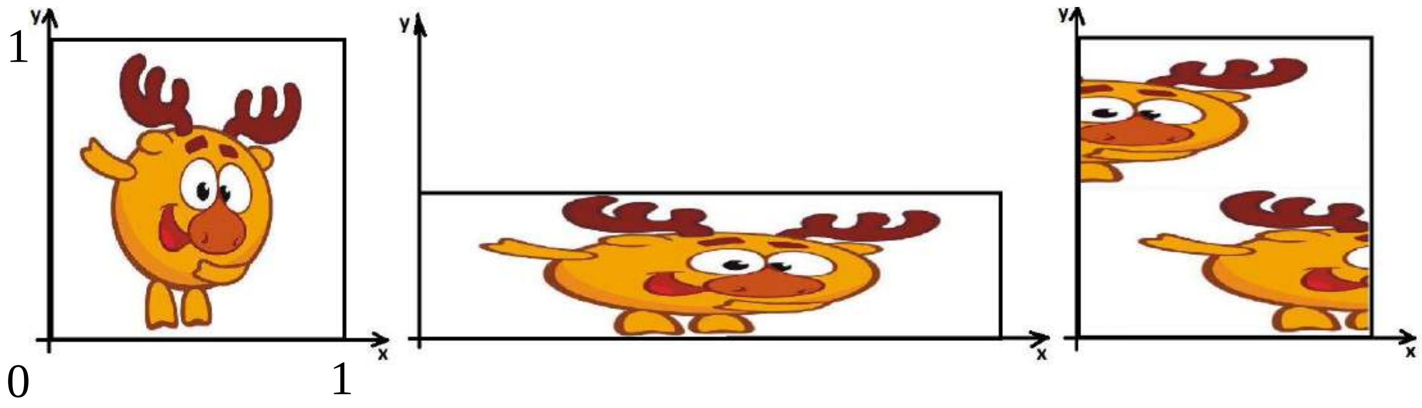
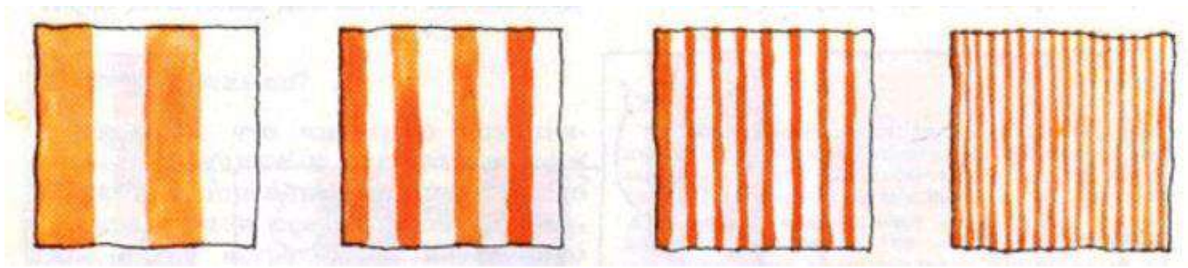
Геометрия преобразования пекаря

Выполнили Бушуева Леля и Степанова Варвара



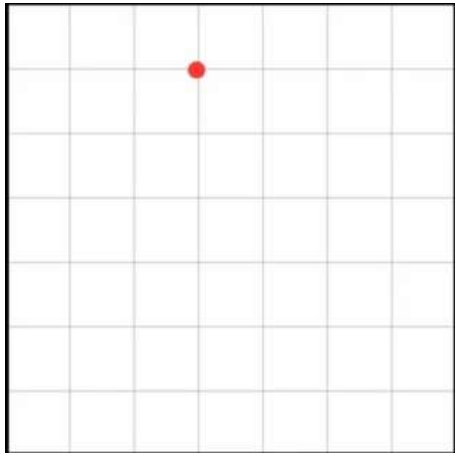
Преобразование пекаря – это нелинейное отображение единичного квадрата в себя.

