МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

И. Б. ЛЯПУНОВ

МОДЕЛИ НА ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Методическое пособие

НОВОСИБИРСК

2022

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7
Л 97

Ляпунов, И. Б.

Л 97 Модели на ЕГЭ по математике : метод. пособие / И. Б. Ляпунов ; СУНЦ НГУ. — Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2022. — 76 с.

ISBN 978–5–4437–1284–0

Издание содержит методы решения текстовых задач по математике на ЕГЭ профильного уровня, включая олимпиадные задачи и задачи с экономическим содержанием, разобранные примеры, задачи для самостоятельного решения. Все задачи снабжены ответами. Данное методическое пособие предназначено для оканчивающих школу учащихся СУНЦ НГУ, учителей старших классов, а также для всех, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике.

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я7

ISBN 978–5–4437–1284–0

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое издание содержит методы составления математических моделей, решения текстовых задач по математике на ЕГЭ профильного уровня, включая экономические и олимпиадные задачи, разобранные примеры, задачи для самостоятельного решения. Все задачи снабжены ответами.

При написании данного пособия автор не ставил цели объять необъятное и перечислить все возможные методы и типы задач, ограничившись минимумом задач по основным типам. Данное пособие предназначено в первую очередь для достижения понимания учащимися, что от них хотят составители задач ЕГЭ определенного типа, какие общие правила и методы применяются для решения таких задач. Издание излагает методы решения текстовых задач на проценты, совместную работу, также разъясняет основные моменты и термины при вкладывании денег в банк, получении и погашении кредитов, дает начальные представления об оптимизации при целочисленных параметрах, приводит подборку олимпиадных задач. Настоящее издание включает ранее изданные автором «Экономические задачи для подготовки к ЕГЭ по математике», доработанные с учетом последних требований ЕГЭ.

Большинство задач и решений издания заимствовано из открытых источников, типовых сборников подготовки к ЕГЭ под редакцией И.В. Ященко, демо-версий ФИПИ, остальные заимствованы из вступительных экзаменов ведущих вузов Москвы, Санкт-Петербурга и Новосибирска, часть задач составлена автором.

Предлагаемое пособие предназначено для оканчивающих школу учащихся СУНЦ НГУ, учителей старших классов, а также для всех, кто готовится поступать в вузы с усиленными требованиями по математике, в том числе и для подготовки к ЕГЭ по математике. Оно также может быть полезным в практических и познавательных целях для будущих вкладчиков и получателей кредитов.

И. Б. Ляпунов

МЕТОДЫ СОСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

1. Математические модели в текстовых задачах

На едином государственном экзамене по математике (ЕГЭ) в критериях оценивания решений задач второй части построение верной математической модели с 2022 г. оценивается в 1 балл, при этом точного определения математической модели в учебной литературе не наблюдается. В настоящем разделе понятие «математической модели» будет раскрыто только применительно к ЕГЭ по математике.

Каждая текстовая задача, а их в ЕГЭ по математике не менее трех (четвертая с физическим содержанием) — одна в первой части и две во второй — представляет собой словесное описание некоторой ситуации с числовыми данными, общепринятыми умолчаниями и упрощениями, или кратко — некоторый сюжет.

В методических материалах для председателей и членов предметных комиссий субъектов РФ по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2021 г. по математике (https://doc. fipi.ru/ege/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf/2021/matematika_mr_ege_2021.doc) приведено описание математической модели в рамках оценивания работ: «1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи». Далее, там же подчеркиватся, что сюжетное условие задачи верно сведено именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию, и т. п. Предъявленный текст должен включать и описание того, как построена модель, и направление, «продолжаемое» до верного решения. Типичные допустимые погрешности здесь — пробелы в описании составления модели. При проверке заданий ЕГЭ регулярно встречаются случаи, когда составленная участником экзамена модель содержит большое количество различных букв и индексов. Дело доходит до того, что сумму трех последовательных членов арифметической прогрессии вычисляют по общей формуле, да еще и с ошибкой. Такие модели имеют право на существование, но хотелось бы предостеречь выпускников от применения усложненных и излишне формализованных моделей. Для того, чтобы решение было оценено полным баллом, вполне можно обойтись минимумом переменных и связей между ними. Более того, в некоторых задачах совсем не обязательно заводить выплаты с индексами, а вполне уместно перечислить их друг за другом через запятую. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях оценивания нет жесткого упоминания какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Иными словами, надо условие текстовой задачи перевести на математический язык и получить адекватно отражающую текстовое условие математическую задачу. Такая задача может быть представлена в виде уравнения (системы уравнений), или неравенства (системы неравенств), или функции (с ограничениями), которую надо исследовать, или цепочки арифметических вычислений и т. п. Кроме представления самой задачи, надо обязательно продвинуться в ее решении. Это и будет оцениваемой моделью. Для оценивания на полные баллы останется только решить эту полученную задачу до правильного ответа. Изменения, которые коснулись оценивания с 2022 г., не предусматривают промежуточных баллов за арифметическую ошибку в «экономической» задаче. Теперь верно построенная модель оценивается в 1 балл, а правильно решенная задача № 15 второй части — в 2 балла. В дальнейшем при разборе конкретных методов решения задач на составлении модели будут делаться отдельные акценты.

2. Задачи первой части ЕГЭ

Все задачи первой части ЕГЭ, в том числе и текстовые, не предполагают развернутого и оцениваемого решения. От экзаменующегося требуется только записать полученный числовой ответ в специальный бланк. Тем не менее, для получения этого верного ответа, необходимо иметь навык составления моделей в различных ситуациях. Далее будут разобраны наиболее типичные случаи, кроме тех, где предусмотрена готовая формула.

2.1. Задачи на проценты

Определение. Процентом числа называется сотая часть этого числа и обозначается $1\,\%$.

Таким образом, $1\,\%$ от числа a составляет $\frac{a}{100} = a \cdot 0{,}01$. Из определения следует, что само число, от которого вычисляются проценты, составляет $100\,\%$. Процент является безразмерной величиной и применяется при вычислении долей от чисел или размерных величин. Приведем примеры перевода процентов в число, вычисления процентов одной величины по отношению к другой и нахождения числа по его части.

Пример 1. Пусть дано число a и требуется вычислить число b, составляющее $m\,\%$ от a.

Решение: по определению $b = \frac{m\,\%}{100\,\%} \cdot a$. Например, при $a = 500$, $m = 40$, $b = \frac{40\,\%}{100\,\%} \cdot 500 = 200$.

Пример 2. Пусть даны числа $a \neq 0$ и b, требуется вычислить сколько процентов число b составляет от числа a.

Решение: искомое $n\,\% = \frac{b}{a} \cdot 100\,\%$. Например, при $a = 500$, $b = 200$, $n\,\% = \frac{200}{500} \cdot 100\,\%$, откуда $n\,\% = 40\,\%$.

Пример 3. Пусть дано число b и требуется вычислить число a, от которого число b составляет $k\,\%$ $(k \neq 0)$.

Решение: по определению $b = \frac{k\,\%}{100\,\%} \cdot a$, откуда, выражая a, находим $a = \frac{b}{\frac{k\,\%}{100\,\%}}$. Например, при $b = 200$, $k = 40$, $a = \frac{200}{0{,}4} = 500$.

В задачах на проценты обычно участвует одна или несколько физических величин, а также одна или несколько процентных величин. Общая технология решения подобных задач состоит в уходе от процентных величин к реальным физическим величинам по формулам перевода, указанным в разобранных выше примерах.

Как правило, составляются два уравнения — одно по общей массе, второе — по массе выделенного вещества.

Пример 4. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 10 %, а в другом — 20 % меди. Сколько нужно первого и второго сплавов, чтобы получить 15 кг нового сплава, содержащего 14 % меди?

Решение: пусть требуется x кг первого сплава, и y кг — второго. Первое уравнение по общей массе $x+y=15$ составляется согласно умолчанию о том, что количество вещества до сплавления и после одинаково. Выясним сколько меди было в каждом сплаве. В первом — $0{,}1x$ кг, во втором — $0{,}2y$ кг, вместе — $0{,}1x+0{,}2y$ кг. Полученная величина будет равна количеству меди в новом сплаве — $0{,}14\cdot 15 = 2{,}1$ кг, откуда имеем второе уравнение $0{,}1x+0{,}2y=2{,}1$. Решив полученную систему уравнений $\begin{cases} x+y=15, \\ 0{,}1x+0{,}2y=2{,}1, \end{cases}$ находим $x=9$ кг первого сплава, и $y=6$ кг — второго.

Ответ: 9 и 6 кг.

В приведенном решении моделью является совокупность описания переменных и системы уравнений.

Часто требуется из условия определить, какая именно величина принимается за 100 % и вычислить все остальные зависимости по отношению к ней. Более того, в условии может быть скрыто, что в разных ситуациях за 100 % принимаются различные величины.

Пример 5. Цена на книгу сначала выросла на 10 %, а затем книгу переоценили ещё раз, и ее цена снова выросла на 10 %. На сколько процентов увеличилась цена книги по сравнению с начальной ценой?

Решение: второе повышение цены производится от новой цены, поэтому исходную цену надо дважды умножить на 1,1, это равнозначно умножению исходной цены на 1,21.

Ответ: 21 %.

Пример 6. Брюки дороже рубашки на 40 % и дешевле пиджака на 23 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

Решение: из первой части условия находим, что при цене рубашки a руб. брюки стоят $1{,}4a$ руб. Из второй части условия следует, что при цене пиджака b руб. брюки стоят $0{,}77b$ руб. Уравнивая эти два выражения $1{,}4a = 0{,}77b$, находим стоимость рубашки относительно пиджака $a = \frac{77}{140}b = 0{,}55b$. Для ответа на вопрос следует принять стоимость пиджака за 100 %, откуда рубашка дешевле пиджака на 45 %.

Ответ: 45 %.

Популярной задачей является определение концентрации вещества в смеси двух или нескольких растворов. В задачах могут употребляться синонимичные термины, например, жирность молока или сметаны.

Определение. Концентрацией вещества массой m_1 в растворе массой m_2 называется величина $\frac{m_1}{m_2} \cdot 100\,\%$.

Пример 7. Во фляге перемешали 15 кг сметаны жирности 10 % и 5 кг сметаны жирности 18 %. Найти жирность получившейся сметаны.

Решение: в первой порции сметаны жира было $\frac{10\cdot 15}{100}$ кг, во второй — $\frac{18\cdot 5}{100}$ кг, вместе — $\frac{10\cdot 15+18\cdot 5}{100}$ кг. Масса смеси равна сумме $15 + 5$ кг. Искомая жирность равна $\frac{10\cdot 15+18\cdot 5}{100\cdot(15+5)} \cdot 100$ %, либо после сокращения на 100 эта же жирность равна $\frac{10\cdot 15+18\cdot 5}{15+5}$ % = 12 %.

Ответ: 12 %.

В некоторых задачах можно взять определенное количество вещества и проследить за его изменениями.

Пример 8. Добытая руда содержит 21 % меди, обогащенная — 45 %. Известно, что в процессе обогащения 60 % добытой руды идет в отходы. Определить процентное содержание меди в отходах.

Решение: пусть добыли a т руды, в ней меди — $0{,}21a$ т. Обогащенной руды получилось $(1 - 0{,}6)a = 0{,}4a$ т, в ней меди — $0{,}45 \cdot 0{,}4a = 0{,}18a$ т. В отходах меди всего $0{,}21a - 0{,}18a = 0{,}03a$ т, масса отходов $0{,}6a$ т. Искомое $\frac{0{,}03a}{0{,}6a} \cdot 100\,\% = 5\,\%$.

Ответ: 5 %.

В приведенном решении моделью является совокупность описания переменной и последовательных вычислений.

Пример 9. Согласно данным статистики в городе Урюпинске 47,7 % всех детей считают, что их нашли в капусте, 15,1 % — что их принес аист, а оставшиеся 37,2 % детей вообще не знают, откуда взялись. Аналогичная статистика отдельно среди мальчиков такова: соответственно 33, 20 и 47 %. Сколько процентов урюпинских девочек считают, что их принес аист, если 63 % из них полагают, что были найдены в капусте?

Решение: пусть в городе Урюпинске проживало $x \neq 0$ девочек, $y \neq 0$ мальчиков, а всех детей — $x + y$. Данные задачи удобно записать в виде табл. 1.

Таблица 1

Мнение	Девочки	Мальчики	Все дети
нашли в капусте	$0{,}63x$	$0{,}33y$	$0{,}477(x+y)$
принес аист		$0{,}20y$	$0{,}151(x+y)$
не знают		$0{,}47y$	$0{,}372(x+y)$

Искомое выражение $\frac{0{,}151(x+y)-0{,}2y}{x} \cdot 100\,\%$ — отношение числа девочек, полагающих, что их принес аист, полученное вычитанием из числа всех так думающих детей числа так думающих мальчиков, к числу всех девочек, умноженное на $100\,\%$. Связать численность мальчиков и девочек можно, составив уравнение «по капусте» $0{,}63x + 0{,}33y = 0{,}477(x + y)$, откуда $0{,}153x = 0{,}147y$, $y = \frac{51}{49}x$. После подстановки последнего соотношения в искомое и сокращения на $x \neq 0$, находим ответ на вопрос задачи — $10\,\%$.

Ответ: $10\,\%$.

Здесь моделью является совокупность описания переменных, выражения для искомого и уравнения связи между переменными «по капусте».

2.2. Задачи на совместную работу, заполнение бассейнов, движение

Задачи на совместную работу, заполнение бассейнов, движение, как правило, отличаются только своим сюжетом, и сводятся при этом к одинаковым уравнениям. Обычно составляется два уравнения. Одно уравнение — по общему объему работы (пройденному пути), второе — по времени.

Для описания реальной ситуации надо ввести столько переменных, сколько удобно. При этом следует помнить, что при избытке переменных каждую из них по отдельности получить не удастся, поэтому надо сформулировать искомую комбинацию переменных и выделять именно ее. Применяемые умолчания — движение (работа) начинается и заканчивается мгновенно — начинается сразу со скоростью v и заканчивается со скоростью 0 без плавных переходов от 0 к v и обратно. Если не оговорено иное, то скорость (производительность) постоянна во время всего процесса или его определенного этапа. Если объем работы (пройденный путь) не задан, то удобно этот объем обозначить через 1, однако это ведет к нарушению размерности и не приветствуется проверяющими комиссиями, так на ОГЭ такие решения с 1 оцениваются в 0 баллов. Обычно вводят в качестве неизвестных скорости (производительности) и оперируют с ними, а время выражают из данных задачи, либо наоборот — время полагают неизвестным, а скорости — выражают.

Пример 10. Одна бригада начала строить дом. Через 7 дней вторая бригада начала строить другой такой же дом и закончила его строительство одновременно с первой. Если бы первый дом строили две бригады вместе, то им понадобилось бы 12 дней. За сколько дней построила дом одна первая бригада?

Решение: пусть весь объем работ равен 1, первая бригада строит дом за x дней — искомое, а вторая — за $x-7$ дней, тогда в день первая бригада выполняет $\frac{1}{x}$ всей работы, а вторая — $\frac{1}{x-7}$. По условию обе бригады вместе строят дом за 12 дней, откуда $12\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-7}\right)=1$, имеем квадратное уравнение $x^2-31x+84=0$, корни которого: $x_1=28$ — в ответ, и $x_2=3$ — посторонний, не удовлетворяет условию $x-7\geqslant 0$.

Ответ: 28 дней.

Пример 11. Бассейн заполняется из двух труб за 4 ч 48 мин. Если открыть только первую трубу, то бассейн заполнится на 4 ч быстрее, чем если открыть только вторую трубу. Сколько времени будет заполняться бассейн только второй трубой?

Решение: пусть объем бассейна равен V, а t — время заполнения бассейна первой трубой, тогда искомое $T=t+4$ — время заполнения бассейна второй трубой. Время заполнения бассейна совместно двумя трубами по условию составляет $4\frac{4}{5}$, или $\frac{24}{5}$ ч.

За 1 ч из первой трубы в бассейн поступает воды $\frac{V}{t}$, а из второй — $\frac{V}{t+4}$. По условию за $\frac{24}{5}$ ч обе трубы заполнят весь бассейн, откуда $\frac{24}{5}\cdot\frac{V}{t}+\frac{24}{5}\cdot\frac{V}{t+4}=V$, $\frac{24}{5}\cdot\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+4}\right)=1$, $24(t+4+t)=5t(t+4)$. Преобразуя, получим $5t^2-28t-96=0$,

$$t_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{196+5\cdot 96}}{5}=\frac{14\pm 26}{5},$$

$t_1=-\dfrac{12}{5}<0$ — посторонний, $t_2=8$ — подходит. Искомое время $T=t_2+4=8+4=12$.

Ответ: за 12 ч.

2.3. Особенности прямолинейного движения

Важно так же уметь переводить элементы условия в формулы. Так, встреча двух участников при движении «навстречу» при одновременном старте из двух различных пунктов означает:

1) в пути находились одно и то же время;

2) вместе преодолели весь путь между пунктами.

Встреча двух участников при движении «вдогонку» при одновременном старте из двух различных пунктов означает:

1) в пути находились одно и то же время;

2) один из них преодолел путь больше пути второго на величину начального расстояния между участниками (пунктами).

Важное значение имеет правильный перевод часов и минут в дроби.

Пример 12. Расстояние между городами 900 км. Одновременно выходят навстречу друг другу два поезда и встречаются через 6 ч. Если бы один поезд вышел на 1 ч 12 мин раньше, то поезда встретились бы через 5 ч 12 мин после выхода другого поезда. Найти скорость поезда, который вышел раньше.

