Задача о квадратуре треугольника с данными биссектрисами

Сергей Пресняков, Семён Савин

СУНЦ НГУ

научный руководитель
Д. О. Ревин

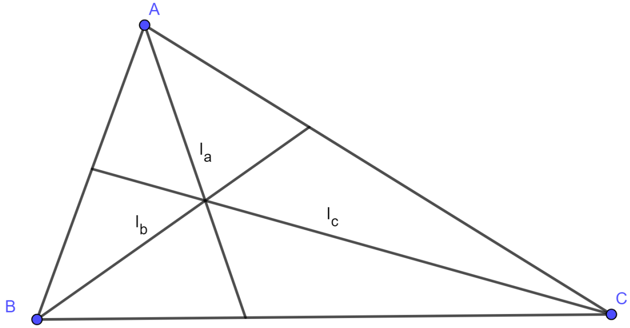
МНСК-2020
Новосибирск, 12 апреля

- А.Жуков, И.Акулич, Однозначно ли определяется треугольник? Квант, 2003, N1, 29–31.
- М.М.Постников, Теория Галуа, М.: Физматгиз, 1963.

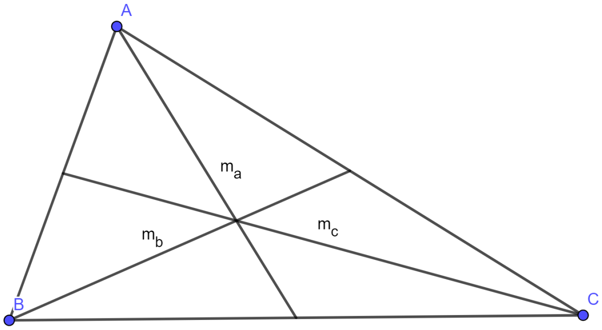
Обозначения

- В треугольнике $\triangle ABC$ полагаем
$$a = BC,$$
$$b = AC,$$
$$c = AB.$$
- Медианы, высоты и биссектрисы треугольника $\triangle ABC$, основания которых лежат на отрезках a, b и c, будем обозначать соответственно:
$$\text{медианы через } m_a, m_b, m_c,$$
$$\text{высоты через } h_a, h_b, h_c,$$
$$\text{биссектрисы через } l_a, l_b, l_c.$$
- Площадь треугольника $\triangle ABC$ обозначаем через S.

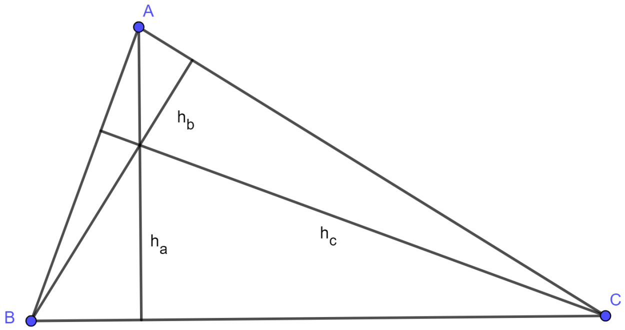
Треугольник с биссектрисами



Треугольник с медианами



Треугольник с высотами



Формула Герона и ее вариации

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} =$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = (a+b+c)/2$ — полупериметр треугольника.

$$S =$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_b+m_c-m_a)(m_c+m_a-m_b)},$$

$$\frac{1}{S} =$$
$$\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}\right)}.$$

Постановка задач и необходимые замечания

- Алгебраическая задача. *Можно ли (в радикалах) выразить площадь треугольника через его биссектрисы?*
- Геометрическая задача. *Можно ли при помощи циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий треугольнику с заданными длинами биссектрис?*

(i) Если три биссектрисы одного треугольника равны соответственно трем биссектрисам другого треугольника, то эти треугольники равны.

