Философские аспекты бесконечности[1]

УДК 125:510.22

Михеев Юрий Викторович
Учреждение Российской академии образования
«Институт педагогических исследований одаренности детей»
Россия, г. Новосибирск, ул. Приморская, д. 22, телефон: (383) 345-80-21
mikheevuv@ngs.ru

Настоящая статья посвящена обзору теории множеств, которая сформировалась как раздел математики сравнительно недавно, с указанием методологических особенностей, которые целесообразно учитывать в процессе преподавания. В связи с этим в статье приводятся широко известный парадокс Рассела, который позволяет продемонстрировать, что одного интуитивного восприятия множества недостаточно, чтобы создавать полноценные теории. Особое внимание уделено понятию мощности множества, благодаря которому удается представить читателям целый ряд непростых проблем в теории множеств, включая континуум-гипотезу и ее неожиданное разрешение, полученное П. Коэном в начале 60-х годов XX века.

Ключевые слова: множество, бесконечность, мощность множества, парадокс, континуум-гипотеза.

1. Конечен или бесконечен наш мир?

Текущая жизнь конкретного человека в значительной степени связана с удовлетворением своих материальных и интеллектуальных потребностей. и, вообще говоря, масштабы этой деятельности весьма ограничены. За всю свою жизнь человек вряд ли способен употребить в пищу и выпить более 1000 тонн продуктов и воды, пройти пешком более миллиона километров, не может произнести более миллиарда слов. Ученые, занимающиеся законами устройства нашего мира, оперируют величинами также в ограниченных пределах. Несмотря на появление в настоящее время огромной базы информации, доступной через Интернет, возможности каждого человека таковы, что даже тысячную долю этой информации он не сможет просмотреть за всю свою жизнь.

Таким образом, потребности абсолютного большинства людей относительно невелики. Однако, присущая человеческому сообществу категория сознания привела к тому, что за время эволюции постепенно вырабатывались не материальные абстрактные понятия, посредством которых удавалось производить сравнение величин или объектов с помощью слов или символов, не имея самих объектов перед собой. Скорее всего, именно по этим причинам сформировалось и развивалось понятие числа, а также понятие множества. При этом, одной из важных особенностей абстрактных понятий является то, что умозаключения относительно них возможно выражать словами, причем каждое конкретное суждение представляется в виде одной или нескольких фраз, состоящих из конечного числа слов. И в этом состоит объективная реальность, так как если представить, например, компьютер, работающий с огромной скоростью и выводящий на экран буквы, и который может работать «вечно», то все равно конкретный человек этого увидеть не сможет.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что наш реальный мир вполне обозрим, и по этой причине может показаться удивительным, что на фоне конечности можно вводить абстрактные понятия, не подчиняющиеся законам конечности. Такая особенность проявилась уже тысячелетия назад. Было отмечено, что за каждым натуральным числом стоит еще какое-то натуральное число. А именно, если к имеющемуся натуральному числу прибавить

---

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант №08-06-00161а

единицу, то получаем новое натуральное число. Но отсюда следует, что мы не в состоянии «увидеть» все натуральные числа одновременно, то есть натуральных чисел больше, чем любое наперед взятое натуральное число, а это в определенном смысле и означает, что множество всех натуральных чисел бесконечно. В таком восприятии понятие бесконечности известно уже давно, и некоторые из особенностей бесконечных множеств были установлены несколько тысячелетий тому назад. Например, со времен Архимеда известно, что множество всех простых чисел бесконечно.

В процессе преподавания важно особо выделять тот факт, что понятие бесконечности существует не как какой-нибудь реальный объект, а является абстрактным продуктом человеческого мышления. По этой причине все особенности бесконечности также формируются самим человеком.

2. Наивное понятие множества

Помимо чисел, в математике постепенно формировалось и общее понятие множества. До сравнительно недавних времен это понятие в основном применялось на интуитивном уровне, и под множеством понималась совокупность (набор, коллекция) предметов, объединенная в единое целое по некоторым вполне конкретным признакам. Такой подход позволял достаточно естественно говорить об объединении, пересечении множеств, о подмножествах заданного множества, и т.д. Употребление такого языка позволяло упрощать многие рассуждения и иногда производить некоторые обобщения. Благодаря этому в математике удавалось накапливать новые знания как относительно ранее введенных понятий, так и относительно вновь возникающих понятий.