Решение: пусть v_1 и v_2 км/ч — скорости поездов, где v_1 — искомая величина. Условие встречи поездов в обычное время дает первое уравнение $6 \cdot v_1 + 6 \cdot v_2 = 900$. Для составления второго уравнения время, данное в часах и минутах, переведем в часы. Первый поезд находился в пути дольше другого на $\frac{6}{5}$ ч, затем каждый поезд был в пути по $\frac{26}{5}$ ч, вместе прошли весь путь между городами, имеем второе уравнение $\left(\frac{6}{5} + \frac{26}{5}\right) \cdot v_1 + \frac{26}{5} \cdot v_2 = 900$. Решая их совместно, находим $v_1 = 100$, $v_2 = 50$.

Ответ: 100 км/ч.

Пример 13. Из Останкино на Шаболовку шел Степашка. Ровно в полдень, когда он преодолел $\frac{1}{3}$ часть пути, вдогонку ему из Останкино выбегает Филя, а навстречу с Шаболовки — Хрюша. Филя обогнал Степашку в 13 ч и встретил Хрюшу в 13 ч 30 мин. В какое время встретятся Степашка и Хрюша? Предполагается, что каждый из персонажей двигался с постоянной скоростью.

Решение: пусть v_1, v_2, v_3 — скорости Степашки, Фили и Хрюши, соответственно. Обзначим через l длину всего пути между Останкино и Шаболовкой. Обгон Степашки Филей означает, что в пути оба были 1 ч и Филя преодолел путь больше Степашки на величину, равную начальному расстоянию между ними, откуда

$1 \cdot v_2 - 1 \cdot v_1 = \frac{l}{3}$. Встреча Фили и Хрюши означает, что в пути оба были $\frac{3}{2}$ ч и вместе прошли путь длиной l, откуда $\frac{3}{2} \cdot v_2 + \frac{3}{2} \cdot v_3 = l$. Пусть t — искомое время встречи Степашки и Хрюши, тогда они в сумме прошли $\frac{2}{3}l$ за время $t-12$, откуда $(t-12) \cdot v_1 + (t-12) \cdot v_3 = \frac{2}{3}l$. После преобразований $t = 12 + \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{v_1+v_3}$. Исключая из первых двух уравнений v_2, имеем $v_1 + v_3 = \frac{l}{3}$, искомое время $t = 12 + 2 = 14$.

Ответ: в 14 ч.

Ниже приведен пример, когда удачно введенные обозначения позволяют создать модель с минимальными вычислениями.

Пример 14. Автомобиль проходит расстояние от A до B с постоянной скоростью. При увеличении скорости на 10 км/ч время в пути уменьшится на 4 ч, а при уменьшении скорости на 8 км/ч, оно увеличится на 5 ч. Найти расстояние AB.

Решение: пусть v — обычная скорость, а t — обычное время. Искомое vt. Условия задачи дадут

$$\begin{cases} (v+10)(t-4) = vt, \\ (v-8)(t+5) = vt; \end{cases} \begin{cases} vt - 4v + 10t - 40 = vt, \\ vt + 5v - 8t - 40 = vt; \end{cases} \begin{cases} -4v + 10t = 40, \\ 5v - 8t = 40; \end{cases}$$

$9v - 18t = 0$, $v = 2t$, $(10-8)t = 40$, $t = 20$, $v = 40$, $vt = 800$.

Ответ: 800 км.

В задачах на движение вполне могут применяться проценты, а сама задача в таком случае становится похожей на задачи про смеси или сплавы.

Пример 15. Поезд отправился с опозданием на 3 ч 36 мин от расписания. Для уменьшения опоздания поезд поддерживал скорость на 35 % выше обычной на участке в 0,81 пути между пунктами назначения, а на оставшемся участке пути — на 90 % выше обычной. В итоге поезд прибыл в конечный пункт по расписанию. Найти обычное время следования поезда от начального до конечного пункта при обычной скорости.

Решение: пусть v — обычная скорость поезда, длина пути равна l, тогда искомое обычное время $t = \frac{l}{v}$. После перевода времени опоздания в десятичные дроби оно составит 3,6 ч. Условия задачи дают $\frac{l}{v} = \frac{0{,}81l}{1{,}35 \cdot v} + \frac{(1-0{,}81)l}{1{,}90 \cdot v} + 3{,}6$. Заменив $\frac{l}{v} = t$, получим $t = 0{,}6 \cdot t + 0{,}1 \cdot t + 3{,}6$. Окончательно имеем $0{,}3 \cdot t = 3{,}6$. Искомое $t = 12$ ч.

Ответ: 12 ч.

2.4. Особенности движения по кольцу

Встречи двух участников при кольцевом движении в разных направлениях означают, что за время между встречами оба участника вместе преодолели длину кольцевого маршрута.

Встречи двух участников при кольцевом движении в одну сторону означают, что за время между встречами один из участников преодолел путь больше второго на длину кольцевого маршрута.

Пример 16. По лыжне кольцевого маршрута бегут с постоянными скоростями Чебурашка и Крокодил Гена в одном направлении, а Старуха Шапокляк — в противоположном. Шапокляк встречается с Геной каждые 2 мин, а с Чебурашкой — каждые 3 мин. Через сколько минут Крокодил Гена обгоняет Чебурашку?

Решение: пусть v_1, v_2, v_3 — скорости Чебурашки, Крокодила Гены и Старухи Шапокляк, соответственно. Обзначим через l длину всей лыжни. Встреча Крокодила Гены и Старухи Шапокляк каждые 2 мин означает, что за время 2 мин они вместе пробежали путь длиной l, откуда $2 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = l$. Встреча Чебурашки и Старухи Шапокляк каждые 3 мин означает, что за время 3 мин они вместе пробежали путь длиной l, откуда $3 \cdot v_1 + 3 \cdot v_3 = l$. Пусть t — искомое время обгона Крокодилом Геной Чебурашки, тогда за это время путь Гены будет больше, чем путь Чебурашки на длину, равную l, откуда $t \cdot v_2 - t \cdot v_1 = l$. После преобразований $t = \frac{l}{v_2 - v_1}$. Исключая из первых двух уравнений v_3, имеем $v_2 - v_1 = \frac{l}{6}$, искомое время $t = 6$.

Ответ: через 6 мин.

2.5. Особенности движения по реке

При движении по реке обычно вводят собственную скорость судна (скорость в стоячей воде) и скорость течения. При движении судна по течению, его скорость относительно берега равна сумме собственной скорости и скорости течения, а при движении против течения — их разности. Не требует дополнительных пояснений принятие скорости плота равной скорости течения.

Пример 17. Когда Штирлиц и Кэт одновременно отплывают на лодках по реке навстречу друг другу, то они встречаются через 2 ч. Если бы плыла только Кэт, а Штирлиц ее ждал на берегу, то встреча произошла бы на 1 ч позже. Сколько времени придется грести Штирлицу против течения до встречи с Кэт, если она не сможет плыть на лодке? Предполагается, что скорость течения реки, а также скорости движения героев постоянны.

Решение: пусть v_1, v_2 — скорости лодок Штирлица и Кэт в стоячей воде, соответственно, а v_3 — скорость течения реки. Обозначим через l длину всего пути между местами нахождения Штирлица и Кэт на твердой поверхности. Встреча Штирлица и Кэт при одновременном отплытии означает, что в пути оба были 2 ч и вместе проплыли расстояние, равное l, откуда $2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 = l$. Для этого уравнения скорость течения реки значения не имеет, поскольку она одинаково влияет на обоих персонажей. Если Кэт будет плыть к Штирлицу, ожидающему на берегу, ее скорость движения относительно берега составит $v_2 + v_3$, а время в пути — 3 ч, откуда $3 \cdot (v_2 + v_3) = l$. Пусть t — искомое время в пути Штирлица до встречи с Кэт, ожидающей на берегу, тогда его скорость движения относительно берега составит $v_1 - v_3$, откуда $t \cdot (v_1 - v_3) = l$. После преобразований $t = \frac{l}{v_1 - v_3}$. Исключая из первых двух уравнений v_2, имеем $v_1 - v_3 = \frac{l}{6}$, искомое время $t = 6$.

Ответ: через 6 ч.

Пример 18. Туристы на лодке 1 ч гребли вниз по реке и 30 мин плыли по течению, сложив весла. Затем, они 3 ч гребли против течения и прибыли к месту старта. Через какое время после старта вернулись бы туристы, если бы после часовой гребли вниз по реке они сразу же стали грести обратно? Скорость лодки при гребле в стоячей воде и скорость течения реки постоянны.

Решение: пусть v — скорость лодки в стоячей воде, а u — скорость течения реки. При движении по течению туристы проплыли относительно берега $1 \cdot (v + u) + \frac{1}{2} \cdot u$ км, обратно они плыли 3 ч против течения до места старта, что дает нам уравнение $1 \cdot (v + u) + \frac{1}{2} \cdot u = 3 \cdot (v - u)$. Пусть t — искомое время в пути туристов во второй ситуации, когда они возвращаются к месту старта без отдыха. На обратный путь они потратят $(t - 1)$ ч, имеем второе уравнение $1 \cdot (v + u) = (t - 1) \cdot (v - u)$. После преобразований находим $t = 1 + \frac{v+u}{v-u}$. Из первого уравнения выражаем $v = \frac{9}{4}u$, подставляем в искомое $t = 1 + \frac{\frac{9}{4}u + u}{\frac{9}{4}u - u}$, и находим $t = \frac{18}{5} = 3{,}6$.

Ответ: через 3,6 ч.

3. Экономические задачи второй части ЕГЭ

Во второй части ЕГЭ по математике имеется две задачи, которые проверяют умение составлять математические модели и получать численные результаты обработки построенной модели. Одна задача, как правило, с экономическим содержанием, а вторая — олимпиадного характера. Настоящий подраздел посвящен задачам с экономическим содержанием.

3.1. Задачи на банковские вклады

По договору банковского вклада сторонами выступают вкладчик и банк. Вкладчик на определенный срок, или бессрочно размещает свои денежные средства на закрепленном за ним банковском счете, разрешая банку пользоваться своими денежным средствами за вознаграждение, начисляемое в процентах от суммы вклада и зависящее от пополнения или частичного изъятия вклада. В просторечии употребляются выражения «положить деньги в банк под проценты», «начислены проценты» и т. п.

Основные понятия

Введем понятие банковского процента по вкладам для различных случаев.

Определение. Банковским процентом по вкладу за определенный срок называется следующая величина: $\dfrac{S_1 - S_0}{S_0} \cdot 100\,\%$, где
S_1 — сумма вклада на банковском счете в конце срока;
S_0 — начальный вклад.

Пример 19. Вкладчик внес 1000 руб. на 1 год под 50 % годовых, в конце срока у него будет 1500 руб.

Обычно вклады делают как на срок меньше года, так и на несколько лет.

Определение. Годовым банковским процентом по вкладу называется следующая величина: $\dfrac{S_1 - S_0}{S_0} \cdot 100\,\%$, где
S_1 — расчетная сумма вклада на банковском счете через год;
S_0 — начальный вклад.

Если вклад хранится меньше года, то причитающаяся вкладчику сумма за пользование банком его деньгами определяется исходя из числа дней фактического размещения средств по формуле $P = (S_1 - S_0) \cdot \dfrac{N_{\text{факт}}}{N_{\text{год}}}$, где
S_1 — расчетная сумма вклада на банковском счете через год;
S_0 — начальный вклад;
$N_{\text{факт}}$ — число дней фактического размещения средств;
$N_{\text{год}}$ — число дней в году — 365 или 366. Если вклад переходит с одного года на другой, например, с 1 сентября по 30 апреля следующего года, а число дней в годах разное, то за каждую часть соответствующего года проценты начисляются исходя из фактического количества дней в году. Например, вклад размещен с 1 сентября 2016 г. (високосного) по 30 апреля 2017 г. Проценты за период с 1 сентября по 31 декабря 2016 г. будут начислены при $N_{\text{год}} = 366$, а за период с 1 января по 30 апреля 2017 г. проценты будут начислены при $N_{\text{год}} = 365$.

В задачах могут применяться упрощенные подходы, например, вклад может размещаться на неколько месяцев, тогда сумма процентов будет пропорциональна отношению числа месяцев фактического размещения вклада по отношению к числу месяцев в году.

Пример 20. Вкладчик внес 1000 руб. на 6 месяцев под 50 % годовых, в конце срока у него будет 1250 руб.

Если срок вклада составляет несколько лет, то схема выплаты процентов может различаться. Существуют две основные схемы выплаты процентов вкладчикам — без капитализации и с капитализацией процентов.

Схема начисления процентов *с капитализацией* означает, что сумма начисленных процентов причисляется к вкладу и дальнейшие начисления процентов ведутся на увеличенную сумму

Схема начисления процентов *без капитализации* означает, что сумма начисленных процентов определяется по отношению только к начальному вкладу

Пример 21. Вкладчик внес 1000 руб. на 3 года под 50 % годовых без капитализации, в конце срока у него будет 2500 руб. (к начальной 1000 руб. добавится по 500 руб. за каждый год из трех лет).

Пример 22. Вкладчик внес 1000 руб. на 3 года под 50 % годовых с ежегодной капитализацией, в конце срока у него будет

3375 руб. Действительно, через год на счете будет 1500 руб. Проценты за второй год будут начисляться уже на новую сумму в 1500 руб. и в конце второго года на счете будет 2250 руб. Соответственно, проценты за третий год будут начисляться на 2250 руб. и итоговая сумма на счете составит 3375 руб.

Пример 23. Буратино и папа Карло планировали положить свои капиталы на общий счет в банк «Навроде» под 500 % годовых, рассчитывая через год забрать вклад величиной Ф. Крах банка изменил их планы. Буратино подарил часть своих золотых папе Карло, а остальные положил в банк «Обирон», даже не поинтересовавшись процентной ставкой. Папа Карло присоединил полученные золотые к своему капиталу и сделал вклад в банк «Вампириал» под 50 % годовых. Ровно через год они забрали свои вклады. Оказалось, что папа Карло получил $\frac{1}{6}\Phi$, а Буратино — в 3 раза меньше. Какой процент годовых выплачивает банк «Обирон»?

Решение: выясним сколько денег было у каждого персонажа изначально. Из условия про 500 % годовых следует, что общий капитал участников при вложении в банки составлял $\frac{1}{6}\Phi$, начальный капитал папы Карло составлял $\frac{1}{6\cdot 1{,}5}\Phi = \frac{1}{9}\Phi$, а начальный капитал Буратино $\frac{1}{6}\Phi - \frac{1}{9}\Phi = \frac{1}{18}\Phi$ равен тому, что он получил через год из банка. Следовательно, банк «Обирон» выплачивает 0 % годовых.

3.2. Задачи на банковские кредиты

Основные обозначения и схемы погашения банковских кредитов

На практике многие семьи прибегают к кредитованию, однако не всем известно, что существуют две основные схемы погашения банковских кредитов — дифференцированные и аннуитетные платежи. Разница между ними будет пояснена ниже.

Выплаты по кредитам имеют много общего с выплатами процентов по вкладам, изученным ранее. При кредитовании рассматривают основной долг (тело кредита) и проценты за пользование кредитом. Сам процесс кредитования предусматривает единовременный заем большой суммы и возврат ее частями в течение определенного срока. Обычно кредит выплачивается помесячно. В задачах для упрощения модели задолженность по кредиту может погашаться по годам. При любой схеме возврата кредита проценты начисляются на остаток основного долга.

Проценты (плата за пользование кредитом) начисляются за фактическое число дней пользования кредитом, исходя из остатка долга, вычисленного по формуле $P = S \cdot \dfrac{N_{\text{факт}}}{N_{\text{год}}}$, где

S — остаток долга банку;

$N_{\text{факт}}$ — число дней фактического пользования средствами;

$N_{\text{год}}$ — число дней в году — 365 или 366.

Если кредит переходит с одного года на другой, например, с 1 сентября по 30 апреля следующего года, а число дней в годах разное, то за каждую часть соответствующего года проценты начисляются исходя из фактического количества дней в году. Например, кредит выдан на период с 1 сентября 2016 г. (високосного) по 30 апреля 2017 г. Проценты за период с 1 сентября по 31 декабря 2016 г. будут начислены при $N_{\text{год}} = 366$, а за период с 1 января по 30 апреля 2017 г. проценты будут начислены при $N_{\text{год}} = 365$.

В задачах ЕГЭ обычно применяются упрощенные модели кредитования. Возврат кредита осуществляется либо по годам, либо помесячно, в последнем случае годовая процентная ставка (если не оговорено иное) делится на 12 и получается месячный процент за пользование кредитом. Обычно применяются следующие обозначения:

S — сумма кредита (основного долга);

$S_1, \ldots, S_k$ — остатки основного долга после, соответственно, первой, ..., k-й выплат;

a — годовой процент;

$b = 1+0,01 \cdot a$ — коэффициент для начисления общей суммы долга с процентами при схеме ежегодного возврата кредита;

$b = 1 + 0,01 \cdot \frac{a}{12}$ — коэффициент для начисления общей суммы долга с процентами при схеме ежемесячного возврата кредита;

X — сумма выплаты.

Следует отметить, что указанные обозначения хотя и являются общепринятыми в среде решающих и проверяющих ЕГЭ, должны быть введены в обязательном порядке в тексте решения конкретной задачи. В противном случае модель может быть не зачтена.

