МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

Е. Н. Журавлева, Т. А. Панова, Т. В. Протопопова

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Задачи для классов с углубленным изучением математики

Методическое пособие

Новосибирск
2021

УДК 513(075.4)
ББК 22.15я7
Ж 91

Рецензент
ст. преподаватель *Е. В. Квон*

Журавлева, Е. Н.

Ж 91 Применение производной. Задачи для классов с углубленным изучением математики : метод. пособие / Е. Н. Журавлева, Т. А. Панова, Т. В. Протопопова ; СУНЦ НГУ. – Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2021. – 36 с.

ISBN 978-5-4437-1246-8

В пособии рассматриваются методы и подходы, применяемые при решении задач по теме «Применение производной». Материал пособия используется на семинарских занятиях по математике в физико-математических, инженерных и IT классах СУНЦ НГУ.

Пособие предназначено для учителей и учащихся старших классов с углубленным изучением математики.

УДК 53(075.8)
ББК 22.15я7

ISBN 978-5-4437-1246-8

1. Уравнение касательной

Задача 1.1. Найти уравнение общей касательной к параболам
$$y = x^2 - 2x + 5 \text{ и } y = x^2 + 2x - 11.$$

Решение. Пусть прямая $y = kx + b$ касается графика функции $y = x^2 - 2x + 5$ в некоторой точке с абсциссой x_1, тогда уравнение этой прямой имеет вид:
$$y = (x^2 - 2x + 5)'|_{x=x_1}(x - x_1) + x_1^2 - 2x_1 + 5.$$
Отсюда $k = 2x_1 - 2$, $b = 5 - x_1^2$. С другой стороны, эта же прямая $y = kx + b$ касается графика функции $y = x^2 + 2x - 11$ в некоторой точке с абсциссой x_2, значит, ее уравнение имеет вид:
$$y = (x^2 + 2x - 11)'|_{x=x_2}(x - x_2) + x_2^2 + 2x_2 - 11.$$
Отсюда $k = 2x_2 + 2$, $b = -11 - x_2^2$. Приравнивая значения k и b, получаем систему:
$$\begin{cases} 2x_1 - 2 = 2x_2 + 2, \\ 5 - x_1^2 = -11 - x_2^2, \end{cases}$$
решая которую, находим $x_1 = 5$, $x_2 = 3$. Следовательно, $k = 8$, $b = -20$, и уравнение общей касательной имеет вид $y = 8x - 20$.

Ответ: $y = 8x - 20$.

Задача 1.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$, касающейся параболы $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ и пересекающей график функции $y = \sqrt{4 - x^2}$:

а) в одной точке;

б) в двух точках.

Решение. Уравнение прямой, касающейся параболы $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ в точке с абсциссой x_0, имеет вид: $y = -x_0\left(x - x_0\right) + 2 - \dfrac{x_0^2}{2}$.

Точка $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ не принадлежит параболе, т. е. она не является точкой касания с абсциссой x_0, но она принадлежит касательной, а значит, ее координаты удовлетворяют уравнению касательной:
$$2 = -x_0\left(\frac{1}{2} - x_0\right) + 2 - \frac{x_0^2}{2}.$$

Решая полученное уравнение, получаем два корня $x_{01} = 0$ и $x_{02} = 1$. Следовательно, существует две касательных к параболе, проходящих через точку $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ (для наглядности см. рис. 1). Одна из них имеет уравнение $y = 2$, а другая $y = -x + \frac{5}{2}$. Выясним взаимное расположение графика функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ и этих прямых, для этого решим следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -x + \frac{5}{2} \\ y = \sqrt{4 - x^2}. \end{cases}$$

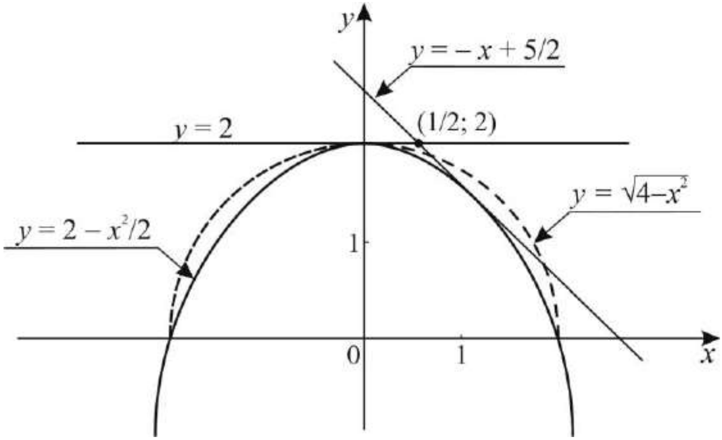

Рис. 1

Первая система, очевидно, имеет единственное решение $(0, 2)$, т. е. прямая $y = 2$ касается графика функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ в одной точке. Вторая система имеет два решения:

$$\begin{cases} \sqrt{4 - x^2} = -x + \frac{5}{2}, \\ y = -x + \frac{5}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = \left(-x + \frac{5}{2}\right)^2, \\ -x + \frac{5}{2} \geq 0, \\ y = -x + \frac{5}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 20x + 9 = 0, \\ x \le \dfrac{5}{2}, \\ y = -x + \dfrac{5}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{5}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{5+\sqrt{7}}{4}, \\ x_2 = \dfrac{5-\sqrt{7}}{4}, \end{array} \right. \\ y = -x + \dfrac{5}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+\sqrt{7}}{4}, \\ y_1 = \dfrac{5-\sqrt{7}}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = \dfrac{5-\sqrt{7}}{4}, \\ y_2 = \dfrac{5+\sqrt{7}}{4}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Следовательно, прямая $y = -x + \frac{5}{2}$ имеет две точки пересечения с графиком функции $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Ответ: а) $y = 2$, б) $y = -x + \frac{5}{2}$.

Задача 1.3. К параболе $y = \frac{1}{2} x^2 + x + 1$ проведены касательные в ее вершине и в двух точках, лежащих симметрично по разные стороны от вершины. Треугольник с вершинами в точках пересечения этих касательных является правильным. Найти площадь этого треугольника.

Решение. Расчеты, сопутствующие стандартному способу решения, не сложны, но громоздки. Решение значительно упрощается, если систему координат перенести в вершину параболы (рис. 2). На рис. 2 пунктиром изображена исходная система координат.

Преобразуем уравнение параболы, выделив в нем полный квадрат, получим: $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$. Понятно, что если сдвинуть систему координат на вектор $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, т. е. на 1 влево и на $1/2$ вверх, то в новой системе координат уравнение параболы примет вид $y = \frac{1}{2} x^2$. Касательная в вершине, в этом случае, совпадает с осью *Ox*. Так как треугольник, образованный касательными, правильный, значит, углы наклона двух других касательных к оси *Ox* будут составлять 60° и 120°. Следовательно, $y'(x_0) = \left(\frac{1}{2} x^2\right)'\Big|_{x=x_0} = x_0 = \pm\sqrt{3}$.

Используя общий вид уравнения касательной

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0),$$

запишем уравнения двух симметричных касательных:

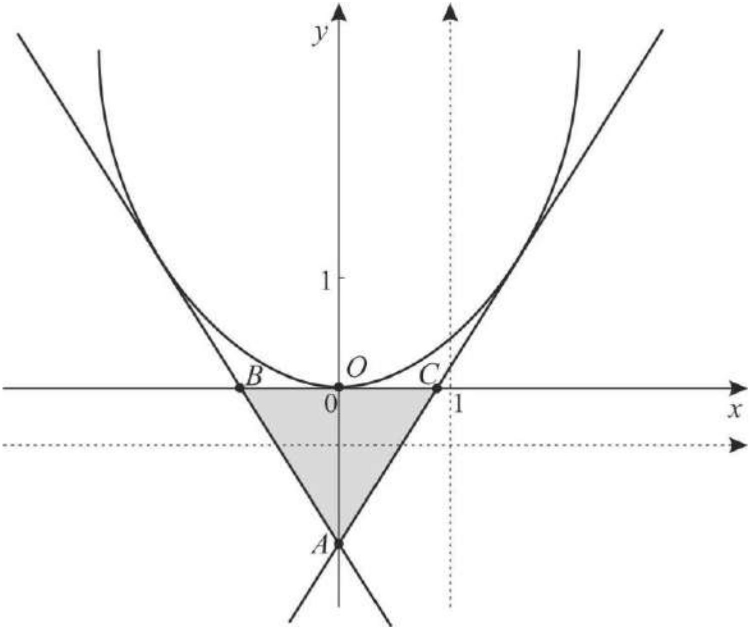

Рис. 2

$y = \sqrt{3}\left(x - \sqrt{3}\right) + \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{3}\ x - \frac{3}{2}$ (уравнение «правой» касательной);

$y = -\sqrt{3}\left(x + \sqrt{3}\right) + \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y = -\sqrt{3}\ x - \frac{3}{2}$ (уравнение «левой» касательной).

