019 г.г.**
9 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

9.1.. Найти максимальное количество последовательных трёхзначных чисел, в записи каждого из которых есть хотя бы одна нечётная цифра.
Ответ.111.
Решение. Примером 111 таких чисел являются 289, 290, 291, …, 398, 399. Перед ними и после них идут 288 и 400, не содержащие нечётных цифр, поэтому продлить этот пример влево или вправо невозможно. Аналогичные серии получаются для начальных чисел 489, 689 и 889. С другой стороны, любые не менее. чем 100, удовлетворяющих условию последовательных чисел обязательно содержат число, делящееся на 100, то есть одно из чисел 100. 300. 500, 700 и 900, причём в первом случае длина серии не больше 100. Значит, любая подходящая серия из более, чем 111 чисел должна быть продолжением одного из указанных выше примеров вправо или влево, что невозможно.
Критерии оценивания. Только пример для 111 чисел: 3 балла.

9.2. Для положительных чисел a и b выполняется неравенство $a+b>4$. Доказать, что тогда $\frac{a}{b}>3-b$.

Доказательство. Умножим неравенство $\frac{a}{b}>3-b$ на положительное b, получим эквивалентное $a>3b-b^2$. Ввиду неравенства $a+b>4$ из условия, достаточно доказать, что $a>4-b\geq 3b-b^2$. Последнее неравенство $4-b\geq 3b-b^2$ эквивалентно очевидному $b^2-4b+4=(b-2)^2\geq 0$, что завершает доказательство.
Критерии оценивания.

9.3. Последовательность чисел $a_n, n=1,2,\ldots$ такова, что, $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n+a_{n+1}}$ для всех натуральных n. Найти $a_n, n=1,2,\ldots$.

Ответ. $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Решение. Выразим явно a_{n+1} через a_n, найдём несколько первых значений a_n, догадаемся до общей формулы и докажем её по индукции.
Итак, $a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n+a_{n+1}}$, обе части больше 0, возводим в квадрат, получаем : $a_{n+1}^2-(2a_n+1)a_{n+1}+a_n^2-a_n=0$. Следовательно, a_{n+1} является одним из корней квадратного уравнения $x^2-(2a_n+1)x+a_n^2-a_n=0$. Находим эти корни: $x_{1,2}=\frac{2a_n+1\pm\sqrt{8a_n+1}}{2}$, ввиду равенства $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n+a_{n+1}}>a_n$, выбрать нужно тот, который с плюсом, $a_{n+1}=\frac{2a_n+1+\sqrt{8a_n+1}}{2}$. Подставляем $n=1$, получим

$a_2=3=1+2$, подставляем $n=2$, получим $a_3=6=3+3$, подставляем $n=3$, получим $a_4=10=6+4$, после чего разумно предполагаем, что $a_n=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Осталось доказать это равенство по индукции. База индукции только что проверена. Шаг индукции: если $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$, то, действительно, $a_{n+1}=\frac{n(n+1)+1+\sqrt{4n(n+1)+1}}{2}=\frac{n(n+1)+1+2n+1}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Формула указана, но не доказана по индукции: 1 балл.

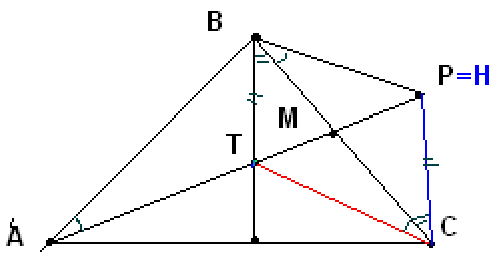
9.4. На продолжении медианы AM равнобедренного треугольника ABC с основанием AC за точку M взята точка P такая, что угол CBP равен углу BAP. Найти величину угла ACP.

Ответ. 90 градусов.

Решение. Пусть T – точка пересечения медианы AM и высоты, опущенной из вершины B. В силу равнобедренности треугольника ABC, эта высота является серединным перпендикуляром к AC, тогда AT=CT, BT перпендикулярен AC и углы BAT и BCT равны. Отложим от вершины C отрезок CH, равный и параллельный отрезку BT. Треугольники BTM и CHM равны по сторонам BT=CH, BM=MC и углам TBM и HCM между ними, следовательно, углы BMT и CMH вертикальны и H лежит на луче AM. Кроме того, в параллелограмме BTCP углы .BCT=BAT=BAP и CBH равны, следовательно, точки H и P совпадают, значит угол ACP=ACH=90 градусам в силу параллельности CH и серединного перпендикуляра BT к AC..

