Уравнение, описывающее поверхность морской раковины

Аврора Боронина

СУНЦ НГУ, Новосибирск

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. А. П. Чупахин

Институт Гидродинамики им. М. А. Лаврентьева

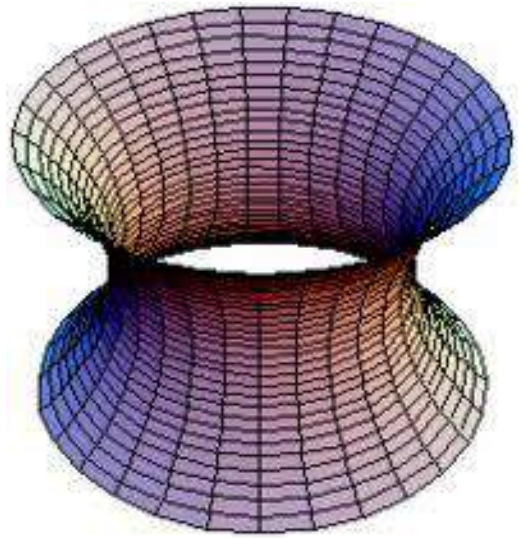
МНСК

План презентации

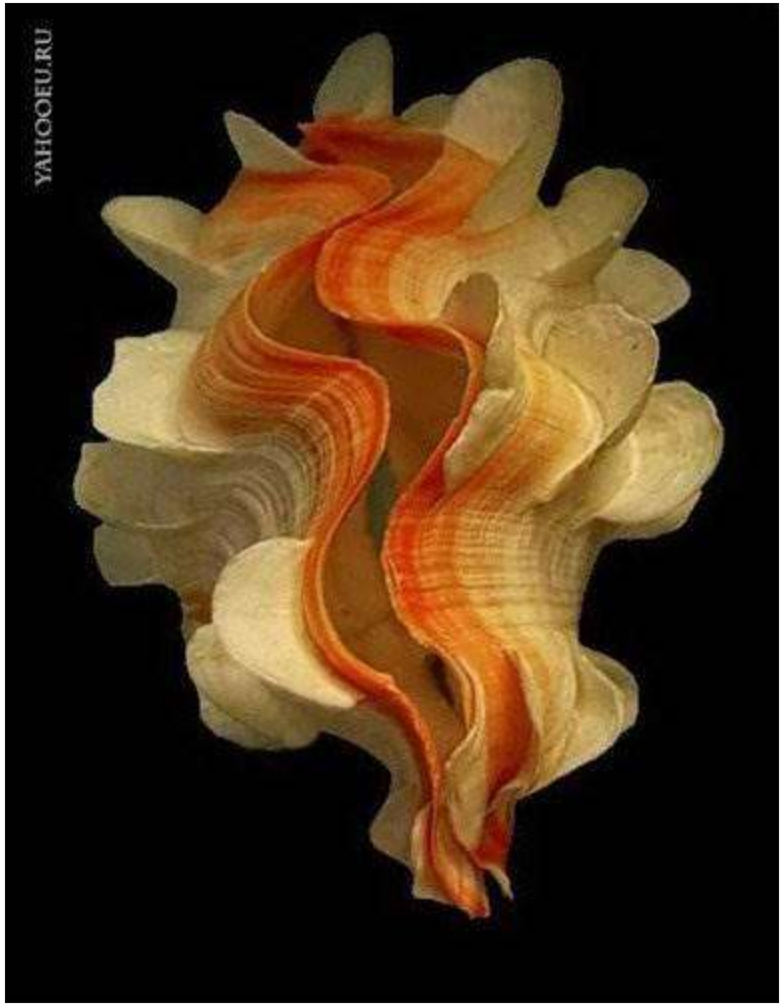
1. Актуальность + задачи
2. Что такое катеноид и гиперболоид
3. Расчеты
4. Сравнение
5. Выводы

Актуальность

- **Дифференциальная геометрия** – один из главных аспектов мат моделирования
- Помогает подробно моделировать объекты природы



Морские раковины



Цель и задачи исследования

- реально ли аналитически смоделировать геометрию раковины?

