МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ
ЦЕНТР

В. В. Воронин

Линейная аналитическая геометрия для физматшколы

Новосибирск
2018

УДК 51(075.4)
ББК 22.15я7
В 75

В 75

Воронин, В. В. Линейная аналитическая геометрия для физматшколы: Учеб. пособие. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018. – 60 с.

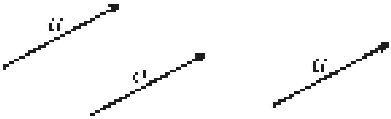
Пособие предназначено для помощи учащимся в освоении методов линейной аналитической геометрии для решения стереометрических задач. Изложена минимальная теория, связанная со свойствами скалярного и векторного произведения, уравнениями прямых и плоскостей. На большом наборе опорных задач показано применение описанных свойств и приемов для решения задач: как сформулированных в абстрактном координатном пространстве, так и в многогранниках. Предложены задачи для самостоятельного решения с целью закрепления материала.

УДК 51(075.4)
ББК 22.15я7
В 75

Сводка основных сведений

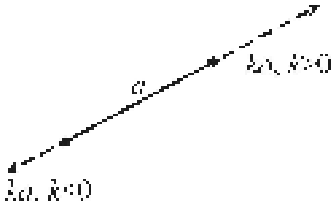
I. Векторы

(I.1). Вектор: класс направленных отрезков одинаковой длины и одного направления.

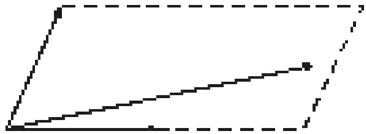


(I.2). Линейная комбинация векторов: их сумма с числовыми множителями: $k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} + k_4\vec{d} + \ldots$

(I.3). Коллинеарные векторы: отложенные от одной точки, лягут на одну прямую; ИЛИ: один получается из другого умножением на число.



(I.4). Компланарные векторы; отложенные от одной точки, лягут в одну плоскость; ИЛИ: один из них равен линейной комбинации двух других.



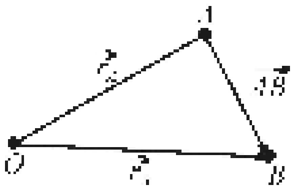
(I.5). Базис: система двух неколлинеарных векторов на плоскости или трёх некомпланарных векторов в пространстве.

(I.6). Координаты вектора: коэффициенты в разложении вектора по базису

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \Leftrightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

(I.7). Радиус-вектор точки A: вектор из начала координат в точку A $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$.

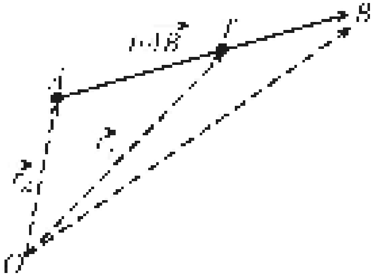
(I.8). Координаты точки: координаты её радиус-вектора.



(I.9). Вектор из точки A в точку B: конец минус начало

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

(I.10). Точка на t-й части пути от A до B: $\vec{r}_T = \vec{r}_A + t \cdot \overrightarrow{AB}$.



II. Скалярная аналитика

(II.1). Скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = |\vec{a}| \cdot \mathrm{Pr}_{\vec{a}}\, \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \mathrm{Pr}_{\vec{b}}\, \vec{a} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3;$$

$\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{b}\right|$ – длины, φ – угол между векторами, $\mathrm{Pr}_{\vec{a}}\, \vec{b}$ – проекция $\vec{b}$ на основание $\vec{a}$; $\mathrm{Pr}_{\vec{b}}\, \vec{a}$ – проекция $\vec{a}$ на основание $\vec{b}$ (со знаком)

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}; \quad \mathrm{Pr}_{\vec{a}}\, \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\vec{a}|};$$

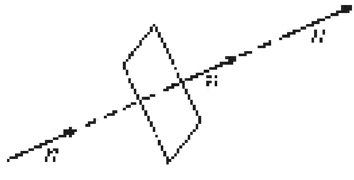
$$\vec{a} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}, \quad |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}.$$

(II.2). Уравнение плоскости: $ax + by + cz = d$.

Вектор $\vec{n} = (a, b, c)$ – нормаль.

Расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости равно значению

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{|\vec{n}|}.$$



(II.3). Уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t, \\ y = y_0 + l_2 t, \\ z = z_0 + l_3 t \end{cases} \text{– параметрические;}$$

$$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2} = \frac{z - z_0}{l_3} \text{ – канонические,}$$

где (x_0, y_0, z_0) – точка привязки; (l_1, l_2, l_3) – направляющий вектор.

(II.4). Сделать вектор $\vec{n}$, перпендикулярный $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{e_1}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e_2}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e_3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

где каждую табличку раскрыть «так минус сяк».

Итого:

$$\vec{n} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

$$\begin{array}{cc} + & - \\ \searrow & \swarrow \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

III. Векторное и смешанное произведение

(III.1). Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$: такой вектор $\vec{n}$, что:

1) $|\vec{n}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ – (площадь параллелограмма);

2) $\vec{n}$ перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) с конца $\vec{n}$ кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден против часовой ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ – правая тройка).

Формула вычисления – ранее данная в п. II.4 (табличка).

Площадь параллелограмма равна $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$.

(III.2). Смешанное произведение

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$= \pm$ (объём параллелепипеда).

IV. Дополнительные тонкости

(IV.1). «Положительное» и «отрицательное» полупространство. Если при подстановке координат точки (x_0, y_0, z_0) в уравнение плоскости $ax + by + cz = d$ мы получаем больше (т. е., $ax_0 + by_0 + cz_0 > d$), то точка лежит в том полупространстве относительно плоскости, куда показывает направление нормали $\vec{n}=(a,b,c)$. Если меньше – то в другом полупространстве.

Какое полупространство станет «положительным», а какое «отрицательным», зависит от выбора нормали. Или от выбора уравнения плоскости: будет это $ax+by+cz=d$ или же $-ax-by-cz=-d$.

(IV.2). Уравнение пучка плоскостей. Если две плоскости пересекаются по прямой

$$\begin{cases} ax+by+cz=d, \\ Ax+By+Cz=D, \end{cases}$$

то уравнение любой плоскости, также проходящей через эту прямую, можно записать в виде линейной комбинации этих уравнений с произвольными коэффициентами α, β:

$$\alpha(ax+by+cz)+\beta(Ax+By+Cz)=\alpha d+\beta D.$$

(IV.3). На плоскости. Большинство результатов разделов I–II остаются такими же, только координата z отсутствует. Линейное уравнение $ax+by=d$ описывает теперь прямую, $\vec{n}=(a,b)$ – нормаль к ней. Вместо получения перпендикулярного вектора по способу (II.4) достаточно взять вектор $\vec{l}=(-b,a)$ или $\vec{l}=(b,-a)$, который перпендикулярен $\vec{n}$ в силу равенства нулю их скалярного произведения. Если один из них направляющий для прямой, то другой – нормаль к ней.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, равна $|a_1b_2-a_2b_1|$.

(IV.4). Биссектриса. Если известны направления двух прямых (в плоскости или пространстве), то направляющий вектор биссектрисы может быть получен как их сумма, **если** они будут одинаковой длины. Сделать же векторы по длине равными (например, единичной длины) можно, если разделить каждый вектор на число, равное его длине.

Введение

Сводка базовых результатов намеренно приведена в начале: чтобы при необходимости не разыскивать нужную формулу в тексте. Далее следует изложение теоретических рассуждений, относящихся к получению этих базовых формул и утверждений. А также набор опорных задач – где из этих утверждений и формул комбинируются возможные алгоритмы для решения часто встречающихся задач. Затем – следует некий набор тренировочных задач, на котором можно отрабатывать личное умение распорядиться имеющейся информацией для отыскания решения.

Отмечу несколько моментов, относящихся к логике составления данного пособия.

1. Здесь собран тот *минимальный* комплект инструментов, который позволяет решать задачи, относящиеся к линейной аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. Причём, без систематического знания линейной алгебры и развиваемых в ней понятий, т. е. то, что можно делать с нуля, не владея дальнейшими разделами высшей математики.

2. Поэтому сюда сознательно не включены: а) принципы линейных преобразований координат, переходы в другую систему декартовых или недекартовых координат, требующие хотя бы знакомства с матрицами; б) работа с уравнениями линий и поверхностей второго порядка.

3. Приведённая вначале Сводка является, на мой взгляд, даже *избыточной*. На самом деле, совсем уж минимальная выжимка ограничивается п. I.10, II.1–II.4 и IV.3.

Понятия, связанные с векторами, в основном, учащиеся представляют на наглядном уровне ещё со школы (здесь можно, разве что, напомнить смысл терминов коллинеарность-компланарность). Некоторые затруднения вызывает лишь деление отрезка в данном отношении (п. I.10). Минимально необходимое для линейной аналитики – по сути, собрано в разделе II Сводки. Этого на самом деле хватает – для решения *всех* затрагиваемых задач линейной аналитики (пусть даже не самым коротким способом). Понятия векторного и смешанного произведения – лишь облегчают решение некоторых задач, но в принципе все задачи можно решать и без них.

1. Векторы и координаты

1.1. Векторы и операции над ними

Направленный отрезок – такой, у которого указан начало и конец. Принятая запись: либо со стрелочкой $\overrightarrow{AB}$, где первым указывается начало, а вторым конец, либо одной буквой, например, $\vec{l}$ – со стрелочкой или чёрточкой сверху, или же выделенной в книге жирным шрифтом.

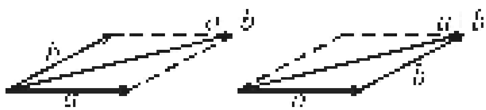
Под **вектором** будем понимать не один из таких отрезков, а целый класс отрезков, которые с данным отрезком: а) лежат на параллельных прямых; б) имеют одинаковую длину; в) одинаково направлены.

Таким образом, изображённые сейчас направленные отрезки $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{MN}$ и другие, имеющие вышеперечисленные свойства – этот весь класс таких отрезков представляет из себя один

вектор. А каждый конкретный направленный отрезок из этого набора можно считать *представителем* того вектора. Так что, под записью $\overrightarrow{MN}$ мы будем понимать тот класс, куда входят и $\overrightarrow{AB}$, и $\overrightarrow{PQ}$, и множество отрезков данного класса. И под равенством $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MN}$ можно понимать, что класс, определяемый каждым из них – один и тот же.

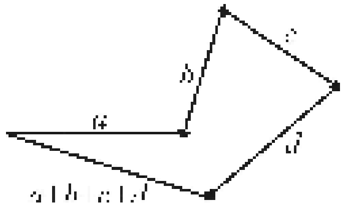
Как известно со школы, под **сложением** двух векторов понимается операция, осуществляемая одним из следующих способов.

Либо представителей векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ откладываем от одной точки, тогда представителем вектора



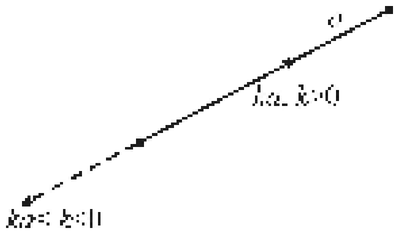
$\vec{a}+\vec{b}$ будет диагональ параллелограмма («правило параллелограмма»). Либо представителя вектора $\vec{b}$ откладываем от конца вектора $\vec{a}$, тогда вектор $\vec{a}+\vec{b}$ представляет отрезок, соединяющий начало первого вектора с концом второго («правило треугольника»). И в том, и в другом случае мы получаем одну и ту же диагональ одного и того же параллелограмма.

Второй способ нагляднее – если складывать не два, а несколько векторов. Тогда по очереди, откладывая каждый очередной отрезок от конца предыдущего, мы получим сумму векторов как отрезок, ведущий из начала в конец всей цепочки.



Умножение вектора на число – тоже операция известная. Если откладывать вектор $k\vec{a}$ от того же начала, то он будет лежать на той же прямой, что и вектор $\vec{a}$, длина его умножится на $|k|$, а направление останется тем же при $k>0$ или сменится на противоположное при $k<0$.

Нулевой вектор представлен отрезками, у которых начало совпадает с концом, его длина равна нулю. И, умножая любой вектор на число 0, мы именно такой вектор и получим. Вектор $(-\vec{a})$ получается из $\vec{a}$ сменой направления при сохранении длины. И поэтому, складывая вектор $\vec{a}$ с вектором $(-\vec{a})$ по правилу треугольника, мы получим вектор с совпадающим началом и концом, т. е. нулевой.



Перечислим свойства введённых только что операций:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность или перестановочный закон);

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность или сочетательный закон);

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$; $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $(k\cdot l)\cdot\vec{a}=k\cdot(l\cdot\vec{a})$;

$k\cdot(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (дистрибутивность или распределительный закон сложения векторов относительно операции умножения на число);

$(k+l)\cdot\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ (дистрибутивность сложения чисел относительно операции умножения на вектор); $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$; $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

Линейная комбинация векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \ldots$ с коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ есть вектор $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} + \ldots$

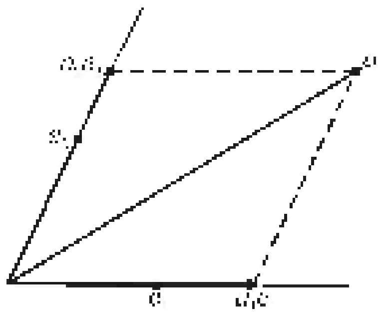
Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ называются **коллинеарными,** если один из них может быть получен умножением другого на число (т. е., $\vec{a} = k\vec{b}$ или $\vec{b} = l\vec{a}$). Нулевой вектор коллинеарен любому вектору, так как получается из него умножением на число 0. Будучи отложенными от одной точки, коллинеарные векторы будут лежать на одной прямой.