(ii) Для любых $l_a, l_b, l_c > 0$ существует треугольник с биссектрисами l_a, l_b, l_c (решение задачи А.Брокара, 1875, получено в 1993 году П.Миронеску и Л.Панаитополом с использованием теоремы Брауэра о неподвижной точке).

(iii) Существует функция $(l_a, l_b, l_c) \mapsto S$, сопоставляющая любой тройке положительных чисел площадь треугольника с биссектрисами, равными этим числам.

(iv) С помощью циркуля и линейки невозможно восстановить треугольник по его биссектрисам (П.Барбарен, 1896).

Решение геометрической задачи

Можно ли при помощи циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий треугольнику с заданными биссектрисами?

Теорема I. *С помощью циркуля и линейки невозможно построить квадрат, равновеликий треугольнику с биссектрисами* 1, $1/3$, $1/3$.

Следующее утверждение усиливает результата Барбарена:

Следствие I.1. *В общем случае с помощью циркуля и линейки невозможно построить никакой треугольник, равновеликий треугольнику с биссектрисами заданной длины.*

Частичное решение алгебраической задачи дает

Следствие I.2. *Не существует формулы, которая бы выражала площадь треугольника через его биссектрисы в квадратичных радикалах.*

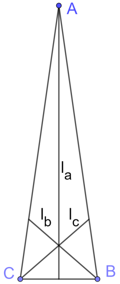
Доказательство теоремы I основано на применении теории Галуа к задачам на построение циркулем и линейкой.

Предложение. *Пусть даны отрезки рациональной длины. Допустим, с помощью циркуля и линейки из них может быть построен отрезок, длина которого является корнем некоторого неприводимого многочлена степени* n *с рациональными коэффициентами. Тогда* $n = 2^k$.

Доказательство теоремы I

Треугольник $\triangle ABC$ с $l_a = 1$ и $l_b = l_c = 1/3$ существует, причем $AB = AC$, как следует из (i) и (ii). Площадь S равна $\operatorname{tg}(\angle A/2)$. Сторона квадрата, равновеликого $\triangle ABC$, равна $\sqrt{\operatorname{tg}(\angle A/2)}$. С помощью циркуля и линейки одновременно можно или нельзя построить:

- отрезок длины $\sqrt{\operatorname{tg}(\angle A/2)}$;
- отрезок длины $\operatorname{tg}(\angle A/2)$;
- угол $\angle A$;
- треугольник $\triangle ABC$;
- угол $\angle B/2$;
- отрезок длины $\sin(\angle B/2)$.



Легко показать, что $\sin(3\angle B/2) = 6\cos\angle B$ для $\triangle ABC$, откуда $\sin(\angle B/2)$ — корень неприводимого многочлена

$$4t^3 - 12t^2 - 3t + 6$$

и не не может быть построен циркулем и линейкой.

Решение алгебраической задачи

Можно ли выразить в радикалах площадь треугольника через его биссектрисы?

Можно ли выразить площадь треугольника через биссектрисы?

R.Plücker, Aufgaben und Lehrsätzte, Crelle's Journal (J. Reine u. Angew. Math.), 6 (1830) N2, 210–214.

Известен ли ответ на этот вопрос?

$$l_a^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right),$$
$$l_b^2 = ca\left(1 - \frac{b^2}{(c+a)^2}\right),$$
$$l_c^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right).$$

Попытка исключить b и c приводит к уравнению 16 степени.

G. Dinca and J. Mawhin, A constructive fixed point approach to the existence of a triangle with prescribed angle bisectorlengths, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 17 (2010), 333–341.

“answering a question raised in 1830 in volume 6 of the Journal für die reine und angewandte Mathematik, von Renthe-Finck computed the area of a triangle in terms of its internal bisectors”

Von Renthe Finck, Versuch der Auflösung der Aufgabe Nr. 12. im 6ten Bande S. 214 dieses Journals: Aus den drei, die Winkel eines geradlinigen Dreiecks halbirenden Scheitellinien den Inhalt desselben zu finden, Crelle’s J. (J. Reine u. Angew. Math.), 26 (1843) N3, 273–276.