.**Критерии оценивания**.

9.5. Вася и Петя по очереди красят в синий и красный цвета вершины правильного 100 - угольника. Вася красит в синий любую не окрашенную на момент его хода вершину, у которой ни одна из двух соседних вершин не окрашена к этому моменту в синий цвет, а Петя красит в красный любую не окрашенную на момент его хода вершину. Вася ходит первым. Какое максимальное количество вершин он всегда может окрасить в синий цвет, как бы ни мешал ему Петя?



Ответ. 33.

Решение.. Покажем сначала, как Вася гарантированно может покрасить в синий цвет не меньше 33 вершин. Для этого после первого своего хода в вершину, которую будем считать первой, он разбивает оставшиеся 99 вершин на 33 тройки идущих подряд и отвечает на ходы Пети по следующему правилу, глаголы

«ходит» и «красит» считаем синонимами.
1) Пусть Петя ходит в «пустую» тройку, куда ещё не было ни одного хода игроков. Тогда, если Петя красит одну из крайних вершин этой тройки, то Вася красит центральную, а если Петя красит центральную вершину тройки, то Вася красит следующую за ней по часовой стрелке, кроме случая, когда она – сотая по порядку и соседняя с первым ходом Васи. В этом случае Вася красит центральную вершину в любой «пустой» тройке, если таковая найдётся.
2) Пусть Петя ходит в некоторую тройку, куда уже были сделаны ходы игроков согласно п.1) (в тот момент, когда она перестала быть «пустой»). Тогда Вася красит центральную вершину в любой «пустой» тройке, если таковая найдётся.
Вася не может сделать ход только, тогда, когда нет ни одной пустой тройки и Петя уже покрасил вершину номер 99. Значит, как минимум 32 тройки, кроме последней, не пустые и содержат, в соответствии с п.1, хотя бы по одной покрашенной Васей клетке. Вместе с первой, получаем не меньше 33 окрашенных Васей вершин.
Теперь покажем, как Петя гарантированно может не позволить Васе отметить больше 33 вершин. Для этого после первого хода Васи, сделанного, можно считать, в вершину номер 1, Петя отвечает ему ходом в вершину 3 и разбивает все 96 вершин с 4-ой по 99 включительно на 32 последовательных тройки. На ход Васи в центральную вершину некоторой свободной тройки Петя отвечает ходом в любую крайнюю вершину той же тройки, а на ход Васи в одну из крайних вершин некоторой пустой тройки – ходом во вторую крайнюю вершину той же тройки. При этом в каждую из 32 троек Вася не может сходить больше одного раза, следовательно, всего он может окрасить не больше 33 вершин.
Критерии оценивания. Доказано, что Вася может покрасить не меньше 33 вершин: 3 балла. . Доказано, что Вася не сможет гарантированно покрасить больше 33 вершин: 3 балла.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Заключительный этап **2018-2019 г.г.**
10 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

10.1.. Прямые l и m пересекают ось ОХ в различных точках, симметричных друг другу относительно начала координат, и параболу $y=x^2$ в точках $(a,a^2),(b,b^2)$ и $(c,c^2),(d,d^2)$ соответственно. Доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$

Доказательство. Пусть уравнения прямых l и m имеют вид $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ соответственно. Эти прямые пересекают ось ОХ в точках $(-\frac{b_1}{k_1},0)$ и $(-\frac{b_2}{k_2},0)$ соответственно, из условия имеем $-\frac{b_1}{k_1}=\frac{b_2}{k_2}\Leftrightarrow\frac{b_1}{k_1}+\frac{b_2}{k_2}=0$. Абсциссы a и b точек пересечения прямой l с параболой являются корнями квадратного уравнения $x^2-k_1x-b_1=0$, по теореме Виета $a+b=k_1, ab=-b_1$, откуда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{b_1}{k_1}$. Аналогично $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=-\frac{b_2}{k_2}$, следовательно, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=-\frac{b_1}{k_1}-\frac{b_2}{k_2}=0$

Критерии оценивания. Получено равенство $-\frac{b_1}{k_1}=\frac{b_2}{k_2}\Leftrightarrow\frac{b_1}{k_1}+\frac{b_2}{k_2}=0$: 1 балл. Получено равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b_1}{k_1}$: 2 балла.