- Провести расчёты для различных поверхностей
- Построить кривую исходя из полученных данных (результатов)
- Сверить результаты с идеальными значениями

Наша раковина

Процесс работы

1. Измерение данных для
    - однополостного гиперболоида
    - катеноида
2. Измерение экспериментальных данных
3. Есть ли сходство?

Катеноид

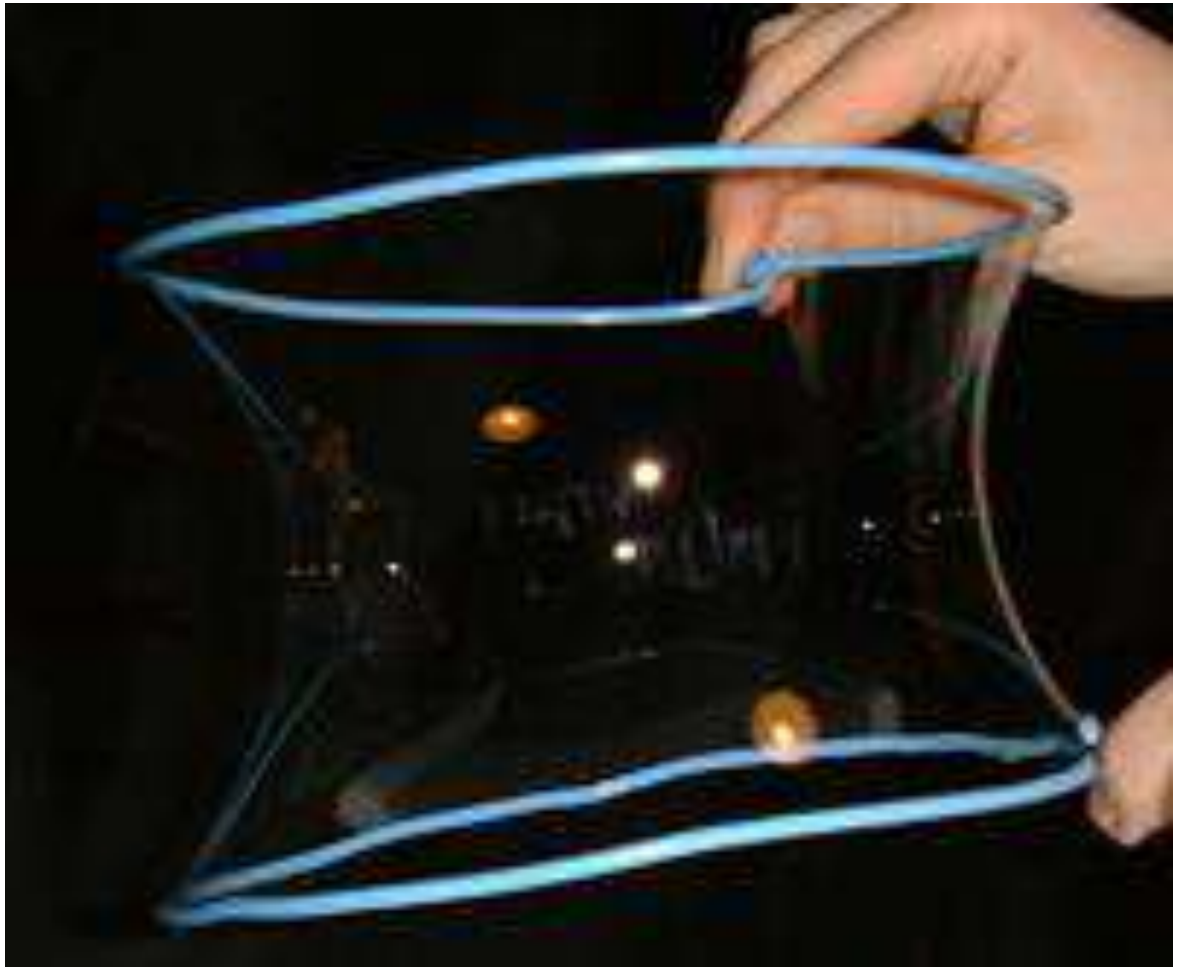
- Минимальная поверхность

x = a*ch(z/a) – вокруг оси oz

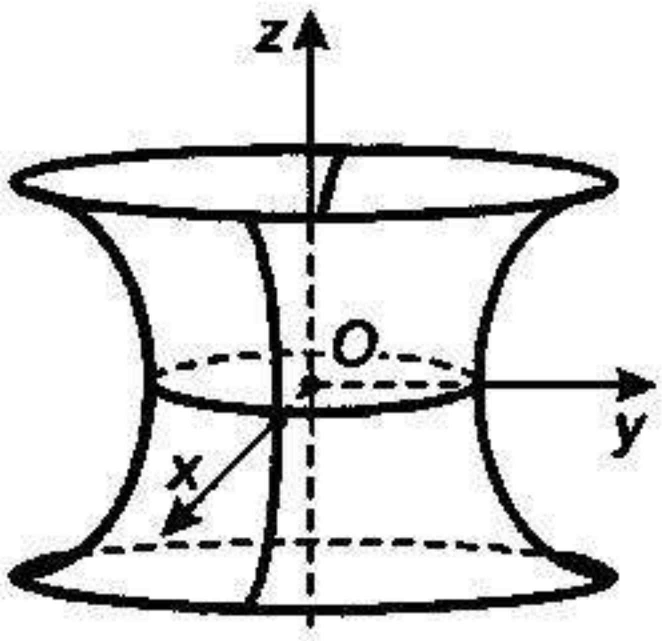
$(x)^2 + (y)^2 = \left(a * ch\frac{z}{a}\right)^2$, где

Ch($\frac{z}{a}$)=0.5($e^{\frac{z}{a}}+ e^{-\frac{z}{a}}$) – гиперболический косинус

$\left(\frac{x}{a*ch\frac{z}{a}}\right)^2 + \left(\frac{y}{a*ch\frac{z}{a}}\right)^2$ = 1 – итоговое уравнение



Алгоритм



- При z=0 находим a
- Для каждого z_i находим y_i
- Вычисляем:

$$Yi = \left(\frac{yi}{a * ch\frac{zi}{a}}\right)^2, \text{ аналогично } Xi$$

$$(Xi)^2 + (Yi)^2 = a^2\, ch^2\, \frac{z}{a}$$

x = a*ch(z/a)

Таблица вычислений

$a = 17,5$ мм

z	z/a	$e^{z/a}$	$e^{-z/a}$	$\frac{e^{z/a}+e^{-z/a}}{2}$	$ch\ z/a$	$a \cdot ch\ z/a$
5	0,29	1,34	0,75	1,05	1,045	18,2875
10	0,57	1,77	0,56	1,2	1,165	20,3875
15	0,86	2,36	0,42	2.18	1,39	24,325
20	1,14	3,13	0,32	3.45	1,725	30,1875
25	1,43	4,18	0,29	4.42	2,21	38,675

Однополостный гиперболоиды

Для высоких сооружений основную опасность несёт ветровая нагрузка, а у решётчатой конструкции она невелика. Эти особенности делают гиперболоидные конструкции прочными, несмотря на невысокую материалоёмкость.