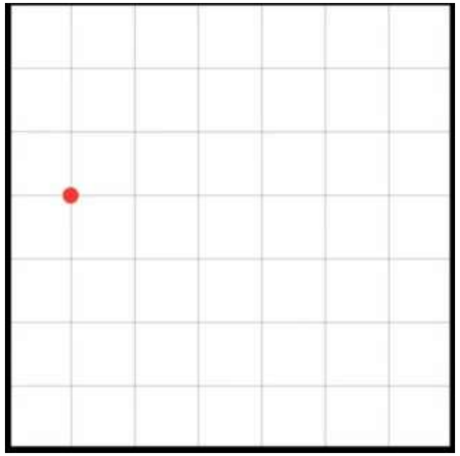


Цель работы: изучить замкнутые траектории преобразования пекаря.

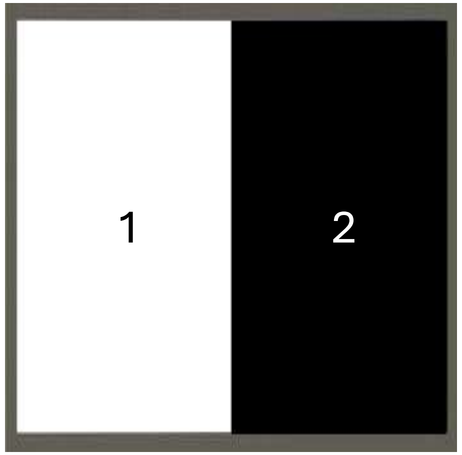
<u>Опр:</u> Замкнутой траекторией периода n назовём последовательность точек {t, P(t),..., $P^n(t)$}, такую что $P^n(t) = t$ и n – такое наименьшее натуральное число для каждого $P_n(t) = t$.

Пример замкнутой троектории:





Пусть (0, $x_1\ x_2\ x_3$ …; 0 , $y_1\ y_2\ y_3$ …) – координаты произвольной точки квадрата в двоичной системе координат.
Удобно кодировать точки квадрата следующей числовой последовательностью: $\mathbf{\dots\ y_3\ y_2\ y_1\ ,\ x_1\ x_2\ x_3 \dots}$
Как будет действовать P на этой плоскости?