В задачах нас иногда не интересует длина вектора, а интересует лишь направление. А ненулевые векторы, коллинеарные друг другу, указывают одно и то же направление. Факт наличия коллинеарности (с ненулевым коэффициентом) будет обозначать знаком (~).

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются **компланарными,** если какой-нибудь из них может быть выражен в виде линейной комбинации других (например, $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$). Три вектора, среди которых есть нулевой, автоматически являются компланарными. Будучи отложенными от одной точки, такие векторы будут лежать в одной плоскости.

1.2. Базис и координаты

При введении координатной системы некоторая точка O назначается *началом координат*, и выбираются два неколлинеарных вектора (в случае плоскости) или три некомпланарных вектора (в случае трехмерного пространства) в качестве *базисных векторов* этой координатной системы.

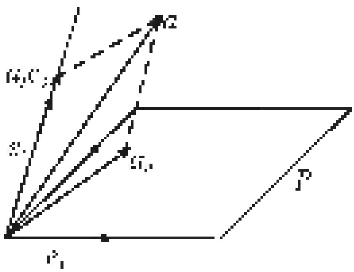


Сначала рассмотрим плоскость. Отложим от начала координат базисные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, а также любой вектор $\vec{a}$. Проведём через конец вектора $\vec{a}$ прямые, параллельные базисным векторам – каждую до пересечения с прямой на которой лежит другой базисный вектор. Тогда вектор $\vec{a}$ станет диагональю параллелограмма, т. е. суммой двух векторов, каждый из которых коллинеарен какому-то из базисных векторов. Значит, один из них может быть выражен как $a_1\vec{e_1}$, а другой как $a_2\vec{e_2}$. Тем самым, вектор $\vec{a}$ запишется как $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$. Эти коэффициенты a_1, a_2 и называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в данной системе. Выражают этот факт также записью: $\vec{a} = (a_1, a_2)$.

Заметим, что данный вектор $\vec{a}$ может иметь в этой системе только такие координаты, и никакие другие. Если бы можно было представить $\vec{a}$ ещё и по-другому: $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$, то это бы означало, что $(a_1 - b_1)\vec{e_1} = (b_2 - a_2)\vec{e_2}$. А если хоть одна из скобок тут не равна нулю, то можно разделить на неё, и тогда один из векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ равен произведению другого на число, что противоречит условию неколлинеарности базисных векторов.

Введённая таким способом система называется **декартовой** системой координат (бывают и другие способы введения координат). Подчеркнём, что декартова координатная система вообще-то не обязана быть прямоугольной (иногда подчёркивают это обстоятельство словами «*косоугольная* декартова система»).

Обратимся к трёхмерному пространству. Из начала координат отложим три базисных вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, а также произвольный вектор $\vec{a}$.



Пусть P – плоскость, в которой лежат два первых базисных вектора. Проведём через конец вектора $\vec{a}$ прямую, параллельную $\vec{e_3}$, до пересечения с плоскостью P, а также отрезок, параллельный плоскости P,до пересечения с прямой, натянутой на $\vec{e_3}$. Тогда $\vec{a}$ опять оказывается диагональю параллелограмма, т. е. суммой векторов, один из которых коллинеарен $\vec{e_3}$ (т. е. может быть записан в виде $a_3\vec{e_3}$), а другой вектор $\vec{a_P}$ лежит плоскости P (и значит, по предыдущему, может быть записан как $a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$).

Итак, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, эти коэффициенты a_1, a_2, a_3 называются координатами вектора $\vec{a}$, что и выражают записью $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Аналогично плоскому случаю, можно показать, что существование для вектора $\vec{a}$ каких-то других коэффициентов противоречило бы некомпланарности базисной тройки векторов.

Если теперь есть два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3\right) + \left(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\right) =$$

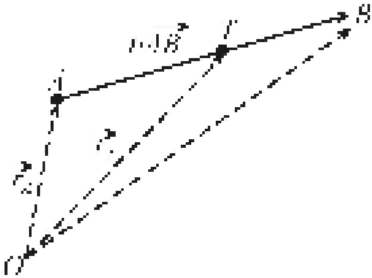
$$= (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3;$$

$$k\vec{a} = (ka_1)\vec{e}_1 + (ka_2)\vec{e}_2 + (ka_3)\vec{e}_3.$$

И, следовательно, операции над векторами в координатах выглядят так:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\right);\ k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3).$$

Теперь положение каждой точки A в пространстве можно задать вектором $\vec{r}_A$, проведённым из начала координат O в эту точку. Этот вектор называется **радиус-вектором** точки A. Его координаты и называются координатами точки A. Тогда, если B другая точка со своим радиус-вектором $\vec{r}_B$, то попасть из начала координат в точку B можно, сначала сместившись в точку A (т. е., на вектор $\vec{r}_A$), а оттуда – сместившись на вектор $\overrightarrow{AB}$, т. е., $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$. Или можно ещё записать: $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. Итак, зная два из этих векторов, можно узнать третий.



Если нам нужна точка, лежащая на отрезке AB в определённой позиции, то из точки A надо сдвинуться не целиком на вектор $\overrightarrow{AB}$, а на какую-то его часть. Если, например, точка T должна делить отрезок в отношении 5 : 3, считая от A, то весь отрезок AB составляет 8 долей, а вектор AT составляет 5 из них. Итого, $\vec{r}_T = \vec{r}_A + \frac{5}{8}\left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right)$.

2. **Скалярное произведение и его применение**

2.1. Определение и основные свойства

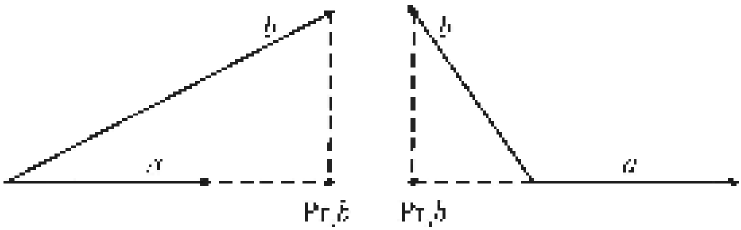
Основное определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

Запись: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$. Прямыми чертами – теми же, что используются при записи абсолютной величины числа, – принято обозначать длину вектора. Таким образом, знак точки в левой части – это символ операции произведения векторов, а слева такой же точкой обозначено уже произведение чисел.

Лучше сразу дополнить это определение, до более развёрнутого вида: записать произведение в трёх формах:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=|\vec{a}|\cdot\mathrm{Pr}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\mathrm{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

(в прямоугольной системе).



Дело в том, что произведение длины $\left|\vec{b}\right|$ на $\cos\varphi$ – это и есть проекция вектора $\vec{b}$ на основание $\vec{a}$, причём со знаком. Если эта проекция однонаправлена с $\vec{a}$, то косинус острого угла положителен, и проекцию считаем положительной. Если же угол тупой, то проекция разнонаправлена с $\vec{a}$, и косинус отрицательный. Точно так же и произведение $\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\varphi$ может быть истолкована как проекция $\vec{a}$ на основание $\vec{b}$.

С другой стороны, если векторы заданы координатами в прямоугольной декартовой системе: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то число, являющееся их скалярным произведением, может быть посчитано как сумма произведений их одноимённых координат.

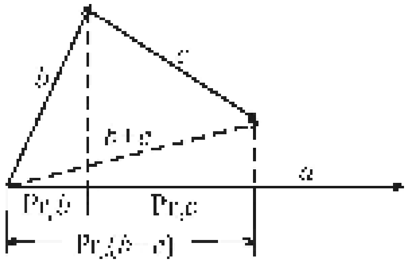
Это следует из других свойств скалярного произведения:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (коммутативность);

б) $\left(k\vec{a}\right)\cdot b=\vec{a}\cdot\left(k\vec{b}\right)=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$;

в) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивность).

Если первые два свойства легко проверяются на основе исходного определения, то третье следует из того, что при суммировании векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ их проекции на $\vec{a}$ также суммируются.



Если базисными векторами системы координат являются векторы длины 1, перпендикулярные друг другу, то

$$\vec{e_1}\cdot\vec{e_1}=\vec{e_2}\cdot\vec{e_2}=\vec{e_3}\cdot\vec{e_3}=1.$$

А взаимные произведения друг на друга $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}=\vec{e_3}\cdot\vec{e_1}=0$ (так как $\cos\varphi=0$).

Значит, пользуясь свойствами а)–в), раскрываем скобки и упрощаем:

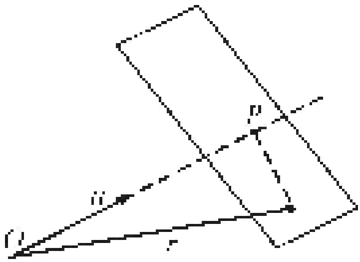
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3\right)\cdot\left(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\,.$$

Из развернутого определения непосредственно следует: как вычислить косинус угла между векторами или проекцию одного вектора на другой. Для этого достаточно скалярное произведение (посчитанное через координаты векторов) разделить либо на произведение длин, либо только на длину вектора, служащего основанием.

Длина вектора есть корень из его скалярного произведения самого на себя (что соответствует теореме Пифагора). А перпендикулярность векторов имеет место, когда их скалярное произведение равно нулю. Эти очевидные следствия из развёрнутого определения приведены вначале, в Сводке.

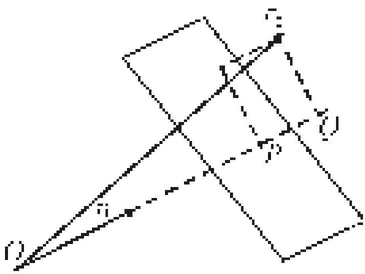
2.2. Геометрический смысл уравнения плоскости (в прямоугольной декартовой системе)

Пусть имеется уравнение $ax + by + cz = d$, где a, b, c, d – заданные числа, а (x, y, z) – координаты некоторой точки.



Левую часть можно интерпретировать как скалярное произведение фиксированного вектора $\vec{n} = (a, b, c)$ на радиус-вектор $\vec{r} = (x, y, z)$, и, опираясь на развёрнутое определение, переписать как $|\vec{n}| \cdot \mathrm{Pr}_{\vec{n}} \vec{r} = d$ или в виде $\mathrm{Pr}_{\vec{n}} \vec{r} = \dfrac{d}{|\vec{n}|}$.

Но это означает, что проекция каждой такой точки на прямую, натянутую на вектор $\vec{n}$, находится на одном и том же расстоянии $d/|\vec{n}|$ от начала координат (отрицательное значение d при этом означает, что проекция P находится на прямой по другую сторону от точки O).



Итак, вектор $\vec{n}$ является **нормалью** (перпендикулярным вектором), и именно его естественно считать показателем «направления» плоскости. Плоскости, у которых нормали совпадают или коллинеарны – имеют одно направление, т. е. параллельны. Свободный же член d определяет смещение плоскости вдоль направления вектора $\vec{n}$. По направлению, куда показывает $\vec{n}$, если d положительно, или в обратную сторону, если d отрицательно.

Возьмём теперь произвольную точку пространства с радиус-вектором $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Проекция его конца на эту же прямую попадёт в точку Q, удалённую от начала координат на расстояние

$\dfrac{\vec{r}_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$ (с учётом знака). Расстояние между точками P и Q – это и есть расстояние точки (x_0, y_0, z_0) от плоскости. Но это есть модуль разности

$$|OP - OQ| = \left|\frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} - \frac{d}{|\vec{n}|}\right| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Итак, для отыскания расстояния точки от плоскости надо подставить её координаты в уравнение плоскости, в котором все члены перенесены в одну часть. Если получится ноль, то точка лежит на плоскости (и расстояние равно нулю). Если же получится не ноль, то абсолютная величина этого «отклонения» и характеризует расстояние – но не сразу, а после деления на длину нормали (a, b, c).

Следует подчеркнуть два важных факта.

1. Уравнение одной и той же плоскости можно задать в разных видах: вектор нормали можно смело заменять на любой коллинеарный ему. Это всё одна и та же плоскость, так как если для некоторой точки выполнено одно из этих равенств, то автоматически выполнены и остальные. При вычислении расстояния от этой плоскости точки (1, 1, 1) можно брать любое из этих уравнений.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y + z = 2 \\ 4x + 6y + 2z = 4 \\ -6x - 9y - 3z = -6 \end{array}\right\}$$

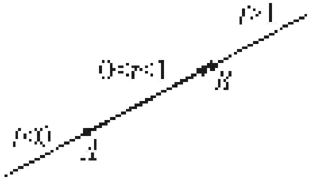
Ибо при умножении числителя на какой-то множитель знаменатель умножается на такой же множитель, и оттого значение дроби не меняется

$$\frac{|2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1\cdot 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|4\cdot 1 + 6\cdot 1 + 2\cdot 1 - 4|}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{|-6\cdot 1 - 9\cdot 1 - 4\cdot 1 + 6|}{\sqrt{6^2 + 9^2 + 3^2}}.$$

2. Если в формуле расстояния не ставить знак модуля, то получится «алгебраическое» расстояние, т. е. расстояние со знаком. И знак этот будет означать, лежит ли точка по ту сторону плоскости, куда показывает нормаль – или в другом полупространстве. Можно считать, что плоскость делит пространство на «положительное» и «отрицательное» полупространства. Но тогда, сменив на противоположное направление нормали (как это сделано в третьем из приведённых уравнений), мы поменяем местами эти полупространства.

Таким образом, «положительность» или «отрицательность» полупространства – вещь договорная: смотря какую нормаль мы выберем (или – какое из уравнений). Уравнение $\{-x-y+3z=1\}$ ничем не лучше и не хуже уравнения $\{2x+2y-6z=-2\}$.