10.2. Множество А содержит 15 различных натуральных чисел, не превосходящих 100, одно из которых равно 84, и обладает следующим свойством: модуль разности любых двух различных чисел из А снова содержится в А. Доказать, что А обязательно содержит число 42.

Доказательство. Докажем, что А является арифметической прогрессией, все члены которой делятся на один из делителей числа 84. Пусть $a_1<a_2<...<a_{15}$ - все элементы А. По условию, число a_2-a_1 меньше a_2 и содержится в А, следовательно, оно равно a_1, значит $a_2=2a_1$. Далее, a_3-a_1 меньше a_3 и содержится в А, следовательно, оно равно a_1 или a_2, в первом случае a_3 равнялось бы a_2, чего не может быть, во втором $a_3=a_2+a_1=3a_1$. Продолжая аналогично, получим $a_n=nq, n=1,2,...15$. Из того, что А содержит 84 следует, что a_1 является делителем 84, все кратные этого делителя вплоть до 84 должны содержаться в А. Для делителей 1,2,3 и 4 это невозможно. так как их кратных до 84 будет больше 15, 6 и 7 подходят, а 12,14,21,28 и 42 не подходят, так как их кратных будет не больше 8. В обоих подходящих случаях 42 делится на a_1 и содержится в А.

Критерии оценивания. Доказано, что только $a_2=2a_1$: 1 балл. Доказано, что $a_n=nq, n=1,2,...15$: 3 балла. Замечено, что a_1 является делителем 84: 1 балл.

10.3. Пусть в каждой клетке квадратной таблицы n на n, где n - нечётно, стоит 1 или –1. Обозначим произведения всех чисел в первой. второй,..., n-ой строках таблицы через $a_1, a_2, \dots a_n$, а в первом, втором,..., n-ом столбцах – через $b_1, b_2, \dots b_n$. Доказать, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_n \neq 0$.

Доказательство. Произведение a_i равно -1 тогда и только тогда, когда количество минус единиц в i-ой строке нечётно, следовательно $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n - 2k$, где k - число строк в таблице с нечётным количеством минус единиц. Аналогично, $b_1 + b_2 + \dots + b_n = n - 2l$, где l - число столбцов в таблице с нечётным количеством минус единиц. Следовательно, сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_n$ равна 0 тогда и только тогда, когда $n = k + l$. Однако, чётности k и l совпадают с чётностью количества всех –1 в таблице и. следовательно, равны. Значит. $k + l$ - чётное число, которое не может равняться нечётному n.

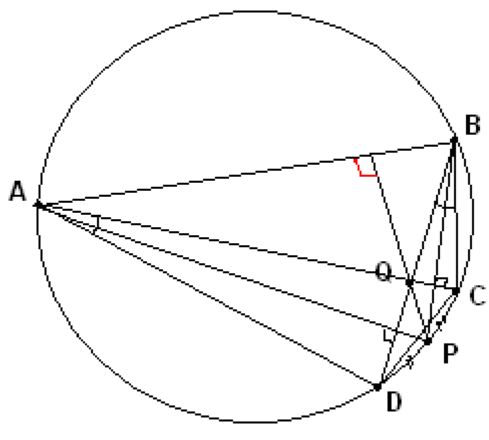
Критерии оценивания. Выписаны формулы типа: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n - 2k$, где k - число строк в таблице с нечётным количеством минус единиц: 2 балла. Показано, что сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_n$ равна 0 тогда и только тогда, когда $n = k + l$: 1 балл. Доказано, что чётности k и l совпадают с чётностью суммы всех чисел таблицы и. следовательно, равны: 2 балла. Замечено, что $k + l$ - чётное число, которое не может равняться нечётному n: 1 балл.

10.4. Докажите, что для любых положительных чисел a и b и любого натурального n выполняется неравенство $(1+\frac{a}{b})^n + (1+\frac{b}{a})^n \geq 2^{n+1}$.