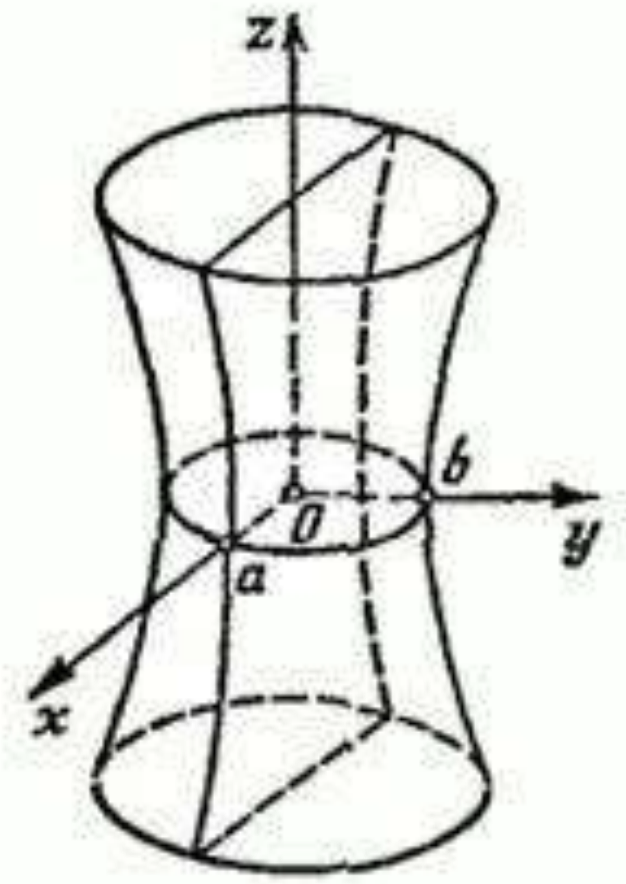
Однополостный гиперболоид

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$, где a,b,c>0

Горловой эллипс (z=0) $\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

X=0: $\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ – гиперболы

Аналогично для y=0



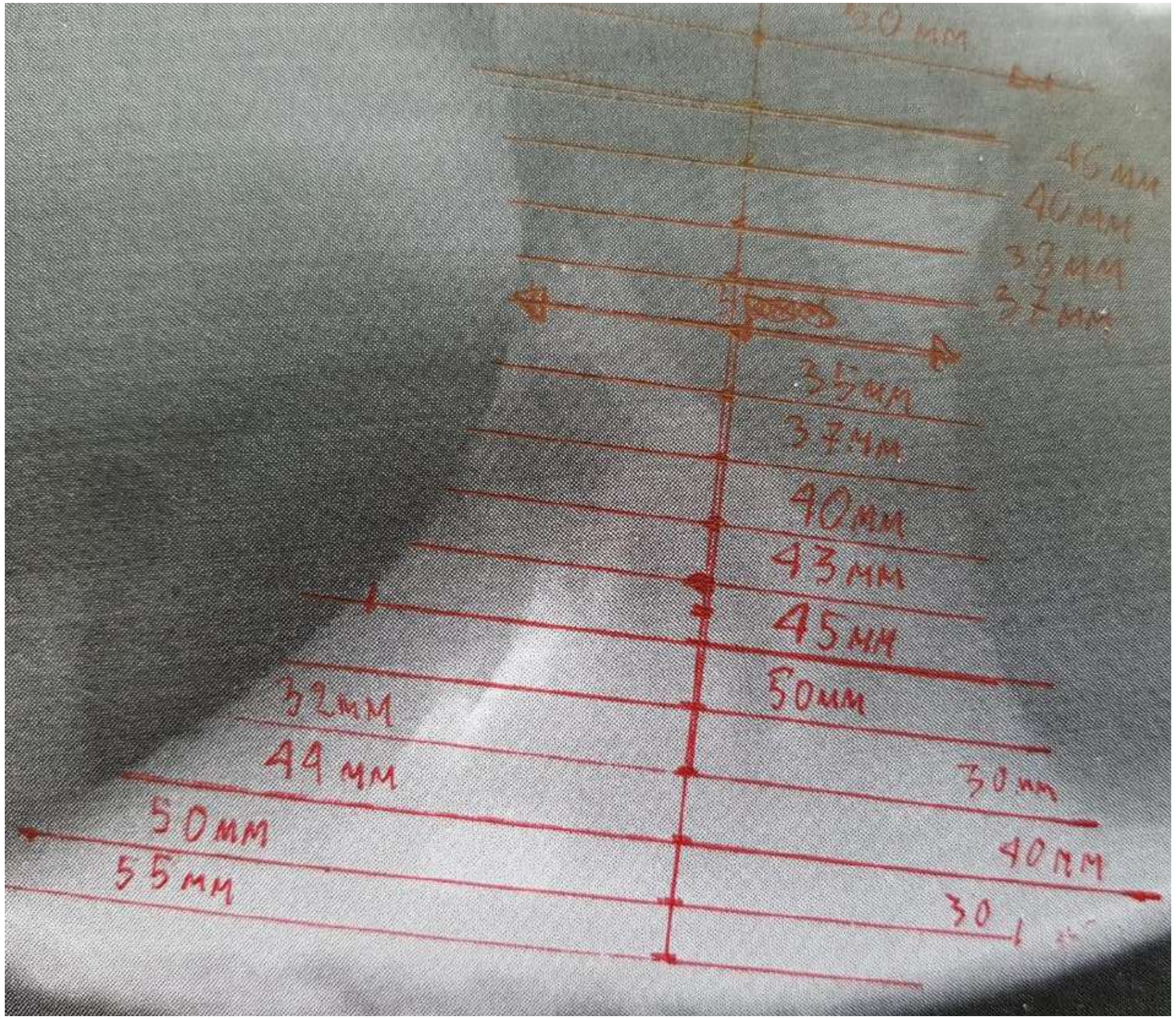
Алгоритм

- a=b=c = 17.5 мм («шейка» остается той же)
- $(x)^2 + (y)^2 - (z)^2 = (a)^2$
- При y=0: $(x)^2 = (z)^2 + (a)^2$ (мы рассматриваем фигуру вращения)

Таблица вычислений

z	z^2	a^2	$x^2 = a^2 + z^2$	x
5	25	306,25	331,25	18,2
10	100		406,25	20,2
15	225		531,25	23,05
20	400		706,25	26,6
25	625		931,25	30,5