2.3. Геометрический смысл уравнений прямой



Самый естественный и информативный способ задать прямую – это указать на ней какую-либо **точку привязки** A и вектор, указывающий направление прямой. Либо это будет вектор $\vec{l}$, сразу заданный координатами (l_1, l_2, l_3), либо вектор $\overrightarrow{AB}$, соединяющий A с какой-либо другой точкой B, также лежащей на прямой. То есть,

$$(l_1, l_2, l_3) = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Получить любую точку прямой можно, отложив от точки A вектор $t \cdot \vec{l}$, коллинеарный $\vec{l}$, где параметр t будет принимать произвольные действительные значения. Можно назвать это число t *адресом* точки на прямой. Если в роли $\vec{l}$ выступает вектор $\overrightarrow{AB}$, то при $t=0$ мы получим точку A, при $t=1$ точку B, при значениях t из интервала $(0,1)$ точка будет находиться на отрезке AB, при $t>1$ далее за точкой B, при $t<0$ по другую сторону от точки A. Тем самым, координаты произвольной точки прямой будут выражаться в виде

$$\begin{cases} x = a_1 + l_1 t, \\ y = a_2 + l_2 t, \\ z = a_3 + l_3 t. \end{cases}$$

Эту запись называют **параметрическими** уравнениями прямой. Можно и по-другому записать тот же факт: если точка $T(x, y, z)$ лежит на прямой, то условия коллинеарности вектора $\overrightarrow{AT}$ вектору $\vec{l}$ записывают в виде

$$\frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-a_2}{l_2} = \frac{z-a_3}{l_3}.$$

Эти соотношения называются **каноническими уравнениями** прямой.

При этом делается важная оговорка. Одна или даже две координаты вектора $\vec{l}$ могут оказаться равными нулю. Тем не менее, эту же запись используют и в таких случаях, введя соглашение, что равенство нуля знаменателя означает тождественное равенство нулю и числителя, а «ноль делить на ноль равно чему угодно». Поэтому запись

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-4}{2}.$$

Означает систему двух соотношений: $\frac{x-2}{3}=\frac{z-4}{2}$ и $y=-1$. Точкой привязки здесь служит $A(2;-1;4)$, а направляющим вектором $\vec{l}=(3;0;2)$.

Понятно, что ту же прямую можно описать разными способами: в роли точки привязки может выступать любая точка прямой, а в роли **направляющего** вектора – любой вектор, коллинеарный $\vec{l}$.

Прямая может быть задана и ещё одним способом: как пересечение двух плоскостей. Значит, координаты точек на прямой должны удовлетворять как уравнению одной плоскости, так и уравнению другой, т. е. – системе двух линейных уравнений. Например, система уравнений

$$\begin{cases} x+y-2z=5, \\ 3x-y-3z=6 \end{cases}$$

описывает прямую, лежащую на пересечении плоскостей, каждая из которых описывается уравнением первым и вторым соответственно. Как получить из такой записи информацию про направляющий вектор и точку привязки для этой прямой – будет рассмотрено далее.

2.4. Углы

1. Угол между векторами. Его косинус можно получить, разделив скалярное произведение на произведение длин

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

При этом положительный косинус означает, что угол между векторами острый, отрицательный косинус – что угол тупой.

2. Угол между пересекающимися прямыми. По определению, это наименьший из углов, образуемых этими прямыми, т. е. острый из них (или прямой). Тогда его косинус равен абсолютной величине косинуса угла между направляющими векторами $\vec{l}$ и $\vec{m}$ этих прямых.

Итак, $\cos\varphi = \left|\dfrac{\vec{l}\cdot\vec{m}}{|\vec{l}|\cdot|\vec{m}|}\right|$. Отметим, что прямые черты в знаменателе означают, что берутся длины векторов, а прямые черты для всей дроби означают абсолютную величину действительного числа.

Поскольку угол между произвольными прямыми в пространстве равен по определению равен углу между параллельными им пересекающимся прямым, то та же формула годится для определения угла между любыми прямыми.

3. Угол между плоскостями равен углу между нормалями – с тем же примечанием, что углом между плоскостями называется наименьший из двухгранных углов между ними – и оттого следует взять модуль косинуса, а не сам косинус. То есть, если уравнения плоскостей: $ax+by+cz=d$ и $Ax+By+Cz=D$, то

$$\cos\varphi = \left|\frac{(a,b,c)\cdot(A,B,C)}{|(a,b,c|\cdot(A,B,C)|}\right| = \frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4. Угол между прямой и плоскостью дополняет до $90°$, угол между прямой и нормалью к плоскости (т. е. синус одного равен косинусу другого). И, кроме того, угол этот по определению не может быть больше развёрнутого, так что надо взять абсолютную величину синуса. То есть, если

Плоскость задана уравнением $ax+by+cz=d$, а прямая, например, каноническими уравнениями

$$\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-a_2}{l_2}=\frac{z-a_3}{l_3}, \text{ то } \sin\varphi = \left|\frac{l_1a+l_2b+l_3c}{\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|.$$

Заметим, что во всех формулах для углов не участвуют ни координаты точек привязки, ни свободные члены в уравнениях плоскостей. Что естественно, так как изменение этих величин влечёт за собой лишь параллельный перенос прямых или плоскостей, от чего углы не меняются.

Отметим, что во всех случаях равенство угла нулю ($\cos\varphi = \pm 1$ или $\sin\varphi = 0$) означает параллельность соответствующих объектов, или их совпадение, или нахождение данной прямой в данной плоскости. А случай, когда угол прямой ($\cos\varphi = 0$ или $\sin\varphi = 1$) – перпендикулярность соответствующих объектов.

Во всех перечисленных здесь задачах на определение углов каждый вектор можно смело заменять на любой, коллинеарный ему – результат не изменится.

2.5. Как сделать нормаль?

Часто приходится по двум векторам, лежащим в плоскости (или параллельным ей) определять нормаль к плоскости. И, наоборот, если прямая образована пересечением двух плоскостей, то её направляющий вектор должен быть перпендикулярен к обеим нормалям данных плоскостей. Операция нахождения вектора, перпендикулярного к двум данным, может быть проведена двумя способами.

1. Метод неопределённых коэффициентов. Пусть даны векторы (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3). Отыскиваем перпендикулярный им вектор в виде (α, β, γ). Тогда условия перпендикулярности запишутся в виде равенства нулю двух скалярных произведений:

$$\begin{cases} a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = 0, \\ b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma = 0. \end{cases}$$

Находим какое-либо ненулевое решение этой системы α, β, γ. Все такие векторы будут коллинеарны друг другу, так что достаточно взять любой из них.

2. Есть прямая формула, сразу дающее то самое одно из решений этой системы. Формула эта и приведена в Сводке.

Можно непосредственно проверить, что если взять координаты искомого вектора в виде $(\alpha, \beta, \gamma) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ и подставить их в систему, то действительно левые части в обоих уравнениях равны нулю.

Запоминать, что где стоит в этой формуле, и с каким знаком – естественнее всего по правилу «раскрытия таблички» по алгоритму, приведённому там же в Сводке. Ниже показывается, что полученный вектор и есть то, что называется *векторным произведениям* двух данных векторов и помимо свойства перпендикулярности этим заданным векторам обладает также и другими свойствами.

Подавляющее большинство задач по линейной аналитической геометрии, однако, решается и без знания векторного произведения.

2.6. Двумерный случай

Остаются в силе все формулы, относящиеся к скалярному произведению. Только координата z и относящиеся к ней коэффициенты повсюду отсутствуют. Линейное уравнение $ax+by=d$ теперь описывает прямую, формула расстояния точки от плоскости, превращается в формулу расстояния до прямой, вектор $\vec{n}=(a,b)$ является нормалью к прямой. Только задача определения вектора, нормального к двум данным, превращается в задачу, где дан лишь один вектор.

И построить перпендикулярный к нему вектор – совсем просто. Ибо признак перпендикулярности – равенство нулю скалярного произведения – обеспечивается очень просто. Надо переставить координаты, и у одной из них поменять знак. Вектор $(-b;a)$ или $(b;-a)$ автоматически даёт нулевое скалярное произведение с вектором $(a;b)$.

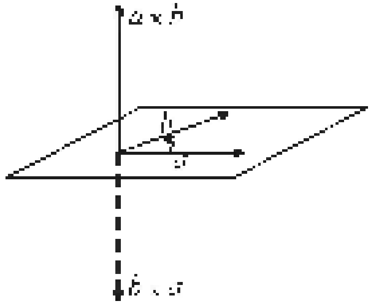
Например, к прямой $2x+5y=7$ вектор (2; 5) будет нормалью. А значит, направляющим можно взять вектор $(5;-2)$. Взяв любую точку – например, положив произвольно $x=1$ и найдя, что тогда $y=1$ – имеем точку привязки. Поэтому каноническое уравнение той же прямой будет иметь вид $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-2}$. В параметрическом виде это же записывается: $\begin{cases} x=1+5t, \\ y=1-2t. \end{cases}$.

3. Векторное произведение

3.1. Определение и свойства

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принято записывать не с помощью точки (как скалярное), а с помощью крестика: $\vec{a}\times\vec{b}$. И является оно не числом, а вектором, который по определению:

1) по длине равен $\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$ (что совпадает с площадью параллелограмма, построенного на данных векторах);



2) перпендикулярен каждому из данных векторов;

3) направлен так, что если отложить его от общего начала, то с его конца кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден против часовой стрелки.

Последнее обстоятельство формулируют также словами: вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ образуют *правую тройку*.

Без этого последнего условия существовало бы два вектора, удовлетворяющих остальным условиям. Ибо вектор нужной длины можно отложить на прямой, перпендикулярной к плоскости, как в одну, так и в другую сторону.

В литературе вместо записи с помощью крестика употребляется также и запись векторного произведения в виде $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Из определения легко выводятся свойства:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикоммутативность). Вытекает из того, что при изменении порядка сомножителей меняется на обратное и направление кратчайшего поворота;

2) $\left(k\vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(k\vec{b}\right) = k\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$. Вытекает из того, что при умножении какого-либо из векторов на число k его длина умножается на $|k|$. А при $k < 0$ меняется на обратное и направление кратчайшего поворота, в то время как $\sin\varphi$ не меняется, ибо $\sin\varphi = \sin\left(\pi - \varphi\right)$;

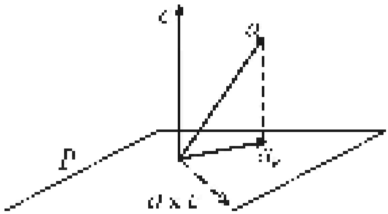
3) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

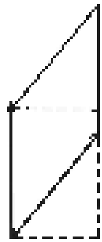
И наконец, свойство дистрибутивности, гораздо менее очевидное:

4) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

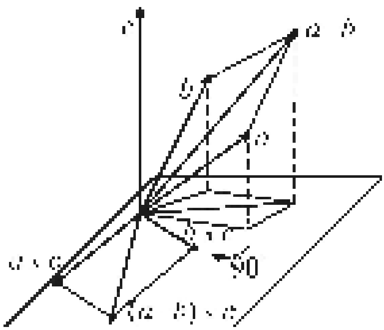
Докажем это последнее свойство.

Шаг 1. Пусть P – плоскость, перпендикулярная вектору $\vec{c}$. Тогда произведение любого вектора $\vec{a}$ на $\vec{c}$ не изменится, если заменить вектор $\vec{a}$ его проекцией на плоскость P (вектор $\vec{a}_P$ на рисунке). Действительно, площадь параллелограмма, построенного на $\vec{a}$ и $\vec{c}$, равна площади прямоугольника, построенного на $\vec{a}_P$ и $\vec{c}$ (как показано на рисунке ниже). И направление векторного произведения не изменится, ибо векторы $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{a}_P$ лежат в одной плоскости и направление кратчайшего поворота от $\vec{a}$ к $\vec{c}$ осталось тем же, что от $\vec{a}_P$ к $\vec{c}$.





Шаг 2. Поскольку $\vec{c} \perp \vec{a}_P$, то синус угла между ними равен 1. А раз вектор $\vec{a} \times \vec{c}$ (или, что то же самое, $\vec{a}_P \times \vec{c}$) лежит и в плоскости P, и перпендикулярен к $\vec{a}_P$, то его можно получить: поворотом $\vec{a}_P$ на 90° по часовой стрелке (глядя с конца $\vec{c}$) и умножением его длины на $|\vec{c}|$.

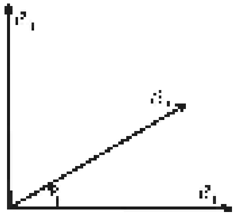


Итак, получение вектора $\vec{a} \times \vec{c}$ из любого вектора $\vec{a}$ можно свести к трём операциям: а) проектируем вектор на плоскость P; б) поворачиваем на 90° по часовой; в) умножаем длину на $|\vec{c}|$.

*Шаг 3.*Теперь проделаем это с тройкой векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$. Проектируем целиком параллелограмм на плоскость P, поворачиваем и растягиваем с коэффициентом $|\vec{c}|$. При этом с диагональю параллелограмма произойдут те же операции, что и со сторонами. Таким образом, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}$ будет диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\times\vec{c}$ и $\vec{b}\times\vec{c}$, т. е. совпадёт с их суммой.

3.2. Формула для вычисления координат векторного произведения

Пусть теперь векторы заданы своими координатами в прямоугольной декартовой системе, причём в такой, где базисные векторы образуют *правую* тройку. То есть, с конца третьего вектора $\vec{e}_3$ кратчайший поворот от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ виден против часовой стрелки.



Поскольку длины векторов равны 1 и синус угла между ними тоже равен 1, то векторное произведение двух первых двух векторов как раз и совпадает с третьим. И тогда можно убедиться, что и каждый из первых двух векторов совпадает с векторными произведениями остальных. А именно, в циклическом порядке:

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3,\ \vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1,\ \vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2.$$

Тогда произведения в ином порядке равны:

$$\vec{e}_2\times\vec{e}_1=-\vec{e}_3,\quad \vec{e}_3\times\vec{e}_2=-\vec{e}_1,\quad \vec{e}_1\times\vec{e}_3=-\vec{e}_2.$$

Теперь представим два вектора через их разложение по базису и, пользуясь свойствами (2) и (4), раскроем скобки

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3\right)\times\left(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3\right)=$$

$$=\vec{e}_1\left(a_2b_3-a_3b_2\right)+\vec{e}_2\left(a_3b_1-a_1b_3\right)+\vec{e}_3\left(a_1b_2-a_2b_1\right)=$$

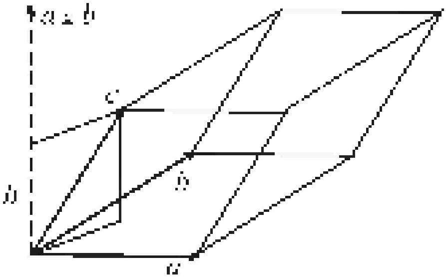
$$=\left(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1\right).$$

Это и есть формула, приведённая в Сводке.