3. Открытие Георга Кантора

По мере развития математики к употреблению множеств стали предъявляться новые требования. В связи с этим возникла необходимость в переосмыслении понятия множества. И в этом направлении революционный шаг бы сделан в конце XIX века Георгом Кантором. Главная суть его открытий заключается в том, что ему удалось установить очень естественный способ сравнения множеств по величине. Если предполагать, что требуется сравнить два конечных множества с относительно небольшим числом элементов, то при наличии понятия числа не обязательно иметь эти множества в их реальном виде (как набор объектов). Для сравнения достаточно знать число элементов в первом множестве, число элементов во втором множестве, после чего сравнить эти числа. Однако, ситуация резко изменяется, если множества бесконечны и каждое содержит огромное неизвестное число элементов. В этом случае Кантор установил, что достаточно каждому элементу первого множества сопоставлять элемент второго множества, и этот процесс продолжать дальше для остающихся элементов. В итоге либо удастся перебрать все элементы первого множества, и при этом во втором множестве останутся какие-то элементы, либо одновременно будут перебраны элементы обеих множеств, либо в первом множестве остаются какие-то элементы, но во втором множестве элементов уже нет.

Образно этот процесс часто представляют в следующей форме. Допустим, что в танцевальном зале собрались мужчины и женщины. Когда начинается танец, каждый мужчина старается пригласить одну из женщин. Тогда если все танцуют, то мужчин и женщин по равному количеству.

Оказалось, что этот принцип сравнения множеств естественным образом переносится и на бесконечные множества. Однако в этом случае окончательный результат выглядит существенно сложнее. А именно, при образовании пар элементов из двух заданных множеств помимо перечисленных выше возможностей возникает и еще одна возможность, когда при одном способе составления пар элементов при исчерпывании всех элементов первого множества во втором остаются какие-то элементы, но при другом способе составления пар элементов этих же множеств при исчерпывании всех элементов второго множества в первом из них остаются элементы. Такая особенность является основной, которая отличает конечное от бесконечного. Указанный способ сравнения множеств позволяет ввести два новых понятия.

1. Говорят, что между двумя множествами A и B установлено взаимно-однозначное соответствие, если есть множество упорядоченных пар (a, b), в которых все элементы первого множества по одному разу встречаются на первом месте и все элементы второго множества по одному разу встречаются на втором месте.

2. Два множества A и B называются равномощными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Например, если множество A состоит из всех четных натуральных чисел, а множество B – из всех нечетных натуральных чисел, то множество пар (2;1), (4;3), (6;5), (8;7), и т.д. устанавливает взаимно-однозначное соответствие межу множествами A и B. Поэтому указанные множества равномощны.

Для множеств отношение равномощности очень сходно с отношением эквивалентности или, как иногда говорят, сходно с отношением равенства в смысле количества элементов. Такое отношение порождает «разбиение» всех множеств на группы равномощных между собой множеств, а то общее, что присуще множествам из одной группы, позволяет называть мощностью.

При изучении множеств, и особенно в высшей школе, понятие равномощности двух множеств приобретает исключительно важное значение, так как элементы двух равномощных множеств в определенной степени становятся равноправными.

Дальнейшее изучение Кантором введенных понятий привело ко многим поразительным результатам. Прежде всего, множество всех натуральных чисел в математике можно считать одним из самых естественных бесконечных множеств. И если каким-нибудь образом отображать количество его элементов, то числа для этого не подходят, а поэтому приходится вводить новый термин, как это происходит в любой ситуации, когда возникает новый объект или новое понятие. В настоящее время общепринято называть словом «счетное» количество элементов множества натуральных чисел. В соответствии с предыдущими понятиями некоторое множество также называют счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел. Изучая свойства счетных множеств, Кантор установил, что каждое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно. Далее, если рассматривать операцию объединения множеств, то объединение счетного числа конечных или счетных множеств конечно или счетно. Основываясь на этих общих свойствах сразу же удалось установить, что множество всех дробей, а поэтому и множество всех рациональных чисел является счетным.