Эти две касательные пересекаются в точке $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$. Так как третья касательная совпадает с осью абсцисс, то высота в треугольнике, образованном касательными, равна $\frac{3}{2}$. Зная высоту в правильном треугольнике, легко найти его площадь:

$$S = \frac{1}{2}\ a\ h = \frac{1}{2}\ \frac{2h}{\sqrt{3}}\ h = \frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$.

Задача 1.4. К параболе $y = \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{5}{2}$ в двух ее точках проведены касательные, пересекающиеся в точке A и пересекающие ось абсцисс в точках B и C. Треугольник ABC равнобедренный, с углом при вершине B равным $\frac{2\,\pi}{3}$. Найти площадь этого треугольника.

Решение. Если угол при вершине равнобедренного треугольника равен $\frac{2\pi}{3}$, то угол при основании равен $\frac{\pi}{6}$. Значит, одна из касательных имеет угол наклона к оси абсцисс $\frac{2\pi}{3}$, а другая – $\frac{5\pi}{6}$ (рис. 3).

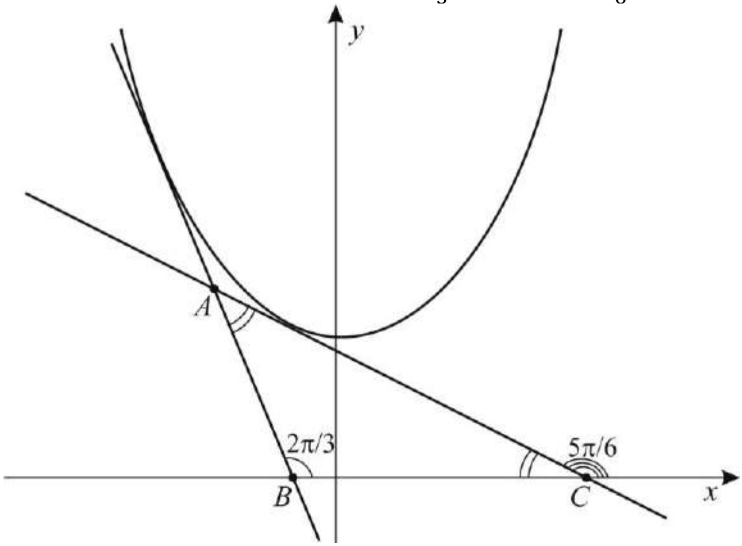

Рис. 3

Составим уравнения касательных. Для углового коэффициента первой касательной имеем:

$y'(x_1)=\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)'\Big|_{x=x_1}=x_1=\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$. Следовательно, $x_1=-\sqrt{3}$. Вычисляем значение функции в этой точке $y(x_1)=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\right)^2+\frac{5}{2}=4$. Значит, уравнение первой касательной имеет вид: $y=-\sqrt{3}\,x+1$.

Аналогично, для второй касательной: $y'(x_2)=\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)'\Big|_{x=x_2}=x_2=$ $=\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y(x_2)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{5}{2}=\frac{8}{3}$. Получаем уравнение второй касательной: $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{7}{3}$.

Теперь можем найти координаты точек пересечения касательных с осью абсцисс: $B\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ 0\right)$, $C\left(\frac{7}{\sqrt{3}};\ 0\right)$. Заметим, что в действительности точка B расположена на оси Ox справа от нуля. Следовательно, боковая сторона *BC* равнобедренного треугольника *ABC* равна $\frac{6}{\sqrt{3}}$. Площадь треугольника *ABC* находим по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\, AB \;\cdot BC\; \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{36}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Задача 1.5. Найти координаты точки, симметричной вершине параболы $y = x^2 + x + 2$ относительно касательной к этой параболе, которая параллельна прямой $x + y = 2$.

Решение. Координаты вершины параболы *A*(–1/2; 7/4). Найти эти координаты можно по известным формулам или записав уравнение параболы в виде $y = x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$.

Уравнение касательной к данной параболе в некоторой точке x_0 имеет вид

$$y = (x^2 + x + 2)'|_{x=x_0}(x - x_0) + x_0^2 + x_0 + 2.$$

Так как касательная параллельна прямой $x + y = 2$ ($y = -x + 2$), то угловой коэффициент касательной равен –1. Из уравнения $\left(x^2 + x + 2\right)'|_{x=x_0} = 2x_0 + 1 = -1$ находим абсциссу точки касания $x_0 = -1$ и уравнение касательной $y = -x + 1$.

Чтобы найти точку *B* симметричную *A*(–1/2; 7/4) относительно касательной, воспроизведем известный алгоритм. Эта точка находится на прямой *l*, перпендикулярной касательной и проходящей через точку *A*, при этом, если *M* – точка пересечения прямой *l* и касательной, то *BM*=*AM* (рис. 4). Общий вид прямой *l*: $y = kx + b$. Коэффициент *k* = 1. Это значение можно определить из геометрических рассуждений или из известной формулы: $k_1 k_2 = -1$, где k_1, k_2 – угловые коэффициенты перпендикулярных прямых. Коэффициент *b* = 9/4 находим из условия $A \in l$. Таким образом, уравнение прямой *l* имеет вид: $y = x + 9/4$. Находим точку пересечения *l* и касательной: *M*(–5/8; 13/8). Так как *M* – середина отрезка *AB*, то можем найти координаты точки $B(b_1;\, b_2)$ из условий $\dfrac{-1/2+b_1}{2}=-\dfrac{5}{8}$, $\dfrac{7/4+b_2}{2}=\dfrac{13}{8}$. В итоге, $B\left(-\dfrac{3}{4};\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{2}\right)$.

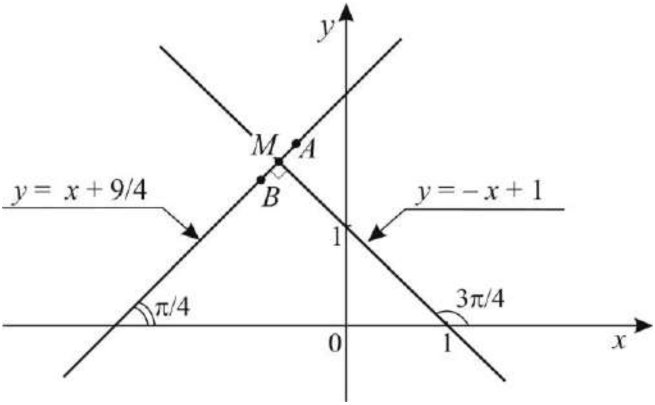

Рис. 4

2. Применение производной к решению задач, связанных с исследованием функций

Задача 2.1. Доказать, что при $x \in (0; \pi/2)$ справедливо неравенство:

$$\frac{3x}{\sin x} > 4 - \cos x. \qquad (1)$$

Решение. Заметим, что $\sin x > 0$ на интервале $(0, \pi/2)$. Поэтому от неравенства (1) перейдем к равносильному неравенству:

$$3x > 4\sin x - \cos x \cdot \sin x.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 3x - \sin x(4 - \cos x)$. Мы докажем неравенство (1), если покажем, что $f(x) > 0$ на интервале $(0, \pi/2)$. Вычислим производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = 3 - \cos x(4 - \cos x) - \sin x(0 + \sin x) = \ldots = 2(\cos x - 1)^2.$$

На интервале $(0, \pi/2)$ $f'(x) > 0$, т. е. функция $f(x)$ возрастает на этом интервале. Так как $f(0) = 0$ и $f(x)$ непрерывна для всех действительных x, то для $x \in (0, \pi/2)$ $f(x) > 0$.