Доказательство.. Перепишем левую часть неравенства из условия в виде $(\sqrt{\frac{a}{b}}(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}))^n + (\sqrt{\frac{b}{a}}(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}))^n = ((\sqrt{\frac{a}{b}})^n + (\sqrt{\frac{b}{a}})^n)(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}})^n$ и заметим, что, ввиду известного неравенства $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \geq 0$ при всех положительных x, имеем $(\sqrt{\frac{a}{b}})^n + (\sqrt{\frac{b}{a}})^n \geq 2$ и $(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}})^n \geq 2^n$, откуда следует утверждение задачи.

Критерии оценивания.

10.5. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность и длины сторон BC и DC равны, а длина стороны AB равна длине диагонали AC. Пусть точка P – середина дуги CD, не содержащей точку A, и Q – точка пересечения диагоналей AC и BD. Доказать, что прямые PQ и AB перпендикулярны.



Доказательство.. Докажем, что прямая PQ содержит высоту треугольника AQB из

вершины Q, откуда сразу будет следовать её перпендикулярность отрезку AB.
Сначала заметим, что треугольник CBQ равнобедренный с вершиной B. Обозначим величину угла BAC за *2x*, ввиду равенства сторон BC и DC величина угла CAD также равна *2x*. Углы CAD и CBD равны, как вписанные, опирающиеся на дугу CD, поэтому и угол CBD, равный углу CBQ, равен *2x*. В равнобедренном треугольнике ABC углы ABC и BCA, равный BCQ, равны по *90-x*. Третий угол CQB треугольника BCQ тогда равен *180-2x-(90-x)=90-x*, то есть равен углу BCQ. Значит, треугольник CBQ равнобедренный с вершиной B. Ввиду того, что P середина дуги CD, прямая BP является биссектрисой угла CBQ при вершине B равнобедренного этого треугольника и перпендикулярна его основанию CQ. Следовательно, прямая BP перпендикулярна прямой CQ = AC, поэтому BP – прямая, содержащая высоту треугольника AQB из вершины B,
В треугольнике QAD угол QAD, равный CAD, равен CBD как вписанный, опирающийся на дугу CD, угол ADQ равен ACB, как вписанный, опирающийся на дугу AB, а угол AQD равен BQC, как вертикальный, поэтому треугольник QAD подобен треугольнику CBQ и тоже равнобедренный. Прямая AP снова является биссектрисой угла при его вершине A и перпендикулярна QD = BD. Следовательно, AP содержит высоту треугольника AQB из вершины A.
Таким образом, точка P является точкой пересечения высот треугольника AQB, следовательно. прямая PQ содержит третью высоту этого треугольника из вершины Q и перпендикулярна AB, что и требовалось доказать.
.**Критерии оценивания**. Показано, что треугольник CBQ равнобедренный с вершиной B: 2 балла. Показано, что BP – прямая, содержащая высоту треугольника AQB из вершины B: 1 балл. Показано, что AP содержит высоту треугольника AQB из вершины A: 2 балла. Вывод о том, что прямая PQ содержит третью высоту этого треугольника из вершины Q и перпендикулярна AB: 2 балла.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Заключительный этап **2018-2019 г.г.**

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Последовательность чисел $a_n, n=1,2,..,12$ такова, что, $a_1=1, a_{12}=2, a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+1}{a_n}$ для всех натуральных $n=1,2,\ldots,10$. Найти a_4.

Ответ. $a_4=2$.

Решение. Для краткости обозначим a_2 за x и найдём несколько первых членов последовательности:

$$a_1=1, a_2=x, a_3=x+1, a_4=\frac{x+2}{x}, a_5=\frac{2x+2}{x(x+1)}=\frac{2}{x}, a_6=1, a_7=x.$$

при $x\neq-1$, что, как мы увидим, будет выполнено. Следовательно, она периодична с периодом 5. В таком случае $a_2=a_{12}=2, a_3=\frac{2+1}{1}=3, a_4=\frac{3+1}{2}=2$.

Критерии оценивания. Установлена периодичность и найден период: 4 балла. Не обращено внимания на $x\neq-1$: снимаем 1 балл.

11.2. Найти все натуральные числа n, которые можно представить в виде суммы $n=x+y+(x,y)+[x,y]$ для некоторых натуральных чисел x и y. Здесь (x,y) и $[x,y]$ обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел x и y соответственно.

Ответ. Все чётные числа, большие двух.