Дифференцированные платежи по кредитам

Таблица 2

Дата	Долг до операции	Операция	Начислено, руб.	Выплачено, руб. всего	%	осн. долг	Долг после операции
1	2	3	4	5	6	7	8
01.01	0,00	кредит	1200,00				1200,00
31.01	1200,00	проценты	24,00				1224,00
01.02	1224,00	выплата		124,00	24,00	100,00	1100,00
28.02	1100,00	проценты	22,00				1122,00
01.03	1122,00	выплата		122,00	22,00	100,00	1000,00
31.03	1000,00	проценты	20,00				1020,00
01.04	1020,00	выплата		120,00	20,00	100,00	900,00
30.04	900,00	проценты	18,00				918,00
01.05	918,00	выплата		118,00	18,00	100,00	800,00
31.05	800,00	проценты	16,00				816,00
01.06	816,00	выплата		116,00	16,00	100,00	700,00
30.06	700,00	проценты	14,00				714,00
01.07	714,00	выплата		114,00	14,00	100,00	600,00
31.07	600,00	проценты	12,00				612,00
01.08	612,00	выплата		112,00	12,00	100,00	500,00
31.08	500,00	проценты	10,00				510,00
01.09	510,00	выплата		110,00	10,00	100,00	400,00
30.09	400,00	проценты	8,00				408,00
01.10	408,00	выплата		108,00	8,00	100,00	300,00
31.10	300,00	проценты	6,00				306,00
01.11	306,00	выплата		106,00	6,00	100,00	200,00
30.11	200,00	проценты	4,00				204,00
01.12	204,00	выплата		104,00	4,00	100,00	100,00
31.12	100,00	проценты	2,00				102,00
01.01	102,00	выплата		102,00	2,00	100,00	0,00
Всего			1356	1356	156	1200	

При дифференцированных платежах по кредиту сумма основного долга распределяется равномерно по периодам возврата кредита, а проценты начисляются на остаток долга. Например, взят кредит суммой S на год с помесячной оплатой под a процентов годовых. Суммы основного долга помесячно будут составлять $S=\frac{12S}{12}, S_1=\frac{11S}{12}, S_2=\frac{10S}{12}, S_3=\frac{9S}{12}, S_4=\frac{8S}{12}, S_5=\frac{7S}{12}$, $S_6=\frac{6S}{12}, S_7=\frac{5S}{12}, S_8=\frac{4S}{12}, S_9=\frac{3S}{12}, S_{10}=\frac{2S}{12}, S_{11}=\frac{S}{12}, S_{12}=0$. Проценты за пользование кредитом будут начисляться помесячно на остатки долга по формуле $S_k \cdot b - S_k$, или по формуле $S_k \cdot 0,01 \cdot \frac{a}{12}$.

В табл. 2 приведен пример дифференцированных платежей для суммы кредита $S=1200$ руб., полученного на один год с годовой процентной ставкой $a=24\,\%$, с погашением части кредита и процентов первого числа каждого месяца ($2\,\%$ в месяц).

Отличительной чертой дифференцированных платежей является их постепенное уменьшение к концу срока выплаты кредита.

Пример 24. Планируется 15-го января взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r %, по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат, после полного погашения кредита, на 30 % больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

Решение: пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно: $S=\frac{19S}{19}, \frac{18S}{19}, \frac{17S}{19}, \ldots, \frac{2S}{19}, \frac{S}{19}, 0$. Проценты за пользование кредитом составят соответственно:

$$\frac{19S}{19}\cdot\frac{r}{100}, \frac{18S}{19}\cdot\frac{r}{100}, \frac{17S}{19}\cdot\frac{r}{100}, \ldots, \frac{2S}{19}\cdot\frac{r}{100}, \frac{S}{19}\cdot\frac{r}{100}.$$

Общая сумма выплат по кредиту составляет сумму самого кредита и процентов за пользование кредитом. По условию общая сумма выплат на 30 % больше суммы, взятой в кредит, откуда сумма процентов составит 0,3S. Суммируя проценты за пользование кредитом, имеем уравнение:

$$\frac{19S}{19}\cdot\frac{r}{100}+\frac{18S}{19}\cdot\frac{r}{100}+\frac{17S}{19}\cdot\frac{r}{100}+\dots+\frac{2S}{19}\cdot\frac{r}{100}+\frac{S}{19}\cdot\frac{r}{100}=0,3S,$$

откуда $\frac{1}{19}\cdot\frac{r}{100}\cdot(19+18+17+\dots+2+1)\cdot S=0,3S$, по формуле суммы девятнадцати первых членов арифметической прогрессии $\frac{1}{19}\cdot\frac{r}{100}\cdot\frac{(19+1)}{2}\cdot 19\cdot S=0,3S$. После необходимых вычислений получаем $r=3$.

Следует отметить, что суммы ежемесячных выплат составят

$$\frac{19S}{19}\cdot\frac{r}{100}+\frac{S}{19},\ \frac{18S}{19}\cdot\frac{r}{100}+\frac{S}{19},\ \dots,\ \frac{2S}{19}\cdot\frac{r}{100}+\frac{S}{19},\ \frac{S}{19}\cdot\frac{r}{100}+\frac{S}{19}.$$

Ответ: $r=3$.

Замечание. Не всегда схема дифференцированных платежей по кредиту осуществляется путем равномерного снижения остатков тела кредита. В условии задачи может быть оговорено, что конкретная выплата может отличаться от остальных, либо оговорено погашение тела кредита в твердых суммах в разные периоды, что не влияет на общую последовательность рассуждений. При таком условии необходимо учитывать, что проценты начисляются на остатки долга, а общая схема рассуждений остается неизменной. Рассмотрим задачу с сайта

http://alexlarin.net/ege/2018/01062018.html.

Пример 25. Планируется 15-го января взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 %, по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– на 15-е число каждого с 1 по 20 месяц долг должен уменьшаться на 50 тыс. руб., за двадцать первый месяц долг должен быть погашен полностью.

Сколько тысяч руб. составляет долг на 15-е число 20-го месяца, если банку всего было выплачено 2073 тыс. руб.?

Решение: приведем не самый рациональный, но достаточно распространенный способ. Пусть сумма кредита равна S тыс. руб. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля в следующем порядке:

$$S,\ S-50,\ S-100,\ S-150,\ \ldots,S-950,\ S-1000,\ 0.$$

Искомая величина $(S-1000)$ тыс. руб. Проценты за пользование кредитом, при $r=1$, составят, соответственно,

$$S\cdot\frac{r}{100},\ (S-50)\cdot\frac{r}{100},\ (S-100)\cdot\frac{r}{100},\ (S-150)\cdot\frac{r}{100},\ \ldots$$

$$\ldots,\ (S-950)\cdot\frac{r}{100},\ (S-1000)\cdot\frac{r}{100}.$$

Общая сумма выплат по кредиту составляет сумму самого кредита и процентов за пользование кредитом. По условию общая сумма выплат составляет 2073 тыс. руб. Суммируя тело кредита и проценты за пользование кредитом, имеем уравнение

$$S+0,01\cdot(S+S-50+S-100+S-150+\cdots+S-950+S-1000)=2073,$$

откуда $S+0,01\cdot 21S-0,01\cdot 50\cdot(1+2+\cdots+20)=2073$. По формуле суммы первых двадцати членов арифметической прогрессии имеем $1,21S-0,01\cdot 50\cdot\frac{(1+20)}{2}\cdot 20=2073$. После необходимых вычислений получаем $S=1800$, искомое $S-1000=800$.

Следует отметить, что более удобная модель получается, если за неизвестное X взять последний платеж, а общую сумму, взятую в кредит, выразить как $(X+1000)$ руб.

Ответ: 800 тыс. руб.

Аннуитетные платежи по кредитам

Аннуитетные платежи отличаются от дифференцированных тем, что за все время кредитования регулярно выплачивается одна и та же сумма, при этом она состоит из суммы процентов и суммы в счет погашения основного долга. Точно так же проценты

начисляются на сумму остатка основного долга после каждой выплаты, вычитаются из фиксированной суммы аннуитетного платежа, получается сумма для погашения основного долга из этой выплаты. Рассчитаем сумму аннуитетного платежа при следующих данных. Пусть
S — сумма кредита (основного долга);
$S_1, \ldots, S_k$ — остатки основного долга после соответственно, первой, $\ldots$, k-й выплат;
a — годовой процент;
$b = 1+0,01 \cdot a$ — коэффициент для начисления общей суммы долга с процентами при схеме ежегодного возврата кредита;
$b = 1 + 0,01 \cdot \frac{a}{12}$ — коэффициент для начисления общей суммы долга с процентами при схеме ежемесячного возврата кредита;
X — сумма аннуитетного (постоянного) платежа.
После 1-й выплаты имеем $S_1 = S \cdot b - X$,
после 2-й выплаты —

$$S_2 = S_1 \cdot b - X = (S \cdot b - X) \cdot b - X = S \cdot b^2 - (1 + b) \cdot X;$$

после 3-й выплаты — $S_3 = S_2 \cdot b - X = S \cdot b^3 - (1 + b + b^2) \cdot X$;
после 4-й выплаты — $S_4 = S_3 \cdot b - X = S \cdot b^4 - (1 + b + b^2 + b^3) \cdot X$;
$\ldots$
после l-й выплаты —

$$S_l = S \cdot b^l - (1 + b + b^2 + b^3 + \cdots + b^{l-1}) \cdot X = S \cdot b^l - \frac{b^l - 1}{b - 1} \cdot X.$$

Если после l-й выплаты кредит погашен, то $S_l = 0$, откуда $X = S \cdot b^l \cdot \dfrac{b - 1}{b^l - 1}$.

В табл. 3 приведен пример аннуитетных платежей для суммы кредита $S = 1200$ руб., полученного на один год ($l = 12$) с годовой процентной ставкой $a = 24\,\%$ и с ежемесячным погашением части кредита и процентов первого числа ($2\,\%$ в месяц, $b = 1,02$, $X \approx 113,47$ руб., последний платеж — выравнивающий за счет округлений).

Таблица 3

Дата	Долг до операции	Операция	Начислено, руб.	Выплачено, руб. всего	%	осн. долг	Долг после операции
1	2	3	4	5	6	7	8
01.01	0,00	кредит	1200,00				1200,00
31.01	1200,00	проценты	24,00				1224,00
01.02	1224,00	выплата		113,47	24,00	89,47	1110,53
28.02	1110,53	проценты	22,21				1132,74
01.03	1132,74	выплата		113,47	22,21	91,26	1019,27
31.03	1019,27	проценты	20,39				1039,66
01.04	1039,66	выплата		113,47	20,39	93,08	926,19
30.04	926,19	проценты	18,52				944,71
01.05	944,71	выплата		113,47	18,52	94,95	831,24
31.05	831,24	проценты	16,62				847,86
01.06	847,86	выплата		113,47	16,62	96,85	734,39
30.06	734,39	проценты	14,69				749,08
01.07	749,08	выплата		113,47	14,69	98,78	635,61
31.07	635,61	проценты	12,71				648,32
01.08	648,32	выплата		113,47	12,71	100,76	534,85
31.08	534,85	проценты	10,70				545,55
01.09	545,55	выплата		113,47	10,70	102,77	432,08
30.09	432,08	проценты	8,64				440,72
01.10	440,72	выплата		113,47	8,64	104,83	327,25
31.10	327,25	проценты	6,55				333,80
01.11	333,80	выплата		113,47	6,55	106,92	220,33
30.11	220,33	проценты	4,41				224,74
01.12	224,74	выплата		113,47	4,41	109,06	111,27
31.12	111,27	проценты	2,23				113,50
01.01	113,50	выплата		113,50	2,23	111,27	0,00
Всего			1361,67	1361,67	161,67	1200	

Пример 26. Иван 31 декабря 2016 г. взял в банке 9282000 руб. в кредит под 10 % годовых. Схема возврата кредита следующая:

31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10 %), затем Иван переводит в банк X руб. Какой должна быть сумма X, чтобы Иван выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года)?

Решение: пусть
S — сумма кредита (основного долга);
$S_1, \ldots, S_k$ — остатки основного долга после соответственно, первой, …, k-й выплат;
a — годовой процент;
$b = 1+0,01 \cdot a$ — коэффициент для начисления общей суммы долга с процентами при схеме ежегодного возврата кредита;
X — сумма аннуитетного (постоянного) платежа.
После 1-й выплаты имеем сумму оставшегося долга $S_1 = S \cdot b - X$.
После 2-й выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_2 = S_1 \cdot b - X = (S \cdot b - X) \cdot b - X = S \cdot b^2 - (1 + b) \cdot X.$$

После 3-й выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = S_2 \cdot b - X = S \cdot b^3 - (1 + b + b^2) \cdot X = S \cdot b^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X.$$

После 4-й выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_4 = S_3 \cdot b - X = S \cdot b^4 - (1 + b + b^2 + b^3) \cdot X = S \cdot b^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1} \cdot X.$$

По условию четырьмя выплатами Иван должен погасить кредит полностью, поэтому $S \cdot b^4 - \frac{b^4-1}{b-1} \cdot X = 0$.

При $S = 9282000$ и $a = 10$ имеем: $b = 1,1$ и

$$X = \frac{9282000 \cdot 1,4641 \cdot 0,1}{0,4641} = 2928200 \text{ руб.}$$

Ответ: 2928200 руб.

Задачи на аннуитетные платежи можно решать, рассуждая с конца, совсем не вводя никаких переменных. Следующий пример иллюстрирует этот метод. Такое решение тоже является моделью.

Пример 27. Иван 31 декабря 2016 г. взял в банке кредит под 25 % годовых. Схема возврата кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 25 %), затем Иван переводит в банк 625000 руб. Какой была сумма кредита, если Иван выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года)?

Решение: кредиту под 25 % годовых соответствует множитель $b = \frac{5}{4}$. Последняя выплата в 625000 руб. состояла из оставшейся суммы долга и суммы начисленных процентов, таким образом, остаток долга на 31 декабря 2020 г., до начисления суммы процентов, составлял $625000 : \frac{5}{4} = 500000$ руб. Годом ранее, на 31 декабря 2019 г., до начисления суммы процентов, остаток суммы долга составлял $(500000 + 625000) : \frac{5}{4} = 900000$ руб. Еще годом ранее, на 31 декабря 2018 г., до начисления суммы процентов, остаток суммы долга составлял $(900000 + 625000) : \frac{5}{4} = 1220000$ руб., а на 31 декабря 2017 г. до начисления суммы процентов остаток суммы долга составлял $(1220000 + 625000) : \frac{5}{4} = 1476000$ руб., что равно сумме, взятой в кредит.

Ответ: 1476000 руб.

Замечание. Аналог рассуждений возврата аннуитетных платежей по кредиту возможен при различных фиксированных суммах выплат для погашения кредита, что не влияет на общую последовательность рассуждений. При таком условии необходимо учитывать, что проценты начисляются на остатки долга, а общая схема рассуждений остается неизменной. Рассмотрим еще одну задачу.

Пример 28. Олег 31-го декабря 2014 г. взял в банке 1 млн руб. в кредит. Схема возврата кредита следующая: 31-го декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на определенное количество процентов), затем Олег переводит в банк очередную выплату. Олег выплатил кредит двумя платежами, переведя в первый раз 550 тыс. руб., а во второй — 638,4 тыс. руб. Под какой процент банк выдал кредит Олегу?

Решение: пусть

S — сумма кредита (основного долга);

S_1, S_2 — остатки основного долга после соответственно, первой и второй выплат;

a — годовой процент;

$b = 1 + 0,01 \cdot a$ — коэффициент для начисления общей суммы долга

с процентами при схеме ежегодного возврата кредита;
X — сумма первого платежа;
Y — сумма второго платежа.
После 1-й выплаты имеем сумму оставшегося долга $S_1 = S \cdot b - X$.
После 2-й выплаты сумма оставшегося долга составляет

$$S_2 = S_1 \cdot b - Y = (S \cdot b - X) \cdot b - Y = S \cdot b^2 - b \cdot X - Y.$$

По условию, двумя выплатами, Олег должен погасить кредит полностью, поэтому $S \cdot b^2 - X \cdot b - Y = 0$.

При $S = 1000$ $X = 550$ и $Y = 638,4$ имеем квадратное, относительно b, уравнение с $D = X^2 + 4SY = 1690^2$, откуда $b = \frac{X+\sqrt{D}}{2S} = \frac{550+1690}{2000} = 1,12$ (второй корень отрицателен), найдем $a = (b-1) \cdot 100 = 12$.

Ответ: 12 %.

Часто встречаются задачи на комбинацию кредитных схем.

Пример 29. В июле 2023 г. планируется взять кредит на пять лет в сумме 900 тыс. руб. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2024, 2025, 2026 гг. долг остается равным 900 тыс. руб.;
– выплаты 2027 и 2028 гг. равны;
– к июлю 2028 г. долг будет выплачен полностью.
На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

Решение: выплаты в 2024, 2025, 2026 гг. одинаковы и составляют по $0{,}25 \cdot 900 = 225$ тыс. руб. Следовательно, первая выплата равна 225 тыс. руб.

Пусть X — ежегодная выплата в 2027 и 2028 гг. После выплаты в 2027 г. остаток долга $S_4 = 900 \cdot 1{,}25 - X$ тыс. руб. После выплаты в 2028 г. сумма оставшегося долга составляет $S_5 = S_4 \cdot 1{,}25 - X$, $S_5 = (900 \cdot 1{,}25 - X) \cdot 1{,}25 - X$, $S_5 = 900 \cdot 1{,}25^2 - 2{,}25 \cdot X$.