Задача 2.2. Доказать, что при $x \in [0, \pi/2)$ справедливо неравенство:

$$\operatorname{tg} x \geq x + \frac{x^3}{3}. \qquad (2)$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}$. Мы докажем неравенство (2), если покажем, что $f(x) \geq 0$ на интервале $[0, \pi/2)$. Вычислим производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x - 1 - x^2 = \operatorname{tg}^2 x - x^2 =$$
$$= (\operatorname{tg} x - x)(\operatorname{tg} x + x).$$

На интервале $[0, \pi/2)$ вторая скобка в полученном выражении неотрицательна в силу не отрицательности каждого слагаемого суммы, а первая скобка – в силу известного неравенства

$\forall\ 0 \le t < \pi/2\ \ t \le \operatorname{tg} t$. Доказательство последнего неравенства легко следует из геометрического анализа рис. 5: площадь сектора P_tOP_0 равна $\left(\pi r^2\right) \cdot t / \left(2\pi r\right) = t/2$, площадь треугольника TOP_0 равна $\left(1 \cdot \operatorname{tg} t\right)/2$, площадь сектора меньше площади треугольника. Таким образом, на рассматриваемом интервале производная функции неотрицательна, значит $f\left(x\right)$ не убывающая и $f\left(x\right) \ge f\left(0\right) = 0$.

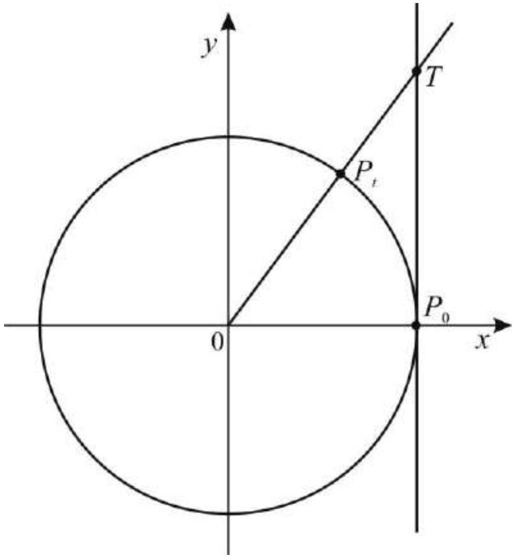

Рис. 5

Задача 2.3. Доказать, что для любых действительных чисел α, β, γ, заключенных между 0 и π, выполнено неравенство

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}. \qquad (3)$$

Решение. Пусть $\alpha \le \beta \le \gamma$, т. е. $0 \le \alpha \le \beta \le \gamma \le \pi$. Рассмотрим разность правой и левой частей неравенства (3), как функцию от γ: $f\left(\gamma\right) = 3\sin\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} - \left(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma\right)$. Найдем производную этой функции: $f'\left(\gamma\right) = \cos\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} - \cos\gamma$. Так как $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \le \gamma$ и функция косинус является убывающей на $\left[0, \pi\right]$, то $f'\left(\gamma\right) \ge 0$. Получаем, что $f(\gamma)$ возрастает на $[0, \pi]$ и, если неравенство (3) справедливо для $\gamma = \beta$, т. е.

$$3\sin\frac{\alpha+2\beta}{3} - (\sin\alpha + 2\sin\beta) \ge 0\,, \qquad (4)$$

то оно будет справедливо и для $\gamma > \beta$.

Для доказательства неравенства (4) рассмотрим функцию $\varphi(\beta) = 3\sin\frac{\alpha+2\beta}{3} - (\sin\alpha + 2\sin\beta)$, где α – фиксировано.

Производная функции $\varphi(\beta)$ есть $\varphi'(\beta) = 2\cos\frac{\alpha+2\beta}{3} - 2\cos\beta$.

В силу неравенства $0 \le \frac{\alpha+2\beta}{3} \le \beta \le \pi$ и убывания косинуса на $[0, \pi]$ имеем: $\varphi'(\beta) \ge 0$, т. е. функция $\varphi(\beta)$ неубывающая. Значит, если $\varphi(\alpha) \ge 0$, то и $\varphi(\beta) \ge 0$, и неравенство (4) доказано. Для $\beta = \alpha$ имеем $\varphi(\alpha) = 3\sin\alpha - 3\sin\alpha = 0$, что и требовалось для доказательства неравенства (4) и, как следствие, неравенства (3).

Задача 2.4. Докажите тождество $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$.

Решение. Воспользуемся следствием теоремы Лагранжа: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют одинаковые производные внутри этого отрезка, то они отличаются лишь на константу. Пусть $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Найдем производные:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' =$$

$$= \frac{1-x^2}{1-x^2+x^2} \cdot \frac{1\cdot\sqrt{1-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Производные функций на интервале $-1 < x < 1$ совпадают, а так как $f(0) = g(0) = 0$, то по следствию теоремы Лагранжа функции тоже совпадают на интервале $-1 < x < 1$.

Задача 2.5. В каких системах логарифмов существуют числа, равные своему логарифму?

Решение. Пусть *y* – основание искомой системы, тогда надо найти такие *y*, что существуют *x* такие, что

$$\log_y x = x. \tag{5}$$

Из смысла задачи возникают ограничения на *x* и *y*: $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$. Запишем выражение (5) в удобной для исследования форме:

$$y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}, \; x > 0, \; y > 0, y \neq 1. \tag{6}$$

Задачу теперь можно сформулировать следующим образом: найти область значений функции (6). С помощью производной исследуем функцию на наибольшее / наименьшее значение, найдем промежутки возрастания / убывания функции. Так как

$$y' = x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}(1 - \ln x),$$

то $y' > 0$, если $0 < x < e$, и $y' < 0$, если $x > e$. Таким образом, при $x = e$ функция достигает своего наибольшего значения $y(e) = e^{\frac{1}{e}} \approx 1{,}445$, возрастает на $(0, e]$, убывает на $[e, +\infty)$. Заметим, что

$$\lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\ln x} = 0, \; \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{x}\ln x} = 1, \text{ кроме того } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}}{x} = 0,$$

а $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = 1$. Два последних предела являются следствиями $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0,$ который может быть вычислен, например, по правилу Лопиталя. Таким образом, при $x \to +\infty$ график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$. Область значений функции $y \in \left(0, e^{\frac{1}{e}}\right]$, $y \neq 1$. Эскиз графика функции (6) представлен на рис. 6.

Таким образом, для всех оснований $y \in \left(0, e^{\frac{1}{e}}\right]$, $y \neq 1$ существуют числа, равные своему логарифму.

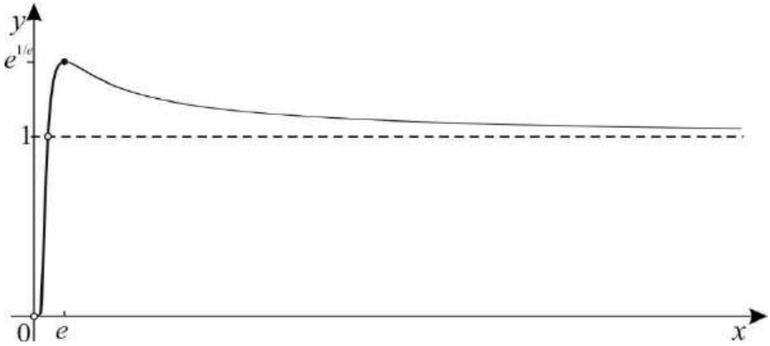

Рис. 6

Ответ: $y \in \left(0, e^{\frac{1}{e}}\right]$, $y \neq 1$.

Задача 2.6. При каких значениях параметра $a \geq 0$, уравнение $4x^2 - a^2 \ln x + 2ax + a^2 = 0$ имеет не более одного корня?

Решение. Область определения уравнения задаётся неравенством $x > 0$.

1. При $a = 0$ уравнение принимает вид $4x^2 = 0$, т. е. $x = 0$, что не удовлетворяет вышеприведенному неравенству. Значит, уравнение не имеет решений, и $a = 0$ можем записать в ответ.

2. При $a > 0$ рассмотрим функцию $f(x) = 4x^2 - a^2 \ln x + 2ax + a^2$,

$$f'(x) = 8x - \frac{a^2}{x} + 2a = \frac{8x^2 + 2ax - a^2}{x} = \frac{8\left(x + \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{4}\right)}{x}.$$

Очевидно, знак производной зависит от знака множителя $x - \frac{a}{4}$ (остальные множители положительны). Исследуя производную функции на знак, получаем (рис. 7):

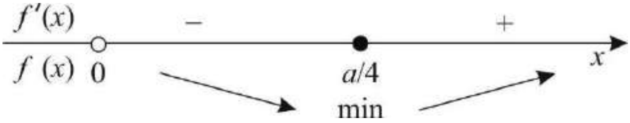

Рис. 7

при $x \in (0; a/4)$, $f'(x) < 0$, т. е $f(x)$ строго убывает,

при $x \in (a/4; +\infty)$, $f'(x) > 0$, т. е. $f(x)$ строго возрастает, а при $x = a/4$ достигает наименьшего значения на всей своей области определения.