Эксперимент

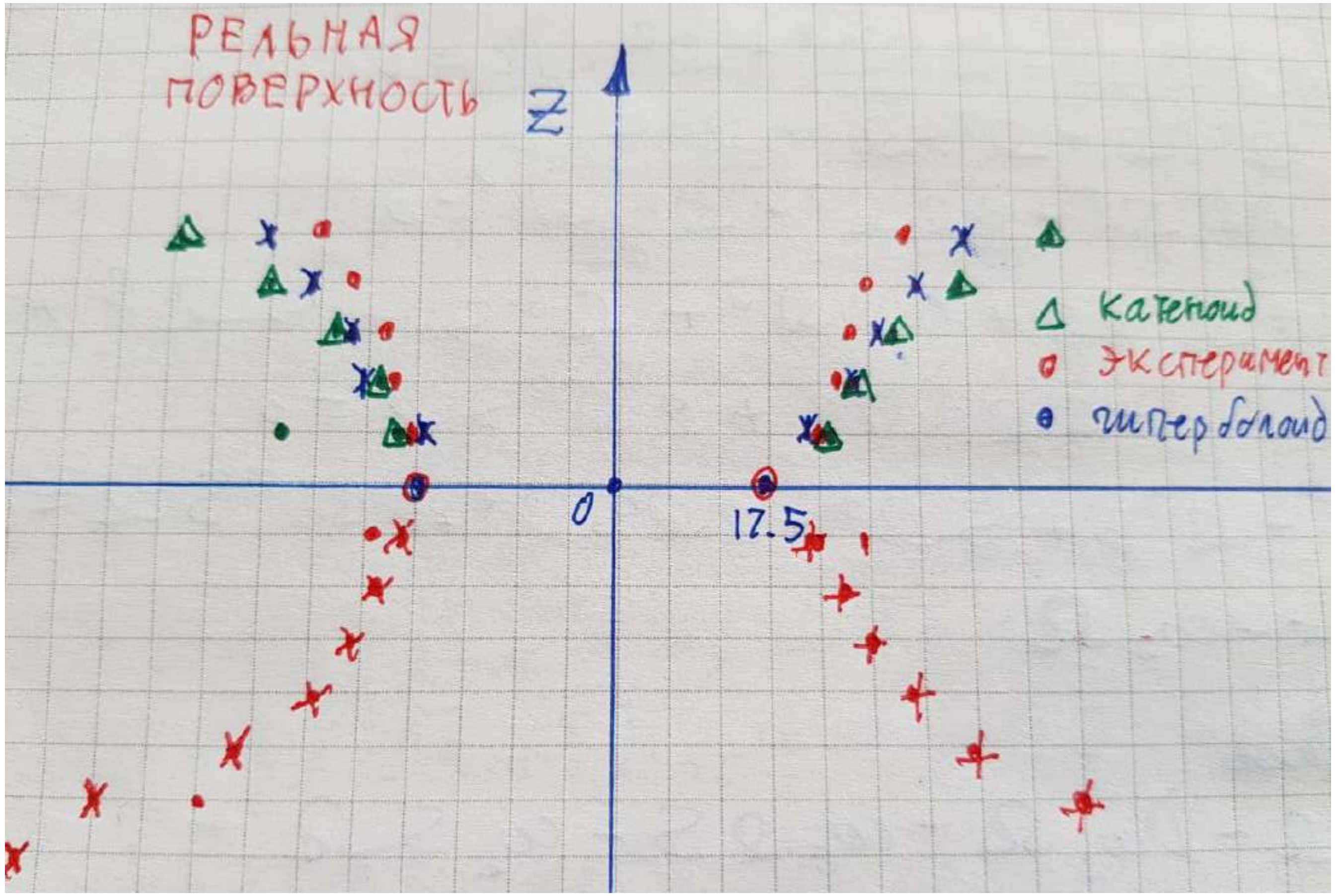


«шейка»

a=35/2=17.5

Сравнение

z	Гиперб.	Эксперимент	Катеноид
5	18.2	18.5	18.3
10	20.2	19.0	20.4
15	23.05	20.0	24.3
20	26.6	22,5	30.2
25	30.5	25,0	38.7



Корреляция

Коэффициент корреляции рассчитывается следующим образом:

$$r = \frac{cov(X,Y)}{S_x S_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$ где

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$ — выборочные дисперсии величин X и Y

Сила связи между переменными