3.3. Площадь параллелограмма и объём параллелепипеда

Исходя из определения векторного произведения, мы знаем, что длина его как раз и равна площади построенного на двух векторах параллелограмма. А с другой стороны, этот вектор, являющийся их произведениям, мы умеем вычислять через координаты. То есть, $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$. В таком виде эту формулу естественно и помнить. Если подставить сюда формулу для длины вектора, а в неё координаты

$\vec{a}\times\vec{b}$, мы получим формулу – правильную, но неприятную для запоминания: $S=\sqrt{\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2}$.



Если на трёх векторах построен параллелепипед, то его объём равен произведению площади основания на высоту. Но площадь основания (параллелограмма, построенного на $\vec{a}$, $\vec{b}$) равна $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$. А его высота h равна по модулю проекции третьего вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{a}\times\vec{b}$. Но произведение длины одного вектора на проекцию другого – это в точности одно из определений скалярного произведения. Итак, объём равен:

$$V=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|.$$

Число, стоящее под модулем, и называется **смешанным произведением** тройки векторов. Можно даже уточнить: смешанное произведение положительно, если проекция вектора $\vec{c}$ на $\vec{a}\times\vec{b}$ однонаправлена с $\vec{c}$ Что означает, что конец вектора $\vec{c}$ (если отложить векторы от одной точки) лежит в том же полупространстве, что и конец $\vec{a}\times\vec{b}$. Что можно сформулировать и так: векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ составляют *правую тройку.*

Итак смешанное произведение равно плюс-минус объёму, причём знак его показывает ориентацию тройки векторов.

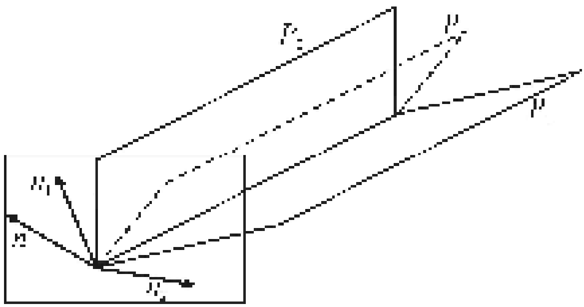
(Можно уточнить: фактически этот знак показывает, что тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ориентирована так же, как тройка базисных векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. Если бы условились базисную тройку располагать в иной ориентации, то и знак смешанного произведения сменился бы на иной.)

Вычисление же смешанного произведения очевидно: это сумма произведений координат вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на координаты вектора $\vec{c}$. То есть, $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=c_1\left(a_2b_3-a_3b_2\right)+c_2\left(a_3b_1-a_1b_3\right)+c_3\left(a_1b_2-a_2b_1\right)$. Но это равносильно правилу раскрытию «таблички», приведённому в разделе II.4 Сводки, только вместо символов векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ стоят числа c_1, c_2, c_3. И вместо произведений векторов на числа надо брать произведения координат c_1, c_2, c_3 на те же числа в обычном арифметическом смысле.

4. Дополнительные тонкости

4.1. Пучок плоскостей

Если прямая задана пересечением двух плоскостей $ax + by + cz = d$ и $Ax + By + Cz = D$, то нормаль $\vec{n}$ к любой третьей плоскости, проходящей через эту прямую перпендикулярна к этой прямой, так же, как и две нормали $\vec{n}_1 = (a; b; c)$ и $\vec{n}_2 = (A; B; C)$. Значит, все три нормали лежат в одной плоскости, перпендикулярной данной прямой. И, если две заданные нормали не были коллинеарны, то третья нормаль обязана выразиться в виде их линейной комбинации: $\vec{n} = \alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2$. Но если мы тогда возьмём плоскость с уравнением $\alpha(ax + by + cz) + \beta(Ax + By + Cz) = ???$, то она как раз и



имеет такую нормаль. А чему равна левая часть, если точка лежит на прямой, т. е. удовлетворяет уравнению каждой плоскости?

Она равна $\alpha d + \beta D$. Значит, это число и надо поставить в правой части, чтобы точки, лежащие на прямой, принадлежали новой плоскости.

Итак, всевозможные линейные комбинации уравнений двух заданных плоскостей и образуют уравнения всех плоскостей, проходящих через прямую.

Можно было бы обойтись и одним коэффициентом: положить, например, $\alpha = 1$ и менять только β. Но тогда мы не получим все плоскости, проходящие через прямую: а именно, при $\alpha = 0$ это будет уравнение второй плоскости, которое мы тем самым исключим из пучка. Так что так можно потерять какое-либо решение задачи, где нам нужны все плоскости пучка.

5. Решение задач в многогранниках

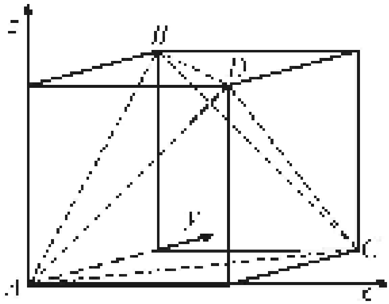
Если задача сформулирована не в абстрактном пространстве, снабженном уже готовой системой прямоугольных декартовых координат, а в простейшем «школьном» многограннике (параллелепипеде, призме, пирамиде), то для применения описанных приемов аналитической геометрии надо всего лишь самому ввести эти декартовы координаты. Для чего произвольно выбрать начало этой системы (в одной из вершин многогранника или в центре основания) и направить куда-либо три взаимно перпендикулярные оси (желательно, какие-то из них пустив по ребрам).

Для прямоугольного параллелепипеда здесь проблем меньше всего: оси уже готовы, остается лишь выбрать вершину, где будет начало координатной системы и приписать осям имена (x, y, z). Для четырехугольной пирамиды с прямоугольным основанием начало естественно выбирать либо в одной из вершин основания, либо в его центре. Правда, координаты вершины пирамиды (координаты ее проекции на основание и высоту) придется найти отдельно, каким-либо классическим способом.

Для правильной треугольной призмы или пирамиды вдоль ребра основания можно пустить только одну из координатных осей. А координаты одной из вершин будут тогда содержать иррациональность. Если в правильном треугольнике *ABC* со стороной 1 начало взять в точке *A* и ось пустить по ребру *AB*, то вершина *C* получит на плоскости основания координаты $\left(1/2; \sqrt{3}/2\right)$.

В правильном же тетраэдре *SABC* придется вычислять еще и координаты вершины *S*. Высота падает в центр основания, который имеет на плоскости координаты $\left(1/2; \sqrt{3}/6\right)$, а длина высоты равна $\sqrt{6}/3$. Итого, координаты точки *S* есть $\left(1/2; \sqrt{3}/6; \sqrt{6}/3\right)$.

Между тем, для такого популярного тела, как правильный тетраэдр, существует отдельный трюк, позволяющий ввести координаты без лишних иррациональностей.



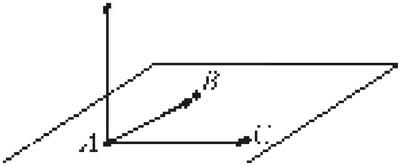
Возьмем одну из вершин единичного куба за начало координат и пойдем из этой вершины по диагонали каждой грани, которые в выбранной вершине сходятся. Получим четыре точки, расстояние между любыми из них равно $\sqrt{2}$. Вот их и примем за вершины тетраэдра $ABCD$. А оси координат пустим из вершины A по ребрам куба. В таких координатах можно и решать нужную задачу. Только надо помнить, что все размеры будут относиться к тетраэдру с ребром $\sqrt{2}$. Значит, чтобы потом получить этот размер для тетраэдра с ребром a, надо полученный результат не забыть умножить на масштабирующий коэффициент $k = a/\sqrt{2}$.

6. Опорные задачи

При решении задач очень неэффективно полагаться на некие «готовые» формулы решения каждой из них, даже если они где-то и есть. Или механически запоминать «что с чем складывать и умножать». Ибо различных комбинаций способов описания объектов и различных вопросов много. Гораздо практичнее помнить (и понимать) лишь немногие формулы, приведённые в Сводке, и ориентироваться на схематичную картинку – какие элементы сейчас есть, а какие из них можно получить. Для чего хватает немногих инструментов из вышеописанного набора. Причём, изображая для себя на картинке элементы текущей задачи, совершенно излишне пытаться «правильно» изобразить всё в координатах; рисунки всё равно будут условными, тем более для трёхмерного случая. На картинке надо видеть связь между собой элементов задачи, а не буквальные значения тех или иных координат.

Всюду в задачах понимается, что система координат – декартова прямоугольная.

Задача 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1;3;2)$, $B(4;0;5)$, $C(1;2;4)$.



Решение. Главное – определить направление плоскости, т. е. нормаль к ней. А какова входная информация? Три точки на плоскости. Но это – два направления: например, $\overrightarrow{AB}(5;-3;3)$ и $\overrightarrow{AC}(2;-1;2)$. Нормаль же – перпендикуляр к ним, и ее можно получить векторным произведением. Итак, вычисляем

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ 5 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=(-6+3;6-10;-5+6)=(-3;-4;1).$$

Это коэффициенты уравнения плоскости, т. е. имеем: $-3x-4y+z=?$ Откуда взять свободный член? Направление плоскости есть, но нужна точка привязки – любая из данных. Точка A должна на плоскости лежать! Подставляем координаты точки A в левую часть: $-3(-1)-4(3)+2=-7$. Вот эти (-7) и надо поставить в правую часть, чтобы плоскость проходила через точку A.

Ответ: $-3x-4y+z=-7$.

Примечания. 1. Если направление плоскости (т. е. нормаль) найдено правильно, то проходя через одну точку, плоскость обязательно пройдёт и через другие. Можно убедиться, что вместо координат точки A можно подставить и координаты двух остальных точек – правая часть останется той же.

2. В качестве нормали можно брать не обязательно полученный вектор, а любой коллинеарный ему. В данном случае нужно лишь направление вектора нормали, а не его длина.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;2;4)$ и прямую $\{x=1-3t;\ y=2+2t;\ z=-1+3t\}$.

Решение. Задача в точности эквивалентна предыдущей. Если прямая задана в параметрической форме, то там содержится точка привязки $M(1;2;-1)$ и направляющий вектор $\vec{m} = \left(-3; 2; 3\right)$. И в качестве двух направлений вдоль плоскости теперь служат $\vec{m}$ и вектор $\overrightarrow{AM} = \left(-1; 0; -5\right)$. Находим

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-10; -18; 2) \sim (5; 9; -1).$$

Последний переход – это вектор «сократили» на $\left(-2\right)$, перейдя к коллинеарному. Итак, искомое уравнение имеет вид $5x + 9y - z = ?$ И, подставив, например, точку M, получаем в левой части 24.

Ответ. $5x + 9y - z = 24$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{2}$ и параллельной оси Oy.

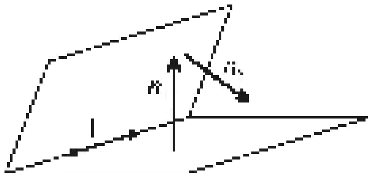
Решение. В канонических уравнениях прямой опять же содержится информация о точке привязки $M\left(-3; 1; -1\right)$ и направляющем векторе $\vec{l} = (1; -3; 2)$. Вторым же вектором, показывающим направление вдоль плоскости, служит базисный координатный вектор оси Oy, а именно: (0; 1; 0). Опять находим нормаль $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2; 0; 1)$, пишем уравнение $-2x + z = ?$ и, подставляя координаты точки M, узнаём, что свободным членом надо взять 5.

Ответ: $-2x + z = 5$.

Примечание. В найденной нормали оказалась равна нулю координата, отвечающая той оси Oy, которой плоскость параллельна. Это *всегда* и должно происходить. Плоскость параллельна одной из осей, тогда и только тогда, когда нормаль к плоскости перпендикулярна к той оси и, следовательно, соответствующая координата у нормали зануляется.

Задача 4. Составить параметрические уравнения прямой, заданной системой линейных уравнений: $\left\{x + 4y - 2z = 6; 3x - y + z = 1\right\}$.

Решение. Нам нужен для этого направляющий вектор прямой и какая-либо точка привязки.



(А). Если прямая лежит в плоскости, то её направляющий вектор обязан быть перпендикулярен нормали. В данном случае прямая лежит в каждой из плоскостей, описываемых как первым, так и вторым уравнением заданной системы. Следовательно, надо найти вектор, перпендикулярный обеим нормалям, что естественно делать с помощью векторного произведения. Находим:

$$\vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2; -7; -13)\,.$$

Теперь нужно найти какое-нибудь одно решение системы, дающее любую точку на прямой. Зададим произвольно какое-нибудь из неизвестных: пусть $x = 0$. И тогда из оставшейся системы $\{4y - 2z = 6; -y + z = 1\}$ находим: $y = 4$; $z = 5$. Итак, точка привязки (0; 4; 5).

Ответ: $\{x = 2t; y = 4 - 7t; z = 5 - 13t\}$.

Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0; 3; 2)$ перпендикулярно прямой $\{2x + y - 3z; 3y + z = 1\}$.

Решение. Нормаль к искомой плоскости и есть направляющий вектор данной прямой, который мы находим, как и в предыдущей задаче, векторным произведением нормалей:

$$\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (10; -2; 6) \sim (5; -1; 3)\,.$$

Значит, уравнение имеет вид $5x - y + 3z = ?$ Подставляя точку привязки *M*, вычисляем, что левая часть равна 3.