Так как $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, то при $f(a/4) < 0$ уравнение будет иметь два корня (две точки пересечения с осью *Ox*), а при $f(a/4) \geq 0$ исходное уравнение или вовсе не имеет корней ($f(a/4) > 0$), или имеет один корень $x = a/4$ ($f(a/4) = 0$). Так как $f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a^2}{4} - a^2 \ln\frac{a}{4} + \frac{a^2}{2} + a^2 = a^2\left(\frac{7}{4} - \ln\frac{a}{4}\right)$, то искомые значения будут определяться неравенством $a^2\left(\frac{7}{4} - \ln\frac{a}{4}\right) \geq 0$. Отсюда, учитывая, что $a > 0$, получаем $0 < a \leq 4e^{\frac{7}{4}}$.

Ответ: $0 \leq a \leq 4e^{\frac{7}{4}}$.

Задача 2.7. Определить, при каких значениях параметра *a*, уравнение $\log_{x+1}\left(x^2 - ax\right) = 1$ имеет единственное решение.

Решение. Уравнение $\log_{x+1}\left(x^2 - ax\right) = 1$ эквивалентно системе:

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1, \\ x^2 - ax > 0, \\ x + 1 = x^2 - ax; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x > -1, \\ x + 1 = x^2 - ax. \end{cases}$$

Выразим из уравнения системы параметр a, как функцию от x: $a(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x} = x - 1 - \frac{1}{x}$. Построим схематически график функции

$a(x)$. Легко видеть, что функция имеет две асимптоты: $x=0$ и $a=x-1$. Нули функции $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Так как

$$a'(x)=\frac{(2x-1)x-(x^2-x-1)}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}>0,$$

то функция монотонно возрастает на промежутках непрерывности (рис. 8). Мы должны найти такие значения, при которых уравнение

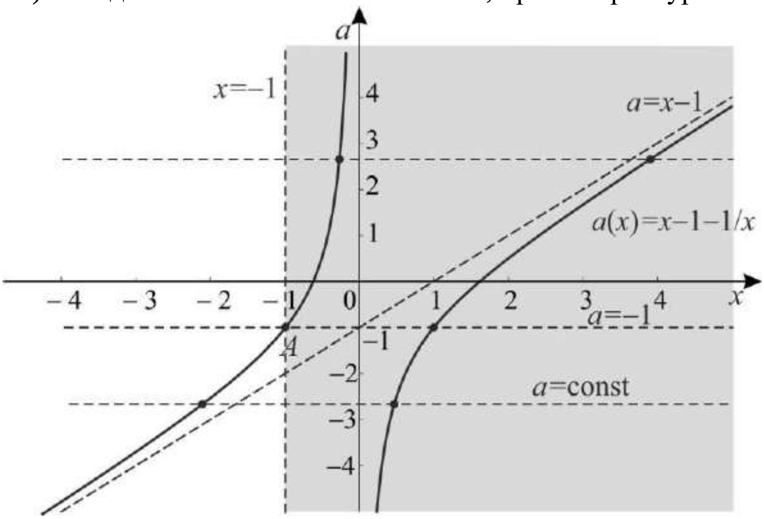

Рис. 8

$a(x)=a=\text{const}$ имеет один корень больший, чем –1 (область $x>-1$, на рис. 8). С учетом того, что $a(-1)=-1$ (точка *A*), из анализа функции понимаем, что при $a\le-1$ имеется два корня уравнения $a(x)=a=\text{const}$, из которых один меньше или равен –1, а второй больше –1; если же $a>-1$, то оба корня будут больше –1. Следовательно, условию задачи удовлетворяют $a\le-1$.

Ответ: $a\le-1$.

Задача 2.8. Определить все значения параметра *a*, при которых уравнение $ax^2-4x+3a-11=0$ имеет два различных корня, каждый из которых меньше 2.

Решение. Решим задачу с применением производной. Выразим a как функцию от x: $a(x)=\dfrac{4x+11}{x^2+3}$. Построим схематически график этой функции. Найдем производную:

$$a'(x)=\frac{4\left(x^2+3\right)-2x(4x+11)}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{-4x^2-22x+12}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{-4(x+6)(x-1/2)}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

Из представления производной видим, что при $x\in(-\infty;-6]\cup[1/2;+\infty)$ функция убывает, при $x\in[-6;1/2]$ – возрастает. Точка $x=-6$ – точка минимума функции, $a(-6)=-1/3$, а точка $x=1/2$ – точка максимума функции, $a(1/2)=4$. На рис. 9 изображены интервалы знакопостоянства производной.

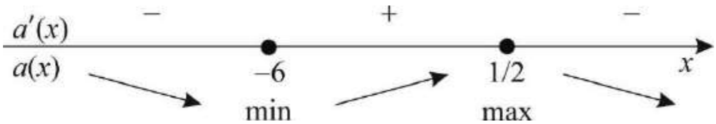

Рис. 9

Заметим, что функция имеет асимптоту $a=0$, при $x\to\pm\infty$. Эскиз графика функции представлен на рис. 10. Осталось определить те значения a, при которых уравнение $a(x)=a=\text{const}$ имеет ровно два корня меньших 2. Из анализа функции имеем: при $-\infty<a<-1/3$ функция не имеет точек пересечения с прямыми $a=\text{const}$, $a=-1/3$ – одна точка (касание в точке минимума), $-1/3<a<0$ – две точки пересечения (абсциссы отрицательны), $a=0$ – одна точка пересечения (нуль функции $x=-11/4$), $0<a<4$ – две точки пересечения, $a=4$ – одна точка (касание в точке максимума), $a>4$ – нет точек пересечения. Изобразим на рисунке прямую $x=2$, нас интересует область $x<2$. Так как $a(2)=19/7$ то при $x<2$ прямая $a=\text{const}$ имеет ровно две точки пересечения с графиком функции, если $a\in(-1/3;0)\cup(19/7;4)$.

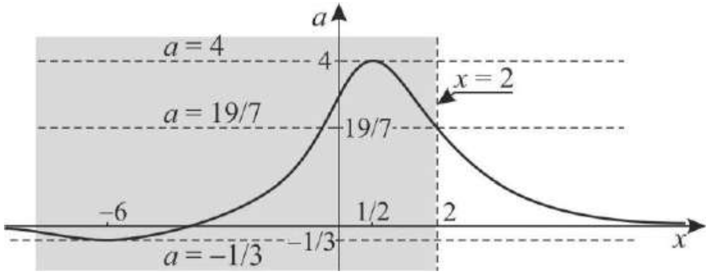

Рис. 10

Ответ: $a \in (-1/3; 0) \cup (19/7; 4)$.

Задача 2.9. Найдите все значения a, при которых уравнение $\dfrac{4^{-x^2} - a \cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Обозначим $t = 2^{-x^2} = \dfrac{1}{2^{x^2}}$. Заметим, что $0 < t \le 1$.

Тогда задачу можно переформулировать следующим образом: найти все значения a, при которых уравнение $\dfrac{t^2 - 2at + a}{2t - 1} = 3$ имеет хотя бы одно решение t такое, что $0 < t \le 1$, $t \ne 1/2$. Выразим a как функцию от t:

$$a(t) = \frac{t^2}{2t-1} - 3 = \frac{t^2 - 6t + 3}{2t-1} = \frac{1}{2}t - \frac{11}{4} + \frac{1}{4(2t-1)}.$$

Построим схематически график этой функции на интервале $0 < t \le 1$. Так как $\lim\limits_{t \to 1/2+0} a(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to 1/2-0} a(t) = -\infty$, то прямая $t = 1/2$ является вертикальной асимптотой графика функции. На рассматриваемом интервале функция обращается в ноль в точке $t = 3 - \sqrt{6}$. Вычисляя производную рассматриваемой функции:

$$a'(t) = \frac{2t(2t-1) - 2t^2}{(2t-1)^2} = \frac{2t(t-1)}{(2t-1)^2},$$

находим, что на всем рассматриваемом множестве $(0; 1/2) \cup (1/2; 1]$ функция убывает. На концах рассматриваемого интервала имеем

$\lim\limits_{t\to 0} a(t) = -3$, $a(1) = -2$. Осталось определить те значения a, при которых уравнение $a(t) = a = \text{const}$ имеет хотя бы один корень на интервале $0 < t \le 1$, т. е. график функции имеет хотя бы одну точку пересечения с горизонтальной прямой $a = \text{const}$. Из анализа функции получаем, что такое возможно при $a \in (-\infty; -3) \cup [-2; +\infty)$.