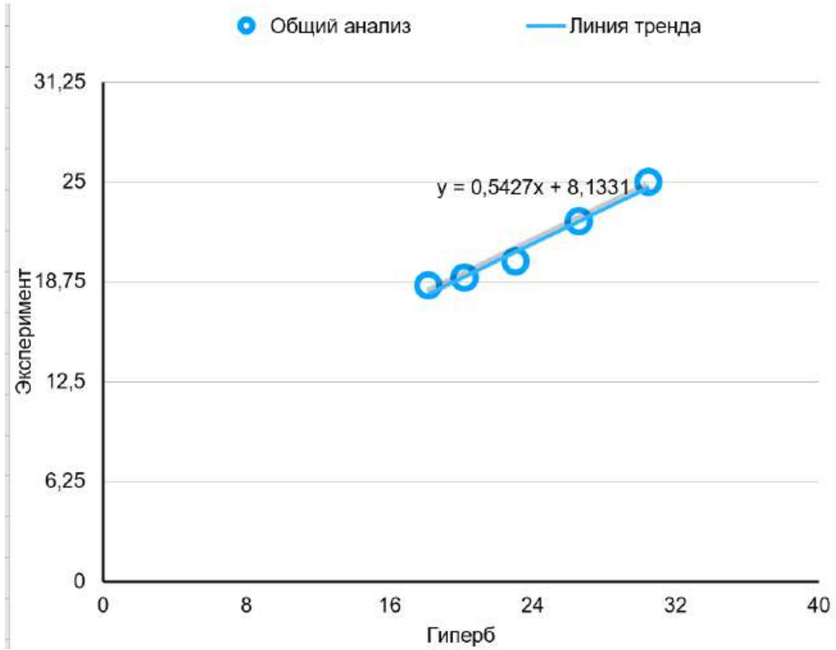
Значение	Интерпретация
От 0 до 0,3	очень слабая
От 0,3 до 0,5	слабая
От 0,5 до 0,7	средняя
От 0,7 до 0,9	высокая
От 0,9 до 0,999	очень высокая

Расчёт коэффициента

	x	y		среднее значение выборки x (X)	среднее значение выборки y (Y)	A=x_i-X	B=y_i-Y	AB	AA	BB	Сумм AB
2	18,2	18,5	5	23,71	21	-5,51	-2,5	13,775	30,3601	6,25	52,95
3	20,2	19				-3,51	-2	7,02	12,3201	4	
4	23,05	20				-0,66	-1	0,66	0,4356	1	
5	26,6	22,5				2,89	1,5	4,335	8,3521	2,25	
6	30,5	25				6,79	4	27,16	46,1041	16	