Внешне этот результат выглядит весьма неожиданно. А именно, если рассматривать изображение натуральных, целых и рациональных чисел на числовой прямой, то натуральные числа стоят очень разреженно, в некотором смысле далеко друг от друга. Однако рациональные числа располагаются на прямой очень плотно, потому что какие бы близко находящиеся рациональные числа мы ни взяли, между ними содержатся и другие рациональные числа. Например, если расстояние между изображениями чисел 0 и 1 равно десяти сантиметрам, то числа 0,12345678 и 0,12345679 стоят практически рядом, причем так, что зрительно их невозможно различить. Но в то же время число 0,123456785 должно стоять между указанными числами. Все это позволяет сформировать мнение, что рациональных чисел «гораздо больше», чем натуральных чисел, и в этом смысле результат Кантора выглядит очень неожиданно. Однако этим дело не ограничилось. Удалось найти и доказать очередное общее свойство: «Множество всех подмножеств имеет мощность большую, чем мощность самого множества».

Для доказательства был придуман способ, который известен как диагональный метод Кантора. Суть этого метода проще всего проиллюстрировать на доказательстве следующего утверждения: «Множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц имеет мощность большую, чем мощность счетного множества».

Прежде всего отметим, что при доказательстве равномощности двух множеств достаточно предъявить способ установления взаимно-однозначного соответствия между ними, и чаще всего такое соответствие удается привести. Однако, когда требуется доказать, что взаимно-однозначного соответствия не существует, то возможность перебора всех мыслимых попыток установления взаимно-однозначного соответствия в случае бесконечных множеств в принципе невозможно представить. Поэтому в математике был придуман метод доказательства «от противного», основанный на предположении верности противоположного заключения, а после этого приведения к противоречию. В соответствии с этим предполагаем, что множество последовательностей $a_n = (a_{n,k})$, где $a_{n,k}$ равно либо 0, либо 1, при $k = 1, 2, 3, ...,\ n = 1, 2, 3, ...$ – это множество всех мыслимых последовательностей из нулей и единиц, то есть числу 1 сопоставляется последовательность a_1, числу 2 сопоставляется последовательность a_2, числу 3 сопоставляется последовательность a_3, и т.д. Образуем последовательность $b = (b_n)$, где $b_n = 1 - a_{n,n}$ при $n = 1, 2, 3, ...$ Тогда, прежде всего, каждый член этой последовательности равен либо нулю, когда $a_{n,n} = 1$, либо единице, когда $a_{n,n} = 0$. Далее, последовательность b не совпадает с последовательностью a_1, потому что у них на первом месте стоят разные числа; не совпадает с последовательностью a_2, потому что у них на втором месте стоят разные числа; не совпадает с последовательностью a_3, потому что у них на третьем месте стоят разные числа, и т.д. Следовательно, последовательности b нет среди записанных последовательностей a_n, но мы предполагали, что записаны все нужные последовательности. В результате, сделанное предположение привело к противоречию, а это означает, что истинно утверждение сформулированной теоремы.

Результат данной теоремы позволяет в процессе преподавания обратить внимание на огромный потенциал, которым обладает абстрактное понятие множества. А именно, переходя от конечных множеств к счетным множествам, мы приобретаем новые качества, которые, в частности присущи множествам всех целых или рациональных чисел; переходя к множеству всех подмножеств бесконечно счетного множества, мы приобретаем новые качества, которые, в частности, присущи множествам всех действительных или комплексных чисел; и в принципе этот процесс теоретически может быть продолжен.

4. Парадокс Рассела

Натуральные, рациональные и действительные числа в значительной степени знакомы многим людям. Тем не менее, приведенные в предыдущем разделе результаты и относящиеся в основном к известным объектам, резко отличаются от привычных конкретных представлений, основанных на восприятии окружающего мира с помощью органов чувств. И в этом смысле данные результаты являются продуктом абстрактного мышления, что по философским мировоззрениям присуще только человеческому сознанию. Более того, все эти рассуждения основаны на логике Сократа, Аристотеля, а поэтому обязаны приниматься и принимаются как истинные. Но параллельно с появлением трудов Кантора обнаружились парадоксальные эффекты, связанные с внешне очень простым и наглядным наивным понятием множества. Одним из таких результатов является широко известный парадокс Бертрана Рассела.