По условию двумя последними выплатами кредит должен быть погашен полностью, поэтому $S_5 = 0$, откуда $900 \cdot 1{,}25^2 - 2{,}25 \cdot X = 0$, последняя выплата $X = 625$ тыс. руб, искомая разность между первой и последней выплатами равна $625 - 225 = 400$ тыс. руб.

Ответ: 400 тыс. руб.

3.3. Задачи на оптимизацию

Задачи на оптимизацию обычно предполагают наличие нескольких видов деятельности с различными затратами или предполагаемыми доходами, эти величины определенным образом связаны между собой, при этом требуется найти оптимальную величину для описываемой ситуации — наименьшие затраты для производства одной и той же продукции, наибольшую выручку при имеющихся ресурсах и тому подобное.

Основные понятия

Для решения оптимизационных задач необходимо ввести целевую функцию (доход, затраты), которую исследовать на максимум или минимум при имеющихся связях между переменными и ограничениях на них. Как правило, в задачах ресурсов бывает несколько, а связей меньше, чем ресурсов. Ограничения бывают естественными, например, объем продукции или деньги не могут быть отрицательными или не могут превышать имеющееся их общее количество. Ограничения также могут быть заданы явно условием задачи.

В общем виде это может выглядеть, например, следующим образом: найти максимум (минимум) $f(x, y, u, v)$ при условиях:

$$\begin{cases} g_1(x, y, u, v) = 0, \\ g_2(x, y, u, v) = 0, \\ g_3(x, y, u, v) = 0, \\ x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ y_0 \leqslant y \leqslant y_1, \\ u_0 \leqslant u \leqslant u_1, \\ v_0 \leqslant v \leqslant v_1, \end{cases}$$

где $f(x, y, u, v)$ надо составить самостоятельно, $g_k(x, y, u, v)$, x_0, x_1, y_0, y_1 u_0, u_1, v_0, v_1 заданы или определяются условиями задачи.

Пример 30. У Фермера есть два поля, каждое площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 4000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 5000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение: пусть картофелем засеяно x га на первом поле, а на втором, соответственно, y га. Пусть свеклой засеяно u га на первом поле, а на втором, соответственно, v га. Тогда целевая функция дохода имеет вид $f(x, y, u, v) = 4000 \cdot 300 \cdot x + 4000 \cdot 200 \cdot y + 5000 \cdot 200 \cdot u + 5000 \cdot 300 \cdot v$. Требуется найти $\max f(x, y, u, v)$ при условиях:

$$\begin{cases} x + u = 10, \\ y + v = 10, \\ 0 \leqslant x \leqslant 10, \\ 0 \leqslant y \leqslant 10, \\ 0 \leqslant u \leqslant 10, \\ 0 \leqslant v \leqslant 10. \end{cases}$$

Следует отметить, что условия задачи о том, что поля можно засеивать культурами в любых соотношениях, отражены в первых двух уравнениях, а естественные ограничения на введенные переменные продиктованы их неотрицательностью и фактическими размерами полей.

Исключим переменные u и v. Имеем $u = 10 - x$, $v = 10 - y$, $f(x, y) = 4000 \cdot 300 \cdot x + 4000 \cdot 200 \cdot y + 5000 \cdot 200 \cdot (10 - x) + 5000 \cdot 300 \cdot (10 - y)$, $f(x, y) = 100000 \cdot (250 + 2x - 7y)$.

Теперь требуется найти $\max f(x, y) = 100000 \cdot (250 + 2x - 7y)$ при условиях $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 10, \\ 0 \leqslant y \leqslant 10. \end{cases}$ Из анализа вида функции и ограничений на переменные можно прийти к выводу, что x должен быть максимально возможным (добавить больше), а y — минимально возможным (вычесть меньше), откуда $x = 10$, а $y = 0$, $\max f(x, y) = 100000 \cdot (250 + 2 \cdot 10) = 27000000$.

Ответ: 27000000 руб.

Замечание. При решении указанной задачи можно изначально ввести меньше переменных, используя заданные ограничения. Кроме того, удобно в таком случае представить данные задачи в виде табл. 4.

Таблица 4

Поля	№ 1, $S = 10$ га		№ 2, $S = 10$ га	
Культуры	урожайность, ц/га	кол-во, га	урожайность, ц/га	кол-во, га
Картофель	300	x	200	y
Свекла	200	$10 - x$	300	$10 - y$

Целевая функция дохода примет вид
$f(x, y) = 4000 \cdot (300 \cdot x + 200 \cdot y) + 5000 \cdot (200 \cdot (10 - x) + 300 \cdot (10 - y))$,
$f(x, y) = 100000 \cdot (250 + 2x - 7y)$, далее решение аналогично.

Более сложные примеры с использованием свойств целых чисел

Пример 31. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 м^2 и номера «люкс» площадью 45 м^2. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 м^2. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 руб. в сутки, а номер «люкс» — 4000 руб. в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

Решение: пусть в отеле размещено обычных номеров x, а номеров «Люкс», соответственно — y. Представим данные задачи в виде табл. 5.

Таблица 5

Номера	Обычные		«Люкс»	
Характеристики	единиц	кол-во	единиц	кол-во
Площадь, м^2	27	x	45	y
Доход, руб.	2000	x	4000	y

Целевая функция дохода примет вид $f(x, y) = 2000 \cdot x + 4000 \cdot y$, ограничения: $27 \cdot x + 45 \cdot y \leqslant 981$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

При решении подобных задач необходимо заметить некоторое свойство, которое позволит дать оценку переменным.

Заметим, что 5 обычных номеров равны по площади 3-м номерам «Люкс». В самом деле $5 \cdot 27 = 135 = 3 \cdot 45$, при этом доход от 5-и обычных номеров составит $5 \cdot 2000 = 10000$ руб., в то время как доход от 3-х номеров «Люкс» составит $3 \cdot 4000 = 12000$ руб. Отсюда следует, что обычных номеров должно быть не более 4, т. е. $0 \leqslant x \leqslant 4$. Далее осуществляем перебор по x согласно табл. 6.

Таблица 6

Номера	Обычные		«Люкс»		Доход
Занятая площадь, м^2	цена, руб.	кол-во, шт.	цена, руб.	кол-во, шт.	$f(x, y)$, руб.
945	2000	$x = 0$	4000	$y = 21$	84000
972	2000	$x = 1$	4000	$y = 21$	86000
954	2000	$x = 2$	4000	$y = 20$	84000
981	2000	$x = 3$	4000	$y = 20$	86000
963	2000	$x = 4$	4000	$y = 19$	84000

Из табл. 6 видно, что максимальный доход 86000 руб. можно извлечь в двух случаях. Такое решение является полным, поскольку в условии не сказано, что под номера надо использовать всю отведенную площадь. В итоге, максимальный доход можно извлечь без использования всей площади.

Если бы в условии было явно указано, что надо использовать всю площадь, то решение можно было бы сократить. Приведем решение для случая, когда использована вся площадь. Имеем целевую функцию дохода $f(x, y) = 2000 \cdot x + 4000 \cdot y$, ограничения: $27 \cdot x + 45 \cdot y = 981$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Точно так же замечаем, что $0 \leqslant x \leqslant 4$. Сокращая на общий множитель 9, имеем $3x + 5y = 109$, $x = \frac{109-5y}{3}$, $x = 36 + \frac{1+y}{3} - 2y$, откуда $\frac{1+y}{3}$ — целое, т. е. $1 + y = 3 \cdot m, m \in Z$, $y = 3 \cdot m - 1$, $x = 36 + m - 2 \cdot (3 \cdot m - 1)$, $x = 38 - 5 \cdot m$. С учетом $0 \leqslant x \leqslant 4$, имеем $0 \leqslant 38 - 5 \cdot m \leqslant 4$, откуда $m = 7$ (единственное целое), $x = 3$, $y = 20$. Искомый доход составляет 86000 руб.

Ответ: 86000 руб.

Пример 32. Профсоюзу выделили 2 000 000 руб. на путевки в дома отдыха. Продолжительность отдыха по различным путевкам составляет 15, 27 или 45 дней. Стоимость путевок соответственно количеству дней отдыха составляет 21000, 40000 и 60000 руб. Сколько и каких путевок надо купить, чтобы потратить все деньги и сделать число дней отдыха наибольшим?

Решение: пусть куплено путевок первого типа x, второго — y, а третьего, соответственно — z. Целевая функция количества дней примет вид $f(x, y, z) = 15x + 27y + 45z$, ограничения: $x \geqslant 0$, $x \in Z$, $y \geqslant 0$, $y \in Z$, $z \geqslant 0$, $z \in Z$, $21000x + 40000y + 60000z = 2000000$. Надо найти $\max f(x, y, z)$ при заданных ограничениях.

Заметим, что 20 путевок первого типа имеют такую же стоимость, что и 7 путевок третьего типа, при этом число дней отдыха составит 300 и 315, соответственно. Таким образом, путевок первого типа надо покупать не более 19, иначе число дней отдыха будет меньше максимально возможного. Аналогично, заметим, что стоимость трех путевок второго типа равна стоимости двух путевок третьего типа, при этом число дней отдыха составляет 81 и 90, соответственно. Поэтому число путевок второго типа не более 2, откуда имеем оценки $0 \leqslant x \leqslant 19, x \in Z$, $0 \leqslant y \leqslant 2, y \in Z$. Кроме того, $21000 \cdot x = 2000000 - 40000 \cdot y - 60000 \cdot z$, $21 \cdot x = 2000 - 40 \cdot y - 60 \cdot z = 20 \cdot (100 - 2 \cdot y - 3 \cdot z)$, откуда видно, что произведение $21 \cdot x$ делится на 20. Однако 20 и 21 взаимно просты, поэтому x делится на 20, с учетом неравенства $0 \leqslant x \leqslant 19, x \in Z$, имеем $x = 0$. Подставляя найденное $x = 0$ в формулу ограничений, получим $100 - 2 \cdot y - 3 \cdot z = 0$, при этом $0 \leqslant y \leqslant 2, y \in Z$. Далее осуществляем перебор по y. При $y = 0$ имеем $3z = 100$, что невозможно. При $y = 1$ имеем $3z = 98$, что также невозможно. При $y = 2$ получаем $3z = 96$, $z = 32$.

Ответ: 2 путевки на 27 дней и 32 путевки на 45 дней.

Пример 33. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали А и В. На первом комбинате работает 40 человек, и один рабочий изготавливает за смену 5 деталей А, или 15 деталей В. На втором комбинате работает 160 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 деталей А, или 5 деталей В. Оба эти комбината поставляют детали на третий комбинат, где собирают изделие, для изготовления которого нужны две детали A и одна деталь B. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий, при таких условиях, может собрать третий комбинат из деталей, произведенных за смену?

Решение: пусть x рабочих изготавливают деталь A на первом комбинате, а на втором, соответственно — y. Пусть остальные рабочие изготавливают деталь B на каждом комбинате. Представим данные задачи в виде табл. 7.

Таблица 7

Комбинаты	№ 1, 40 человек		№ 2, 160 человек	
Детали	производит.	число рабочих	производит.	число рабочих
A	15	x	5	y
B	5	$40-x$	15	$160-y$

По условию для одного изделия требуется две детали A и одна деталь B, что дает соотношение

$$15\cdot x+5\cdot y=2\cdot(5\cdot(40-x)+15\cdot(160-y)),$$

или после преобразований $5x+7y=1040$.

Тогда целевая функция количества изделий имеет вид

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\cdot(15\cdot x+5\cdot y).$$

Требуется найти $\max f(x,y)$ при условиях:

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 40, \\ 0\leqslant y\leqslant 160, \\ 5x+7y=1040. \end{cases}$$

Следует отметить, что естественные ограничения на введенные переменные продиктованы их неотрицательностью и максимально возможным количеством рабочих.

Выразим из последнего соотношения $y = \frac{1040-5x}{7}$, выделим целые части, $y = 148 + \frac{4+2x}{7} - x$, откуда число $\frac{4+2x}{7}$ — целое. Перебирая остатки $k \in Z \cap [-3; 3]$ от деления на 7 в формуле $x = 7 \cdot m + k, m \in Z$, чтобы дробь $\frac{4+2x}{7}$ стала целым числом, получим $x = 7 \cdot m - 2, m \in Z$, откуда с учетом предыдущей формулы, $y = 150 - 5 \cdot m$. Подставляя найденные выражения для x и y в целевую функцию, имеем $f(m) = \frac{1}{2} \cdot (15 \cdot (7 \cdot m - 2) + 5 \cdot (150 - 5 \cdot m))$, $f(m) = 360 + 40 \cdot m$. Целевая функция $f(m)$ достигнет максимума, если m будет максимально возможным. Оценим его. С учетом $0 \leqslant x \leqslant 40$, имеем $0 \leqslant 7 \cdot m - 2 \leqslant 40$, откуда $1 \leqslant m \leqslant 6$, второе условие $0 \leqslant y \leqslant 160$, или $0 \leqslant 150 - 5 \cdot m \leqslant 160$, дает $-2 \leqslant m \leqslant 30$, при одновременном выполнении условий находим, что максимальное $m = 6$, соответственно, $f(m) = 360 + 240 = 600$.

Ответ: 600 изделий.

4. Олимпиадные задачи второй части ЕГЭ

4.1. Общее устройство олимпиадной задачи ЕГЭ

Последняя задача второй части ЕГЭ по математике относится к олимпиадным. Эта задача имела номер 19 по 2021 г. включительно, с 2022 г. она нумеруется 18. Задача относится к «нерегулярным», т. е. каким-то одним или несколькими общими методами все такие задачи не решаются. Каждая задача требует индивидуального подхода к решению, при этом, для решения такой задачи, не требуется никаких фактов, выходящих за рамки школьного курса.

Согласно методическим материалам для председателей и членов предметных комиссий субъектов РФ по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2021 г. по математике (https://doc. fipi.ru/ege/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf/2021/matematika_mr_ege_2021.doc) задание проверяет достижение следующих целей изучения математики на профильном уровне: «развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности».

Условие задания 18 разбито на пункты — ряд подзадач (частных случаев), последовательно решая которые можно в итоге полностью выполнить задание. Такое разбиение, в первую очередь, облегчает участнику экзамена планирование работы над данной задачей, а также позволяет более четко и прозрачно провести оценивание выполнения задания.

Обычно предлагатся рассмотреть три пункта. Первый, как правило, несложный, требует положительного или отрицательного ответа на уровне примера или некоторого рассуждения о частном случае и оценивается в 1 первичный балл. Второй пункт, как правило, требует более глубокого изучения задачи, составления усеченной модели исходной задачи и предусматривает положительный или отрицательный ответ, возможно с построением примера, также оценивается в 1 первичный балл. Третий пункт требует ответа на вопрос в общей ситуации, обычно требутся построить модель в общем виде, провести оценку и привести пример, при котором эта оценка достигается (неравенство превращается в равенство). Максимальная оценка за третий пункт — 2 первичных балла, из них один балл дается за оценку, а второй — за пример, при этом только пример без доказанной оценки оценивается в 0 баллов. Максимальный первичный балл за всё задание равен 4.

Достаточно широко распространено убеждение, что последняя задача на ЕГЭ по математике, это задача по теории чисел. В реальных заданиях ЕГЭ требуются минимальные знания из теории чисел, да и то, не во всяких задачах. Как показывает опыт, очень много учащихся, особенно не владеющих знаниями регулярных методов решения задач с меньшими номерами, берутся за решение последнего задания. Конечно, многие прагматичные школьники получают свои 1–2 балла за подобное задание, однако полный балл получают единицы. Этот момент следует учитывать при подготовке и трезво оценивать свои возможности в условиях реального экзамена, чтобы потратить время на более решаемые задачи.

4.2. Подготовительные задачи

Следующий пример не является заданием ЕГЭ, однако он иллюстрирует первые шаги в построении модели и оценки.

Пример 34. Утром в магазин привезли 6 бидонов, в которых было 12, 16, 17, 18, 19 и 25 л молока. До обеда было полностью продано молоко ровно из 3-х бидонов, а к закрытию — еще из ровно 2-х бидонов. До обеда молока в литрах было продано вдвое больше, чем после. Указать, из каких бидонов было продано молоко до обеда.

Решение: из условия о том, что до обеда молока продали вдвое больше, чем после, вытекает, что число проданных литров молока кратно 3. Молока было $12 + 16 + 17 + 18 + 19 + 25 = 107$ л всего. Число 107 при делении на 3 дает остаток 2. По условию остался непроданым всего один бидон, поэтому количество молока в нем должно давать такой же остаток от деления на 3, что и общее количество завезенного молока. Путем перебора находим, что остаток 2 дает только число 17, следовательно, продано $107-17 = 90$ л молока, из них треть после обеда — 30. Из имеющихся чисел 30 в сумме дают только 12 и 18, следовательно, из этих бидонов молоко было продано после обеда. Исключая из рассмотрения числа 12, 17 и 18 получаем из каких бидонов молоко было продано до обеда.

Ответ: 16; 19 и 25 л.

Следующий пример тоже не является заданием ЕГЭ, однако он иллюстрирует построение модели и оценки, а также, что на практике означает «оценка достигается», или «привести пример, обеспечивающий точность оценки».

Пример 35. Необходимо доставить по железной дороге 12 больших и 120 малых контейнеров. Грузоподъемность каждого вагона 70 т, в нем можно разместить до 30-ти малых контейнеров весом по 2 т. Большой контейнер весом 25 т занимает в вагоне место 9-ти малых контейнеров. Найти наименьшее число вагонов, необходимое для перевозки всех контейнеров (оценить и привести пример загрузки вагонов, обеспечивающий точность оценки).