Сумм BB	Коэффициент корреляции
29,5	0,98694364

Корреляция



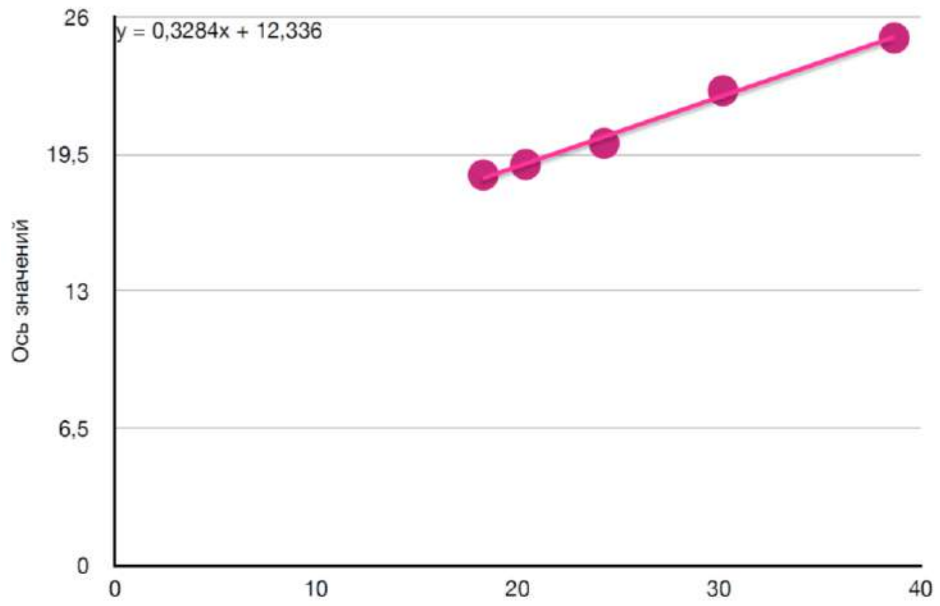
Пара Гиперб-Эксперимент
Коэффициент корреляции r=0,987. При числе степеней свободы n-2=3, наш расчетный коэффициент корреляции больше табличного (r_{tab}=0,959, при p=99%). **Связь сильная**.
Ниже показан график поля корреляции с отмеченной линией тренда. Линия тренда линейная, используется для аппроксимации данных по методу наименьших квадратов, представлена в виде уравнения y=kx+b.

Корреляция

	x	y		среднее значение выборки x (X)	среднее значение выборки y (Y)	A=x_i-X	B=y_i-Y
1							
2	18,3	18,5	5	26,38	21	-8,08	-2,5
3	20,4	19				-5,98	-2
4	24,3	20				-2,08	-1
5	30,2	22,5				3,82	1,5
6	38,7	25				12,32	4

AB	AA	BB	Сумм AB	Сумм AA	Сумм BB	Коэффициент корреляции
20,2	65,2864	6,25	89,25	271,748	29,5	0,996813793
11,96	35,7604	4				
2,08	4,3264	1				
5,73	14,5924	2,25				
49,28	151,7824	16				

Корреляция



Пара Катеноид-Эксперимент
Коэффициент корреляции r=0,997. При числе степеней свободы n-2=3, наш расчетный коэффициент корреляции больше табличного (r_{tab}=0,959, при p=99%). **Связь сильная**. Ниже показан график поля корреляции с отмеченной линией тренда. Линия тренда линейная, используется для аппроксимации данных по методу наименьших квадратов, представлена в виде уравнения y=kx+b.

Результаты

- Форма морской раковины представляет собой промежуточный вариант между **катеноидом и гиперболоидом.**
- Компромисс между

  - **Минимальной поверхностью +E**
  - **Оптимальностью конструирования**

Спасибо за внимание!

Вопросы?

Контакты: **avrora.boronina**@gmail.com