Имея термин «множество», можно использовать его в разных ситуациях. В частности, внешне ничему не противоречит рассмотреть «множество Ф всех множеств». Тогда Ф должно содержать себя в качестве элемента, потому что мы считаем Ф множеством. В результате появляется множество, которое содержит себя в качестве элемента. Следовательно, бывают множества, которые содержат себя в качестве элемента, и бывают множества, которые не содержат себя в качестве элемента (например, к последнему виду относится каждое конечное множество).

Таким образом, одним из подмножеств множества Ф должно быть множество Н всех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента. Если предположить, что множество Н не содержит себя в качестве элемента, то, по определению множества Н, оно обязано быть элементом множества Н. Если предположить, что множество Н содержит себя в качестве элемента, то, по определению множества Н, оно не может быть элементом множества Н. В результате из приведенных рассуждений следует, что одновременно множество Н должно содержать себя в качестве элемента и не может содержать себя в качестве элемента, а это противоречит принятым наивным представлениям о множествах в том, что для конкретного множества и для любого мыслимого элемента можно однозначно определить, принадлежит ли этот элемент множеству, или нет. В этом и состоит парадокс Рассела.

«Парадоксы в математике отразили чрезвычайно любопытную ситуацию: обыденный рассудок не сомневается в существовании реального мира как всеобъемлющей совокупности всех совокупностей самых различных объектов, но оказывается даже в логике и математических построениях такая конструкция едва ли возможна. Парадоксы математической логики и теории множеств приводят к осознании противоречивого характера логико-математических и семантических конструкций, моделирующих всеобщее и воспроизводящих существенную для него самоопределимость и самоотносимость. В парадоксах речь идет о некоторой специфической форме проявления в основаниях математики диалектической противоречивости всеобщего. Расселовский парадокс демонстрирует неуниверсальность понятия множества (многого) и его непригодность для исчерпывающего описания реальности, всеобщего, без обращения к понятию единого. «Наивная» теория множеств оперирует с бесконечными множествами по существу так же, как и с конечными. Тесно связанная с формальной логикой, она отражает противоречивую действительность неполно, односторонне, а претендуя на всеобщность, неизбежно приходит к формально-логическим противоречиям» [1].

Таким образом, на этапе зарождения теории множеств сразу же проявились проблемы философского характера, так как причины, порождающие приведенный парадокс и аналогичные ему другие парадоксы, напрямую связаны с логикой мышления, то есть с той категорией, которая порождена человеческим разумом. Но отсюда следует, что тот же разум способен внести и некоторые изменения в логику мышления (в данном случае в логику математического мышления), так как наш реальный мир не может быть основан на парадоксах. С целью разрешения возникающих противоречий был поставлен естественный вопрос, каким образом ограничить класс множеств, мыслимых по Кантору, до такого класса объектов, в котором содержались бы все употребляемые в математике множества, и в принципе не возникало бы противоречий, аналогичных парадоксу Рассела. Поиск решения на этом пути был основан на аксиоматическом подходе.

В настоящее время элементы аксиоматического подхода стали неотъемлемой частью преподавания математики.

5. Аксиоматика Цермело-Френкеля теории множеств

Математика является одной из главных наук, в которой философские проблемы, связанные с логикой человеческих рассуждений, приобретают четкую и упорядоченную структуру. Одним из важных достижений математики конца XIX и начала XX века является осознание важности аксиоматического построения теорий и формализации правил логических выводов. В частности, при обнаружении парадоксов в наивной теории множеств Давидом Гильбертом и некоторыми другими математиками были предприняты попытки формализовать понятия и отношения, связанные с теорией множеств. Из них наибольшее развитие получила следующая система аксиом, известная как система теории множеств Цермело-Френкеля [2].

1. Два множества, имеющие одни и те же элементы, тождественны (равны).
2. Существует одно множество, не содержащее ни одного элемента.
3. Если существует один объект a, то существует множество (a), единственным элементом которого является этот объект; если существуют два объекта a, b, то существует множество (a, b), единственными элементами которого является эти объекты.
4. Если элементы множества сами являются множествами, то существует множество, образованное всеми элементами из содержащихся множеств.
5. Существует по крайней мере одно бесконечное множество.
6. Каждому множеству соответствует другое множество, образованное всеми его подмножествами.
7. Каждое множество либо пусто, либо имеет элемент такой, что любой элемент множества не принадлежит указанному элементу.