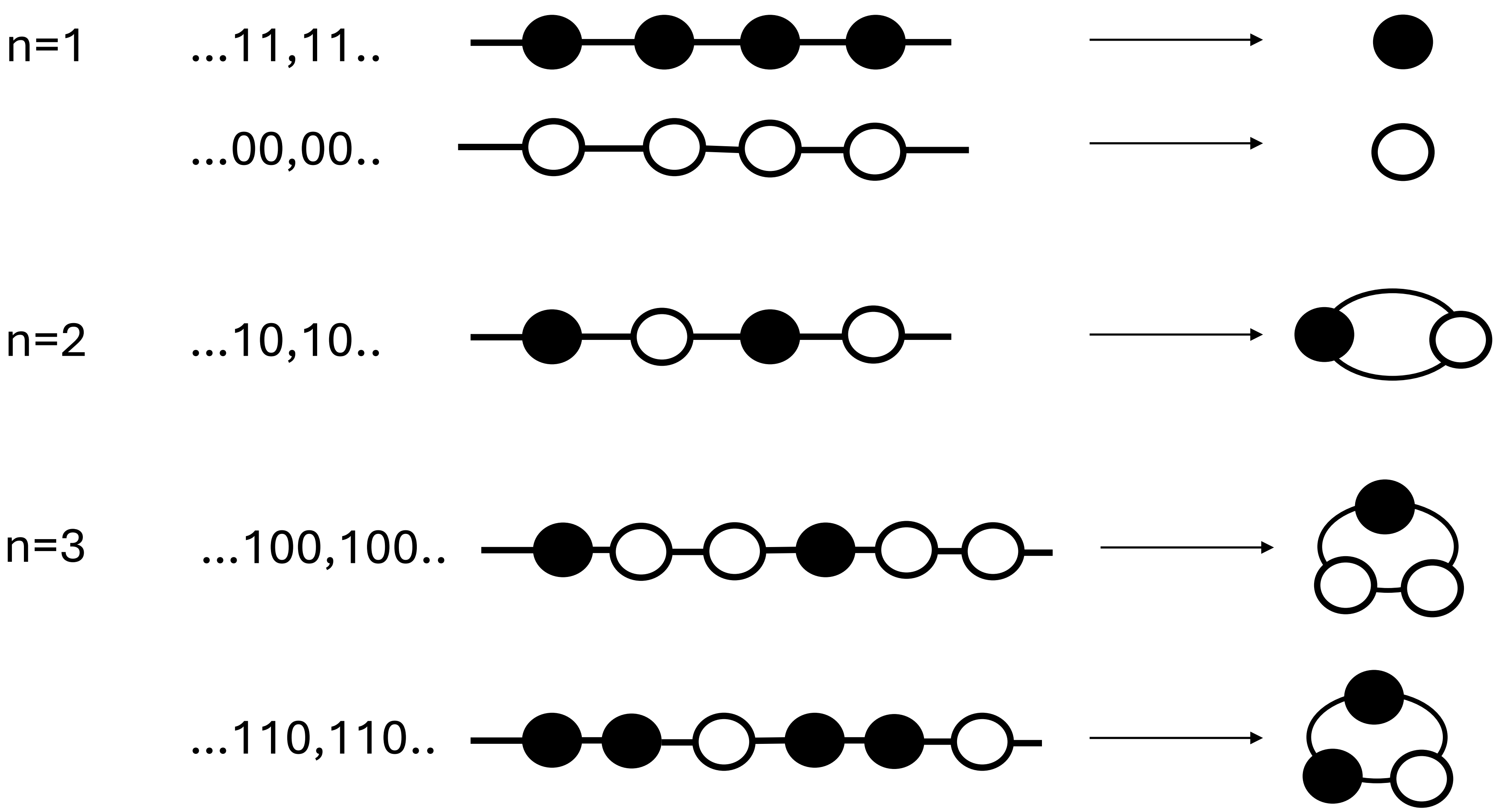
При каждом преобразовании пекаря запятая в записи координат сдвигается вправо на 1 знак.

$$P(x, y) = \begin{cases} (2x; 0.5y) & x < 0.5, \\ (2x - 1; 0.5y + 0.5) & x \geq 0.5 \end{cases}$$

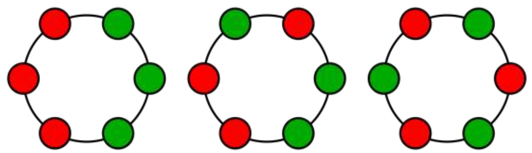
1.
x_1 = 0 т. е. x < 0,5
2x = x_1 , $x_2\ x_3$… = 0, $x_2\ x_3$ …
½ y = 0 , 0 $y_1\ y_2\ y_3$ = 0 , $x_1\ y_1\ y_2$…

2.
x_1 = 1 т. е. x >= 0,5
2x -1 = 1, $x_2\ x_3$… - 1 = 0, $x_2\ x_3$ …
½ y + ½ = 0 , 1 $y_1\ y_2\ y_3$ = 0 , $x_1\ y_1\ y_2$…

P(… $y_3\ y_2\ y_1$, $x_1\ x_2\ x_3$…) = … $y_3\ y_2\ y_1\ x_1$, $x_2\ x_3$…


n=1
...11,11..
...00,00..
n=2
...10,10..
n=3
...100,100..
...110,110..

Замкнутые траектории преобразования пекаря можно рассматривать, как 2-х цветные ожерелья.