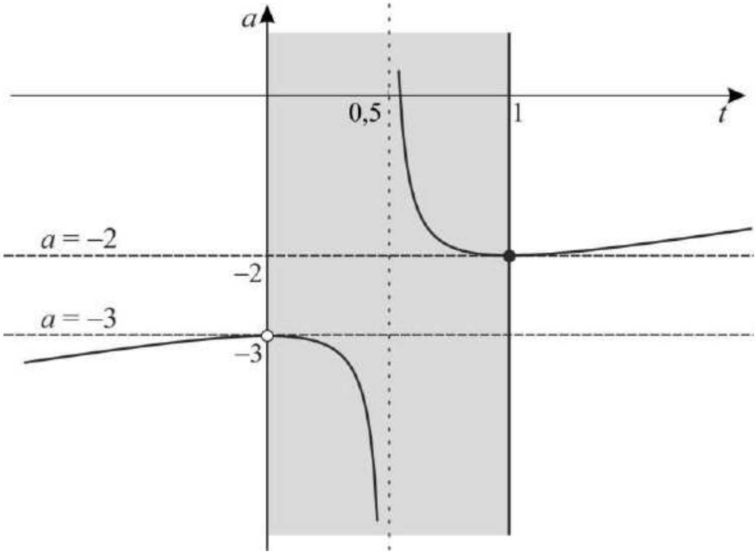

Рис. 11

Ответ: $a \in (-\infty; -3) \cup [-2; +\infty)$.

Замечание. Задачи 2.7–2.9 можно было бы решить другим способом: с помощью геометрической интерпретации квадратичной функции с параметром. Рекомендуем рассмотреть такой способ решения самостоятельно.

3. Приложение производной к решению задач на наибольшее и наименьшее значения

Задача 3.1. Найти равнобедренный треугольник наибольшей площади, вписанный в данную окружность.

Решение. Приведем несколько решений задачи. Принципиально они не отличаются. В каждом решении выбирается своя *переменная величина*, определяющая площадь равнобедренного треугольника, вписанного в окружность.

1. Переменная величина – угол α при основании равнобедренного треугольника, вписанного в окружность радиуса R. Из геометрических соображений имеем ограничения на переменную: $0<\alpha<\pi/2$. Площадь треугольника выражается следующим образом (рис. 12):

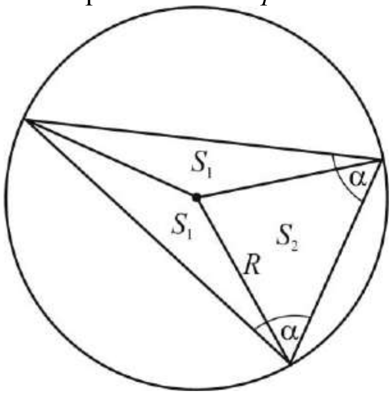

Рис. 12

$$S(\alpha)=2S_1+S_2=2\frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha+\frac{1}{2}R^2\sin(2\pi-4\alpha)=$$
$$=R^2\sin 2\alpha(1-\cos 2\alpha)=4R^2\sin^3\alpha\cos\alpha.$$

Исследуем функцию $S(\alpha)$ на наибольшее значение на интервале $0<\alpha<\pi/2$. Так как

$$S'(\alpha)=4R^2\left(3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^4\alpha\right)=$$
$$=4R^2\sin^2\alpha\left(\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha\right)\left(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha\right),$$

то на интервале $0<\alpha<\pi/2$ имеем: $\sin^2\alpha>0,$ $\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha>0,$ а

$$\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=0$$

только в точке $\alpha=\pi/3$. Расставляя знаки производной, убеждаемся, что в $\alpha=\pi/3$ функция достигает своего наибольшего значения. Таким образом, треугольник является равносторонним со стороной $\sqrt{3}R$.

2. Переменная величина – угол α при вершине. Угол, при котором достигается максимальная площадь, не может быть тупым, так как площадь треугольника с тем же основанием и углом при вершине, равным $\pi-\alpha$, будет больше.

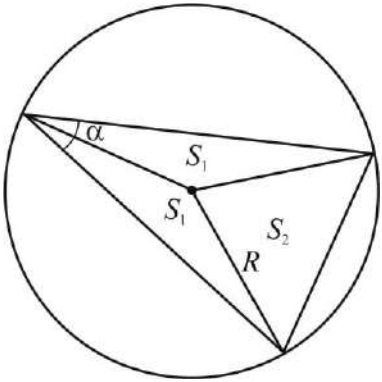

Рис. 13

Таким образом, $0<\alpha\le\pi/2$. Вычислим площадь треугольника в зависимости от α (рис. 13):

$$S(\alpha)=2S_1+S_2=2\frac{1}{2}R^2\sin\left(\pi-2\frac{\alpha}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha=R^2\sin\alpha+R^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Так как

$$S'(\alpha)=R^2\cos\alpha+R^2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=R^2\left(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1\right)=$$

$$=2R^2(\cos\alpha+1)\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right),$$

то на интервале $0<\alpha\le\pi/2$ критическая точка (или точка «подозрительная» на экстремум) одна – это $\alpha=\pi/3$. Расставляя знаки производной справа и слева от этой точки, находим, что при $\alpha=\pi/3$ функция достигает своего наибольшего значения. Вычисляя угол при основании треугольника, убеждаемся, что искомый равнобедренный треугольник является равносторонним, а его сторона равна $\sqrt{3}R$.

3. Переменная величина – длина боковой стороны x.

Обозначим половину основания равнобедренного треугольника l, высоту треугольника h (рис. 14). По теореме Пифагора, с одной стороны $l^2=x^2-h^2$, с другой $l^2=R^2-\left(h-R\right)^2=2Rh-h^2$. Отсюда находим $h=\dfrac{x^2}{2R}$, $l=\dfrac{x\sqrt{4R^2-x^2}}{2R}$.

Тогда площадь треугольника может быть вычислена по формуле: $S(x)=\dfrac{x^3\sqrt{4R^2-x^2}}{4R^2}$, где $0<x<2R$.

Найдем производную функции:

$$S'(x)=\frac{1}{4R^2}\left(3x^2\sqrt{4R^2-x^2}+\right.$$

$$\left.+x^3\frac{-2x}{2\sqrt{4R^2-x^2}}\right)=$$

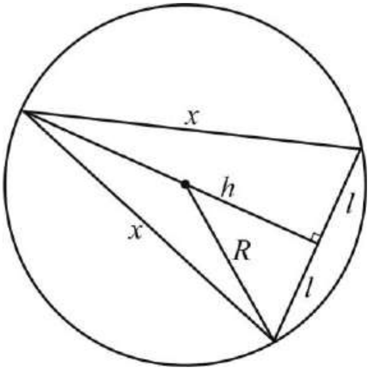

Рис. 14

$$=\frac{1}{4R^2\sqrt{4R^2-x^2}}\left(3x^2\left(4R^2-x^2\right)-x^4\right)=\frac{x^2\left(3R^2-x^2\right)}{R^2\sqrt{4R^2-x^2}}.$$

На интервале $0<x<2R$ производная функции обращается в ноль в точке $x=\sqrt{3}R$. Исследуя знак производной справа и слева от этой точки, убеждаемся, что в ней достигается наибольшее значение функции, т. е. это точка максимума функции на данном интервале. Вычисляя длину основания треугольника, видим, что этот равнобедренный треугольник является равносторонним.

4. Переменная величина – длина основания x. Площадь треугольника может быть найдена по формуле:

$$S(x)=\frac{1}{2}x\left(R+\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}\right)=\frac{1}{2}x\left(R+\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-x^2}\right),\text{ где } 0<x\le 2R.$$

Формула получена, исходя из того, что из двух треугольников, опирающихся на одну хорду, бóльшую площадь имеет остроугольный треугольник, поэтому центр окружности находится внутри рассматриваемого равнобедренного треугольника.

Производная функции $S(x)$ имеет вид:

$$S'(x)=\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-x^2}+x\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{4R^2-x^2}}\right)=\frac{R\sqrt{4R^2-x^2}+2R^2-x^2}{2\sqrt{4R^2-x^2}}.$$

Найдем нули производной, для этого решим уравнение $R\sqrt{4R^2-x^2}+2R^2-x^2=0$ с помощью замены $t=\sqrt{4R^2-x^2}\ge 0$. Получаем $t=R$ и $x=\sqrt{3}R$ (в силу положительности x). Значит, искомый треугольник – равносторонний.