Первые шесть из этих аксиом естественны и соответствуют тем свойствам, которые используются в приложении множеств к математике. Седьмая, непростая по формулировке аксиома, отражает те требования к теории множеств, о которых говорилось выше.

Почти сразу же обнаружилось, что к этим аксиомам нужно добавить новые, и в начале 20-х годов предметом дискуссии математиков была следующая аксиома, которая известна как аксиома выбора.

8. Если имеется множество, все элементы которого являются множествами, то в каждом из этих множеств можно выбрать по элементу, и существует множество, состоящее из этих элементов.

Исследование теории множеств на основе приведенной системы аксиом порождает одну из фундаментальных проблем, относящихся к формализованным конструкциям, – проблема непротиворечивости. Однако вскоре выяснилось, что эта проблема нереализуема средствами формальной логики.

6. Континуум-гипотеза и дескриптивная теория множеств

В связи с открытиями Кантора сразу же возродился интерес к тому, каковы особенности известных числовых множеств. Для множеств натуральных, целых и рациональных чисел ответ можно сформулировать сразу, так как все эти множества счетны, а поэтому подмножества таких множеств либо конечны, либо счетны. По этой причине элементы каждого такого подмножества можно занумеровать либо конечной последовательностью натуральных чисел, либо всеми натуральными числами. Этот результат означает также, что мощность счетных множеств является наименьшей среди мощностей бесконечных множеств.

Очередным следствием теории Кантора является то, что множество P всех подмножеств множества натуральных чисел несчетно, а множество R равномощно множеству P. В связи с этим для мощности множества R появилось название «континуум», и естественным образом возник вопрос, существует ли подмножество множества R, мощность которого больше мощности счетного множества, но меньше континуума. Это и есть знаменитая континуум-гипотеза, которая заинтересовала многих математиков начала XX века.

Параллельно с открытием Кантора по отношению к бесконечным процессам было сделано еще одно важное открытие. В области интегрирования числовых функций, которое со времен Архимеда для простейших функций известно как метод исчерпывания, Анри Лебег предложил новый подход, значительно обобщающий известные на то время способы интегрирования. Одной из особенностей интеграла Лебега является то, что промежуток интегрирования разбивается не на отрезки, а на множества более сложной природы, так называемые измеримые множества, каждому из которых приписывается число, называемое мерой. Оказалось, что начиная с отрезков и интервалов числовой прямой с помощью операций объединения, пересечения и составления разности множеств, конструируются множества весьма сложной структуры, но каждое из них измеримо. Поэтому возник естественный вопрос, все ли подмножества отрезка числовой прямой измеримы. Ответ на этот вопрос также оказался неожиданным, а именно, неизмеримые множества существуют. Соответствующий пример неизмеримого множества был построен с помощью аксиомы выбора, поэтому представить его в какой-нибудь наглядной форме невозможно. С другой стороны, человеку в первую очередь присущ конструктивный образ действия, который приводит к некоторым обозримым результатам. В связи с этим возникла еще одна проблема, связанная с конструктивным примером неизмеримого множества. «Широко распространено мнение, что возникновение исследований абстрактных структур является отличительной чертой математики XX века. В этой связи возникают два рода вопросов: что такое структура с математической точки зрения, и каковы философские следствия этой концепции? Сразу надо отметить, что математики и философы в отношении концепции структуры имеют различные интересы. Философов интересует природа математических объектов, будь то классические объекты вроде множеств или же математические структуры. … Математика подобные онтологические вопросы не интересуют, поскольку он ограничивается изучением структур и останавливается при обнаружении изоморфизма структур» [4]. Скорее всего, именно из-за таких чисто философских отношений к математике конструктивный пример неизмеримого множества представлял бы особый интерес.

Начальный период решения этой проблемы и континуум-гипотезы исторически связан со знаменитой математической школой Н.Н. Лузина, который объединил вокруг себя ряд молодых и уже известных математиков в работах по дескриптивной теории множеств. Целью этих исследований было изучение подмножеств континуума. В течение нескольких десятилетий это направление было очень популярным, из школы Лузина вышло много известных математиков, в том числе А.Н. Колмогоров, П.С. Новиков, М.А. Лаврентьев, А.А. Ляпунов, и т.д. Перед математиками ставилось много трудных проблем, для их разрешения разрабатывались многие трудоемкие конструкции, и считается, что в этот период для решения проблемы континуума классическими методами было сделано практически все возможное. Однако, несмотря на большие внутренние достижения этого направления, главные результаты не получались.