Решение: в один вагон войдет не более двух больших контейнеров, из-за ограничений по весу, поскольку $2 \cdot 25 < 70$, в то время, как $3 \cdot 25 > 70$. При загрузке в вагон одного большого контейнера, остается $30 - 9 = 21$ мест для малых. При загрузке в вагон двух больших контейнеров, остается по весу и вместимости не более 10 мест для малых контейнеров. Пусть x вагонов загружены только малыми, не более, чем 30, контейнерами; y — одним большим и не более, чем 21, малыми; z — двумя большими, а также не более, чем 10, малыми контейнерами; искомое $x + y + z$. По условию

$$\begin{cases} y + 2z \geqslant 12, \\ 30x + 21y + 10z \geqslant 120. \end{cases}$$

Умножим первое неравенство на 9 и сложим со вторым, получим $30x+30y+28z \geqslant 228$. Заметим, что при неотрицательных z верно $30x + 30y + 30z \geqslant 30x + 30y + 28z$, откуда по свойству транзитивности неравенств $30x + 30y + 30z \geqslant 228$ тоже верно, тогда имеем оценку $x + y + z \geqslant \frac{228}{30} > 7$. Учитывая, что переменные слева целые, имеем $x + y + z \geqslant 8$. Покажем, что вагонов может быть ровно 8. В самом деле, количества вагонов $x = 1$, $y = 2$ и $z = 5$ подходят по загрузке для данной перевозки (удовлетворяют системе неравенств) и в сумме дают 8. Этот пример обеспечивает точность полученной оценки.

Ответ: 8 вагонов.

Следующий пример не является заданием ЕГЭ, однако он хорошо иллюстрирует построение модели и оценки.

Пример 36. Три сестры торговали на рынке ягодой в литровых банках по единой цене, выраженной в целых рублях (без копеек). У одной было 10 банок ягоды, у второй — 22, а у третьей — 42. До обеда каждая из них продала не менее одной банки, но не все. После обеда ягода начала портиться, цену понизили. В конце дня вся ягода была продана, а каждая сестра получила по 2760 руб. По какой цене продавалась банка ягоды до и после обеда?

Решение: пусть x, y и z — количество банок, проданных сестрами до обеда. Тогда после обеда ими продано $10 - x$, $22 - y$ и $42 - z$

банок, соответственно. По условию $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ и $z \geqslant 1$. Пусть m руб. — цена банки ягоды до обеда, а n руб. — после обеда, по условию $m - n > 0$. Условия задачи дадут:

$$\begin{cases} m \cdot x + n \cdot (10 - x) = 2760, \\ m \cdot y + n \cdot (22 - y) = 2760, \\ m \cdot z + n \cdot (42 - z) = 2760, \end{cases} \quad \begin{cases} (m - n) \cdot x + 10 \cdot n = 2760, \\ (m - n) \cdot y + 22 \cdot n = 2760, \\ (m - n) \cdot z + 42 \cdot n = 2760. \end{cases}$$

Вычитая из третьего уравнения первое, а затем — из третьего второе, получим:

$$\begin{cases} (m - n) \cdot (z - x) + 32 \cdot n = 0, \\ (m - n) \cdot (z - y) + 20 \cdot n = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (m - n) \cdot (x - z) = 32 \cdot n, \\ (m - n) \cdot (y - z) = 20 \cdot n. \end{cases}$$

Заметим, что первый множитель уравнений — положительное целое число по условию (после обеда цена понижена), правые части уравнений — натуральные числа, поэтому вторые множители левой части уравнений также целые положительные числа, поэтому можно поделить одно уравнение на другое. После деления имеем $\frac{x-z}{y-z} = \frac{32}{20}$, $\frac{x-z}{y-z} = \frac{8}{5}$. Преобразуя, получим уравнение в натуральных числах $5 \cdot (x - z) = 8 \cdot (y - z)$. Поскольку числа 5 и 8 взаимно просты, то $x - z$ кратно 8, а $y - z$, соответственно, кратно 5. Положим $t = \frac{x-z}{8} = \frac{y-z}{5}$, $t > 0$, тогда $x = z + 8 \cdot t$, $y = z + 5 \cdot t$. По условию $x < 10$ (до обеда проданы не все банки), поэтому $z + 8 \cdot t < 10$. Такое неравенство выполняется только при $z = t = 1$ (с учетом $z \geqslant 1$), откуда $x = 9$. Подставляя найденные x и z в первое и третье уравнения первой полученной системы, имеем

$$\begin{cases} m \cdot 9 + n = 2760, \\ m + n \cdot 41 = 2760. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе и сокращая, получим соотношение $m = 5 \cdot n$. Подставив это соотношение во второе уравнение, получим $46 \cdot n = 2760$, откуда $n = 60$, $m = 300$.

Ответ: 300 и 60 руб.

Следующий пример ближе к ЕГЭ, но его трудность несопоставимо мала по сравнению с реальными экзаменациоными заданиями.

Пример 37. У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объемов, в двух из которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе заполнится. Выливать воду из ведер в другие места, кроме имеющихся ведер, запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из ведер ровно 2 л воды, если сначала у него были ведра объемом 4 и 7 л, полные воды, а также пустое ведро объемом 8 л?

б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объемы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объемами 5 и 7 л, полные воды, а также пустое ведро объемом 10 л?

в) Сначала у Бори были ведра объемами 3 и 6 л, полные воды, а также пустое ведро объемом n л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что Боря смог получить через несколько шагов ровно 4 л воды в одном из ведер?

Решение: пусть упорядоченная тройка $(x;y;z)$ означает, что в ведрах, изначально упорядоченных по возрастанию их объема, находится, соответственно, x, y и z л воды.

а) Да, мог. Вначале количество воды в ведрах: $(4;7;0)$, затем переливания $(4;0;7)$, $(0;4;7)$. Далее, Боря отлил из третьего ведра в первое емкостью 4 л: $(4;4;3)$, затем из первого во второе емкостью 7 л: $(1;7;3)$ и, наконец, из второго в третье емкостью 8 л: $(1;2;8)$. Во втором ведре осталось 2 л воды.

б) Нет. У Бори 12 л воды, если их разлить каким-то способом поровну по трем ведрам, то в каждом окажется по 4 л воды — и ни одно из ведер не будет ни полным, ни пустым, что противоречит заданному в условии способу переливания.

в) Если объем третьего ведра $n \geqslant 9$ л, то при любых переливаниях в ведрах получатся объемы, кратные 3 (суммы и разности чисел, кратных 3, сами кратны 3), поэтому 4 л ни в одном из ведер получить невозможно. Следовательно, имеем оценку $n \leqslant 8$. Приведем пример для $n = 8$. Запишем в виде упорядоченных троек объемы воды в ведрах на каждом шаге: $(3;6;0)$, $(0;3;6)$ (после первых двух переливаний), $(0;1;8)$ (из второго в третье), $(3;1;5)$

(из третьего в первое), $(0;4;5)$ (из первого во второе). В итоге, во втором ведре получилось 4 л.

Ответ: а) да; б) нет; в) $n = 8$.

4.3. Задачи на делимость и оценивание

Далее разобраны примеры, где свойства делимости используются по существу. Кроме того, требуется уметь применять приемы оценивания.

Пример 38. На доске написаны различные натуральные числа, состоящие только из цифр 4 и 9 (при этом может быть использована только одна из них).

а) Может ли их сумма равняться 107?

б) Может ли их сумма равняться 289?

в) Какое минимальное количество таких чисел может быть написано на доске, если их сумма равна 4471?

Решение.

а) 107=94+9+4.

б) Трехзначные не подходят — любое из них начинается с 4 или 9, тем самым превышает требуемую сумму. Таких однозначных и двузначных чисел всего шесть — 4, 9, 44, 49, 94, 99. Их сумма равна 299. Получить требуемую сумму 289 из суммы всех чисел 299, отнимая одно или несколько чисел невозможно, это устанавливается путем перебора. Двузначные числа нет смысла отнимать, сумма будет слишком маленькой, а при вычитании однозначных чисел, требуемая сумма не получается.

в) Мы можем брать только числа, в записи которых не более трех знаков, поскольку самое маленькое четырехзначное число превосходит всю сумму. Выпишем обший вид такого числа: $5m+$ $+4, m \in \mathbb{Z}, m \geqslant 0$. Тогда сумма $n \geqslant 2$ чисел такого вида равна $5k + 4n,\ k, n \in \mathbb{N}$. Она по условию должна оканчиваться на 1. Если k четное, то $4n$ должно оканчиваться на 1, что невозможно в силу четности $4n$, а если k нечетное, то $4n$ должно оканчиваться на 6. Отсюда имеем для n следующие возможности: $n = 4$, или $n = 9$, или $n = 14$, или $n = 19$ и т. д., полученные путем перебора по последней цифре числа n. Покажем что $n = 4$ не подходит. Действительно сумма четырех самых больших чисел $999 + 994 + 949 + 944 = 3886 < 4471$, а значит перебирать из оставшихся чисел не имеет смысла. Покажем, что чисел может быть 9, в самом деле, $999 + 949 + 499 + 944 + 494 + 444 + 94 + 44 + 4 = 4471$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 9.

Пример 39. В ящике лежат 76 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 85 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 124 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?

б) Могло ли в ящике оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?

в) Найти наибольшую возможную массу фрукта в этом ящике.

Решение.

а) Пусть в ящике k фруктов массой меньше 100 г, k фруктов массой больше 100 г и $(76-2k)$ фруктов массой ровно 100 г. Имеем уравнение $85\cdot k+124\cdot k+100\cdot(76-2k) = 7600$; $9\cdot k = 0$, откуда $k = 0$, но все фрукты по условию не могут быть одной массы, значит, в ящике не могло оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г.

б) Пусть в ящике k фруктов массой меньше 100 г, m фруктов массой ровно 100 г и n фруктов массой больше 100 г. Имеем уравнение $85\cdot k+100\cdot m+124\cdot n = 100\cdot(k+m+n)$; $8n = 5k$. Поскольку числа 5 и 8 взаимно просты, $k = 8s$, $n = 5t$, $40s = 40t$; $s = t$. Таким образом, $k + n = 8s + 5s = 13s$. Следовательно, количество фруктов с массой, отличной от 100 г, делится на 13 и $13s \leqslant 76$, т. е. $s \leqslant 5$ и $k + n \leqslant 65$. Значит, $m = 76 - (k + n) \geqslant 76 - 65 = 11$. Следовательно, в ящике не могло оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г.

в) Сохраним обозначения предыдущего пункта. Пусть масса самого тяжёлого фрукта равна x г, тогда, заменив массы остальных фруктов, которые тяжелее 100 г, на минимально возможную массу 101 г, получим оценку $124n \geqslant x+101\cdot(n-1)$; $x \leqslant 23n+101$. В п. б было показано, что $n = 5s$ и $s \leqslant 5$, значит, $n \leqslant 25$; $x \leqslant 23\cdot 25+101$; $x \leqslant 676$. Покажем, что масса самого тяжёлого фрукта может быть 676 г. Если в ящике 40 фруктов массой 85 г, 11 фруктов массой 100 г, 24 фрукта массой 101 г и 1 фрукт массой 676 г, то условия задачи выполнены.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 676.

Приведенное решение описывает лишь один из способов построения модели. На реальном экзамене при решении похожих задач участники экзамена строили более подробные модели, например, вводили обозначения масс для каждого фрукта, применяя различные буквы для разных весовых категорий фруктов с индексами. Получалось, что все фрукты были поименованы и дальше с ними проводились различные действия в виде оценивания масс.

Следующие два примера иллюстрируют построение и исследование моделей с числовыми последовательностями.

Пример 40. В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Решение.

а) После вычитания $a_k + a_{k+1} = 3$ из $a_{k+1} + a_{k+2} = 5$, получим $a_{k+2} - a_k = 2$, или $a_{k+2} = a_k + 2$, следовательно, по нечетным номерам идет увеличение на 2. Тогда $1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, 9, \ldots, 231, -228, 233, -230, 235$ — пример последовательности, удовлетворяющей условию.

б) Нет, не может. По условию сумма любых двух соседних членов последовательности равна нечетному числу, следовательно, в силу $a_1 = 1$, все члены с нечетными номерами будут нечетными, а члены с четными номерами — четными. Более детально можно рассмотреть соотношения, аналогичные рассмотренным в п. а, и убедиться, что разность членов с шагом 2 равна разности нечетных чисел, т. е. четному числу. Поскольку 1000 — четное число, то оно не может быть членом данной последовательности с нечетным номером 235.

в) По условию $\forall k \in \mathbb{N}$ верно $a_k+a_{k+1} \geqslant 3$ и $a_{k+1}+a_{k+2} \leqslant 25$, откуда $3-a_k \leqslant a_{k+1}$. Применяя эту оценку ко второму неравенству, получим $3 - a_k + a_{k+2} \leqslant a_{k+1} + a_{k+2} \leqslant 25$, по свойству транзитивности неравенств $3 - a_k + a_{k+2} \leqslant 25$, $a_{k+2} \leqslant a_k + 22$. В п. б доказано, что число членов нашей последовательности нечетно, положим $n = 2m + 1$, тогда

$$a_n = a_{2m+1} \leqslant a_{2m-1} + 22 \leqslant a_{2m-3} + 22 \cdot 2 \leqslant \dots \leqslant a_1 + 22 \cdot m;$$

по свойству транзитивности неравенств $a_n \leqslant a_1 + 22 \cdot m$. После подстановки числовых значений $235 \leqslant 1 + 22 \cdot m$, откуда $m \geqslant \frac{117}{11}$. Учтывая, что $m \in \mathbb{Z}$, находим $m \geqslant 11$, откуда $n \geqslant 23$. Пример искомой последовательности из 23 членов 1, 2, 23, −20, 45, −42, 67, −64, 89, −86, 111, −108, 133, −130, 155, −150, 175, −170, 195, −190, 215, −210, 235

Ответ: а) 1, 2, 3, 0, 5, −2, 7, −4, 9, ... , 231, −228, 233, −230, 235; б) нет; в) $n = 23$.

Пример 41. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, ... , a_n состоит из $n \geqslant 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leqslant n - 2$ выполнено равенство $5a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geqslant 3$ выполняться равенство $4a_n = 5a_2 - a_1$?

в) Найдите наименьшее значение, которое может принимать a_1, если $a_n = 286$.

Решение.

а) Последовательность 1, 126, 151, 156, 157 удовлетворяет условию задачи.

б) При всех натуральных $k \leqslant n - 1$ обозначим $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда $5a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k$ эквивалентно равенству $5b_{k+1} = b_k$ и последовательность b_k при $k \leqslant n-1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{5}$. Выражая a_n с учетом определения $b_k = a_{k+1} - a_k$, имеем $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$. Суммируя геометрическую прогрессию, имеем $a_n = a_1 + \frac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q} < a_1 + \frac{b_1}{1-q}$, откуда при $q = \frac{1}{5}$ получим $a_n < a_1 + \frac{5}{4}b_1 = \frac{5}{4}a_2 - \frac{1}{4}a_1$. Следовательно, равенство $4a_n = 5a_2 - a_1$ не может быть верным ни при каком $n \geqslant 3$.

в) Согласно п. б $a_n = a_1 + \frac{b_1(1-(\frac{1}{5})^{n-1})}{1-\frac{1}{5}} = a_1 + \frac{b_1(5^{n-1}-1)}{4\cdot 5^{n-2}}$. Поскольку $5^{n-1} - 1$ и 5^{n-2} взаимно просты, b_1 делится на 5^{n-2} и остатки от деления a_1 и 286 на $\frac{5^{n-1}-1}{4}$ одинаковы. Оценим n. Так как $5^4 = 625 > 286 > b_1 \geqslant 5^{n-2}$ получаем $4 > n-2$, откуда $n \leqslant 5$. Найдем остатки от деления числа 286 на $\frac{5^2-1}{4} = 6$, $\frac{5^3-1}{4} = 31$, $\frac{5^4-1}{4} = 156$, $\frac{5^5-1}{4} = 781$, они, соответственно, равны 4, 7, 130, 286. Отсюда, $a_1 \geqslant 4$. Пример последовательности 4, 239, 286 подтверждает возможность равенства $a_1 = 4$.

4.4. Задачи на оценивание

В следующем цикле задач основной упор делается на построении модели и ее исследовании с помощью оценок. Наиболее экзотическим в плане объемности модели и рассмотрения общего случая является заключительный пример, похожий на одну из задач реального ЕГЭ по математике.

Пример 42. На доске написано 30 натуральных чисел, каждое из которых либо красного, либо зелёного цвета. Каждое красное число кратно 7, а каждое зелёное число кратно 3. Все красные числа различны и все зелёные числа различны, но среди красных и зелёных могут быть равные числа.

а) Может ли сумма всех чисел, записанных на доске, быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если на доске написаны только кратные 3 числа?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма записанных на доске чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Решение.

а) Да. Записанные на доске 29 зелёных чисел 3, 6, 9, ... , 87 и одно красное 21 дают в сумме $1326 < 1395$.

б) Нет. Если на доске ровно одно красное число, то остальные 29 чисел — зелёные, их сумма не меньше, чем сумма кратных 3 первых 29-и чисел, равная $3 + 6 + \dots + 87 = \frac{90 \cdot 29}{2} = 1305 > 1067$, что не соответствует условию.