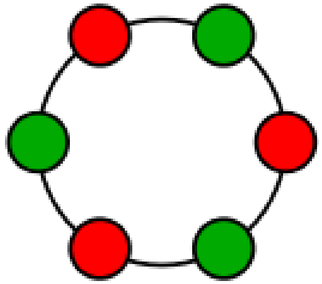
В комбинаторике k-цветное ожерелье длины n — это класс эквивалентности n-символьных строк над алфавитом размера k, где эквивалентными считаются строки, получающиеся друг из друга циклической перестановкой. Ожерелье {100}, например, класс эквивалентности строк 100, 010, 001.

n (период)	Кол-во ожерелий N(n)
1	2
2	3
3	4
4	6
5	8
6	14

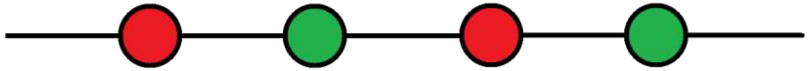
Для нахождения количества ожерелий из 2 цветов и n бусин есть такая формула:

$$\mathrm{N(n)} = \frac{1}{2}\sum_{n}^{d} \varphi\,(d)\; 2^{\frac{n}{d}}$$

Но есть проблема:

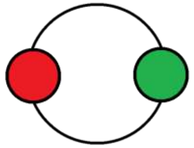


- Ожерелье из 6 бусин и 2 цветов, для преобразования пекаря:



...10**101,0101**0...

Тоже самое, что и траектория периода 2!



Получается, в формуле для подсчета траекторий необходимо учесть наличие повторяющихся последовательностей.

Решение проблемы:

Пусть n - период преобразования пекаря, а d1, d2,...di – делители n. Тогда, чтобы найти количество n- периодических траекторий преобразования пекаря f(n) нужно вычесть из числа N(n) двухцветных ожерелий длины n все f(di):

Таким образом
f(1)=N(1)=2 – число неподвижных точек
f(2)=N(2)-f(1)=3-2=1
f(3)=N(3)-f(1)=4-2=2
f(4)=N(4)–f(1)-f(2)=6–2–1=3
f(5)=N(5)–f(1)=8–2=6
f(6)=N(6)–f(1)–f(2)–f(3)=14–2–1–2=9
и т. д.

Универсальная формула при n – простых чисел

$$(2^p - 2)/p$$

Итог работы:

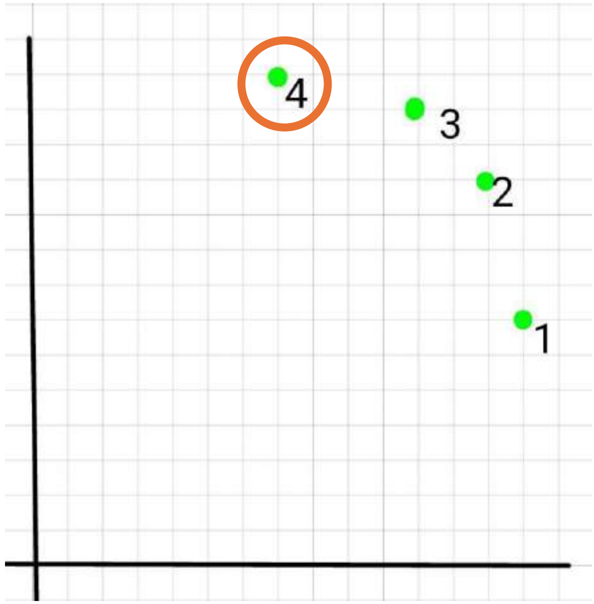
n (период)	Кол-во ожерелий N(n)	Кол-во траекторий периода n f(n)	Кол-во периодических точек (f(n)* n)
1	2	2	2
2	3	1	2
3	4	2	6
4	6	3	12
5	8	6	30
6	14	9	54

Как мы находили координаты?

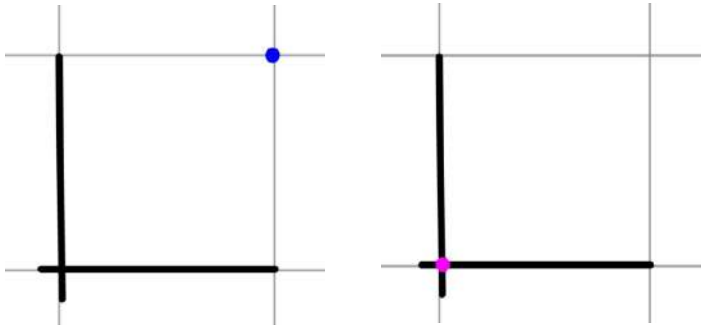
1) Возьмём для примера последовательности длиной n=4:
1110
1100
1000
~~1010~~
~~1111~~
~~0000~~

2) Для последовательности 1110 координаты вида ...$y_3y_2y_1,x_1x_2x_3$... будут выглядеть таким образом:
...1110,1110...
...1101,1101...
...1011,1011...
...0111,0111...