Решение.. Если оба числа x и y.одной чётности, то все четыре слагаемых $x, y, (x,y)$ и $[x,y]$ имеют ту же чётность и их сумма чётна. Если они имеют разную чётность. то (x,y) нечётно, а $[x,y]$ чётно, потому в сумме будет два чётных и два нечётных числа и она снова будет чётна. Каждое её слагаемое не меньше одного, поэтому вся сумма не меньше 4. Следовательно, ответом задачи может быть только чётное число, большее двух.

С другой стороны, для произвольного чётного $n>2$ положив $x=1, y=\frac{n}{2}-1$, получим $(x,y)=x=1$ и $[x,y]=y=\frac{n}{2}-1$, откуда $x+y+(x,y)+[x,y]=n$ - представляется в требуемом в условии виде.

Второе решение. Если обозначить $(x,y)=d$, то $x=x_1d, y=y_1d, [x,y]=x_1y_1d$, где x_1, y_1 взаимно просты, значит, одно из них обязательно нечётно. Тогда $n=x+y+(x,y)+[x,y]=d(1+x_1)(1+y_1)$, где обе скобки не меньше 2 и одна из них обязательно чётна. Следовательно, ответом задачи может быть только чётное число, большее двух. Далее всё как в первом решении.

Критерии оценивания. Доказано, что сумма $x+y+(x,y)+[x,y]$ чётна: 3 балла. Доказано, что n может быть только чётным числом, большим двух: 1 балл. Доказано, что любое чётное число, большее двух, представляется в требуемом виде: 3 балла.

11.3. Вася и Петя по очереди красят в синий и красный цвета клетки доски размера 10 на 10 клеток. Вася красит в синий любую не окрашенную на момент его хода клетку, у которой ни одна из соседних по стороне клеток уже не окрашена в синий цвет, а Петя красит в красный любую не окрашенную на момент его хода клетку. Вася ходит первым, какое максимальное количество клеток он всегда может окрасить в синий цвет, как бы ни мешал ему Петя?

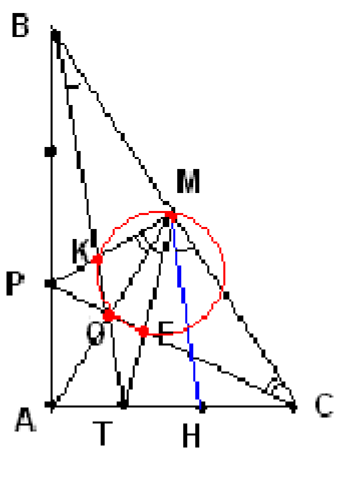
Ответ. 25.

Решение. Вася всегда может покрасить в синий цвет не меньше 25 клеток доски, если будет красить на каждом очередном ходу любую, ещё не окрашенную к этому моменту клетку, являющуюся чёрной при шахматной раскраске доски. Таких клеток 50, из них он успеет окрасить не меньше 25, покрашенные ранее синие клетки ему при этом мешать не могут, так как чёрные при шахматной окраске клетки не могут быть соседними по стороне.

С другой стороны, Петя может не позволить ему окрасить больше. Для этого он разбивает всю доску на 25 квадратов 2 на 2 клетки и на каждый ход Васи в некоторую клетку A некоторого пустого квадрата своим ходом красит вторую клетку того же квадрата, образующую с A его диагональ. При такой стратегии Вася не сможет окрасить больше одной клетки каждого квадрата 2 на 2, и всего окрасит не больше 25 клеток.

Критерии оценивания. Только доказано, что Вася всегда может покрасить в синий цвет не меньше 25 клеток: 3 балла. Только доказано, что Петя может не позволить ему окрасить больше: 3 балла. Всё вместе: 7 баллов.

11.4. В прямоугольном треугольнике ABC точка M – середина гипотенузы BC, а точки P и T делят катеты AB и AC в отношении AP:PB=AT:TC=1:2. Обозначим за K точку пересечения отрезков BT и PM, за E – точку пересечения отрезков CP и MT, и за O - точку пересечения отрезков CP и BT. Доказать, что четырёхугольник OKME – вписанный.