в) Пусть на доске записано n красных и $(30 - n)$ зелёных чисел. Тогда сумма S_1 красных чисел не меньше суммы n первых кратных числу 7 натуральных чисел, а сумма S_2 зелёных чисел не меньше суммы $(30 - n)$ первых кратных числу 3 натуральных чисел. На основании последних утверждений имеем оценки

$$S_1 \geqslant 7 + 14 + \dots + 7n = \frac{7n^2+7n}{2},$$

$$S_2 \geqslant 3 + 6 + \dots + 3(30 - n) = \frac{3(31-n)(30-n)}{2} = \frac{3n^2-183n+2790}{2}.$$

Складывая почленно полученные неравенства и учитывая сумму $S_1 + S_2 = 1067$, имеем $1067 \geqslant 5n^2 - 88n + 1395$, $5n^2 - 88n + 328 \leqslant 0$, откуда $\frac{44-2\sqrt{74}}{5} \leqslant n \leqslant \frac{44+2\sqrt{74}}{5}$. Учитывая, что n — целое, находим $6 \leqslant n \leqslant 12$. Покажем, что возможен случай $n = 6$. В самом деле, красные числа 7, 14, 21, 28, 35, 56 и зелёные 3, 6, ... , 66, 69, 78 в сумме дают 1067.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

Пример 43. На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 3?

б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 11?

в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

Решение.

а) Нет. Если наименьшее число равно 3, то сумма шести наименьших чисел не меньше $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$, а их среднее арифметическое больше 5.

б) Нет. Упорядочим данные числа по возрастанию и обозначим их a_1, a_2, ... , a_9, a_{10}. Сумма шести наименьших чисел $a_1 + \dots + a_6$

равна 30, сумма шести наибольших чисел $a_5 + \dots + a_{10}$ равна 90, сумма всех десяти чисел равна 110. Тогда сумма шести наименьших и шести наибольших чисел $a_1+a_2+\dots+a_9+a_{10}+a_5+a_6 = 120$, т. е. $a_5+a_6=10$. Но такого быть не может, так как $a_5 \geqslant 5$ и $a_6 \geqslant 6$.

в) Докажем сначала, что $a_1+a_2+a_3+a_4 \leqslant 15$. Пусть, напротив, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geqslant 16$, тогда наибольшее $a_4 \geqslant 6$ (иначе в силу упорядоченности $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 2 + 3 + 4 + 5 = 14$). Но тогда, $a_5 \geqslant 7$, $a_6 \geqslant 8$, а вся сумма $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \geqslant 31$, что противоречит сумме в 30. Значит, $a_1+a_2+a_3+a_4 \leqslant 15$ — доказано. Отсюда следует $a_5 + a_6 \geqslant 15$ (вся сумма 30). Согласно решению п. б, $a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10} = 120 - (a_5 + a_6) \leqslant 105$. Тогда среднее арифметическое всех 10 чисел не превосходит 10,5. Набор чисел 2, 3, 4, 6, 7, 8, 14, 16, 22, 23, удовлетворяет условиям задачи, а его среднее арифметическое равно 10,5.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 10,5.

Пример 44. На столе лежат 50 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синие (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 16. Числа на синих карточках увеличили в 2 раза, после чего среднее арифметическое всех чисел стало равно 31,2.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Решение: пусть S_1 — сумма чисел на синих карточках, S_2 — сумма чисел на красных карточках. Тогда из условия имеем

$$\begin{cases} \dfrac{S_1 + S_2}{50} = 16, \\ \dfrac{2S_1 + S_2}{50} = 31{,}2, \end{cases}$$

откуда $S_1 = 760$, $S_2 = 40$.

а) Да. Если на сорока красных карточках написано число 1, а на синих карточках написаны числа: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 706, то условия задачи удовлетворены.

б) Нет. Пусть на столе ровно 10 красных карточек, тогда найдется хотя бы одна красная карточка, на которой записано число, не меньшее 4, иначе все числа на красной карточке не превосходят 3, а их сумма, равная 40, не превосходит $3 \cdot 10 = 30$, что неверно. Отсюда наименьшее число, написанное на синих карточках, не меньше 5. Тогда сумма чисел, написанных на 40 синих карточках, не меньше, чем $5 + 6 + \cdots + 44 = 980 > 760$. Противоречие.

в) Пусть k синих карточек лежат на столе, а наибольшее число, написанное на красной карточке, равно x. Из условия имеем оценку $(50 - k) \cdot x \geqslant 40$, откуда $\frac{40}{50-k} \leqslant x$. Так как любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке, то оно больше максимального числа x на красной карточке, а значит, не менее $x + 1$. Тогда сумма всех чисел на синих карточках не менее $(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+k) = kx+\frac{k(k+1)}{2}$, откуда $760 \geqslant kx+\frac{k(k+1)}{2}$. После преобразований имеем вторую оценку $x \leqslant \frac{760}{k} - \frac{k+1}{2}$. Обе оценки удобно записать в виде двойного неравенства

$$\frac{40}{50-k} \leqslant x \leqslant \frac{760}{k} - \frac{k+1}{2}, \text{ где } k = 1,\, 2,\, \ldots,\, 49.$$

Заметим, что выражение в левой части неравенства возрастает с ростом k, поскольку у положительной дроби уменьшается знаменатель. Выражение же в правой части убывает с ростом k, поскольку у положительной дроби растет знаменатель, и из нее вычитается увеличивающееся число. Осталось найти наибольшее k, при котором x останется целым. Подберем k, чтобы слева было целое число. Применим метод половинного деления. При $k = 30$ имеем $2 \leqslant x \leqslant 9\frac{5}{6}$ — слишком широкие границы для x, а при $k = 40$ имеем $4 \leqslant x \leqslant -\frac{3}{2}$, что невозможно в силу транзитивности неравенств. Пробуем $k = 35$, имеем $2\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 3\frac{5}{7}$, здесь усматривается единственное целое $x = 3$. Покажем, что при $k \geqslant 36$, неравенство ведет к противоречию, имеем $\frac{40}{14} \leqslant x \leqslant \frac{760}{36} - \frac{37}{2}$, или, по свойству транзитивности неравенств, $2\frac{5}{7} \leqslant 2\frac{11}{18}$, что неверно, поскольку верно обратное $\frac{11}{18} < \frac{12}{18} = \frac{2}{3} < \frac{5}{7}$. Отсюда, $k \leqslant 35$.

При $k = 35$ следующий пример подтверждает точность оценки. На двенадцати красных карточках написано 3, на двух — 1, и на одной — 2. На оставшихся тридцати пяти синих карточках написано: 4, 5, ..., 37, 63. Последнее число получено вычитанием из всей суммы, равной 760, суммы тридцати четырех предыдущих чисел $760 - \frac{(4+37)\cdot 34}{2} = 63$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 35.

Пример 45. В лесу собирают грибы 10 мальчиков и 7 девочек. Любые 3 мальчика собирают грибов меньше, чем любые 2 девочки, а любые 3 девочки собирают грибов меньше, чем любые 5 мальчиков.

а) Может ли некоторая девочка собрать грибов меньше, чем некоторый мальчик?

б) Могли ли все дети собрать разное количество грибов каждый?

в) Какое наименьшее количество грибов могли собрать дети все вместе?

Решение.

а) Нет. Из условия следует, что любые 6 мальчиков соберут грибов меньше, чем любые 4 девочки. В самом деле, распределим 6 мальчиков и 4 девочки на две группы — каждая из трех мальчиков и двух девочек. По условию мальчики каждой группы собирают грибов меньше, чем девочки этой же группы, а значит, 6 мальчиков вместе соберут грибов меньше чем 4 девочки вместе. Пусть теперь некоторая девочка собрала грибов меньше, чем некоторый мальчик. Добавим к этим двоим еще трех других девочек и пять других мальчиков. Из условия следует, что три добавленные девочки собрали грибов меньше, чем пять добавленных мальчиков. Получается, нашлись 4 девочки и 6 мальчиков таких, что девочки соберут грибов меньше, чем мальчики, что невозможно.

б) Да. Пример, мальчики собрали $91, 92, \ldots 100$, а девочки — $149, 150, \ldots, 155$ грибов. Построение примера. Пусть a — наименьшее количество грибов, собранное одним из мальчиков, и b — девочкой. Тогда мальчиками будет собрано a, $a+1, \ldots, a+9$ грибов, а девочками соответственно — b, $b+1, \ldots, b+6$ грибов. Для проверки условия «любые 3 мальчика собирают грибов меньше, чем любые 2 девочки» в силу свойства транзитивности неравенств достаточно взять наибольшие количества грибов у мальчиков и наименьшие у девочек. Таким образом, должно выполняться неравенство $a+7+a+8+a+9 < b+b+1$, $3a+24 < 2b+1$. Для проверки второго условия «любые 3 девочки собирают грибов меньше, чем любые 5 мальчиков» достаточно взять наибольшие количества грибов у девочек и наименьшие у мальчиков, откуда

$$b+4+b+5+b+6 < a+a+1+a+2+a+3+a+4,$$

$$3b+15 < 5a+10, \text{ имеем } \begin{cases} 3a+23 < 2b, \\ 3b < 5a-5, \end{cases}$$

поэтому $9a+69 < 6b < 10a-10$, $\begin{cases} a > 79, \\ \dfrac{3}{2}a+\dfrac{23}{2} < b < \dfrac{5}{3}a-\dfrac{5}{3}. \end{cases}$

При $a = 91$ верно $148 < b < 150$ — можно брать $b = 149$.

в) Пусть мальчики собрали $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_{10}$ грибов, а девочки, соответственно — $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant \ldots \leqslant b_7$ грибов. По условию $\forall i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \ldots 10\} \forall j_1, j_2 \in \{1, 2, \ldots 7\}$
$\forall k_1, k_2, k_3 \in \{1, 2, \ldots 7\} \forall m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \in \{1, 2, \ldots 10\}$

$$\begin{cases} a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3} < b_{j_1}+b_{j_2}, \\ b_{k_1}+b_{k_2}+b_{k_3} < a_{m_1}+a_{m_2}+a_{m_3}+a_{m_4}+a_{m_5}. \end{cases}$$

Эти неравенства можно переписать в виде

$$\begin{cases} b_{j_1}+b_{j_2}-(a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}) > 0, \\ a_{m_1}+a_{m_2}+a_{m_3}+a_{m_4}+a_{m_5}-(b_{k_1}+b_{k_2}+b_{k_3}) > 0. \end{cases}$$

С учетом, что результат действий с целыми числами при сложении и вычитании снова целое число, перепишем полученные из условия неравенства в эквивалентном виде

$$\begin{cases} b_{j_1}+b_{j_2}-(a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}) \geqslant 1, \\ a_{m_1}+a_{m_2}+a_{m_3}+a_{m_4}+a_{m_5}-(b_{k_1}+b_{k_2}+b_{k_3}) \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}+1 \leqslant b_{j_1}+b_{j_2}, \\ b_{k_1}+b_{k_2}+b_{k_3} \leqslant a_{m_1}+a_{m_2}+a_{m_3}+a_{m_4}+a_{m_5}-1. \end{cases}$$

Рассмотрим верные неравенства, полученные из предыдущих при подстановке конкретных индексов

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 + 1 \leqslant b_2 + b_3, \\ a_5 + a_6 + a_7 + 1 \leqslant b_4 + b_5, \\ a_8 + a_9 + a_{10} + 1 \leqslant b_6 + b_7. \end{cases}$$

Складывая их, получим верное неравенство того же знака

$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+3 \leqslant b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7.$$

Теперь рассмотрим два других неравенства

$$\begin{cases} b_2 + b_3 + b_4 \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 1, \\ b_5 + b_6 + b_7 \leqslant a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} - 1, \end{cases}$$

и также сложим их, получим верное неравенство

$$b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7 \leqslant a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}-2.$$

По свойству транзитивности неравенств

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + 3 \leqslant$$
$$\leqslant a_1+a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} - 2.$$

Откуда, $a_1 \geqslant 5$. Поскольку a_1 — наименьшее число, то неравенство $a_i \geqslant 5$ будет верно при любом $i \in \{1, 2, \ldots 10\}$.

Замечание. Понятно, что при таком способе оценивания сменой индексов можно добиться, что эта же оценка $a_i \geqslant 5$ будет верна при любом $i \in \{2, 3, \ldots 10\}$ и упорядочивать a_i по возрастанию не обязательно.

Аналогично проведем оценку для b_1. Неравенства, полученные в общем виде, перепишем

$$\begin{cases} a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} \leqslant b_{j_1} + b_{j_2} - 1, \\ b_{k_1} + b_{k_2} + b_{k_3} + 1 \leqslant a_{m_1} + a_{m_2} + a_{m_3} + a_{m_4} + a_{m_5}. \end{cases}$$

Рассмотрим верные неравенства, полученные из предыдущих при подстановке конкретных индексов

$$\begin{cases} b_2 + b_3 + b_4 + 1 \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \\ b_2 + b_4 + b_5 + 1 \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \\ b_3 + b_5 + b_6 + 1 \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5. \end{cases}$$

Складывая их, получим верное неравенство того же знака

$$2(b_2 + b_3 + b_4 + b_5) + b_6 + 3 \leqslant 3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5).$$

Теперь рассмотрим пять других неравенств

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 \leqslant b_1 + b_2 - 1, \\ a_2 + a_3 + a_4 \leqslant b_2 + b_3 - 1, \\ a_3 + a_4 + a_5 \leqslant b_3 + b_4 - 1, \\ a_4 + a_5 + a_1 \leqslant b_4 + b_5 - 1, \\ a_5 + a_1 + a_2 \leqslant b_5 + b_6 - 1, \end{cases}$$

и также сложим их, получим верное неравенство

$$3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \leqslant b_1 + 2(b_2 + b_3 + b_4 + b_5) + b_6 - 5.$$

По свойству транзитивности неравенств

$$2(b_2 + b_3 + b_4 + b_5) + b_6 + 3 \leqslant b_1 + 2(b_2 + b_3 + b_4 + b_5) + b_6 - 5.$$

Откуда, $b_1 \geqslant 8$. Поскольку b_1 — наименьшее число, то неравенство $b_j \geqslant 8$ будет верно при любом $j \in \{1, 2, \ldots 7\}$. Замечание. Понятно, что при таком способе оценивания сменой индексов можно добиться, что эта же оценка $b_j \geqslant 8$ будет верна при любом $j \in \{2, 3, \ldots 7\}$ и упорядочивать b_j по возрастанию не обязательно.

Учитывая полученные оценки, имеем для суммарного количества грибов

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} + b_1 + b_2 + \ldots + b_7 \geqslant 10 \cdot 5 + 7 \cdot 8 = 50 + 56 = 106.$$

Покажем, что грибов может быть 106. В самом деле, каждый мальчик соберет по 5 грибов, а каждая девочка по 8, в итоге всех грибов $10 \cdot 5 + 7 \cdot 8 = 50 + 56 = 106$.

Ответ: а) нет; б) да; в) 106.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Текстовые задачи

1.1. На складе хранилось два одинаковых по стоимости мешка конфет. В первом мешке конфеты были по цене 500 руб./кг, а во втором — по 1500 руб./кг. Мешки случайно были порваны и конфеты перемешались. По какой цене надо продавать смесь из конфет, чтобы получить за них те же самые деньги, если бы конфеты были полностью проданы по отдельности?

1.2. На складе хранилось два одинаковых по стоимости мешка конфет. В первом мешке конфеты были по цене 400 руб./кг, а во втором — по 1600 руб./кг. Мешки случайно были порваны и конфеты перемешались. По какой цене надо продавать смесь из конфет, чтобы получить за них те же самые деньги, если бы конфеты были полностью проданы по отдельности?

1.3. На складе хранилось два одинаковых по стоимости мешка конфет. В первом мешке конфеты были по цене 500 руб./кг, а во втором — по 300 руб./кг. Мешки случайно были порваны и конфеты перемешались. По какой цене надо продавать смесь из конфет, чтобы получить за них те же самые деньги, если бы конфеты были полностью проданы по отдельности?

1.4. Цена на книгу сначала упала на 10 %, а затем книгу переоценили ещё раз, и ее цена снова упала на 10 %. На сколько процентов уменьшилась цена книги по сравнению с начальной ценой?

1.5. Цена на книгу сначала выросла на 20 %, а затем книгу переоценили ещё раз, и ее цена снова выросла на 20 %. На сколько процентов увеличилась цена книги по сравнению с начальной ценой?

1.6. На автозаводе нашли два способа модернизации двигателей. При применении к любому двигателю первый способ дает экономию топлива 20 %, а второй — 40 %. Двигатель, модернизированный одним способом, можно независимо модернизировать и другим способом. Найти процент экономии топлива при модернизации обычного двигателя обоими способами вместе.

1.7. На автозаводе нашли два способа модернизации двигателей. При применении к любому двигателю первый способ дает экономию топлива 20 %, а второй — 50 %. Двигатель, модернизированный одним способом, можно независимо модернизировать и другим способом. Найти процент экономии топлива при модернизации обычного двигателя обоими способами вместе.

1.8. На автозаводе нашли два способа модернизации двигателей. При применении к любому двигателю первый способ дает экономию топлива 10 %, а второй — 20 %. Двигатель, модернизированный одним способом, можно независимо модернизировать и другим способом. Найти процент экономии топлива при модернизации обычного двигателя обоими способами вместе.

1.9. В бидон налили 6 л молока жирности 3 % и 4 л молока жирности 6 %. Сколько процентов составляет жирность молока в бидоне?

1.10. В бидон налили 7 л молока жирности 3 % и 3 л молока жирности 6 %. Сколько процентов составляет жирность молока в бидоне?

