Об одном классе коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2

М. С. Ивлев
СУНЦ НГУ
Научный руководитель – д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН А. Е. Миронов

МНСК – 2020

Первая алгебра Вейля

Дифференциальный оператор – это выражение вида:

$$L = a_n(x)\partial_x^n + a_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} + \cdots + a_0(x),$$

где $a_j(x)$ – гладкие функции.

Дифференциальные операторы действуют на гладкие функции.

$$L\big(f(x)\big) = a_n(x)f^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)f(x).$$

Множество дифференциальных операторов с полиноминальными коэффициентами образует первую алгебру Вейля $A_1 = \mathbb{C}[x][\partial_x]$ (L ∈ A_1, если $a_j(x)$ – полиномы).

В A_1 между элементами ∂_xи x выполнено соотношение:

$$[\partial_x, x] = \partial_x \cdot x - x \cdot \partial_x = 1.$$

Автоморфизмы A_1

Эндоморфизмом называется отображение φ, такое, что:

$$\varphi : A_1 \rightarrow A_1, \varphi(L_n L_m) = \varphi(L_n)\varphi(L_m),$$
$$\varphi(\alpha L_n + \beta L_m) = \alpha\varphi(L_n) + \beta\varphi(L_m).$$

Эндоморфизм называют автоморфизмом, если ко всему прочему φ – биекция.

Для того, чтобы однозначно определить автоморфизм φ достаточно определить

$\varphi(\partial_x) = M, \quad \varphi(x) = N$, при этом должно выполнятся тождество: $[M, N\,] = 1$.

Теорема Диксмье

Теорема Диксмье. Любой автоморфизм A_1 является композицией элементарных автоморфизмов.

1. $\varphi(x) = \alpha x + \beta\partial_x,\ \varphi(\partial_x) = \gamma x + \delta\partial_x,\ \ \alpha\delta - \beta\gamma = 1,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta -$ константы.

2. $\varphi(x) = x, \varphi(\partial_x) = \partial_x + p(x)$.

3. $\varphi(x) = x + p(\partial_x),\ \varphi(\partial_x) = \partial_x, p -$ полином.

Гипотеза Диксмье. Любой эндоморфизм A_1 является автоморфизмом.

Один из подходов к гипотезе Диксмье

Рассмотрим уравнение

$$X^k + \alpha_{k-1}X^{k-1} + \cdots + \alpha_0 = Y^m + \beta_{m-1}Y^{m-1} + \cdots + \beta_0, \qquad (1)$$

где $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}, \mathrm{X}, Y \in A_1$.

На множестве решений действуют автоморфизмы A_1, то есть если (X, Y) – решение, то ($\varphi(X)$, $\varphi(Y)$) – тоже решение уравнения.

Разобьем множество решений некоторого уравнения (1) на орбиты. Элементы (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) лежат в одной орбите, если существует автоморфизм переводящий (X_1, Y_1) в (X_2, Y_2).

Если множество орбит конечно для какого-то уравнения, то гипотеза Диксмье верна.

Результаты работы

В прошлом году мы начали изучать решения простейшего уравнения:

$$w^2 = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0.$$

Результаты работы

В этой работе мы рассматриваем обыкновенные коммутирующие дифференциальные операторы L_4 и L_6 четвертого и шестого порядка соответственно, удовлетворяющие уравнению:

$$L_6^2 = L_4^3 + c_2 L_4^2 + c_1 L_4 + c_0.$$

Результаты работы

Теорема 1. Оператор четвертого порядка

$$L_4 = (p\,(x)\partial_x^2 + p'\,(x)\partial_x + h(x))^2 + 2\,g\,(x),$$

где

$$h(x) = \frac{p(x)^2(g''(x)^2 - 2g'(x)g^{(3)}(x)) - 2p(x)g'(x)p'(x)g''(x) - 4F(-g(x) - \frac{c_0}{2})}{4p(x)g'(x)^2},$$

$F(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$, где $p(x)$ и $\mathrm{g}(x)$ – некоторые гладкие функции, коммутирует с некоторым оператором шестого порядка L_6, причем $L_6^2 = L_4^3 + c_2 L_4^2 + c_1 L_4 + c_0$.

Результаты работы

Пример 1. Оператор $L_4 = (p(x)\partial_x^2 + p'(x)\partial_x + g(x))^2 + 2\,ab\,x$, где $\deg p(x) + \deg g(x) = 3$, a, b – старшие коэффициенты полиномов $p(x)$ и $g(x)$, коммутирует с некоторым оператором шестого порядка L_6, причем существуют такие $c_2,\ c_1,\ c_0$, что выполняется тождество $L_6^2 = L_4^3 + c_2 L_4^2 + c_1 L_4 + c_0$.

Результаты работы

Пример 2. Оператор $L_4 = (\partial_x^2 + G(\, p'(x)^2))^2 + p(x)$, где $\deg p(x) = 2, \deg G(x) = 2$, 128 а $b^3 = 1$, а, b – старшие коэффициенты полиномов $p(x)$ и $G(x)$, коммутирует с некоторым оператором шестого порядка L_6, причем существуют такие c_2, c_1, c_0, что выполняется тождество $L_6^2 = L_4^3 + c_2 L_4^2 + c_1 L_4 + c_0$.

Спасибо за внимание!