5. Переменная величина – высота h, опущенная на основание равнобедренного треугольника. Для площади треугольника получаем формулу $S(h)=h\cdot\sqrt{2Rh-h^2}$, где $0<h<2R$. Так как $S'(h)=\sqrt{2Rh-h^2}+h\dfrac{2R-2h}{2\sqrt{2Rh-h^2}}=\dfrac{h(3R-2h)}{\sqrt{2Rh-h^2}}$, то наибольшее значение функции на интервале (0, 2R) достигается при $h=(3/2)R$, что соответствует равностороннему треугольнику со стороной $x=\sqrt{3}R$.

Решения следующей задачи показывают, как важно правильно определять интервал изменения переменной величины.

Задача 3.2. Найти наибольшее значение площади боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, если площадь его основания равна 1, а диагональ равна 2.

Решение.

1. Пусть a, b, c – соответственно длина, ширина, высота прямоугольного параллелепипеда ($a>0, b>0, c>0$). Требуется найти наибольшее значение площади боковой поверхности $Q=2(a+b)c$. При этом a, b, c связаны очевидной системой:

$$\begin{cases} ab=1, \\ a^2+b^2+c^2=4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b=1/a, \\ c=\sqrt{4-a^2-(1/a)^2}. \end{cases}$$

Выбирая в качестве переменной a, получаем $Q(a)=2(a+1/a)\sqrt{4-a^2-1/a^2}$, $a>0$. Найдем естественную область определения полученной функции. Решая неравенство $4-a^2-1/a^2\geq 0$, находим, $a\in\left[\sqrt{2-\sqrt{3}};\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$. Исследуем функцию $Q(a)$ на наибольшее значение на данном промежутке. Найдем производную:

$$Q'(a)=2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\sqrt{4-a^2-\frac{1}{a^2}}+2\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{-2a+2/a^3}{2\sqrt{4-a^2-1/a^2}}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{-4(a-1)(a+1)(a^4-a^2+1)}{a^3\sqrt{4a^2-a^4-1}}.$$

Из нулей производной рассматриваемому отрезку принадлежит только $a=1$. Убеждаемся, что в этой точке функция достигает своего наибольшего значения и $\max\limits_a Q(a)=Q(1)=4\sqrt{2}$.

Ответ: наибольшая площадь боковой поверхности равна $4\sqrt{2}$.

2. Требуется найти наибольшее значение функции $Q=2(a+b)c$, при условиях: $ab=1$, $a^2+b^2+c^2=4$, $a>0, b>0, c>0$. Заметим, что из условий можно получить $\left(a+b\right)^2=a^2+b^2+2ab=6-c^2$ или $a+b=\sqrt{6-c^2}$. Выбирая в качестве переменной *c*, получаем $Q\left(c\right)=2c\sqrt{6-c^2}$. Если для *c* рассмотрим естественную (вытекающую из формулы) область определения, то получим, что $0<c\le\sqrt{6}$. Вычисляем производную функции:

$$Q'(c)=2\left(\sqrt{6-c^2}+c\frac{-2c}{2\sqrt{6-c^2}}\right)=2\frac{6-2c^2}{\sqrt{6-c^2}}=4\frac{\left(\sqrt{3}-c\right)\left(\sqrt{3}+c\right)}{\sqrt{6-c^2}}.$$

Исследуя производную функции на знак, на интервале $0<c\le\sqrt{6}$, получаем, что функция достигает своего наибольшего значения в точке $c=\sqrt{3}$ и оно равно $Q\left(\sqrt{3}\right)=6$.

Итак, мы получили два разных ответа!

Конечно, никакого фокуса здесь нет, и правильным является первое из найденных значений, т. е. $4\sqrt{2}$. Во втором случае нужно быть внимательнее при определении границ изменения переменной *c*. Читатель, возможно, уже обратил внимание на то, что при $c=\sqrt{6}$, из $a^2+b^2+c^2=4$ следует, что $a^2+b^2=-2$ (что не возможно). Значит, границы изменения *c* найдены не верно. Заметим, что из простейшего неравенства $\left(a-b\right)^2\ge 0$, следует $a^2+b^2\ge 2ab$. В нашем случае, когда $ab=1$, получаем $a^2+b^2\ge 2$. С учетом равенства $a^2+b^2+c^2=4$ имеем $c^2\le 2$, т. е. $c\in\left(0,\sqrt{2}\right]$. Исследуя функцию $Q(c)$ на экстремум при $c\in\left(0,\sqrt{2}\right]$, замечаем, что $Q'(c)>0$ на всем этом интервале. Следовательно, функция достигает своего максимума на правом конце этого интервала, т. е. в точке $c=\sqrt{2}$: $\max\limits_{c} Q(c)=Q\left(\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}$. Мы получили такой же ответ, как и при первом способе решения.

3. Требуется найти наибольшее значение функции $Q=2(a+b)c$, при условиях: $ab=1$, $a^2+b^2+c^2=4$, $a>0, b>0, c>0$. Рассмотрим в качестве переменной величины $a+b=t$. Тогда

$$c^2=4-\left(a^2+b^2\right)=4-\left(a+b\right)^2+2ab=6-t^2 \text{ или } c=\sqrt{6-t^2}.$$

Определим множество изменения переменной. Воспользовавшись простейшим неравенством $\left(a-1\right)^2\geq 0$, получаем ограничение снизу: $t=a+b=a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2+1}{a}\geq\dfrac{2a}{a}=2$. Из формулы $c^2=6-t^2\geq 0$ получаем ограничение сверху: $t\leq\sqrt{6}$. Осталось исследовать функцию $Q\left(t\right)=2t\sqrt{6-t^2}$ на экстремум на промежутке $2\leq t\leq\sqrt{6}$. Производную этой функции мы уже находили: $Q'(t)=4\dfrac{\left(\sqrt{3}-t\right)\left(\sqrt{3}+t\right)}{\sqrt{6-t^2}}$. Она отрицательна на рассматриваемом промежутке, следовательно, функция здесь убывает. Значит, функция достигает своего наибольшего значения на левом конце промежутка в точке $t=2$, $Q(2)=4\sqrt{2}$.

Задача 3.3. Проволока должна быть разрезана на 2 куска. Один кусок будет согнут в квадрат, а другой в окружность. Общая площадь фигур, ограниченных этими кусками, должна быть 16 дм^2. Какова наибольшая длина проволоки?

Решение. Обозначим через l – длину проволоки, а через x – длину части проволоки, которая будет согнута в окружность. Тогда радиус окружности $r=\dfrac{x}{2\pi}$, её площадь $S_o=\dfrac{x^2}{4\pi}$, площадь квадрата $S=16-\dfrac{x^2}{4\pi}$, а длина его стороны $y=\sqrt{16-\dfrac{x^2}{4\pi}}$. Из условия задачи получаем: $l(x)=x+4\sqrt{16-\frac{x^2}{4\pi}}=x+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{64\pi-x^2}$, где $0<x<8\sqrt{\pi}$.

Найдем наибольшее значение этой функции на интервале. Так как

$$l'(x)=1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{64\pi-x^2}}=\frac{\sqrt{64\pi^2-\pi x^2}-2x}{\sqrt{64\pi^2-\pi x^2}},$$

то на рассматриваемом интервале производная обращается в ноль в точке $x=\frac{8\pi}{\sqrt{4+\pi}}$. Слева от этой точки производная положительна, а справа – отрицательна. Значит, в точке $x=\frac{8\pi}{\sqrt{4+\pi}}$ функция достигает наибольшего значения:

$$\max_{x\in(0,8\sqrt{\pi})} l(x)=l\left(\frac{8\pi}{\sqrt{4+\pi}}\right)=8\sqrt{\pi+4}.$$

Ответ: $8\sqrt{\pi+4}$ дм.

Замечание. Конечно, в этой задаче можно выбрать и другие переменные. Если в качестве переменной выбран радиус окружности r, то задача сводится к исследованию на наибольшее / наименьшее значения функции $l(r)=2\pi r+4\sqrt{16-\pi r^2}$ на интервале $0<r<4/\sqrt{\pi}$. Если переменной является сторона квадрата, то исследуется функция $l(y)=4y+2\sqrt{16\pi-\pi y^2}$ на интервале $0<y<4$.

Задача 3.4. Дана окружность радиуса 1, с центром в начале координат и точки $A(0, 3)$ и $B(4, 0)$. Найти на окружности точку M, для которой величина $|AM|^2+|BM|^2$ была бы минимальной.