Доказательство 1. Докажем, что сумма углов KOE и KME равна 180 градусов. Для этого заметим, что углы CBT и .AMT равны. Действительно, пусть H – середина отрезка TC, тогда AT=TH=HC. Треугольник AMC равнобедренный, поэтому треугольники MAT и MCH равны по одноимённым углам и прилежащим к ним сторонам. Отсюда, в частности, следует равенство углов AMT и CMH. По обратной теореме Фалеса, BT и MH параллельны, поэтому угол CBT равен углу CMH = углу AMT.

Аналогично, угол BCP равен углу AMP., поэтому угол KME, равный углу PMT, равен сумме углов CBT и BCP. Из треугольника BOC видно, что последняя сумма равна 180 минус угол BOC, равный углу KOE. Следовательно, сумма углов KME и KOE действительно равна 180 и четырёхугольник OKME – вписанный.

Доказательство 2. Хорошо известно, что четырёхугольник ОКМЕ – вписанный тогда и только тогда, когда равны произведения длин секущих ТК и ТМ на длины их внешних частей ТО и ТЕ: ТК•ТО=ТМ•ТЕ. Выразим длины этих отрезков через длину ВТ.

1. Отметим точку Н – середину отрезка ТС, треугольники ВТС и МНС подобны с коэффициентом 2, следовательно, МН=ВТ/2. Треугольник ТМН равнобедренный, следовательно, ТМ=МН=ВТ/2.

2. Треугольники СЕМ и РЕТ подобны с коэффициентом СМ/РТ=3/2, следовательно, ТЕ=2/5•ТМ=.1/5•ВТ

3. Треугольники ТКР и ВКМ подобны с коэффициентом ВМ/РТ=3/2, следовательно, ТК=2/5•ТВ.

4. Треугольники ТОР и ВОС подобны с коэффициентом СВ/РТ=3, следовательно ТО=1/4•ТВ.

5. Наконец, ТК•ТО=2/5•ТВ•1/4•ТВ=1/10•ТВ^2=1/5•ТВ•1/2•ТВ=ТЕ•ТМ, что и требовалось доказать.

Замечание. Несложно убедиться, что точка О лежит на медиане АМ, но в данном решении это не используется.

.**Критерии оценивания**. Доказано, что углы СВТ и .АМТ равны: 2 балла.

11.5. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} x^2+x-1=y, \\ y^2+y-1=z,. \\ z^2+z-1=x. \end{cases}$$

Ответ. $x=y=z=1$ и $x=y=z=-1$.

Решение 1. 1. Легко заметить, что, если одна из переменных равна 1 или –1, то остальные равны тому же самому. Отсюда получаются два очевидных решения: $x=y=z=1$ и $x=y=z=-1$, и далее можно считать, что все переменные не равны 1 или –1.

2. Сложим все уравнения, сократим подобные и перенесём –3 направо, получим $x^2+y^2+z^2=3$.

3. Перенесём в каждом уравнении 1 направо, перемножим все уравнения и сократим обе части на $(x+1)(y+1)(z+1)\neq 0$, получим $xyz=1$.

4. Вычтем в каждом уравнении из обеих частей 1, разложим левые части и представим в виде $(x-1)(x+2)=y-1$, перемножим все уравнения и сократим обе части на $(x-1)(y-1)(z-1)\neq 0$, получим $(x+2)(y+2)(z+2)=1$. Раскроем в последнем уравнении скобки, запишем его в виде $xyz+2(xy+xz+yz)+4(x+y+z)+8=1$ и заменим $xyz=1$, получим $2(xy+xz+yz)+4(x+y+z)+8=0$.

5. Используя равенство $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=3+2(xy+yz+xz)$, преобразуем предыдущее равенство, получим $(x+z+y)^2+4(x+y+z)+5=0$. Последнее является квадратным уравнение относительно $x+y+z$, не имеющим решения, ввиду отрицательности его дискриминанта.

Следовательно, исходная система не имеет решений, отличных от $x=y=z=1$ и $x=y=z=-1$.

Решение 2. 1) Сложим все уравнения, сократим подобные и перенесём –3 направо, получим $x^2+y^2+z^2=3$. Следовательно, модули всех x,y,z не превосходят $\sqrt{3}$, модуль одной из переменных не меньше 1, а другой – не больше 1.

2) Легко заметить, что, если одна из переменных равна 1 или –1, то остальные равны тому же самому. Отсюда получаются два очевидных решения: $x=y=z=1$ и $x=y=z=-1$, и далее можно считать, что все переменные не равны 1 или –1.