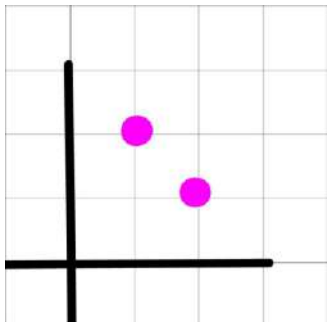
Соответственно для ...1110,1110...
$X = 0{,}1110_2 = 7/15_{10}$
$y = 0{,}0111_2 = 14/15_{10}$



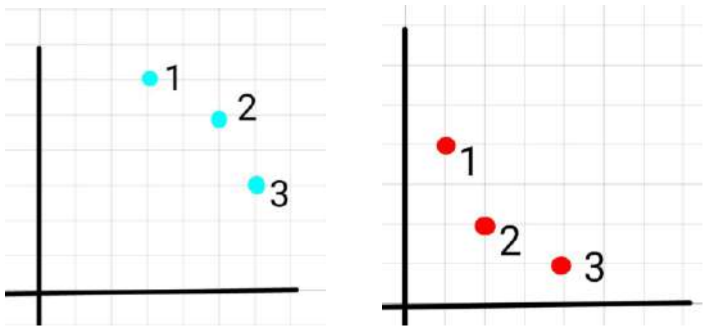
n = 1



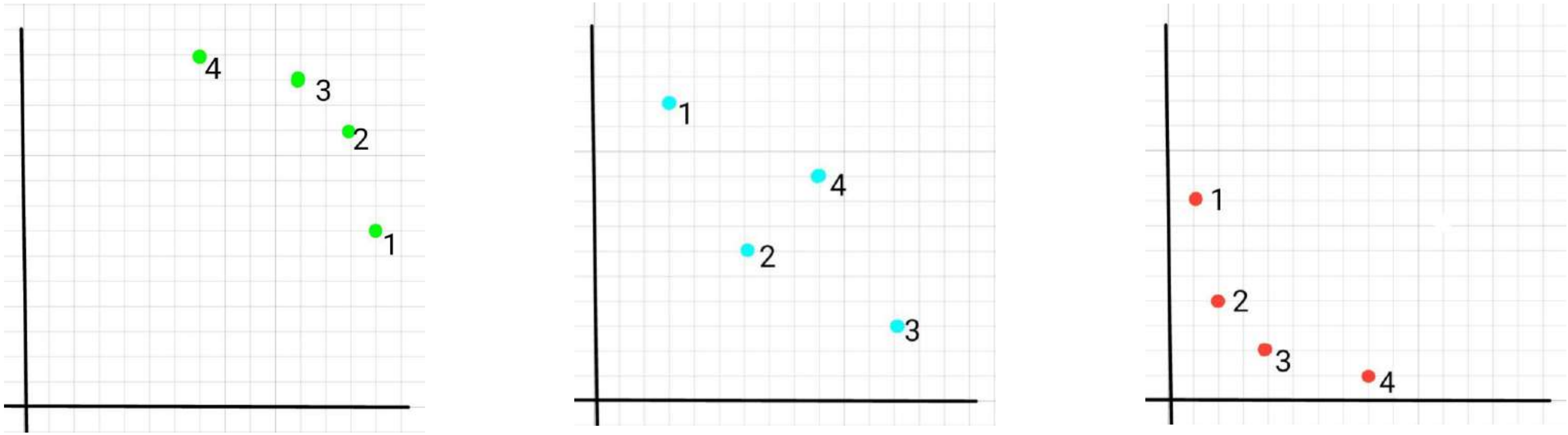
n = 2



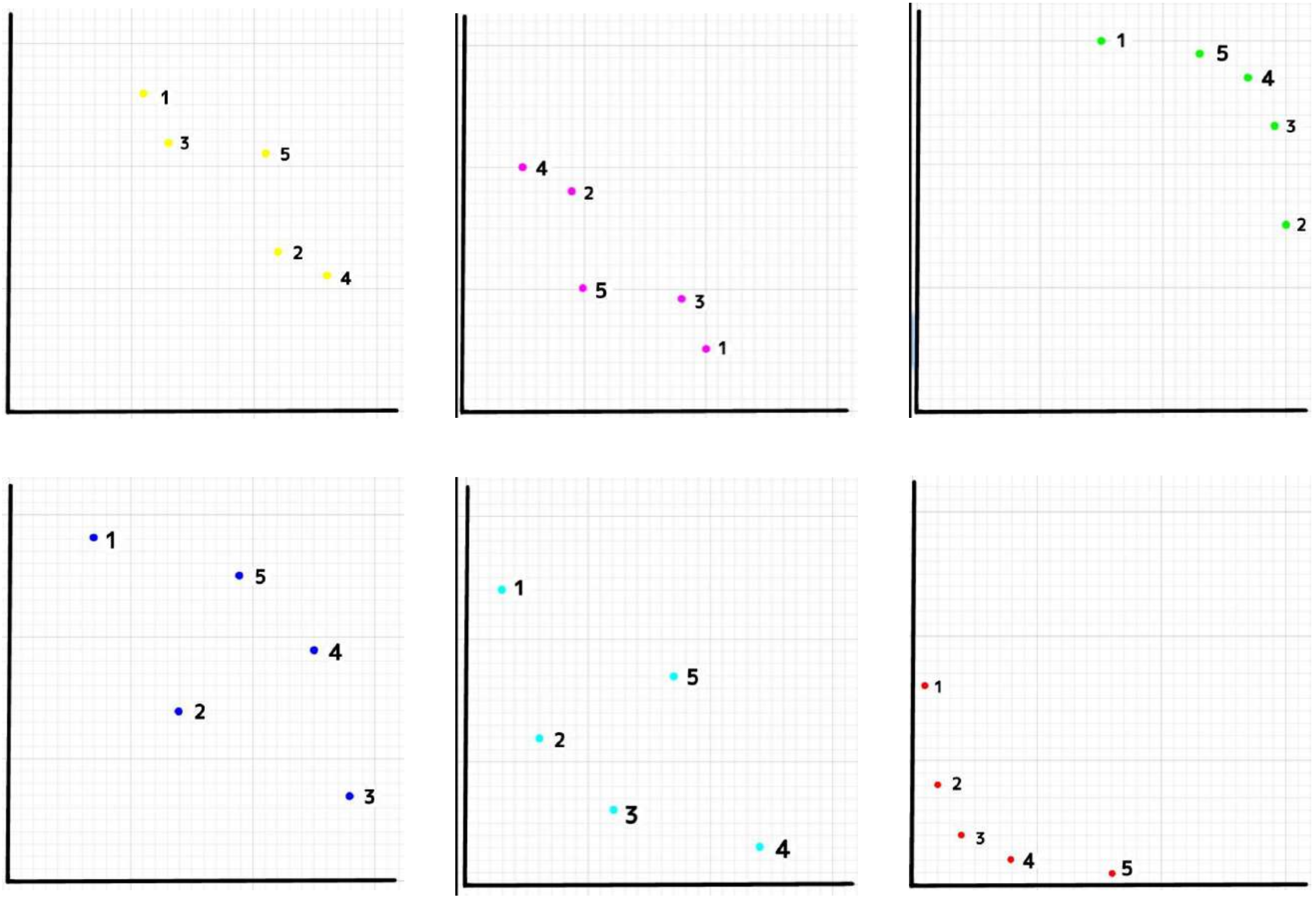
n = 3