Решение. Очевидно, что точка $M(x, y)$ лежит в первой координатной четверти (рис. 15), т. е. $x\geq 0$ и $y\geq 0$. Кроме того, так как точка лежит на окружности, то $x\leq 1$, $y\leq 1$. Найдем искомую величину с использованием формул метода координат и уравнения окружности радиуса 1 с центром в начале координат:

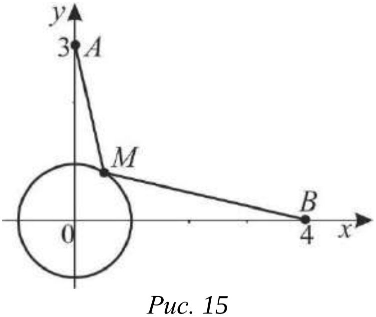

Рис. 15

$$|AM|^2+|BM|^2=x^2+(y-3)^2+(x-4)^2+y^2=$$
$$=2x^2+2y^2-6y-8x+25=27-8x-6\sqrt{1-x^2}.$$

Исследуем функцию $f(x)=27-8x-6\sqrt{1-x^2}$ на экстремум на промежутке $0\le x\le 1$. Производная

$$f'(x)=-8-6\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\left(3x-4\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

на рассматриваемом промежутке обращается в ноль в точке $x=4/5$. Расставим знаки производной на промежутке. Слева от точки производная отрицательна, а справа положительна, значит, в точке $x=4/5$ достигается минимум. В ответ выписываем координаты точки *M*: $x=4/5$, $y=3/5$.

Ответ: $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Задача 3.5. Прямоугольный участок площадью 420 м^2 нужно обнести проволочным забором и разгородить пополам по диагонали. Определить размеры участка, если на это потребовалось 111 м проволоки. Какой формы участок надо выбрать, чтобы на это потребовалось наименьшее количество проволоки?

Решение.

1. Начнем с первого вопроса задачи. Обозначим a, b – длина и ширина участка. Из условий задачи получаем систему

$$\begin{cases} ab=420; \\ 2a+2b+\sqrt{a^2+b^2}=111. \end{cases}$$

Второе уравнение системы можно записать в виде $2(a+b)+\sqrt{(a+b)^2-840}=111$. Введем переменную $x=a+b$ и решим уравнение $2x+\sqrt{x^2-840}=111$, воспользовавшись приемом уединения корня: $\sqrt{x^2-840}=111-2x$. Последнее уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} x^2-840=(111-2x)^2 \\ 111-2x\ge 0. \end{cases}$$

Из двух корней квадратного уравнения системы ($x_1 = 107$, $x_2 = 41$) неравенству системы удовлетворяет только $x_2 = 41$. Для возвращения к исходным переменным необходимо решить систему:

$$\begin{cases} a + b = 41, \\ ab = 420. \end{cases}$$

Решением системы являются пары $(a_1, b_1) = (20, 21)$ и $(a_2, b_2) = (21, 20)$.

2. Для ответа на второй вопрос задачи рассмотрим функцию $l(a+b) = 2(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 - 840}$. Заметим, что функция $l(a+b)$ возрастающая как композиция возрастающих (линейной, квадратичной при неотрицательном значении аргумента, корень квадратный). Значит длина $l(a+b)$ будет минимальной при наименьшем значении $a+b$. Исследуем функцию $f(a) = a + b = a + 420/a$ при $a > 0$ на экстремум. Производная

$$f'(a) = 1 - \frac{420}{a^2} = \frac{\left(a - \sqrt{420}\right)\left(a + \sqrt{420}\right)}{a^2}$$

обращается в ноль при $a = \sqrt{420}$ на рассматриваемом интервале. Слева от этого значения производная отрицательна, справа – положительна. Значит, наименьшее значение длины проволоки достигается при $a = b = \sqrt{420}$, т. е. когда поле имеет форму квадрата.

Ответ: 1) прямоугольник 20×21 м, 2) квадрат со стороной $\sqrt{420}$ м.

Задача 3.6. Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 ч в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 руб., а на заводе, расположенном во втором городе – 200 руб. Антон готов выделять 900 000 руб. в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на первом заводе можно произвести n_1 единиц товара в неделю, тогда рабочие на этом заводе трудились суммарно n_1^2 ч в неделю. Аналогично, для второго завода имеем, если там произведено n_2 единиц товара, то рабочие трудились n_2^2 ч в неделю. Необходимо найти наибольшее значение суммы n_1+n_2, $n_1, n_2 \geq 0$, $n_1,\ n_2 \in N$. При этом, Антон готов выделять на оплату 900 000 руб. в неделю, т. е. $250n_1^2+200n_2^2=900000$. Выражая отсюда, например, n_2, сводим задачу к исследованию функции

$$f\left(n_1\right)=n_1+\sqrt{\frac{900000-250n_1^2}{200}}=n_1+\sqrt{4500-\frac{5}{4}n_1^{\ 2}}$$

на наибольшее значение на промежутке $0 \leq n_1 \leq 60$. Ограничение сверху на n_1 возникает как естественная область определения рассматриваемой функции.

Исследуем функцию $f(n_1)$ на наибольшее / наименьшее значения. Её производная

$$f'(n_1)=1+\frac{\left(-5/4\right)\cdot 2n_1}{2\sqrt{4500-\left(5/4\right)n_1^2}}=\ldots=\frac{4\sqrt{4500-\left(5/4\right)n_1^2}-5n_1}{4\sqrt{4500-\left(5/4\right)n_1^2}}$$

обращается в нуль в точке $n_1=40$, слева от этой точки производная положительна, справа отрицательна. Таким образом, в $n_1=40$ функция достигает своего наибольшего значения на промежутке $0 \leq n_1 \leq 60$. Проверяем, что соответствующее значение

$$n_2=\sqrt{4500-\left(5/4\right)n_1^{\ 2}}=50 \in N$$

и находим, что наибольшее значение суммы $n_1+n_2=90$.

Ответ: 90.

Задача 3.7. В данный круговой сегмент, не превышающий полукруга, вписать прямоугольник наибольшей площади.

Решение. Введем обозначения: R – радиус круга, 2α – дуга кругового сегмента ($0<\alpha \leq \pi/2$), 2φ – дуга, стягиваемая стороной прямоугольника, $2y, x$ – длина и ширина вписанного прямоугольника, соответственно (рис. 16).

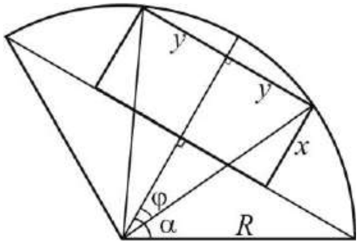

Рис. 16

Из геометрических соображений

$y=R\sin\varphi$, $x=R\cos\varphi-R\cos\alpha$.

Площадь прямоугольника вычисляется по формуле

$$S(\varphi)=2R^2\sin\varphi(\cos\varphi-\cos\alpha),$$

где $0<\varphi<\alpha$.

Находим производную функции:

$$S'(\varphi)=2R^2\left[\cos\varphi(\cos\varphi-\cos\alpha)+\sin\varphi(-\sin\varphi)\right]=$$

$$=2R^2\left(2\cos^2\varphi-\cos\alpha\cos\varphi-1\right)=$$

$$=4R^2\left(\cos\varphi-\frac{\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+8}}{4}\right)\left(\cos\varphi-\frac{\cos\alpha-\sqrt{\cos^2\alpha+8}}{4}\right).$$

Исследуем знак производной. Заметим, что $\cos\alpha-\sqrt{\cos^2\alpha+8}<0$, значит вторая скобка положительна для $0<\varphi<\pi/2$, и знак производной зависит от знака первой скобки. На рассматриваемом интервале производная обращается в ноль в точке $\varphi_*=\arccos\frac{\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+8}}{4}$. Так как косинус является убывающей функцией на рассматриваемом интервале, то из $\varphi<\varphi_*$ следует, что $\cos\varphi>\cos\varphi_*$. Значит,

$$\cos\varphi-\frac{\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+8}}{4}>\cos\varphi_*-\frac{\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+8}}{4}=0.$$

Расставляя знаки производной, убеждаемся, что в точке φ_* достигается максимум функции (рис 17).

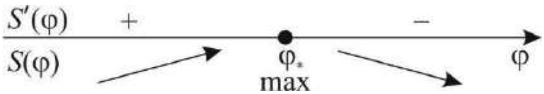

Рис. 17

Ответ: $\varphi=\arccos\frac{\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+8}}{4}$.

Задача 3.8. Найдите все значения $p>0$, при которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-\left(1+p^2\right)^2x^2+p$ и прямой $y=0$, будет наибольшей.