1.11. Во фляге перемешали 16 кг сметаны жирности 10 % и 24 кг сметаны жирности 20 %. Найти жирность получившейся сметаны.

1.12. Во фляге перемешали 15 кг сметаны жирности 12 % и 25 кг сметаны жирности 20 %. Найти жирность получившейся сметаны.

1.13. Во фляге перемешали 10 кг сметаны жирности 12 % и 15 кг сметаны жирности 22 %. Найти жирность получившейся сметаны.

1.14. После смешивания растворов, содержащих 25 и 60 % кислоты, получился раствор, содержащий 39 % кислоты. Определить, в какой пропорции были смешаны растворы.

1.15. Свежая малина содержит 95 % воды, сушеная — 20 %. Сколько сушеной малины получится из 32 кг свежей?

1.16. Свежая голубика содержит 97 % воды, сушеная — 15 %. Сколько сушеной голубики получится из 170 кг свежей?

1.17. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 30 %, а во втором — 50 % золота. Сколько кг второго сплава нужно добавить к 10 кг первого, чтобы получить сплав, содержащий 42 % золота?

1.18. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 20 %, а в другом — 30 % олова. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы получить 10 кг нового сплава, содержащего 27 % олова?

1.19. Два куска латуни имеют общую массу 50 кг. Первый кусок содержит 3 кг чистой меди, а второй — 6 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 20 % больше первого?

1.20. Два куска латуни имеют общую массу 50 кг. Первый кусок содержит 2 кг чистой меди, а второй — 3 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 25 % больше первого?

1.21. Два куска латуни имеют общую массу 40 кг. Первый кусок содержит 3 кг чистой меди, а второй — 15 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 40 % больше первого?

1.22. Из молока, жирность которого 5 %, делают творог жирностью 15,5 %, при этом остается сыворотка жирностью 0,5 %. Определить, сколько творога получается из 1 т молока.

1.23. Добытая руда содержит 21 % меди, обогащенная — 45 %. Известно, что в процессе обогащения 60 % добытой руды идет в отходы. Определить процентное содержание меди в отходах.

1.24. В заповеднике «Карлуша» черные вороны составляли 60 %, серые — 30 %, а белые 10 % от общего поголовья ворон. Появившийся в заповеднике злостный браконьер Нехорошев напугал множество ворон и они улетели, причем количество улетевших белых ворон составляет 90 % от количества улетевших серых ворон и составляет 30 % от количества улетевших черных ворон. Определить, сколько всего ворон улетело из-за Нехорошева, если известно, что в заповеднике осталось 98 серых ворон и $3/4$ от всех белых.

1.25. На автостоянке мерседесы составляли 10 %, запорожцы — 30 %, а прочие иномарки 60 % от общего числа машин. После того, как на автостоянку подъехало некоторое количество мерседесов и 68 запорожцев, а 30 % прочих иномарок уехало, мерседесы стали составлять 30 %, запорожцы — 49 %, а прочие иномарки — 21 % от общего числа машин. Сколько мерседесов стало на стоянке?

1.26. Сравнивая заданные прямоугольник и квадрат, получили, что периметр квадрата на 20 % больше периметра прямоугольника, а площадь квадрата на 62 % больше площади прямоугольника. Найти площадь прямоугольника, если его диагональ равна 50 см.

1.27. Сравнивая заданные прямоугольник и квадрат, получили, что периметр прямоугольника на 10 % больше периметра квадрата, а площадь прямоугольника на 17 % больше площади квадрата. Найти площадь квадрата, если известно, что диагональ прямоугольника равна 40 см.

1.28. Поезд отправился с опозданием на 6 ч 36 мин от расписания. Для уменьшения опоздания поезд поддерживал скорость на 30 % выше обычной на участке в 0,65 пути между пунктами назначения, а на оставшемся участке пути — на 25 % выше обычной. В итоге поезд прибыл в конечный пункт по расписанию. Найти обычное время следования поезда от начального до конечного пункта при обычной скорости.

1.29. Поезд отправился с опозданием на 2 ч 48 мин от расписания. Для уменьшения опоздания поезд поддерживал скорость на 30 % выше обычной на участке в 0,52 пути между пунктами назначения, а на оставшемся участке пути — на 20 % выше обычной. В итоге поезд прибыл в конечный пункт по расписанию. Найти обычное время следования поезда от начального до конечного пункта при обычной скорости.

1.30. Поезд отправился с опозданием на 3 ч 12 мин от расписания. Для уменьшения опоздания поезд поддерживал скорость на 30 % выше обычной на участке в 0,78 пути между пунктами назначения, а на оставшемся участке пути — на 10 % выше обычной. В итоге поезд прибыл в конечный пункт по расписанию. Найти обычное время следования поезда от начального до конечного пункта при обычной скорости.

1.31. Расстояние между городами 1200 км. Одновременно выходят навстречу друг другу два поезда и встречаются через 10 ч. Если бы один поезд вышел на 2 ч 42 мин раньше, то поезда встретились бы через 8 ч 12 мин после выхода другого поезда. Найти скорость поезда, который вышел раньше.

1.32. Расстояние между городами 980 км. Одновременно выходят навстречу друг другу два поезда и встречаются через 7 ч. Если бы один поезд вышел на 1 ч 24 мин раньше, то поезда встретились бы через 6 ч 12 мин после выхода другого поезда. Найти скорость поезда, который вышел раньше.

1.33. Одна бригада начала строить дом. Через 15 дней вторая бригада начала строить другой такой же дом и закончила его строительство одновременно с первой. Если бы первый дом строили две бригады вместе, то им понадобилось бы 18 дней. За сколько дней построила дом одна первая бригада?

1.34. Одна бригада начала строить дом. Через 9 дней вторая бригада начала строить другой такой же дом и закончила его строительство одновременно с первой. Если бы первый дом строили две бригады вместе, то им понадобилось бы 6 дней. За сколько дней построила дом одна первая бригада?

1.35. Две бригады строят дом. Если дом построит одна первая бригада, то она потратит на 32 дня больше, чем если бы этот же дом строили две бригады вместе. Если дом будет строить только вторая бригада, то она затратит на 2 дня больше, чем обе бригады вместе. За сколько дней построит дом одна первая бригада?

1.36. Две бригады строят дом. Если дом построит одна первая бригада, то она потратит на 25 дней больше, чем если бы этот же дом строили две бригады вместе. Если дом будет строить только вторая бригада, то она затратит на 4 дня больше, чем обе бригады вместе. За сколько дней построит дом одна первая бригада?

1.37. Бассейн заполняется из двух труб за 5 ч 50 мин. Если открыть только первую трубу, то бассейн заполнится на 4 ч быстрее, чем если открыть только вторую трубу. Сколько времени будет заполняться бассейн только второй трубой?

1.38. Бассейн заполняется из двух труб за 7 ч 12 мин. Если открыть только первую трубу, то бассейн заполнится на 6 ч быстрее, чем если открыть только вторую трубу. Сколько времени будет заполняться бассейн только второй трубой?

1.39. Автомобиль проходит расстояние от A до B с постоянной скоростью. При увеличении скорости на 15 км/ч время в пути уменьшится на 3 ч, а при уменьшении скорости на 15 км/ч оно увеличится на 5 ч. Найти расстояние AB.

1.40. Автомобиль проходит расстояние от A до B с постоянной скоростью. При увеличении скорости на 10 км/ч время в пути уменьшится на 4 ч, а при уменьшении скорости на 10 км/ч оно увеличится на 6 ч. Найти расстояние AB.

1.41. Две автомашины выехали одновременно из пункта A в одном направлении со скоростями 40 и 50 км/ч. Третья машина выехала из пункта A на полчаса позже и догнала вторую машину через полтора часа после того, как обогнала первую машину. Найти скорость третьей машины.

1.42. Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в одном направлении со скоростями 10 и 12 км/ч. Третий велосипедист выехал из пункта A на полчаса позже, догнал первого велосипедиста, а еще через 15 км догнал и второго. Найти скорость третьего велосипедиста.

1.43. Из пункта A одновременно в одном и том же направлении отправились велосипедист и пешеход. Через 1 ч велосипедист остановился на 10 мин, а затем развернулся и поехал навстречу пешеходу. Их встреча произошла через 34 мин после разворота велосипедиста. Через какое время после старта из пункта A произошла бы их встреча, если бы велосипедист остановился на 20 мин? Скорости велосипедиста и пешехода постоянны.

1.44. Из пункта A одновременно в противоположных направлениях отправились велосипедист и пешеход. Через 1 ч велосипедист остановился на 20 мин, а затем развернулся и через 130 мин догнал пешехода. Через какое время после старта из пункта A велосипедист догнал бы пешехода, если бы остановился на 10 мин? Скорости велосипедиста и пешехода постоянны.

1.45. Боря и Ваня одновременно побежали по кольцевой лыжной трассе с места старта в противоположных направлениях (каждый с постоянной скоростью). В первый раз после старта они встретились через 6 мин, а когда Боря пробежал первый круг, Ване до конца второго круга осталось бежать 5 мин. За какое время Ваня пробегает полный круг?

1.46. Ваня и Гена одновременно побежали по кольцевой дорожке с места старта в противоположных направлениях (каждый с постоянной скоростью). Второй раз после старта они встретились тогда, когда Ване осталось пробежать 150 м до конца первого круга, а когда Ваня пробежал первый круг, Гене осталось пробежать 200 м до конца второго круга. Найти длину дорожки.

1.47. Если теплоход и катер плывут по течению, то расстояние от пункта A до пункта B теплоход проходит в 1,5 раза быстрее, чем катер; при этом катер каждый час отстает от теплохода на

8 км. Если же они плывут против течения, то теплоход проходит путь от B до A в 2 раза быстрее катера. Найдите скорость течения.

1.48. Если пароход и катер плывут против течения реки, то расстояние от пункта A до пункта B катер проходит в 2,5 раза быстрее, чем пароход; при этом пароход каждый час отстает от катера на 12 км. Если же они плывут по течению, то катер проходит путь от B до A в 2 раза быстрее парохода. Найдите скорость течения.

1.49. Моторная лодка прошла 7 км по озеру и 5 км против течения реки, затратив на весь путь 1 час. Найти собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

1.50. Моторная лодка прошла 12 км по озеру и 3 км против течения реки, затратив на весь путь 1 час. Найти собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

1.51. Туристы в лодке гребли 1 ч вверх по реке, а затем 15 мин плыли по течению, сложив весла. После этого они 30 мин гребли вниз по течению и прибыли к месту старта. Через какое время после старта вернулись бы туристы на то же место, если бы после часовой гребли вверх по реке они плыли по течению, сложив весла, 6 мин? Скорость лодки при гребле в стоячей воде и скорость течения реки постоянны.

1.52. От пристани в центре озера под углами $120°$ друг к другу одновременно отплыли весельная лодка, моторная лодка и теплоход «Ракета». Скорости судов в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Через 2 ч расстояние между весельной лодкой и теплоходом «Ракета» равнялось $20\sqrt{31}$ км, а между весельной и моторной лодками — $20\sqrt{13}$ км. Найти скорости судов.

1.53. К главной дороге примыкает второстепенная под углом $60°$. От пересечения дорог одновременно стартуют по главной дороге велосипедист и водитель на мокике в противоположных направлениях, а по второстепенной дороге отправляется гужевая повозка, причем направления движения велосипедиста и гужевой повозки образуют угол в $60°$. Скорости транспортных средств образуют арифметическую прогрессию в следующем порядке: гужевая повозка, велосипед, мокик. Через 3 ч расстояние между гужевой повозкой и велосипедистом равнялось $15\sqrt{7}$ км, а между гужевой повозкой и мокиком — $30\sqrt{7}$ км. Найти скорости участников.

2. Экономические задачи

2.1. По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает эту сумму на 12 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, которое следует начислить за третий год по вкладу «Б» так, чтобы за все три года этот вклад был менее выгоден, чем вклад «А».

2.2. По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает эту сумму на 14 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее натуральное число процентов, которое следует начислить за третий год по вкладу «Б» так, чтобы за все три года этот вклад был более выгоден, чем вклад «А».

2.3. Планируется 15-го января взять кредит в банке на сумму 1,5 млн руб. на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года (первых 12 месяцев) кредитования?

2.4. Планируется 15-го января взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года (первых 12 месяцев) кредитования нужно вернуть банку 933 тыс. руб. Какую сумму нужно вернуть банку в течение второго года (последних 12 месяцев) кредитования?

2.5. Планируется 15-го января взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению

с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года (последних 12 месяцев) кредитования нужно вернуть банку 798,75 тыс. руб. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года (первых 12 месяцев) кредитования?

2.6. Планируется 15-го января взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года (последних 12 месяцев) кредитования нужно вернуть банку 1695 тыс. руб. Какую сумму планируется взять в кредит?

2.7. В июле 2023 г. планируется взять кредит в банке на 6 лет в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы: каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года, где r — **целое число**. С февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга. В июле каждого года долг должен составлять некоторую сумму (в млн руб.) в соответствии со следующей таблицей.

2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
1	$0,6$	$0,4$	$0,3$	$0,2$	$0,1$	0

Найти наибольшее r, при котором сумма всех выплат по кредиту будет меньше 1,2 млн руб.

2.8. В июле 2024 г. планируется взять кредит в банке на 4 года в размере S млн руб., где S — **целое число**. Условия его возврата таковы: каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года. С февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга. В июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

2024	2025	2026	2027	2028
S	$0,8S$	$0,5S$	$0,1S$	0

Найти наибольшее S, при котором сумма всех выплат по кредиту будет меньше 50 млн руб.

2.9. Планируется взять кредит в банке 15-го января на сумму 1,2 млн руб. Условия его возврата таковы:
– 1-го января каждого года долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
– выплата части долга происходит в январе каждого года равными суммами после начисления процентов.

На какое минимальное количество лет возможно взять кредит, чтобы ежегодные выплаты составляли не более 330 тыс. руб.?

2.10. Планируется 15-го января взять кредит в банке на сумму 6902000 руб. Условия его возврата таковы:
– 1-го января каждого года долг возрастает на 12,5 % по сравнению с концом предыдущего года;
– выплата части долга происходит в январе каждого года равными суммами после начисления процентов.

Какую сумму нужно возвращать банку ежегодно, чтобы выплатить долг четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

2.11. В банке взяли кредит 15-го июля 2012 г. Условия его возврата были таковы:
– 1-го января каждого года долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;
– выплата части долга происходит с февраля по июнь каждого года после начисления процентов.

Кредит был погашен двумя равными платежами, каждый по 4 548 600 руб. (т. е. за два года). Какую сумму банк выдал в кредит?

2.12. Банк несколько лет назад выдал кредит 15-го января на сумму 1 млн руб. Условия его возврата были таковы:
– 1-го января каждого года долг возрастает на a % по сравнению с концом предыдущего года;
– выплата части долга происходит в январе каждого года после начисления процентов.

Кредит был погашен за два года, при этом в первый год была переведена сумма в 600 тыс. руб., а во второй раз — 550 тыс. руб. Найдите a.

2.13. Планируется 15 января взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:
– 1-го января каждого года долг возрастает на a % по сравнению с концом предыдущего года;
– выплата части долга происходит в январе каждого года после начисления процентов.

Если переводить в банк каждый год по 2073600 руб., то кредит можно выплатить за 4 года. Если по 3513600 руб., то — за 2 года. Найдите a.

2.14. В июле 2023 г. планируется взять кредит на пять лет в сумме 1050 тыс. руб. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2024, 2025, 2026 гг. долг остается равным 1050 тыс. руб;
– выплаты 2027 и 2028 гг. равны;
– к июлю 2028 г. долг будет выплачен полностью.

На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

2.15. В июле 2023 г. планируется взять кредит на пять лет в сумме 220 тыс. руб. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2024, 2025, 2026 гг. долг остается равным 220 тыс. руб;
– выплаты 2027 и 2028 гг. равны;
– к июлю 2028 г. долг будет выплачен полностью.

Найти r, если общая сумма выплат составит 420 тыс. руб.

2.16. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 500 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 8000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

2.17. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью

27 м^2 и номера «люкс» площадью 45 м^2. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 855 м^2. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 руб. в сутки, а номер «люкс» — 3000 руб. в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

2.18. Решено купить елочных игрушек для детских садов на 10000 руб. Они продаются наборами. Набор из 20-ти игрушек стоит 400 руб., набор из 35-ти игрушек стоит 600 руб., а набор из 50-ти игрушек стоит 900 руб. Сколько и каких игрушек нужно купить, чтобы все деньги были потрачены, и куплено наибольшее число игрушек?

2.19. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали А и В. На первом комбинате работает 40 человек, и один рабочий изготавливает за смену 5 деталей А или 15 деталей В. На втором комбинате работает 100 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 деталей А или 5 деталей В. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужно две детали А и одна деталь В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

2.20. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали А и В. На первом комбинате работает 60 человек, и один рабочий изготавливает за смену 10 деталей А или 15 деталей В. На втором комбинате работает 260 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 деталей А или 10 деталей В. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужно две детали А и одна деталь В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

2.21. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 ч в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 260 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 ч в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

3. Олимпиадные задачи

3.1. Утром в магазин привезли 7 бидонов, в которых было 18, 22, 26, 29, 31, 32 и 33 л молока. До обеда было полностью продано молоко ровно из 4-х бидонов, а к закрытию — еще из ровно 2-х бидонов. До обеда молока в литрах было продано втрое больше, чем после. Указать, из каких бидонов было продано молоко до обеда.