В действительности, фон Ренте Финк выразил площадь треугольника через биссектрисы и *радиус r вписанной окружности*. Попытка исключить r снова приводит к уравнению 16-й степени!

Лемма (фон Ренте Финк, 1843). *Выполнено*

$$4a_2r^2S^2 - 8a_3r^3S^2 = r^4 + S^2,$$

где $a_2 = l_a^{-2} + l_b^{-2} + l_c^{-2}$ *и* $a_3 = l_a^{-1} l_b^{-1} l_c^{-1}$.

Отсюда и из равенства $S = pr$ получаем

Лемма. *Выполнено*

$$4a_2r^2p^2 - 8a_3r^3p^2 = r^2 + p^2.$$

где $p = (a + b + c)/2$.

Лемма. *Для треугольника* $\triangle ABC$ *следующие параметры одновременно выражаются или не выражаются в радикалах через биссектрисы* l_a, l_b, l_c:

- *радиус вписанной в* $\triangle ABC$ *окружности,*
- *площадь* $\triangle ABC$,
- *периметр* $\triangle ABC$.

H. Wolff, Über die Bestimmung eines ebenen Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden, J. Reine Angew. Math. 177 (1937), 134–151.

Лемма (Вольф, 1937). *Число $1/(2r)$ является корнем многочлена Вольфа :*

$$
\begin{aligned}
W(t) = t^{10} - \frac{5}{2}a_2t^8 + \frac{7}{2}a_3t^7 + \frac{33}{16}a_2^2t^6 - \frac{47}{8}a_2a_3t^5 + \\
+ \left(\frac{1}{4}a_2a_4 - \frac{5}{8}a_2^3 + \frac{61}{16}a_3^2\right)t^4 + \left(\frac{5}{2}a_2^2a_3 - \frac{1}{4}a_4a_3\right)t^3 + \\
+ \left(\frac{1}{16}a_2^4 - \frac{1}{4}a_2^2a_4 - \frac{25}{8}a_2a_3^2\right)t^2 + \left(\frac{1}{2}a_2a_3a_4 - \frac{1}{8}a_2^3a_3 + \frac{5}{4}a_3^3\right)t + \\
+ \left(\frac{1}{16}a_2^2a_3^2 - \frac{1}{4}a_4a_3^2\right),
\end{aligned}
$$

где $a_2 = l_a^{-2} + l_b^{-2} + l_c^{-2}$, $a_3 = l_a^{-1}l_b^{-1}l_c^{-1}$ *и* $a_4 = l_a^{-2}l_b^{-2} + l_b^{-2}l_c^{-2} + l_c^{-2}l_a^{-2}$.
При этом $W(t)$ *неприводим над* $\mathbb{Q}(a_2, a_3, a_4)$.

Здесь $\mathbb{Q}(x, y, z)$ — множество отношений $f(x, y, z)/g(x, y, z)$ многочленов с рациональными коэффициентами, $g \neq 0$.

B.L. Van der Waerden, Über die Bestimmung eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden, J. Reine Angew. Math. 179 (1938), 65–68.

Б.Л.Ван дер Варден вычислил т.н. группу Галуа многочлена $W(t)$ над полем $\mathbb{Q}(a_2, a_3, a_4)$. Она равна S_{10}. Теория Галуа позволяет интерпретировать этот результат следующим образом:

Лемма (Ван дер Варден – Вольф). *Ни один из корней многочлена $W(t)$ не выражается в радикалах через a_2, a_3, a_4.*

Но для нас важно, выражаются ли корни $W(t)$ через l_a, l_b, l_c.