Ответ. $5x - y + 3z = 3$.

Задача 6. Найти точку пересечения прямой *AB* с плоскостью *MNK*, где $A=(0;5;2)$, $B=(-2;4;1)$, $M=(-3;0;4)$, $N=(4;1;6)$, $K=(5;-2;4)$.

Решение. Придётся составить уравнения и плоскости, и прямой. Нормаль в плоскости есть перпендикуляр к векторам $\overrightarrow{MN}=(7;1;2)$ и $\overrightarrow{MK}=(8;-2;0)$. Значит,

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ 7 & 1 & 2\\ 8 & -2 & 0\end{vmatrix}=(4;16;-22)\sim(2;8;-11),$$

уравнение плоскости имеет вид $2x+8y-11z=?$ Подставляя любую из точек M,N,K, находим: $?=-50$. Итак, $2x+8y-11z=-50$. У прямой есть направляющий вектор $AB=(-2;-1;-1)\sim(2;1;1)$. Поэтому, взяв точкой привязки *A*, напишем параметрические уравнения: $\{x=2t;\ y=5+t;\ z=2+t\}$. Надо найти такой «адрес» t, при котором точка прямой попадёт на плоскость, т. е. координаты должны удовлетворять уравнению плоскости. Вот и подставляем x,y,z, взятые с прямой, в уравнение плоскости: $2(2t)+8(5+t)-11(2+t)=-50$. Или $t+18=-50$, т. е., $t=-68$. Точка прямой с таким значением t есть $(-136;-63;-66)$.

Ответ: $(-136;-63;-66)$.

Задача 7. Найти координаты проекции точки $M(3;0;5)$ на плоскость $-x+2y+3z=-16$.

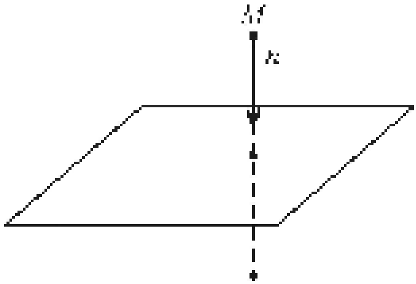
Решение. Надо провести через *M* прямую, перпендикулярную плоскости. А значит, её направляющий вектор и есть нормаль к плоскости $(-1;2;3)$, точка привязки *M*. Итак, прямая:

$$\{x=3-t;\ y=2t;\ z=5+3t\}.$$

Для отыскания адреса точки пересечения, как и в предыдущей задаче, подставляем x, y, z в уравнение плоскости:

$-(3-t)+2(2t)+3(5+3t)=-16$.

Откуда $14t=-28$, т. е. $t=-2$. Точка прямой с таким адресом: $(5;-4;-1)$.



Ответ: $(5;-4;-1)$.

Примечание. Отрицательное значение t означает лишь то, что выбранная нормаль случайно показывает из точки M не в сторону плоскости, а от неё. Собственно, никакого значения это не имеет.

Задача 8. Найти координаты точки, симметричной точке $K(1;-2;3)$ относительно плоскости $2x+y-z=6$.

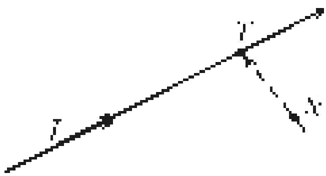
Решение. Надо сделать всё тоже, что в предыдущей задаче, только дойдя из K до плоскости, не останавливаться, а пройти ещё столько же – там и будет симметричная точка.

Прямую запишем в виде $\{x=1+2t;\ y=-2+t;\ z=3-t\}$, подставляем это в уравнение плоскости: $2(1+2t)+(-2+t)-(3-t)=6$, т. е. $6t=9$, т. е. $t=3/2$. При $t=0$ мы находились в точке K, при $t=3/2$ оказались на плоскости, значит, при $t=3$ попадём в симметричную точку. Подставляем это значение в параметрические уравнения: $x=7$; $y=1$; $z=0$.

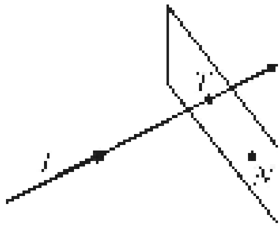
Ответ: $(7;1;0)$.

Задача 9. Найти координаты проекции точки $N(1;3;-2)$ на прямую $\{x=-2+2t;\ y=1+t;\ z=3+3t\}$.

Первое решение. Надо найти на прямой такую точку T (отвечающую адресу t), чтобы вектор NT оказался перпендикулярен направляющему вектору прямой $(2;1;3)$.



Точка T имеет координаты $(-2+2t;1+t;3+3t)$, вычитая из них координаты N, получаем $\overrightarrow{NT}=(-3+2t;-2+t;5+3t)$. Записываем условие перпендикулярности: скалярное произведение этого вектора на направляющий вектор $\vec{l}=(2;1;3)$ равно нулю. То есть: $2(-3+2t)+(-2+t)+3(5+3t)=0$, или $14t=-7$, или $t=-1/2$. Подставляем в уравнения прямой. Получаем $x=-3$; $y=1/2$; $z=3/2$.



Второе решение. Ту же точку T можно интерпретировать как пересечение плоскости, перпендикулярной данной прямой и проходящей через N, с этой прямой. Нормалью к плоскости служит направляющий вектор прямой. Т. е. уравнение плоскости: $2x+y+3z=?$ Подставив координаты N, находим: $2x+y+3z=-1$. Подставив сюда координаты искомой точки $T(-2+2t;1+t;3+3t)$, приходим к уравнению: $2(-2+2t)+(1+t)+3(3+3t)=-1$. Приходим к тому же: $14t=-7$.

Третье решение. Проекция T – такая точка прямой, что здесь достигается минимум расстояния NT. Квадрат этого расстояния есть квадрат длины вектора NT, выписанного в первом решении, т. е. надо найти минимум квадратного трёхчлена

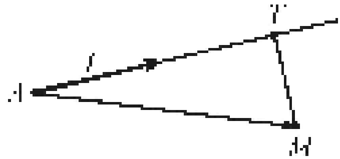
$$(-3+2t)^2+(-2+t)^2+(5+3t)^2=14t^2+14t+38.$$

Он достигается при $t=-1/2$. Тот же результат.

Ответ: $(3;1/2;3/2)$.

Задача 10. Найти расстояние от точки $M(3;-2;1)$ до прямой $\{x=1-2t;\ y=3t;\ z=4+2t\}$.

Первое решение. Можно, как в предыдущей задаче, найти координаты проекции точки M на данную прямую. И расстояние от M до этой проекции как раз и будет расстоянием до прямой. Но здесь есть излишество: нам надо найти лишь одно число (расстояние), а мы будем узнавать куда больше подробностей, чем необходимо. Есть путь короче. Расстояние $\left|MT\right|$ есть длина катета прямоугольного треугольника AMT. Точка привязки на прямой $A(1;0;4)$ нам известна. Значит,



известен вектор $\overrightarrow{AM}=(2;-2;-3)$ – это гипотенуза. А катет MT есть проекция вектора $\overrightarrow{AM}$ на направляющий вектор прямой $\vec{l}$.

Проекция же узнаётся из скалярного произведения. $\left|\overrightarrow{AT}\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{l}\right|}{\left|\vec{l}\right|}$.

Остаётся теорема Пифагора:

$$\left|\overrightarrow{MT}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AM}^2-\left(\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{l}\right|}{\left|\vec{l}\right|}\right)^2}=\sqrt{2^2+2^2+3^2-\frac{\left((2;-2;-3)\cdot(-2;3;2)\right)^2}{2^2+3^2+2^2}}=$$

$$=\sqrt{17-\frac{256}{17}}=\sqrt{\frac{33}{17}}.$$

Второе решение. Оно ещё короче – если воспользоваться свойством длины векторного произведения. Искомое расстояние равно $\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\sin\varphi$, а в то же время, согласно определению,

$$\left|\overrightarrow{AM}\times\vec{l}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\vec{l}\right|\cdot\sin\varphi.$$

Значит, остаётся лишь разделить $\left|\overrightarrow{AM}\times\vec{l}\right|$ на длину $\left|\vec{l}\right|$

$$\overrightarrow{AM}\times\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ 2 & -2 & -3\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix}=(5;2;2).$$

Поэтому $\left|\overrightarrow{MT}\right|=\dfrac{\sqrt{5^2+2^2+2^2}}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{33}}{\sqrt{17}}$.

Ответ: $\sqrt{33/17}$.

Задача 11. Выяснить, пересекаются ли прямые

$$\{x=5+t;\ y=1+3t;\ z=4+t\}\ \text{и}\ \{x=t;\ y=4-3t;\ z=-4+2t\}.$$

И если да, то найти точку пересечения и написать уравнение проходящей через них плоскости.

Решение. Координаты точки пересечения (если она есть) должны подчиняться как уравнениям первой прямой, так и уравнениям второй: надо приравнять три координаты, заданные одними параметрическим уравнениями – и другими. Но здесь имеется провокация: общая точка будет иметь свой а*дрес* на каждой из прямых. Но это совсем не обязательно будет *одинаковый адрес*.

Одна и та же буква t и в той, и в другой системе – это иллюзия. Это две *разные* переменные. Поэтому необходимо переименовать на одной из прямых (пускай на второй) переменную t в другую переменную k . Итак, пишем систему, приравнивая координаты:

$$\begin{cases} 5+t=k, \\ 1+3t=4-3k, \\ 4+t=-4+2k. \end{cases}$$

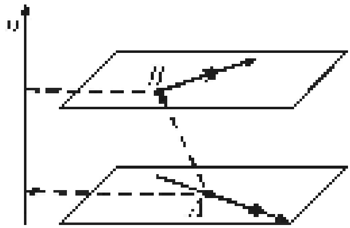
Понятно, что система из трёх уравнений с двумя неизвестными чаще всего не будет иметь решений (так ведь и прямые в пространстве чаще не пересекаются). Попробуем здесь: найдём t и k из первых двух уравнений: $t=-2$; $k=3$. Подставив в третье, видим, что оно, оказывается, тоже выполнено. Общая точка обнаружилась. Подставив найденное t в уравнения первой прямой (или найденное k в уравнения второй) находим её координаты $(3;-5;2)$.

Для составления уравнения плоскости находим нормаль к ней как векторное произведение направляющих векторов: $\vec{n}=(1;3;1)\times(1;-3;2)=(9;-1;-6)$. Уравнение: $9x-y-6z=?$ Подставить можно любую из точек привязки или общую точку прямых: получаем 20.

Ответ: *пересекаются. Общая точка* $(3;-5;2)$. *Плоскость* $9x-y-6z=20$.

Задача 12. Найти расстояние между прямыми
$\{x=-2+3t;\, y=2+t;\, z=4-2t\}$ и $\{x=5+t;\, y=-5+3t;\, z=1-t\}$.

Решение. Расстояние между прямыми – это и есть расстояние между содержащей их параллельной парой плоскостей. Достаточно найти нормаль к этой паре плоскостей (как векторное произведение направляющих векторов прямых). А затем взять любой вектор, ведущий из точки одной прямой в точку другой (например, от точки привязки к точке привязки). И его проекция на нормаль как раз и будет (по абсолютной величине) искомым расстоянием.



Реализуем вычисления

$$\vec{n} = (3;1;-2)\times(1;3;-1) = (5;1;8),$$

$$\overrightarrow{AB} = (5;-5;1)-(-2;2;4) = (7;-7;-3).$$

$$\text{Расстояние} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|(7;-7;-3)\cdot(5;1;8)\right|}{\left|(5;1;8)\right|} = \frac{4}{\sqrt{90}}$$

Ответ: $4/\sqrt{90}$.

Задача 13. Найти расстояние между плоскостями $3x-y+4z=5$ и $6x-2y+8z=15$.

Решение. Нормали к плоскостям коллинеарны. Поэтому плоскости параллельны, и имеет смысл говорить о расстоянии между ними. Достаточно взять любую точку первой плоскости и подставить её координаты в формулу расстояния до второй плоскости: $\dfrac{\left|(6x_0-2y_0+8z_0)-15\right|}{\sqrt{6^2+2^2+8^2}}$. Но раз точка удовлетворяет уравнению первой плоскости, то значение выражения в круглых скобках в числителе равно 10. Итого имеем сверху 5.

Ответ: $5/\sqrt{104}$.

Задача 14. Найти расстояние между прямыми

$$\{x-3y+9z=-8;\ 3x-6y+15z=-15\} \text{ и}$$

$$\{4x-y-8z=26;\ 8x-7y+4z=-58\}.$$

Решение. Прямые заданы не в параметрическом виде, что неудобно. Переведём каждую в более удобный вид. Направляющий вектор каждой прямой найдём как векторное произведение нормалей у определяющих их плоскостей.

$$\vec{l}_1 = (1;-3;9)\times(3;-6;15) = (9;12;3) \sim (3;4;1).$$

$$\vec{l}_2 = (4;-1;-8)\times(8;-7;4) = (-60;-80;-20) \sim (3;4;1).$$

Прямые оказались параллельны. Значит, использовать способ из задачи 12 не получится, так как векторное произведение коллинеарных направляющих векторов будет равно нулю. Но для параллельных прямых достаточно найти расстояние от какой-нибудь точки одной прямой – до другой. Найдём по одной точке на каждой прямой.

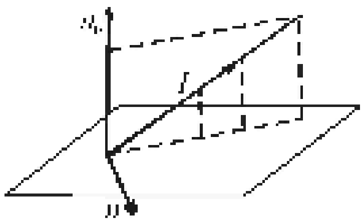
На первой: положим произвольно $z=0$ и найдём $x=1$; $y=3$. Итак, на первой прямой точка $A(1;3;0)$. На второй также произвольно назначим $z=0$ и найдём $x=12$, $y=22$. Есть точка $B(12;22;0)$.