Решение. Найдем точки пересечения параболы с осью Ox. Это точки с абсциссами $x_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{p}}{1+p^2}$, которые являются решениями уравнения $-\left(1+p^2\right)^2 x^2 + p = 0$. Площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой, вычислим как площадь криволинейной трапеции, воспользовавшись симметрией фигуры:

$$S = 2\int_0^{\frac{\sqrt{p}}{1+p^2}} \left[-\left(1+p^2\right)^2 x^2 + p\right]dx = 2\left[-\left(1+p^2\right)^2 \frac{x^3}{3} + px\right]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{p}}{1+p^2}} = \frac{4}{3}\frac{p\sqrt{p}}{1+p^2}\ .$$

Можно, не обращаясь к интегралу, найти площадь параболического сегмента по известной формуле $S = \dfrac{2}{3}hb$, где h – высота сегмента, а b – основание. Так как

$$S'(p) = \left(\frac{4}{3}p^{\frac{3}{2}}\left(1+p^2\right)^{-1}\right)' = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}\left(1+p^2\right)^{-1} + \frac{4}{3}p^{\frac{3}{2}}(-1)\left(1+p^2\right)^{-2}2p = \ldots$$

$$\ldots = \frac{2}{3}\frac{p^{\frac{1}{2}}\left(3-p^2\right)}{\left(1+p^2\right)^2},$$

то на интервале $p > 0$ производная исследуемой функции обращается в ноль при $p = \sqrt{3}$. Расставляем знаки производной (см. рис. 18) и определяем, что $S(p)$ достигает своего максимального значения при $p = \sqrt{3}$.

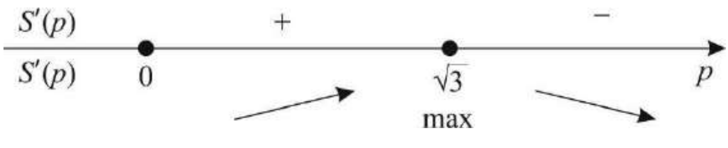

Рис. 18

Ответ: $p = \sqrt{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти уравнение общей касательной к параболам $y = x^2 + {}$ $+5x + 7$ и $y = x^2 - x - 5$.

2. Найти уравнение общей касательной к параболам $y = 8 -$ $-3x - 2x^2$ и $y = 2 + 9x - 2x^2$.

3. На координатной плоскости даны две прямые $y = -x$ и $y =$ $= 5x - 6$. Найти значения параметров a и b, при которых обе эти прямые касаются параболы $y = x^2 + a\,x + b$.

4. На координатной плоскости даны две прямые $y = 2x + 2$ и $y = -x + 3{,}5$. Найти значения параметров a и b, при которых обе эти прямые касаются параболы $y = ax^2 + x + b$.

5. К параболе $y = ax^2 - x$ $(a > 0)$ проведены касательные в ее вершине и в двух точках, лежащих по разные стороны от вершины. Точки пересечения этих касательных являются вершинами правильного треугольника, длина стороны которого равна $\sqrt{3}$. Найти коэффициент a.

6. На положительном луче оси ординат выбрана точка A так, что проведенные через нее касательные к параболе $y = a\,x^2 + c$ $(a > 0,\ c > 0)$ взаимно перпендикулярны. Одна из касательных пересекает ось абсцисс в точке B, другая касается параболы в точке C. Треугольник ABC равнобедренный, а его площадь равна 4. Найти коэффициенты a и c.

7. Найдите геометрическое место вершин прямых углов, обе стороны которых касаются графика функции $y = (1/4)x^2$.

8. Найти координаты точки, симметричной вершине параболы $y = x^2 - 2x + 3$ относительно касательной к этой параболе, которая параллельна прямой $x - y + 4 = 0$.

9. Доказать, что при $x \in (0, \pi/2)$ справедливо неравенство $\dfrac{2\cos x}{1+\cos x} < \dfrac{\sin x}{x}$.

10. Докажите следующие тождества:

а) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $-\infty < x < \infty$;

б) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}(1/x)$, $x \neq 0$;

в) $2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$, $0 \le x \le 1$.

11. Определить значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 - 6x + 2a + 17 = 0$ имеет два различных корня больших -1.

12. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $\log_{x+a}\left(x-2\right) = 2$ имеет единственное решение.

13. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $\log_{x-2}\left(x^2 - ax + 3a - 9\right) = 1$ имеет единственное решение.

14. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $\log_x\left(ax^2 + x + 2\right) = 2$ имеет единственное решение.

15. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $\log_{x+2}\left(2ax + 10\right) = 2$ имеет единственное решение.

16. Найдите все значения a, при которых уравнение $\dfrac{1 - 2a\sqrt{1+x^2} + a\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right) - 2\sqrt{1+x^2}} = 3$ имеет хотя бы одно решение.

17. Найдите все значения a, при которых уравнение $\dfrac{5a}{a-3}7^{|x|} = 49^{|x|} + \dfrac{6a+7}{a-3}$ имеет ровно два различных корня.

18. Найдите все значения a, при которых уравнение $\dfrac{4a}{a-6}3^{|x|} = 9^{|x|} + \dfrac{3a+4}{a-6}$ имеет ровно два различных корня.

19. Проволока должна быть разрезана на два куска. Один будет согнут в квадрат, другой – в окружность. Каково наименьшее значение площади фигур, ограниченных этими кусками?

20. Из квадратного листа картона со стороной a сделать открытую коробочку наибольшей вместимости, вырезав по углам квадраты и загнув выступы получившейся фигуры.

21. На странице книги печатный текст занимает площадь S. Верхнее и нижнее поля шириной a, правое и левое – шириной b. Найти ширину текста, при которой площадь страницы наименьшая.

22. Поперечное сечение открытого канала имеет форму равнобедренной трапеции. При каком наклоне боков φ «мокрый периметр» сечения будет наименьшим, если площадь «живого сечения» воды в канале равна S, а уровень воды равен h?

Ответы

1. $y = -2x - 5{,}25$.
2. $y = x + 10$.
3. $a = 0,\ b = \frac{1}{4}$.
4. $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2}$.
5. 1/2.
6. $a = \frac{1}{4}; c = 3$.
7. $y = -1$.
8. $\left(\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right)$.

11. $(-9; -23/3) \cup (0; 1/2)$.
12. $(-\infty; -2) \cup \{-7/4\}$.
13. $(-\infty; 5]$.
14. $(-\infty; -2) \cup (-2; 1)$.
15. $(-\infty; 5/2] \cup \{9/2\}$
16. $(-\infty;\ 3) \cup [4; +\infty)$.
17. $\{-42\} \cup (-2; 3)$.
18. $\{-12\} \cup (6; +\infty)$.
19. $\dfrac{l^2}{4(\pi + 4)}$, где l – заданная длина проволоки.
20. Сторона вырезаемого квадрата равна $a/6$.
21. $\sqrt{bS/a}$.
22. $\pi/3$.

Литература

1. *Белоносов В. С., Фокин М. В.* Задачи вступительных экзаменов по математике: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 480 с.

2. *Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И.* Задачи по математике. Начала анализа: справ. пособие // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 608 с.

3. *Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И.* Алгебра и математический анализ. 10 кл.: Учебник для углубл. изуч. математики в общеобразоват. учреждениях. М.: Мнемозина, 2005. – 335 с.

4. *Воронин В. В., Воронина Т. А.* Задачи по математике для практических занятий в физико-математической школе. – Новосибирск: РИЦ НГУ, 2016. – 424 с.

5. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. – М.: ООО «Изд-во Астрель»: ООО «Изд-во АСТ», 2002. – 558 с.

6. Задачник-практикум по высшей математике. Множества. Функции. Предел. Непрерывность. Производная: Учеб. пособие / В. А. Волков, А. Н. Григорьева, Т. А. Ефимова и др. // Под ред. В. А. Волкова. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1988. 224 с.

7. Решу ЕГЭ https://math-ege.sdamgia.ru/

Оглавление

1. Уравнение касательной 3
2. Применение производной к решению задач, связанных с исследованием функции 10
3. Приложение производной к решению задач на наибольшее и наименьшее значения 20
Задачи для самостоятельного решения 32
Ответы 34
Литература 35

Учебное издание

Журавлева Елена Николаевна,
Панова Тамара Александровна,
Протопопова Татьяна Владимировна

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Задачи для классов с углубленным изучением математики

Методическое пособие

Редактор *Т. В. Иванова*
Верстка *Т. В. Ивановой*
Обложка *Е. В. Неклюдовой*

Подписано в печать 05.11.2021 г.
Формат 60х84/16. Уч.-изд. л. 2,25. Усл. печ. л. 2,09
Тираж 150 экз. Заказ № 197
Издательско-полиграфический центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2