3) Рассмотрим функцию $f(t)=t^2+t-1$, заметим, что наша система имеет вид: $y=f(x), z=f(y), x=f(z)$. При $t>1$ имеем $f(t)=t^2+t-1>t$. Поэтому, если $x>1$, то $1<x<f(x)=y<f(y)=z<f(z)=x$, что невозможно, поэтому $x,y,z<1$. Для дальнейшего отметим, что минимальное значение $f(t)$ равно $-\frac{5}{4}$ при $t=-\frac{1}{2}$, при $t\in[-1,0]$ значение $f(t)\in[-\frac{5}{4},-1]$, при $t<-1$ значение $f(t)>-1$.

4) Если все $-1<x,y,z<1$, то $x^2+y^2+z^2<3$ - противоречие с п.1), поэтому как минимум одна из переменных меньше –1. Если $y<-1$, то $z=f(y)>-1$, следовательно, ровно одна из переменных меньше –1, считаем, что $x,y>-1>z$ и $z\in[-\frac{5}{4},-1]$. На интервале $[-\frac{5}{4},-1]$ функция $f(t)$ монотонно убывает, поэтому $x=f(z)\in[-1,-\frac{11}{16}]$, в частности, $x<0, x\in(-1,0)$. В таком случае $y=f(x)\in[-\frac{5}{4},-1]$, то есть $y<-1$, что противоречит установленному ранее неравенству $x,y>-1>z$. Следовательно, предположение о том, что одна из переменных меньше –1 приводит к противоречию. Значит, система не имеет решений, отличных от уже найденных $x=y=z=1$ и $x=y=z=-1$.

Решение 3.

1. Сложим все уравнения, сократим подобные и перенесём –3 направо, получим $x^2+y^2+z^2=3$.
2. Легко заметить, что, если одна из переменных равна 1 или –1, то остальные равны тому же самому. Отсюда получаются два очевидных решения: $x=y=z=1$ и $x=y=z=-1$, и далее можно считать, что все переменные не равны 1 или –1
3. Перенесём в каждом уравнении 1 направо, перемножим все уравнения и сократим обе части на $(x+1)(y+1)(z+1)\neq 0$, получим $xyz=1$.
4. Из пунктов 1 и 3 легко следуют равенства $|x|^2+|y|^2+|z|^2=x^2+y^2+z^2=3$ и $|x||y||z|=|xyz|=xyz=1$. Применим к левой части первого равенства с неотрицательным числам $|x|,|y|,|z|$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом: $3=|x|^2+|y|^2+|z|^2\geq 3\sqrt[3]{|x|^2|y|^2|z|^2}=3\sqrt[3]{|x||y||z|}^2=3$.

Следовательно, само неравенство должно быть равенством, что возможно только при $|x|=|y|=|z|$. Из равенства $|x||y||z|=1$ получаем $|x|=|y|=|z|=1$, что с учётом пункта 2 приводит к уже найденным решениям $x=y=z=1$ и $x=y=z=-1$.

Критерии оценивания. В первом решении нахождение каждого из значений $x^2+y^2+z^2=3$. $xyz=1$, $2(xy+xz+yz)+4(x+y+z)+8=0$ оценивается по 1 баллу, получение уравнения $(x+z+y)^2+4(x+y+z)+5=0$ оценивается в 2 балла. Доказательство неразрешимости последнего уравнения: 2 балла.
Во втором решении нахождение $x^2+y^2+z^2=3$: 1 балл. Доказательство того, что $x,y,z<1$: 1 балл. Доказательство того, что $x,y>-1>z$: 1 балл. Доказательство того, что $z\in[-\frac{5}{4},-1]$: 1 балл. Доказательство того, что $y<-1$ и получение противоречия: 3 балла.
В третьем решении нахождение каждого из значений $x^2+y^2+z^2=3$. $xyz=1$ оценивается по 1 баллу. Замечание о том, что $|x|^2+|y|^2+|z|^2=3$ и $|x||y||z|=1$: 1 балл. Применение неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом с неотрицательным числам $|x|,|y|,|z|$: 2 балла. Замечено, что в неравенстве строгое равенство и что $|x|=|y|=|z|$: 1 балл. Отсюда получено, что $x=y=z=1$ или $x=y=z=-1$: 1 балл.