Теперь можно, как во втором решении задачи 10, найти: расстояние: $\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\vec{l}\right|}{\left|\vec{l}\right|}=\dfrac{\left|(11;19;0)\times(3;4;1)\right|}{\left|(3;4;1)\right|}=\dfrac{\left|(19;-11;-13)\right|}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{651}}{\sqrt{26}}$.

Ответ: $\sqrt{651/26}$.

Задача 15. Составить уравнения проекции прямой $\{x=3+2t;\ y=1+4t;\ z=2-3t\}$ на плоскость $3x+y+z=10$.

Решение. Все перпендикуляры, опущенные из точек данной прямой на данную плоскость, заполняют плоскость, перпендикулярную данной. Нормаль $\vec{n}$ к этой новой плоскости, с одной стороны, перпендикулярна нормали данной плоскости $\vec{n}_0$, а, с другой стороны, направляющему вектору прямой $\vec{l}$. А значит, может быть получена как их векторное произведение:



$$\vec{n}=\vec{n}_0\times\vec{l}=(3;1;1)\times(2;4;-3)=(-7;11;10).$$

Уравнение плоскости имеет вид $-7x+11y+10z=?$

Подставив точку привязки прямой $(-3;1;2)$, получаем 51. Итак: $7x+11y+10z=51$. Искомая прямая, являющаяся проекцией, может быть задана как пересечение исходной плоскости с построенной, т. е. системой из их двух уравнений.

Ответ: $\{-7x+11y+10z=51;\ 3x+y+z=10\}$.

Задача 16. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\{5x-2y+z=4; 3x+3y-z=6\}$ и через точку $M(-1;2;3)$.

Решение. Проще всего обратиться к уравнению пучка плоскостей (в Сводке IV.2). Нужная плоскость должна иметь вид $\alpha(5x-2y+z)+\beta(3x+3y-z)=4\alpha+6\beta$. Надо, чтобы точка M этому уравнению удовлетворяла. Так и подставим сюда координаты точки M. Получим: $-6\cdot\alpha+0\cdot\beta=4\alpha+6\beta$, или $6\beta=-10\alpha$. Возьмём любые подходящие: например, $\alpha=3$, $\beta=-5$.

Итак, $-21y+8z=-18$.

Ответ: $-21y+8z=-18$.

Задача 17. Написать уравнения биссекторных плоскостей между плоскостями $4x+y+z=11$ и $2x-8y-2z=13$.

Решение. Самое простое – обратиться к тому свойству, что точки на биссекторных плоскостях равноудалены от данных плоскостей. Равенство расстояний от точки $(x;y;z)$ до этих плоскостей означает, что $\dfrac{|4x+y+z-11|}{\sqrt{18}}=\dfrac{|2x-8y-2z-13|}{\sqrt{72}}$. Знаменатели можно сократить – один вдвое больше второго – и записать

$$2\left|4x+y+z-11\right|=\left|2x-8y-2z-13\right|.$$

Снимая модули с плюсом или минусом, получим либо

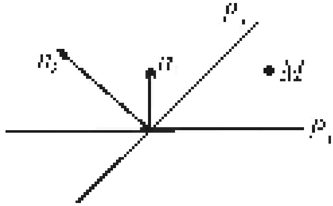
$$8x+2y+2z-22=2x-8y-2z-13, \text{ либо}$$

$$8x+2y+2z-22=-2x+8y+2z+13.$$

Можно привести подобные и упростить.

Ответ: $6x+10y+4z=9$ и $10x-6y=35$.

Задача 18. Определить, в остром или тупом угле двугранном угле между плоскостями $x+y+2z=7$ и $3x-y+4x=-2$ лежит точка $M(1;1;1)$.

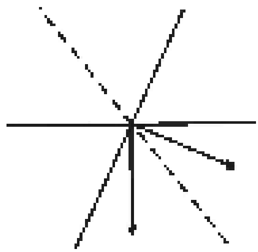


Решение. Обратимся к соображениям о положительном и отрицательном полупространствах (раздел IV Сводки). Подставив координаты M в уравнение первой плоскости, мы получим $4<7$, а во втором $4>-2$. То есть нормаль $(1;1;2)$ первой плоскости смотрит в полупространство, где есть точка *M*, а нормаль $(3;-1;4)$ туда, где нет точки *M*. И, как видно из рисунка, если угол между такими нормалями острый, то точка *M* лежит в остром угле. Поскольку скалярное произведение нормалей равно $3-1+8>0$, то это сейчас именно так.

Ответ: Точка *M* лежит в остром угле.

Задача 19. Составить уравнение биссекторной плоскости острого двугранного угла между плоскостями $5x-3y=11$ и $8x-6y+6z=7$.

Решение. Алгебраические расстояния (т. е. расстояния со знаком) будут совпадать, если точка лежит на биссектрисе в том двугранном угле, куда смотрят (или куда не смотрят) обе нормали.



Это, как видно из рисунка, будет происходить в тупом угле, если угол между нормалями острый. И, наоборот, в остром угле, если угол между нормалями тупой. Если взять в качестве нормалей $(5;-3;0)$ и $(8;-6;6)$, то их скалярное произведение $5\cdot 8+(-3)\cdot(-6)+0\cdot 6>0$. Сейчас алгебраические расстояния будут совпадать для точек в тупом угле. Нам это не надо – поэтому сменим знак у одной из нормалей. Например, уравнение первой плоскости перепишем в виде $-5x+3y=-11$. Теперь приравниваем алгебраические расстояния:

$$\frac{-5x+3y-11}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{8x-6y+6z-7}{\sqrt{8^2+6^2+6^2}}.$$

Заметив, что слева знаменатель $\sqrt{34}$, а справа $\sqrt{136}=2\sqrt{34}$, можно умножить обе части на $2\sqrt{34}$, записать в виде $2(-5x+3y-11)=8x-6y+6z-7$ и привести подобные: $18x-12y+6z=-15$, после чего сократить на 3.

Ответ: $6x-4y+2z=-5$.

Задача 20. Уравнение одной из сторон некоторого угла на плоскости $2x+9y=-6$, уравнение биссектрисы $4x+y=-12$. Составить уравнение другой стороны угла.

Решение. Ищем нормаль к искомой прямой в виде $(p;q)$. Тогда нормаль к биссектрисе $(4;1)$ должна составлять одинаковые углы с нормалью $(p;q)$ и с нормалью к заданной стороне угла $(2;9)$. Приравниваем косинусы этих углов, взяв их из скалярных произведений:

$$\frac{(p;q)\cdot(4;1)}{\sqrt{p^2+q^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{(2;9)\cdot(4;1)}{\sqrt{2^2+9^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2}}.$$

Или, упростив:

$$\frac{4p+q}{\sqrt{p^2+q^2}}=\frac{17}{\sqrt{85}}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{5}}.$$

Перемножив «крест-накрест», возведя в квадрат и приведя подобные, приходим к уравнению $63p^2+40pq-12q^2=0$. Или, разделив на q^2 и обозначив $p/q=k$, имеем квадратное уравнение $63k^2+40k-12=0$. Можно решать по общей формуле, а можно заметить, что вектор $(2;9)$ заведомо удовлетворяет уравнению, т. е. $k=2/9$ – один из корней. А тогда разложить трёхчлен на множители: $(9k-2)(7k+6)=0$ и найти второй корень $k=-6/7$. Значит, можно положить $p=6$, $q=-7$ (а другие подходящие векторы $(p;q)$ будут коллинеарны этому).

Точку привязки – вершину угла – найдём, решив систему из уравнений стороны и биссектрисы. Это точка $(-3;0)$. Итак, пишем уравнение искомой стороны: $6x-7y=-18$.

Ответ: $6x-7y=-18$.

Задача 21. На плоскости имеется треугольник с вершинами $A(5;1)$, $B(-2;4)$, $C(1;-2)$.

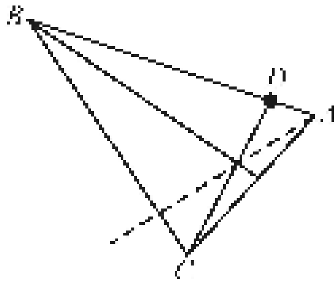
(а) Составить уравнение высоты проведённой из вершины *A*.

(б) Найти длину высоты, проведённой из вершины *B*.

(в) Найти координаты основания высоты, проведённой из вершины *C*.

Решение. (а) Вектор $\overrightarrow{BC}=(3;-6)$ как раз и является нормалью к высоте из *A*. Можно даже вместо него взять коллинеарный ему $(1;-2)$. Итого высота из *A* имеет уравнение $x-2y=?$ Подставив координаты *A*, получим 3. Итак, $x-2y=3$.

(б) Длина высоты из B – это расстояние от B до прямой AC.



Вектор $AC(-4;-3)$ – направляющий, значит, $(3;-4)$ нормаль; значит, уравнение AC имеет вид $3x-4y=?$ Подставляем A, находим: $3x-4y=11$. Расстояние от B до прямой: $\frac{|3\cdot(-2)-4\cdot4-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{21}{5}$.

(в) Точка D есть пересечение прямой AB и высоты из C. У прямой AB вектор $\overrightarrow{AB}=(-7;3)$ направляющий, значит (3;7) нормаль. Уравнение AB имеет вид $3x+7y=?$ Подставляем A, находим: $3x+7y=22$. У высоты из C нормалью служит $\overrightarrow{AB}$, значит, её уравнение вида $-7x+3y=?$

Подставляем C, находим $-7x+3y=-13$. Решая систему, находим пересечение: $x=57/58$, $y=115/58$.

Ответ: (а) $x-2y=3$; (б) $21/5$; (в) $(57/58;115/58)$.

Задача 22. Найти объём тетраэдра, ограниченного плоскостями $\{3x-16y-33z=-25\}$, $\{8x-23y-29z=-47\}$, $\{7x+2y-18z=-19\}$, $\{-12x+5y+14z=-18\}$.

Решение. Найдём координаты вершин тетраэдра. Каждая из них является пересечением каких-то трёх из этой четвёрки плоскостей. Значит, придётся решить четыре системы уравнений, каждая из которых получается исключением из четвёрки какой-то одной плоскости. Подробности решения здесь опускаем.

1–2–3 плоскости. Решение – точка $A(-3;1;0)$.

1–2–4 плоскости. Решение – точка $B(2;4;-1)$.

1–3–4 плоскости. Решение – точка $C(3;-2;2)$.

2–3–4 плоскости. Решение – точка $D(5;0;3)$.

Значит, за рёбра тетраэдра можно взять вектора $\overrightarrow{AB}=(5;3;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-3;2)$, $\overrightarrow{AD}=(8;-1;3)$.

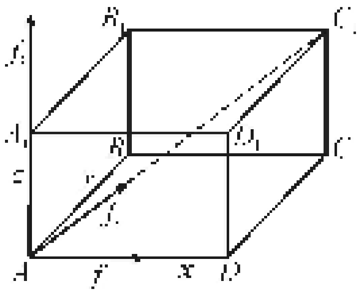
Объём параллелепипеда, построенного на них, равен модулю смешанного произведения. А объём тетраэдра – в 6 раз меньше (ибо основание тетраэдра есть треугольник, т. е. половина параллелограмма, а в формулу объёма тетраэдра входит ещё и коэффициент $1/3$)

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot(-7) - 3\cdot 2 - 1\cdot 18 = -59 .$$

Значит, $V = 59/6$.

Ответ: $59/6$.

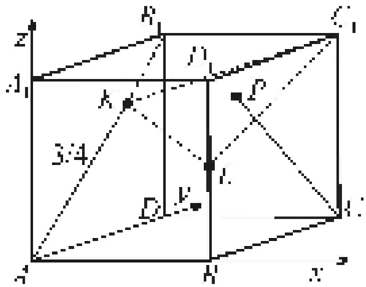
Задача 23. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины ребер $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. К точке A приложены три силы: сила $\vec{f}_1$ направлена вдоль ребра AD и по величине равна 1; сила $\vec{f}_2$ вдоль AA_1 и по величине равна 2; сила $\vec{f}_3$ вдоль диагонали $\overrightarrow{AC_1}$ и величиной 1. Найти величину равнодействующей этих сил.



Решение. Введём прямоугольную декартову систему, где оси x, y, z направлены вдоль рёбер AD, AB и AA_1 соответственно. Тогда вектор первой силы есть $\vec{f}_1 = (1; 0; 0)$, второй силы $\vec{f}_2 = (0; 0; 2)$. А направление третьей силы должно совпадать с направлением вектора $\overrightarrow{AC_1} = (2; 2; 1)$. Но $\vec{f}_3$ имеет длину 1, а $\left|\overrightarrow{AC_1}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$. Значит, надо разделить вектор $\overrightarrow{AC_1}$ на 3, и тогда получится коллинеарный ему вектор длины 1. Итак, $\vec{f}_3 = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$. А их равнодействующая есть сумма этих векторов, т. е. $\vec{f} = \left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$. Величина силы есть

$$\frac{\sqrt{5^2 + 2^2 + 7^2}}{3} = \frac{\sqrt{78}}{3} .$$

Ответ: $\sqrt{78}/3$.



Задача 24. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 точка K лежит на отрезке AB_1 и $AK=\frac{3}{4}AB_1$; точка L – середина ребра DD_1. Плоскость π проходит через точки C_1, K, L, а точка P – проекция точки C на плоскость π. Найти расстояние между точками L и P.