7. Открытие П. Коэна

Решение континуум-гипотезы появилось в работах П. Коэна в начале 60-х годов XX века, и практически и в то же время аналогичные результаты были получены у П. Вопенка и С. Крипке [2]. К этому периоду произошло значительное продвижение в формальной математической логике, появились известные работы К. Геделя о неразрешимости арифметики, и многое другое. Суть теоремы о неразрешимости арифметики заключается в том, что в рамках аксиоматики натуральных чисел можно сформулировать утверждения, для которых невозможно доказать их истинность и невозможно доказать их ложность. Это означает, что присоединение к аксиоматике каждого такого утверждения приводит к непротиворечивой теории, где присоединенное утверждение является истинным. С помощью методов формальной логики П. Коэн установил, что в аксиоматике Цермело-Френкеля нельзя доказать, что всякое несчетное множество действительных чисел имеет мощность континуума. Отсюда следует, что принимая континуум-гипотезу в качестве аксиомы, мы получаем одну непротиворечивую теорию множеств, принимая отрицание континуум-гипотезы, получаем другую непротиворечивую теорию множеств.

Результат П. Коэна позволяет еще раз подчеркнуть, что абстрактное мышление является продуктом человеческого мышления, а управлять этим мышлением может также только человек.

Проблема, связанная с неизмеримыми множествами, выглядит совсем по-другому. Дело в том, что в рамках принятой аксиоматики эта проблема уже решена, но неэффективно. Этот существующий объект мы не можем ни «осмотреть», ни «ощупать руками», то есть представить в таком виде, в котором мы привыкли представлять многие аналогичные объекты. Более того, доказано существование многих других экзотических вещей. Одним из поразительных примеров является пример Тарского разбиения заданной сферы на конечное число подмножеств таких, что при их перемещении в пространстве составляются две точно такие же сферы. Сама конструкция также основана на аксиоме выбора, то есть неэффективна.

В направлении представить указанные конструкции каким-нибудь эффективным способом пока никаких ощутимых продвижений не найдено.

8. Заключение

Развитие науки, и в особенности в последнее столетие, показало, что человеческий мозг способен воссоздавать такие фантастические конструкции, которые с трудом доступны воображению. Из такого, казалось бы, совсем простого бытового представления бесконечности как чего-то неограниченного, выросла целая непростая математическая теория множеств. Однако при этом обнаружилось, что математика в своем развитии вышла по некоторым направлениям на такой уровень, где на первом плане возникают не столько технологические проблемы, сколько философские, связанные с сутью человеческого мышления. В связи с этим возникает вопрос, как математике развиваться дальше. Ответ на этот вопрос подсказывают общефилософские воззрения. А именно, критерием истины следует считать практику. Но в многовековой истории развития математики, опирающейся на принципы приведенной системы аксиом, не обнаружено противоречий. Поэтому непротиворечивость данной системы аксиом со стороны большинства математиков не подвергается сомнению. Можно продолжать дальше развивать математические теории и их достижения употреблять для дальнейшего усовершенствования условий существования человечества на планете Земля.

Литература

1. Колесников А. С. Философия Бертрана Рассела. – Ленинград: Издательство ЛГУ, 1991.
2. Ляпунов А. А. Вопросы теории множеств и теории функций. – М.: Наука, 1979.
3. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1990.
4. Целищев В. В. Онтология математики. Объекты и структуры. – Новосибирск: Издательство «Нонпарель», 2003.

Philosophical aspects of infinity

Mikheyev Yuri Viktorovich
The Institution of the Russian Academy of Education
"Institute of pedagogic investigations of gifted and talented"
Russia, Novosibirsk

This article focuses on the theory of sets which was established as a part of Mathematics not long ago. It reviews methodological specific features that should be advisably taken into account in the process of teaching. In this case, a well-known Russell paradox demonstrating insufficiency of intuitive perceptive of sets for creation of valuable theories is described. Special attention is given to concept of cardinal number. It allows presentation of a number of complicated issues in the theory of sets, including continuum hypothesis and its unexpected solution obtained by P. Cohen in the early 1960s.

Keywords: set, infinity, cardinal number, paradox, continuum hypothesis.