Теорема II. *Ни один из корней многочлена $W(t)$ не выражается в радикалах через l_a, l_b, l_c.*

Следствие. *Не существует общей формулы, выражающей в радикалах радиус вписанной в треугольник окружности (площадь, периметр) через биссектрисы.*

Доказательство теоремы II

Предположим, корень многочлена $W(t)$ можно выразить в радикалах через l_a, l_b, l_c. Покажем, что тогда его можно выразить в радикалах и через a_2, a_3, a_4. Достаточно понять, что сами l_a, l_b, l_c можно выразить в радикалах через a_2, a_3, a_4. Рассмотрим многочлены

$$U(t) = t^3 - a_2 t^2 + a_4 t - a_3^2 \quad \text{и} \quad V(t) = U(t^2),$$

где $a_2 = l_a^{-2} + l_b^{-2} + l_c^{-2}$, $a_3 = l_a^{-1} l_b^{-1} l_c^{-1}$, и $a_4 = l_a^{-2} l_b^{-2} + l_b^{-2} l_c^{-2} + l_c^{-2} l_a^{-2}$. По теореме Виета корни многочлена $U(t)$ равны $l_a^{-2}, l_b^{-2}, l_c^{-2}$. Значит, корни $V(t)$ — это

$$\pm\frac{1}{l_a}, \quad \pm\frac{1}{l_b}, \quad \pm\frac{1}{l_c}.$$

Из формулы Кардано вытекает, что корни кубического уравнения $U(t) = 0$ и бикубического уравнения $V(t) = 0$ выражаются в радикалах через коэффициенты a_2, a_3^2, a_4. Значит, величины l_a, l_b, l_c выражаются в радикалах через через a_2, a_3, a_4.

Отрицательное решение алгебраической задачи можно получить и без использования результата Ван дер Вардена. С использованием системы вычислительной алгебры Magma, позволяющей находить группу Галуа некоторых многочленов, удается показать, что при

$$l_a = 1, \quad l_b = 2 \quad \text{и} \quad l_c = 3$$

группа Галуа многочлена $W(t)$ над $\mathbb{Q}$ изоморфна S_{10}. Поэтому справедлива

Теорема III. *Радиус вписанной окружности, площадь и периметр треугольника с биссектрисами длин $1, 2, 3$ не могут быть выражены в радикалах через рациональные числа.*

- Plücker, Aufgaben und Lehrsätzte, Crelle's Journal (J. Reine u. Angew. Math.), 6 (1830) N2, 210–214.
- von Renthe Finck, Versuch der Auflösung der Aufgabe Nr. 12. im 6ten Bande S. 214 dieses Journals: Aus den drei, die Winkel eines geradlinigen Dreiecks halbirenden Scheitellinien den Inhalt desselben zu finden, Crelle's J. (J. Reine u. Angew. Math.), 26 (1843) N3, 273–276.
- P. Barbarin, Construire un triangle dont les bissectrices sont données, Mathesis, (2) 6 (1896), 143–160.
- H.Brocard, Question 58, Nouvelle Correspondance Math. 1 (1875), 208.
- P. Mironescu and L. Panaitopol, The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths, Amer. Math. Monthly 101 (1994), 58–60.
- Ю.И.Манин, О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки, "Энциклопедия элементарной математики", IV, М.: Наука, 1963, 205–227.

- H. Wolff, Über die Bestimmung eines ebenen Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden, J. Reine Angew. Math. 177 (1937), 134–151.
- B.L. Van der Waerden, Über die Bestimmung eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden, J. Reine Angew. Math. 179 (1938), 65–68.
- G. Dinca and J. Mawhin, A constructive fixed point approach to the existence of a triangle with prescribed angle bisectorlengths, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 17 (2010), 333–341.
- А.Жуков, И.Акулич, Однозначно ли определяется треугольник? Квант, 2003, N1, 29–31.
- `http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/`
- М.М.Постников, Теория Галуа, М.: Физматгиз, 1963.

Спасибо за внимание!