3.2. Утром в магазин привезли 6 бидонов, в которых было 15, 19, 21, 22, 23 и 31 л молока. До обеда было полностью продано молоко ровно из 3-х бидонов, а к закрытию — еще из ровно 2-х бидонов. До обеда молока в литрах было продано вдвое больше, чем после. Указать, из каких бидонов было продано молоко до обеда.

3.3. Утром в магазин привезли 7 бидонов, в которых было 14, 16, 17, 19, 21, 24 и 28 л молока. До обеда было полностью продано молоко ровно из 4-х бидонов, а к закрытию — еще из ровно 2-х бидонов. До обеда молока в литрах было продано втрое больше, чем после. Указать, из каких бидонов было продано молоко до обеда.

3.4. Необходимо доставить по железной дороге 10 больших и 110 малых контейнеров. Грузоподъемность каждого вагона 70 т, в нем можно разместить до 30-ти малых контейнеров весом по 2 т. Большой контейнер весом 25 т занимает в вагоне место 9-ти малых контейнеров. Найти наименьшее число вагонов, необходимое для перевозки всех контейнеров (оценить и привести пример загрузки вагонов, обеспечивающий точность оценки).

3.5. Необходимо доставить по железной дороге 13 больших и 140 малых контейнеров. Грузоподъемность каждого вагона 70 т, в нем можно разместить до 30-ти малых контейнеров весом по 2 т. Большой контейнер весом 25 т занимает в вагоне место 9-ти малых контейнеров. Найти наименьшее число вагонов, необходимое для перевозки всех контейнеров (оценить и привести пример загрузки вагонов, обеспечивающий точность оценки).

3.6. Необходимо доставить по железной дороге 13 больших и 170 малых контейнеров. Грузоподъемность каждого вагона 70 т, в нем можно разместить до 30-ти малых контейнеров весом по 2 т. Большой контейнер весом 25 т занимает в вагоне место 9-ти малых контейнеров. Найти наименьшее число вагонов, необходимое для перевозки всех контейнеров (оценить и привести пример загрузки вагонов, обеспечивающий точность оценки).

3.7. Необходимо доставить по железной дороге 20 больших и 232 малых контейнеров. Грузоподъемность каждого вагона 70 т, в нем можно разместить до 30-ти малых контейнеров весом по 2 т. Большой контейнер весом 25 т занимает в вагоне место 8-ми малых контейнеров. Найти наименьшее число вагонов, необходимое для перевозки всех контейнеров (оценить и привести пример загрузки вагонов, обеспечивающий точность оценки).

3.8. Три сестры торговали на рынке ягодой в литровых банках по единой цене, выраженной в целых рублях (без копеек). У одной было 9 банок ягоды, у второй — 15, а у третьей — 23. До обеда каждая из них продала не менее одной банки, но не все. После обеда ягода начала портиться, цену понизили. В конце дня вся ягода была продана, а каждая сестра получила по 3500 руб. По какой цене продавалась банка ягоды до и после обеда?

3.9. Три сестры торговали на рынке ягодой в литровых банках по единой цене, выраженной в целых рублях (без копеек). У одной было 8 банок ягоды, у второй — 11, а у третьей — 26. До обеда каждая из них продала не менее одной банки, но не все. После обеда ягода начала портиться, цену понизили. В конце дня вся ягода была продана, а каждая сестра получила по 3190 руб. По какой цене продавалась банка ягоды до и после обеда?

3.10. Три сестры торговали на рынке ягодой в литровых банках по единой цене, выраженной в целых рублях (без копеек). У одной было 7 банок ягоды, у второй — 11, а у третьей — 17. До обеда каждая из них продала не менее одной банки, но не все. После обеда ягода начала портиться, цену понизили. В конце дня вся ягода была продана, а каждая сестра получила по 2280 руб. По какой цене продавалась банка ягоды до и после обеда?

3.11. Три сестры торговали на рынке ягодой в литровых банках по единой цене, выраженной в целых рублях (без копеек). У одной было 12 банок ягоды, у второй — 14, а у третьей — 32. До обеда каждая из них продала не менее одной банки, но не все. После обеда ягода начала портиться, цену понизили. В конце дня вся ягода была продана, а каждая сестра получила по 3740 руб. По какой цене продавалась банка ягоды до и после обеда?

3.12. У Ромы нет источника воды, но есть три ведра различных объемов, в двух из которых есть вода. За один шаг Рома переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе заполнится. Выливать воду из ведер в другие места, кроме имеющихся ведер, запрещается.

а) Мог ли Рома через несколько шагов получить в одном из ведер ровно 4 л воды, если сначала у него были ведра объемом 3 и 8 л, полные воды, а также пустое ведро объемом 9 л?

б) Мог ли Рома через несколько шагов получить равные объемы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объемами 8 и 10 л, полные воды, а также пустое ведро объемом 11 л?

в) Сначала у Ромы были ведра объемами 4 и 8 л, полные воды, а также пустое ведро объемом n л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что Рома смог получить через несколько шагов ровно 5 л воды в одном из ведер?

3.13. У Васи нет источника воды, но есть три ведра различных объемов, в двух из которых есть вода. За один шаг Вася переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе заполнится. Выливать воду из ведер в другие места, кроме имеющихся ведер, запрещается.

а) Мог ли Вася через несколько шагов получить в одном из ведер ровно 6 л воды, если сначала у него были ведра объемом 5 и 8 л, полные воды, а также пустое ведро объемом 9 л?

б) Мог ли Вася через несколько шагов получить равные объемы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объемами 7 и 8 л, полные воды, а также пустое ведро объемом 10 л?

в) Сначала у Васи были ведра объемами 5 и 10 л, полные воды, а также пустое ведро объемом n л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что Вася смог получить через несколько шагов ровно 6 л воды в одном из ведер?

3.14. На доске написаны различные натуральные числа, состоящие только из цифр 3 и 8 (при этом может быть использована только одна из них).

а) Может ли их сумма равняться 94?

б) Может ли их сумма равняться 248?

в) Какое минимальное количество таких чисел может быть написано на доске, если их сумма равна 2659?

3.15. На доске написаны различные натуральные числа, состоящие только из цифр 1 и 6 (при этом может быть использована только одна из них).

а) Может ли их сумма равняться 173?

б) Может ли их сумма равняться 109?

в) Какое минимальное количество таких чисел может быть написано на доске, если их сумма равна 1021?

3.16. На доске написаны различные натуральные числа, состоящие только из цифр 2 и 7 (при этом может быть использована только одна из них).

а) Может ли их сумма равняться 81?

б) Может ли их сумма равняться 197?

в) Какое минимальное количество таких чисел может быть написано на доске, если их сумма равна 2099?

3.17. В ящике лежат 95 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 73 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 115 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?

б) Могло ли в ящике оказаться меньше 10 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?

в) Найти наибольшую возможную массу фрукта в этом ящике.

3.18. В ящике лежат 68 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 944 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1016 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?

б) Могло ли в ящике оказаться ровно 15 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?

в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

3.19. В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 3$, $a_n = 109$, сумма любых двух соседних членов последовательности равна 1, 3 или 13.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 32-х членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

3.20. В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 2$, $a_n = 336$, сумма любых двух соседних членов последовательности равна 5, 7 или 29.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 846-ти членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

3.21. Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geqslant 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leqslant n-2$ выполнено равенство $2a_{k+2} = 3a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 6$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geqslant 3$ выполняться равенство $a_n = 2a_2 - a_1$?

в) Найдите наименьшее значение, которое может принимать a_1, если $a_n = 287$.

3.22. Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geqslant 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leqslant n-2$ выполнено равенство $4a_{k+2} = 5a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geqslant 3$ выполняться равенство $3a_n = 4a_2 - a_1$?

в) Найдите наименьшее значение, которое может принимать a_1, если $a_n = 283$.

3.23. На доске написано 20 натуральных чисел, каждое из которых либо красного, либо зелёного цвета. Каждое красное число кратно 11, а каждое зелёное число кратно 7. Все красные числа различны, и все зелёные числа различны, но среди красных и зелёных могут быть равные числа.

а) Может ли сумма всех чисел, записанных на доске, быть меньше $1470 = 7 + 14 + \cdots + 140$, если на доске написаны только кратные 7 числа?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма записанных на доске чисел равна 1041?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1041?

3.24. На доске написано 25 натуральных чисел, каждое из которых либо красного, либо зелёного цвета. Каждое красное число кратно 7, а каждое зелёное число кратно 5. Все красные числа различны, и все зелёные числа различны, но среди красных и зелёных могут быть равные числа.

а) Может ли сумма всех чисел, записанных на доске, быть меньше $1625 = 5 + 110 + \cdots + 125$, если на доске написаны только кратные 5 числа?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма записанных на доске чисел равна 1065?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1065?

3.25. На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 14.

а) Может ли наибольшее из этих одиннадцати чисел равняться 16?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?

в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех одиннадцати чисел.

3.26. На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?

б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?

в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

3.27. В школах № 1 и 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 вырасти в 2 раза?

б) Средний балл в школе № 1 вырос на 10 %, средний балл в школе № 2 также вырос на 10 %. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 1?

в) Средний балл в школе № 1 вырос на 10 %, средний балл в школе № 2 также вырос на 10 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

3.28. В школах № 1 и 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

3.29. На столе лежат 30 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синие (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках различны. Любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 12. Числа на синих карточках увеличили в 5 раз, после чего среднее арифметическое всех чисел стало равно 52.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

3.30. На столе лежат 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синие (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Числа на синих карточках увеличили в 3 раза, после чего среднее арифметическое всех чисел стало равно 39.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

3.31. В лесу собирают грибы 16 мальчиков и 9 девочек. Любые 3 мальчика собирают грибов меньше, чем любые 2 девочки, а любые 5 девочек собирают грибов меньше, чем любые 8 мальчиков.

а) Может ли некоторая девочка собрать грибов меньше, чем некоторый мальчик?

б) Могли ли все дети собрать разное количество грибов каждый?

в) Какое наименьшее количество грибов могли собрать дети все вместе?

3.32. В лесу собирают грибы 15 мальчиков и 8 девочек. Любые 7 мальчиков собирают грибов меньше, чем любые 3 девочки, а любые 2 девочки собирают грибов меньше, чем любые 5 мальчиков.

а) Может ли некоторая девочка собрать грибов меньше, чем некоторый мальчик?

б) Могли ли все дети собрать разное количество грибов каждый?

в) Какое наименьшее количество грибов могли собрать дети все вместе?

ОТВЕТЫ

1.1. 750 руб./кг. **1.2.** 640 руб./кг. **1.3.** 375 руб./кг. **1.4.** 19 %. **1.5.** 44 %. **1.6.** 52 %. **1.7.** 60 %. **1.8.** 28 %. **1.9.** 4,2 %. **1.10.** 3,9 %. **1.11.** 16 %. **1.12.** 17 %. **1.13.** 18 %. **1.14.** 3 : 2. **1.15.** 2 кг. **1.16.** 6 кг. **1.17.** 15 кг. **1.18.** 3 и 7 кг. **1.19.** 10 %. **1.20.** 5 %. **1.21.** 20 %. **1.22.** 300 кг. **1.23.** 5 %. **1.24.** 49 ворон. **1.25.** 60 %. **1.26.** 1000 см^2. **1.27.** 640 см^2. **1.28.** 30 ч. **1.29.** 14 ч. **1.30.** 16 ч. **1.31.** 80 и 40 км/ч. **1.32.** 80 и 60 км/ч. **1.33.** 45 дней. **1.34.** 18 дней. **1.35.** 40 дней. **1.36.** 35 дней. **1.37.** 14 ч. **1.38.** 18 ч. **1.39.** 900 км. **1.40.** 1200 км. **1.41.** 60 км/ч. **1.42.** 15 км/ч. **1.43.** 112 мин. **1.44.** 195 мин. **1.45.** 10 мин. **1.46.** 600 м. **1.47.** 4 км/ч. **1.48.** 2 км/ч. **1.49.** 14 ч. **1.50.** 16 ч. **1.51.** 98 мин. **1.52.** 10, 30, 50 км/ч. **1.53.** 10, 15, 20 км/ч.

2.1. 37. **2.2.** 3. **2.3.** 1166250. **2.4.** 717000. **2.5.** 888750. **2.6.** 3 млн. **2.7.** 7. **2.8.** 36. **2.9.** 5. **2.10.** 2296350. **2.11.** 7490000. **2.12.** 10. **2.13.** 20. **2.14.** 500000. **2.15.** 20. **2.16.** 65000000. **2.17.** 63000. **2.18.** 1 первый набор и 16 вторых. **2.19.** 660. **2.20.** 1500. **2.21.** 4500 кг.

3.1. 26, 29, 32 и 33 л. **3.2.** 19, 22 и 31 л. **3.3.** 17, 21, 24 и 28 л. **3.4.** 7 вагонов. **3.5.** 9 вагонов. **3.6.** 10 вагонов. **3.7.** 14 вагонов. **3.8.** 420 и 140 руб. **3.9.** 440 и 110 руб. **3.10.** 360 и 120 руб. **3.11.** 330 и 110 руб. **3.12.** а) да; б) нет; в) $n = 11$. **3.13.** а) да; б) нет; в) $n = 14$. **3.14.** а) да; б) нет; в) 8. **3.15.** а) да; б) нет; в) 6. **3.16.** а) да; б) нет; в) 7. **3.17.** а) нет; б) нет; в) 857. **3.18.** а) нет; б) нет; в) 229. **3.19.** а) да, например, при $a_k+a_{k+1} = 1$ и $a_{k+1} + a_{k+2} = 3$, после вычитания первого из второго, получим $a_{k+2} - a_k = 2$, или $a_{k+2} = a_k + 2$. Тогда 3, −2, 5, −4, 7, −6, 9, … , 103, −102, 105, −104, 107, −106, 109 — пример последовательности, удовлетворяющей условию; б) нет; в) 19. **3.20.** а) да, например, при $a_k + a_{k+1} = 5$ и $a_{k+1} + a_{k+2} = 7$, после вычитания первого из второго, получим $a_{k+2} - a_k = 2$, или $a_{k+2} = a_k + 2$. Тогда 2, 3, 4, 1, 6, -1, 8, -3, 10, -5, 12, ... , 332, -327, 334, -329, 336 — пример последовательности, удовлетворяющей условию; б) нет; в) 29. **3.21.** а) да, например, 1,49, 73, 85, 91, 94; б) нет; в) 2. **3.22.** а) да, например, 1,257, 321, 337, 341; б) нет; в) 3. **3.23.** а) да, 19 зелёных чисел 7, 14, 21, ... , 133 и одно красное 77 дают в сумме $1407 < 1470$; б) нет; в) 5, зелёные 7, 14, ... , 98 и 119, красные 11, 22, 33, 44 и 77. **3.24.** а) да, 19 зелёных чисел 5, 10, 15, ... , 120 и одно красное 35 дают в сумме $1535 < 1625$; б) нет; в) 7, зелёные — 5, 10, ... , 90, красные — 7, 14, 21, 28, 35, 42 и 63. **3.25.** а) нет; б) нет; в) $11\frac{2}{11}$. **3.26.** а) нет; б) нет; в) $11\frac{3}{4}$. **3.27.** а) нет; б) нет; в) 3. **3.28.** а) да; б) нет; в) 5. **3.29.** а) да; б) нет; в) 18, например, на всех красных карточках число 5, а на синих — 6, 7, 8, ... , 21, 22, 62. **3.30.** а) да; б) нет; в) 26, например, на десяти красных карточках число 4, на остальных четырех красных — 5, а на синих — 6, 7, 8, ... , 29, 30, 50. **3.31.** а) нет; б) да; в) 211. **3.32.** а) нет; б) да; в) 171.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоносов В. С., Фокин М. В. Задачи вступительных экзаменов по математике: учеб. пособие. — 8-е изд., испр. и доп. — Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2005. — 606 с.: ил.

2. ЕГЭ 2016: Математика: 30 вариантов экзаменационных работ для подготовки к единому государственному экзамену: профильный уровень / Под ред. И. В. Ященко — М.: АСТ: Астрель, 2016. — 135, с. — (Государственная итоговая аттестация).

3. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: Типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / Под ред. И. В. Ященко — М.: Изд-во «Национальное образование», 2016. — 256 с. — (ЕГЭ. ФИПИ — школе).

4. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / Под ред. И. В. Ященко — М.: Изд-во «Экзамен», 2020. — 231, с. — (Серия «ЕГЭ. 50 вариантов. Тесты от разработчиков»)

5. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: Типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / Под ред. И. В. Ященко. — М.: Изд-во «Национальное образование», 2022. — 224 с. — (ЕГЭ. ФИПИ — школе).

6. Ляпунов И. Б. Экономические задачи для подготовки к ЕГЭ по математике: метод. указания. 2-е изд., испр. — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2019. — 28 с.

7. Никитин А. А., Михеев Ю. В., Ляпунов И. Б. Варианты выпускных экзаменов по математике СУНЦ НГУ: учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017. — 92 с.

8. Ткачук В. В. Математика — абитуриенту. — М.: ТЕИС, 1994. — 499 с.

Учебное издание

Ляпунов Игорь Борисович

МОДЕЛИ НА ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Методическое пособие

Технический редактор *Т. В. Иванова*

Обложка *А. Г. Иванова*

Верстка *И. Б. Ляпунова*

Подписано в печать 21.02.2022 г.
Формат 60 × 84/16 Уч.-изд. л. 4,75. Усл. печ. л. 4,42.
Тираж 300 экз. Заказ № 9
Издательско-полиграфический центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2