Решение. Возьмем A за начало координат, оси пустим по ребрам, как показано. Тогда перемещение из точки K в точку C_1 соответствует вектору $\overrightarrow{KC_1}=\left(1;\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)\sim(4;1;1)$, а из K в L: $\overrightarrow{KL}=\left(1;-\frac{3}{4};-\frac{1}{4}\right)\sim(4;-3;-1)$. Значит, нормаль к плоскости π:

$$\vec{n}\sim\overrightarrow{KC_1}\times\overrightarrow{KL}=(2;8;-16)\sim(1;4;-8).$$

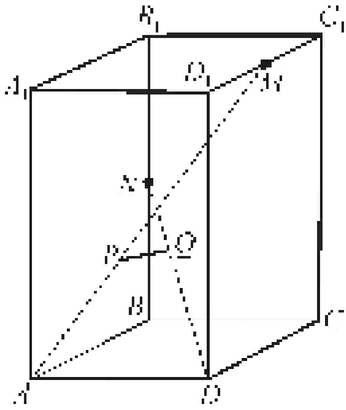
Привязав к точке $C_1(1;1;1)$, запишем уравнение плоскости π: $x+4y-8z=-3$. А теперь можно сэкономить и координаты точки P даже не находить. Треугольник LPC прямоугольный; гипотенузой является вектор $\overrightarrow{LC}=(0;1;1/2)$, а длина второго катета есть расстояние h_C от точки $C(1;1;0)$ до плоскости π, которое может быть посчитано по готовой формуле: $h_C=\frac{|1\cdot1+4\cdot1-8\cdot0+3|}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}}=\frac{8}{9}$. Значит,

$$|LP|=\sqrt{\overrightarrow{LC}^2-\left(\frac{8}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{64}{81}}=\frac{\sqrt{149}}{18}.$$

Ответ: $\sqrt{149}/18$.

Задача 25. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в основании лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2; высота $|AA_1|=4$. Точка N – середина ребра BB_1, точка M – середина C_1D_1. На прямых AM и DN расположены точки P и Q так, что отрезок PQ является общим перпендикуляром к этим прямым. Найти отношения $AP:PM$ и $DQ:QN$.

Решение. Эта задача сложнее, чем нахождение длины отрезка PQ (т. е., расстояния между прямыми). Надо конкретно определить позицию каждой из точек.



Опишем каждую из искомых точек параметрически. Взяв за начало точку A и оси пустив вдоль AD, AB, AA_1 (как в предыдущей задаче), пустим точку P по прямой с точкой привязки $A(0;0;0)$ и направляющим вектором $\overrightarrow{AM}=(2;1;4)$. Итого, координаты P будут: $(2p;\,p;\,4p)$.

Для точки Q точкой привязки пусть будет $D(2;0;0)$, направляющим вектором $\overrightarrow{DN}=(-2;2;2)$, а параметр здесь обозначим буквой q. Значит, координаты Q такие: $(2-2q;\,2q;\,2q)$. Заметим, что искомые величины p и q как раз и характеризуют, какую долю своих отрезков составляют части AP и DQ.

Теперь запишем вектор $\overrightarrow{PQ}=(2-2q-2p;\,2q-p;\,2q-4p)$. Его скалярные произведения с направляющими векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{DN}$ должны, по условию, быть равны нулю

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AM}=2(2-2q-2p)+(2q-p)+4\cdot(2q-4p)=-21p+6q+4=0;$$

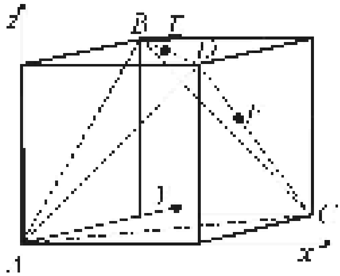
$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DN}=-2(2-2q-2p)+2(2q-p)+2\cdot(2q-4p)=$$
$$=-6p+12q-4=0.$$

Решив систему, найдем: $p=1/3;\ q=1/2$.

Ответ: $AP:PM=1:2$; $DQ:QN=1:1$.

Задача 26. В правильном тетраэдре $ABCD$ с длиной ребра 1 точка E лежит на ребре BD; $|BE|=1/3$ точка F на ребре DC; $|DF|=1/3$. Найти расстояние между прямыми AE и BF.

Решение. Воспользуемся приемом, описанным во введении: погрузим тетраэдр в единичный куб. Размер тетраэдра изменится, но мы будем использовать то, что отрезок BE должен составлять треть от диагонали верхней грани BD. Точка E тогда имеет координаты $E\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$. Такие же координаты у направляющего вектора $\overrightarrow{AE}$.



Аналогично точка F лежит на диагонали DC правой грани и имеет тогда координаты $\left(1;\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Направляющий вектор второй прямой $\overrightarrow{BF}=\left(1;-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$. Нормаль к обеим прямым

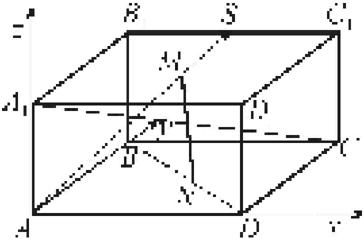
$$\vec{n}=\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{BF}\sim(1;2;3)\times(3;-2;-1)=(4;10;-8)\sim(2;5;-4).$$

Теперь надо взять какой-либо вектор, ведущий с одной прямой на другую – например, вектор $\overrightarrow{AB}=(0;1;1)$ – и вычислить его проекцию на нормаль: $\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+5^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{45}}$. В конце надо не забыть, что мы работали в тетраэдре с ребром $\sqrt{2}$, а надо было решить задачу для единичного тетраэдра, поэтому полученное число следует разделить на $\sqrt{2}$.

Ответ: $1/\sqrt{90}$.

Задача 27. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в основании лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=1$; $AD=2$; высота $AA_1=1$. Точка S – середина ребра B_1C_1. Рассматриваются отрезки с концами на прямых AS и BD, перпендикулярные прямой A_1C. Найти наименьшую длину таких отрезков.

Решение. Возьмем точку A за начало, оси пустим по ребрам, как показано. Тогда направляющие вектора прямых AS и BD: $\overrightarrow{AS}=(1;1;1)$; $\overrightarrow{BD}=(2;-1;0)$. Взяв за точки привязки A и B, зададим параметрически концы искомого отрезка MN:



$$M\left(m;m;m\right);\ N\left(2n;1-n;0\right).$$

Вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты: $\overrightarrow{MN}=(2n-m;1-n-m;-m)$.

Из условия перпендикулярности к вектору $\overrightarrow{A_1C}=(2;1;-1)$ получим тогда: $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{A_1C}=2(2n-m)+1(1-n-m)-1(-m)=3n-2m+1=0$.

Выразим отсюда: $n=\dfrac{2}{3}m-\dfrac{1}{3}$ и подставим в формулу для $\overrightarrow{MN}$. Теперь: $\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{1}{3}m-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{3}m;-m\right)$. Осталось найти m, чтобы минимизировать квадрат длины:

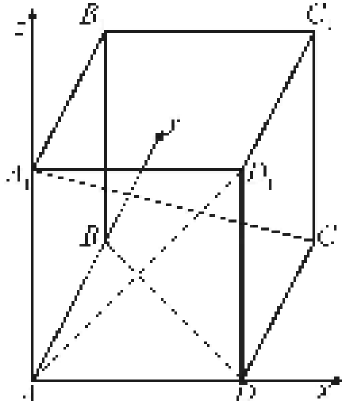
$$\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{9}\left((m-2)^2+(4-5m)^2+m^2\right)=\frac{1}{9}\left(35m^2-44m+20\right).$$

Минимум этого квадратного трехчлена достигается при $m=\dfrac{22}{35}$ и равен $\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{216}{35}=\dfrac{24}{35}$.

Ответ: $\sqrt{24/35}$

Задача 28. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AD=3$; $AB=AA_1=4$. Через прямую A_1C проведена плоскость, образующая равные углы с прямыми $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{BD}$. Найти эти углы.

Решение. Введя систему координат, как показано на рисунке, запишем координаты направляющих векторов указанных прямых: $\overrightarrow{A_1C} = (3;\, 4;\, -4)$; $\overrightarrow{AD_1} = (3;\, 0;\, 4)$; $\overrightarrow{BD} = (3;\, -4;\, 0)$. Прямые образуют равные углы с плоскостью тогда же, когда они образуют равные углы с ее нормалью. Пусть нормаль к искомой плоскости есть $\vec{n} = (p; q; r)$. Эта нормаль должна быть перпендикулярна к прямой $\overrightarrow{A_1C}$, т. е.,



$\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 3p + 4q - 4r = 0$. Выразим отсюда: $r = \frac{3}{4}p + q$; и значит, теперь $\vec{n} = \left(p;\, q;\, \frac{3}{4}p + q\right)$. Теперь приравняем (по модулю!) косинусы углов между этой нормалью и направляющими векторами прямых $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{BD}$:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AD_1} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AD_1}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}.$$

Заметим, что поскольку $\left|\overrightarrow{AD_1}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = 5$, знаменатели в дробях совпадают, и остается приравнять лишь числители:

$$\left|\overrightarrow{AD_1} \cdot \vec{n}\right| = |6p + 4q| = \left|\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n}\right| = |3p - 4q|.$$

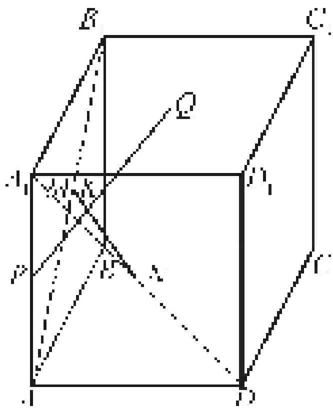
Надо рассмотреть два варианта:

1) $6p + 4q = 3p - 4q$, т. е. $p = -\frac{8}{3}q$ и тогда $\vec{n} = \left(-\frac{8}{3}q;\, q;\, -q\right)$. Отсюда $\cos\varphi = \dfrac{12|q|}{5|q|\sqrt{\frac{64}{9} + 1 + 1}} = \dfrac{18}{5\sqrt{21}}$;

2) $6p+4q=-3p+4q$, т. е. $p=0$. И тогда $\vec{n}=(0;q;q)$. И отсюда $\cos\varphi=\dfrac{4|q|}{5\sqrt{2q^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{18}{5\sqrt{21}}$ или $\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

Задача 29. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна *a*. Точка *P* – середина ребра AA_1, точка *Q* – центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Отрезок *MN* с концами на прямых AB_1 и A_1D пересекает прямую *PQ* и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.



Решение. Для упрощения решим сначала для единичного куба. Обозначим через *K* точку пересечения прямых *MN* и *PQ*. Тогда векторы $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{NK}$ должны оказаться коллинеарными. Зададим параметрически точки *M*, *N*, *K* введя систему координат как в предыдущих задачах

$$M(0;m;m);\quad N(n;0;1-n);$$

$$K\left(k;k;\frac{1}{2}+k\right).$$

Тогда векторы имеют координаты:

$$\overrightarrow{MK}=\left(k;k-m;\frac{1}{2}+k-m\right);\ \overrightarrow{NK}=\left(k-n;k;-\frac{1}{2}+k+n\right);$$

$$\overrightarrow{PQ}\sim(1;1;1);\ \overrightarrow{MN}=(n;-m;1-n-m).$$

Сначала запишем условие перпендикулярности $\overrightarrow{MN}$ и вектора $\overrightarrow{PQ}$, который коллинеарен вектору (1; 1; 1)

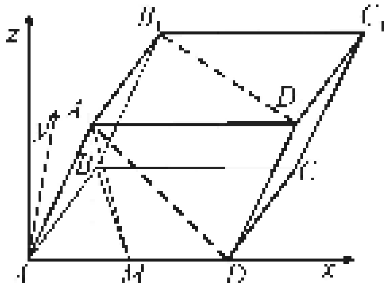
$$\overrightarrow{MN}\cdot(1;1;1)=n-m+1-n-m=0.$$

Отсюда $m=1/2$, а значит, $\overrightarrow{MK}=(k;k-1/2;k)$

Теперь запишем условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{NK}$ через равенство отношений их координат: $\dfrac{k}{k-n}=\dfrac{k-1/2}{k}=\dfrac{k}{k+n-1/2}$. Решением будет: $k=1/6$; $n=1/4$. Подставляя в формулу для $\overrightarrow{MN}$, получим $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}(1;-2;1)$. Его длина $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Это в единичном кубе. Теперь надо масштабировать, умножив на длину ребра

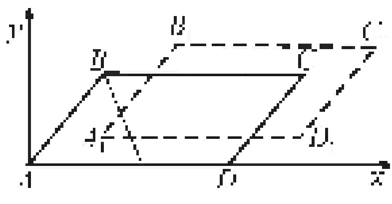
Ответ: $a\sqrt{6}/4$.

Задача 30. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все плоские углы при вершине A равны $60°$; длины ребер: $AB=AA_1=1$; $AD=2$. Найти расстояние и угол между прямыми A_1D и B_1D_1.



Решение. Главной трудностью здесь является запись всей ситуации в прямоугольных декартовых координатах. Прибегнем для этого к такому трюку.

Если мы поместим посередине ребра AD точку M, то выходящие из A отрезки AA_1, AD, AB все будут иметь единичную длину и образовывать между собой углы $60°$; но это же есть единичный правильный тетраэдр! Тогда проекция вершины A_1 на основание попадет в центр треугольника ABM, вертикальная же ее координата равна высоте тетраэдра, т. е. $\sqrt{6}/3$. На этой же высоте находятся и остальные вершины грани $A_1B_1C_1D_1$. Итак, координаты A_1: $\left(1/2;\sqrt{3}/6;\sqrt{6}/3\right)$. Координаты D: $(2;0;0)$. Чтобы найти координаты B_1 и D_1, нарисуем на одной картинке нижнее



основания и проекцию на него верхнего основания. Это два одинаковых параллелограмма, вершина второго находится в центре правильного треугольника ABM. Нетрудно теперь определить и горизонтальные координаты вершин B_1 и D_1. Итак:

$$B_1\left(1;\,2\sqrt{3}/3;\sqrt{6}/3\right);\quad D_1\left(5/2;\,\sqrt{3}/6;\,\sqrt{6}/3\right).$$

Далее операции рутинные. Направляющие вектора прямых: $\overrightarrow{A_1D}=\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$; $\overrightarrow{B_1D_1}=\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ Тогда косинус искомого угла: $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}}{\left|\overrightarrow{A_1D}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B_1D_1}\right|}=\frac{9/4-1/4}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{36}+\frac{6}{9}}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}}=\frac{2}{3}$. Для отыскания расстояния найдем общую нормаль к прямым: $\vec{n}=\overrightarrow{A_1D}\times\overrightarrow{B_1D_1}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2};\sqrt{3}\right)$, а затем возьмем вектор $\overrightarrow{A_1B_1}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, ведущий с одной прямой на другую и вычислим его проекцию на нормаль: $\frac{\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{6}{4}+3}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

Ответ: $1/\sqrt{10}$; $\arccos(2/3)$.