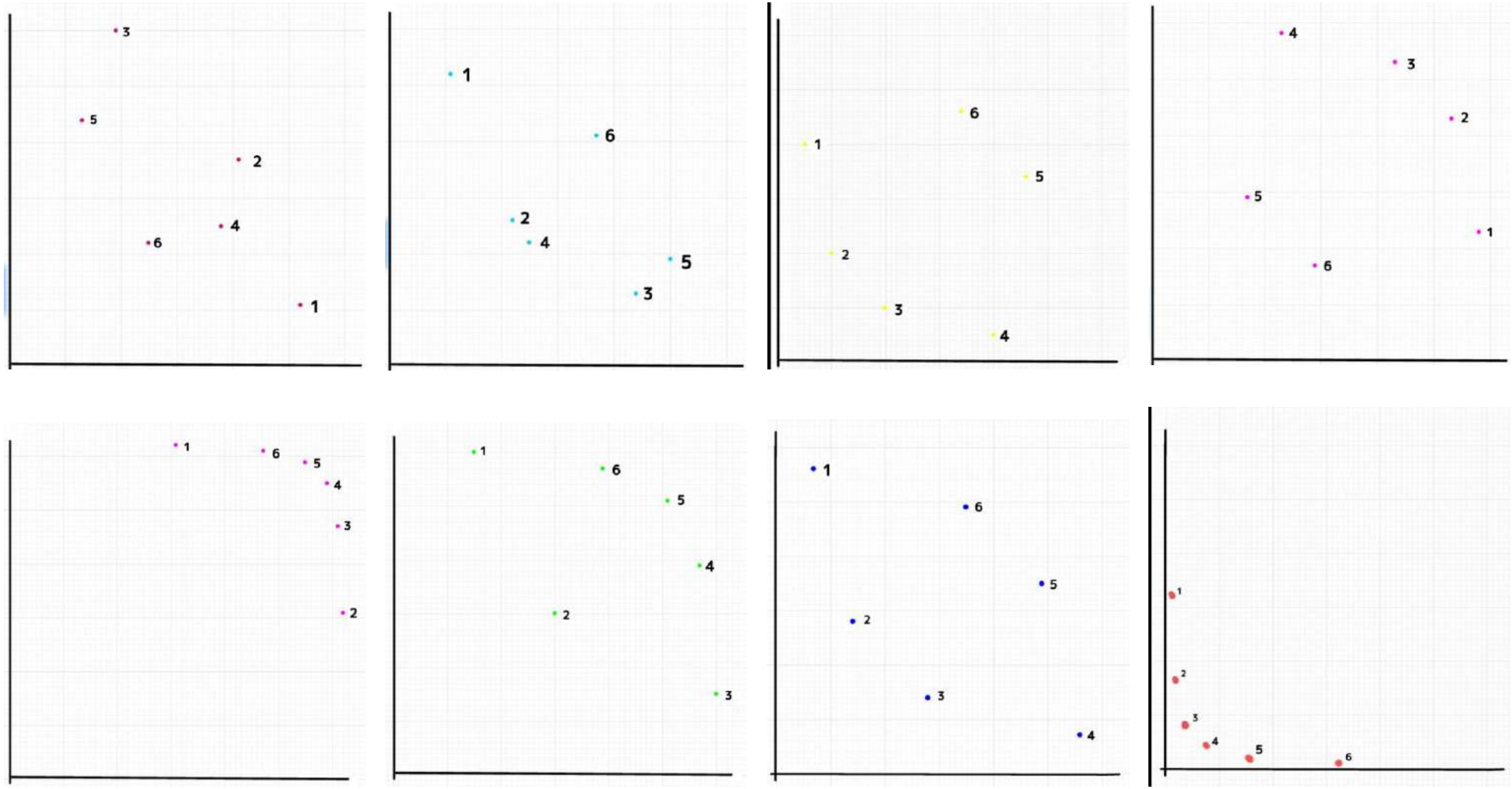
n = 4



n = 5



n = 6



https://kvant.mccme.ru/1989/04/preobrazovanie_pekarya.htm

Спасибо за внимание!