7. Задачи для самостоятельного решения

Ниже приводятся некоторые задачи для самостоятельного упражнения в применении вышеизложенных понятий и приёмов. Часть из них повторяет опорные задачи или близки к ним. Но есть и задачи, требующие более самостоятельного сочинения того или иного подходящего алгоритма. Эти более сложные задачи отмечены звёздочками. В конце приведены ответы.

1. Найти расстояние между прямыми

$$\{5x-4y+3z=0;\,-x+8y-6z=18\}\text{ и}$$
$$\{3x-4y-6z=-2;\,-x+4y+10z=18\}.$$

2. Найти расстояние от точки $M(1;5;4)$ до прямой $\{7x+6y+9z=-2;\,2x-15y-3z=5\}$.

3. Найти координаты точки, симметричной точке $A(2;3;-2)$ относительно прямой $\{-x-2y-3z=-14;\ 2x-3y+z=20\}$.

4. Найти координаты точки, симметричной точке $C(4;2;-1)$ относительно плоскости, проходящей через точку $A(-2;1;4)$ и прямую $\dfrac{x-10}{7}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

5. Найти расстояние от точки $N(2;6)$ до прямой, являющейся биссектрисой угла A треугольника ABC, где $A(-3;1)$, $B(4;0)$, $C(0;4)$.

6. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(5;-2;6)$, $B(7;-1;4)$, $D(4;3;5)$. Найти координаты вершины C и угол между диагоналями параллелограмма.

7. Даны три вершины параллелограмма $MNPQ$: $M(4;-1;3)$, $N(2;2;0)$, $P(5;3;2)$. Найти координаты вершины Q и площадь параллелограмма.

8. На плоскости даны уравнения двух сторон прямоугольника: $x+4y=9$ и $4x-y=2$, а также координаты точки пересечения его диагоналей (3; 4). Составить уравнения двух других сторон.

9. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, если известны уравнения его гипотенузы $\dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-10}{1}$ и координаты вершины прямого угла $C(0;-2;3)$.

10. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(3;4;0)$ и пересекающей прямые $\{x=5+5t;\ y=-2-3t;\ z=4+2t\}$ и $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-13}{5}=\dfrac{z+6}{1}$.

11. Найти координаты оснований общего перпендикуляра, проведённого между прямыми $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z}{1}$ и $\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-3}{2}$.

12. Составить уравнения проекции прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-12}{3}$ на плоскость $x+8y+z=1$.

13. Доказать, что прямые

$$\frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{4} \text{ и } \{x=2t+2;\ y=3t+7;\ z=-2t+1\}$$

лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости.

14. Вычислить расстояние между прямыми

$$\{2x+2y-z=12;\ x-y-z=24\} \text{ и } \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-7}{4}.$$

15. Найти проекцию точки $C(-4;3;-2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые

$$\frac{x-6}{1}=\frac{y-5}{13}=\frac{z+3}{-4} \text{ и } \frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{13}=\frac{z+3}{-4}.$$

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-3}$ перпендикулярно к плоскости $-x+3y+2z=5$.

17. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M(-4;3;-2)$ параллельно плоскости $\{-3x+3y-2z=7\}$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{-2}$.

18. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $\{-3x+3y+12z=5\}$ и $\{9x+3y-4z=7\}$, и при этом пересекает прямые

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-4} \text{ и } \frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{3}.$$

19. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(4;-2;1)$, пересекающей ось Oy и параллельной плоскости $y-3z=5$.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $N(3;2;1)$, параллельной прямой $x=2y=3z$ и отсекающей на осях Ox и Oy равные отрезки.

21. Найти объём тетраэдра, образованного плоскостями координат и плоскостью, проходящей через точку (-1; 4; 9), которая отсекает на осях координат равные отрезки.

22. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и равноудалённой от точек (3; 2; 10) и $(-2; 3; 0)$.

23. Даны две точки $A(2; 1; -3)$, $B(4; 1; -2)$ и плоскость $2x + y + 5z = 4$. Установить, пересекает ли плоскость отрезок AB, его продолжение за точку A или его продолжение за точку B.

24*. Через прямую $\dfrac{x-5}{-1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-2}{0}$ провести такую плоскость, чтобы острый угол между линиями её пересечения с координатными плоскостями Oxy и Oyz был равен $\pi/3$.

25*. Найти координаты центра и радиус шара, вписанного в тетраэдр, образованный координатными плоскостями и плоскостью $2x - 10y - 11z = 76$.

26*. Найти координаты центра и радиус шара, вписанного в тетраэдр с вершинами $(-1; 3; 0)$, $(5; 0; 6)$, $(3; 7; -2)$, $(-2; 5; 2)$.

27*. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(0; 4; 7)$, отстоящей от оси Ox на расстояние $2\sqrt{13}$ и образующей с осью Ox угол $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{22}}$.

28*. Внутри треугольника, высекаемого на плоскости Oyz плоскостями $4x + y - 8z = 5$, $2x - y + 2z = 7$, $-3y + 4z = 15$ найти точку, равноудалённую от этих плоскостей.

29*. Первая прямая проходит через точки с координатами $(6; -1; 3)$ и $(14; 3; 1)$. Вторая прямая проходит через точки с координатами $(1; -4; 3)$ и $(-5; -6; 5)$. Третья прямая проходит через точку с координатами $(3; -3; 3)$ и пересекает первую и вторую прямую. Найти координаты точки пересечения первой и третьей прямой.

30*. Даны две противоположные вершины квадрата $A = (15; 6; 12)$, $C = (-17; 2; -4)$ и точка $E = (19; 38; -4)$, лежащая в той же плоскости, что и квадрат. Найти координаты двух оставшихся вершин.

31*. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(1;1;-3)$ перпендикулярно к плоскости $2x-5y-5z=6$ и образующей с плоскостью $4x+8y-z=10$ угол $\pi/4$.

32*. Показать, что три плоскости $\{x-3y+4z=7\}$, $\{2x+y-3z=3\}$ и $\{4x-5y+5z=9\}$ образуют призму и составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения первых двух плоскостей и параллельной третьей плоскости.

33*. Составить уравнения биссектрисы тупого угла между прямой $\{y-2z=5; 4x-z=14\}$ и её проекцией на плоскость $y+z=-1$.

34*. На плоскости даны координаты вершин $A(2;1)$ и $B(-1;-3)$ треугольника ABC, а также уравнения биссектрисы BM : $\{x-2y=5\}$ и биссектрисы AL : $\{x=2\}$. Найти координаты вершины *C*.

35*. Найти точку пересечения высот треугольника ABC: $A(-1;-2;-6)$, $B(-1;-2;-5)$, $C(2;7;4)$.

36. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 точка *M* лежит на отрезке AB_1; $AM=\dfrac{2}{3}AB_1$ точка N лежит на ребре DD_1; $DN=DD_1/4$. Плоскость α проходит через точки C_1, M, N, а точка $H-$ проекция точки C на плоскость α. Найти расстояние между точками *N* и *H*.

37. В правильном тетраэдре *ABCD* точка *M* лежит на ребре *DC*; точка *N* на ребре *AB*, при этом $DM:DC=BN:AB=1:4$. Найти угол между прямыми *AM* и *CN*.

38. В правильном тетраэдре *ABCD* проведены высоты *DE* и *BF* граней *ABD* и *BDC*. В каком отношении разделены отрезки *DE* и *BF* основаниями их общего перпендикуляра?

39. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины ребер: $AB=2$; $BC=3$; $AA_1=4$. Точки *M* и *N* – соответственно середины ребер B_1C_1 и CC_1. Найти длину отрезка, концы которого лежат на прямых A_1B и CM и который параллелен прямой *AN*.

40. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в основании лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами $AB=4$; $AD=2$; высота $AA_1=\sqrt{8}$. Точка K – середина ребра A_1B_1. Рассматриваются отрезки с концами на прямых AC и DK, перпендикулярные прямой BD_1. Найти наименьшую длину таких отрезков.

41. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 1, высота 3. Точки K и L соответственно середины боковых ребер CC_1 и AA_1. Рассматриваются отрезки, концы которых лежат на прямых A_1K и B_1L и которые параллельны плоскости, проходящей через точки A, B и C_1. Найти наименьшую длину таких отрезков.

42. Найдите угол и расстояние между двумя скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра с ребром a.

43. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = AD = 3$; $AA_1 = 5$.

Точка M лежит на ребре CC_1 на расстоянии 3 от точки C, а точка N на ребре DD_1 на расстоянии 2 от точки D_1. Через прямую A_1B проведена плоскость, образующая равные углы с прямыми AM и BN. Найти эти углы.

44. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Точки P и Q – середины ребер AA_1 и CC_1. Точка E лежит на ребре AD, на расстоянии $1/3$ от D; точка F на ребре B_1C_1, на расстоянии $1/3$ от B_1. Отрезок MN с концами на прямых BE и A_1F пересекает отрезок PQ под прямым углом. Найти длину отрезка MN.

45. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$; $BC = 4$. Точка P является серединой ребра AD, а точка R лежит на ребре A_1D_1; $|A_1R| = 1$, Известно, что отрезки AR и BP образуют равные углы с плоскостью, проходящей через точки A_1, B и D. Найти объем параллелепипеда.

46. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны ребра $AB = 3$; $BC = 4$; $AA_1 = 7$. Найти расстояние между плоскостями A_1BD и CB_1D_1.

47. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точка M – середина ребра A_1B_1, точка P – середина ребра AC. Проекция отрезка BM на прямую C_1P равна $\frac{a}{4\sqrt{5}}$. Найти высоту призмы.

48. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AD:DC=n$. В каком отношении общий перпендикуляр прямых AA_1 и B_1D делит отрезки AA_1 и B_1D?

49. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1, высота пирамиды равна 2. Точка M – середина ребра SB, точка N – середина ребра CD. На отрезке SN выбирается точка P такая, что угол MAP равен $\operatorname{arctg}(2/3)$. Найти отношение $NP:PS$.

50. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 2, высота равна 4.. Точки M и K – соответственно середины ребер AS и AC, точка N – середина высоты пирамиды. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами B, M, N, K.

Ответы

1. $58/\sqrt{325}$. **2.** $\sqrt{850/19}$. **3.** $(12;-5;8)$. **4.** $(5;-2;2)$. **5.** $\sqrt{10}$. **6.** $(6;4;3)$; $\cos\varphi = 9/\sqrt{299}$. **7.** (7; 0; 5), $\sqrt{227}$. **8.** $4x - y = 14$; $x + 4y = 29$. **9.** $\frac{x}{5} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{7}$; $\frac{x}{5} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z-3}{1}$. **10.** $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z}{2}$. **11.** (1; 3; 1), $(4;1;-1)$. **12.** $\frac{x-3}{7} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-6}{-15}$. **13.** $16x - 2y + 13z = 31$. **14.** 25. **15.** $(-3;2;-5)$. **16.** $13x - y + 8z = 9$. **17.** $\frac{x+4}{9} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{-6}$. **18.** $\{x = 2 + 4t;\ y = -3 - 8t;\ z = -1 + 3t\}$. **19.** $\frac{x-4}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}$. **20.** $2x + 2y - 9z = 1$. **21.** 288. **22.** $10x - z = 0$ и $5x - z = 0$. **23.** Продолжение за точку *B*. **24*.** $x + y + z = 11$; $x + y - z = 7$. **25*.** Центр $(2;-2;-2)$, радиус 2. **26*.** Центр $(0;4;1)$, радиус 1. **27*.** Четыре прямых $\frac{x}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-7}{3}$; $\frac{x}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{-3}$; $\frac{x}{15} = \frac{y-4}{18} = \frac{z-7}{-1}$; $\frac{x}{15} = \frac{y-4}{-18} = \frac{z-7}{1}$. **28*.** $(0;-64/9;-8/9)$. **29*.** $(2;-3;4)$. **30*.** $(1;20;-4)$, $(-3;-12;12)$. **31*.** $y - z = 4$ и $20x + 7y + z = 24$. **32*.** $4x - 5y + 5z = 17$. **33*.** $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-5}$. **34*.** $(5;-3)$. **35*.** $(-4;-11;4)$. **36.** $\sqrt{769/1808}$. **37.** $\arccos(4/13)$. **38.** $3:2$, считая от *B* и *D*. **39.** $4\sqrt{17}/7$. **40.** $\sqrt{32/5}$. **41.** $\sqrt{39/88}$. **42.** $\arccos(1/6)$; $a\sqrt{2/35}$ или $\arccos(2/3)$; $a/\sqrt{10}$. **43.** $\arccos\left(5/\sqrt{129}\right)$ или $\arccos\left(1/\sqrt{3}\right)$. **44.** $3\sqrt{17}/11$. **45.** 56. **46.** $84/37$. **47.** $a/4$ или $a/\sqrt{5}$. **48.** $n^2:1$, считая от A и D. **49.** $1:2$. **50.** $\sqrt{3}/6$.

Содержание

Учебное пособие

Воронин Владислав Владимирович

**Линейная аналитическая геометрия
для физматшколы**

Оригинал-макет подготовила Т. В. Иванова
Графические работы, набор формул А. Г. Иванов

Подписано в печать 10.08.2018 г.
Формат 60x84 1/16. Офсетная печать.
Уч. изд. л. 4,3. Тираж 100 экз.
Заказ № 22-18

Издательско-полиграфический центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова 2