Исследование коммутирующих дискретных операторов

Ратибор Коптилин, СУНЦ НГУ

Конкурс «За ранний вход в науку» на стипендию имени А. А. Ляпунова

25 мая 2024 года, Новосибирск

Дискретный оператор имеет следующий вид:

$$L_k = T^k + u_{k-1}(n)T^{k-1} + \dots + u_0(n).$$

Здесь $u_j(n)$ - некоторые функции, $k \in \mathbb{N}$ - порядок оператора, T - оператор сдвига, то есть

$$(Tf)(n) = f(n+1),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Дискретный оператор естественным образом действует на множестве функций ($\{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\}$):

$$(L_k f)(n) = f(n+k) + u_{k-1}(n)f(n+k-1) + \dots + u_0(n)f(n).$$

Пусть

$$L_k = T^k + u_{k-1}(n)T^{k-1} + \cdots + u_0(n),\ L_s = T^s + v_{s-1}(n)T^{s-1} + \cdots + v_0(n),$$

где $u_j(n), v_i(n)$ - некоторые функции.
Если

$$L_s(L_k f_n) = f_{n+k+s} + (v_{s-1}(n) + u_{k-1}(n+s))f_{n+k+s-1} + \ldots + v_0(n)u_0(n)f_n,$$

$$L_k(L_s f_n) = f_{n+k+s} + (v_{s-1}(n+k) + u_{k-1}(n))f_{n+k+s-1} + \ldots + v_0(n)u_0(n)f_n,$$

где $f_n = f(n)$, то в общем случае $L_s(L_k f_n) \neq L_k(L_s f_n)$.

Цель этой работы - найти такие операторы L_k, L_s, что

$$L_s(L_k f_n) = L_k(L_s f_n).$$

Условие коммутации пары (L_k, L_s) эквивалентно сложной системе нелинейныз дискретных уравнений на их коэффиценты. Эти уравнения изучаются, начиная с начала XX века (Wallenberg, 1909).

Цепочка Тоды

$$\partial_t^2 \phi_n = e^{\phi_n - \phi_{n-1}} - e^{\phi_{n+1} - \phi_n}$$

$$[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = 0,$$

$$\mathcal{L}_1 = \partial_t - T - \phi_{nt}, \quad \mathcal{L}_2 = \partial_t - e^{\phi_n - \phi n - 1}$$

$$[\mathcal{L}_j, L_s] = 0, \quad [\mathcal{L}_j, L_k] = 0, \quad [L_s, L_k] = 0, \quad j = 1, 2$$

Если $[L_k, L_s] = 0$, то существует многочлен $Q(z, w) \neq 0$ такой, что $Q(L_k, L_s) = 0$.

$$\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : Q(z, w) = 0\}.$$

Пусть ψ - совместная собственная функция (т. н. функция Бейкера-Ахиезера). Тогда

$$L_k\psi = z\psi,\ L_s\psi = w\psi, \quad (z, w) \in \Gamma.$$

$$L_2 = T^2 + U(n)T + V(n), \quad L_{2g+1} = T^{2g+1} + v_{2g}(n)T^{2g} + \dots + v_0(n).$$

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \dots + c_0.$$

Примеры[1]:

- $(T + r_1 cos(n))^2 + \frac{sin(g)sin(g+1)}{2cos^2(g+\frac{1}{2})} r_1^2 cos(2n), \quad r_1 \neq 0.$
- $(T + \alpha_2 n^2 + \alpha_0)^2 - g(g+1)\alpha_2^2 n^2, \quad \alpha_2 \neq 0.$
- $(T + \beta_1 a^n)^2 + \frac{a^{2g}+a^{2g+2}-a^{4g+2}-1}{(a^{2g+1}+1)^2} \beta_1^2 a^{2n}, \quad \beta_1 \neq 0, a \neq 0.$

[1] Маулешова Г. С., Миронов А. Е., *Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга 1*, ДАН, 466:4 (2016) 399-401.

Имеет место равенство

$$L_2 - z = (T + U_n + U_{n+1} + \chi_{n+1}(P))(T - \chi_n(P)),$$

где

$$\chi_n(P) = \frac{\psi_{n+1}(P)}{\psi_n(P)} = \frac{S_n}{Q_n} + \frac{w}{Q_n},$$

$$S_n(z) = -U_n z^g + \delta_{g-1}(n) z^{g-1} + \ldots + \delta_0(n), \quad Q_n = -\frac{S_{n-1} + S_n}{U_{n-1} + U_n}.$$

Функции $U_n, W_n, S_n(z)$ удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = S_n^2 + (z - U_n^2 - W_n)Q_n Q_{n+1}.$$

$$(U_n + U_{n+1})(S_n - S_{n+1}) - (z - U_n^2 - W_n)Q_n + (z - U_{n+1}^2 - W_{n+1})Q_{n+2} = 0.$$

Теорема

Оператор вида

$$L_2 = (T + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0)^2 - g(g+1)\alpha_2 n(\alpha_2 n + \alpha_1), \ \ \alpha_2 \neq 0$$

коммутирует с некоторым оператором L_{2g+1} порядка $2g+1$.

Идея доказательства

Можно заметить, что наш оператор записывается в виде

$$L_2 = (T + a_2(n+\beta)^2 + \gamma)^2 - g(g+1)a_2^2(n+\beta)^2 + \delta.$$

Отбросив константу δ, мы получаем оператор, очень схожий с

$$L_2' = (T + a_2 n^2 + \gamma)^2 - g(g+1)a_2^2 n^2,$$

который был полностью рассмотрен в оригинальной статье.
Так что мы уже знаем, что существует L_{2g+1}', коммутирующий с L_2'.
Из него мы и получим искомый L_{2g+1} одним нехитрым действием.

Сопряжение как основная идея

Пусть V - оператор сдвига на $\beta : (Vf)(n) = f(n+\beta)$. Тогда «нехитрым действием» станет сопряжение алгебры операторов оператором V:

$$(T + a_2 n^2 + \gamma)^2 - g(g+1)a_2^2 n^2 \xrightarrow{V(\dots)V^{-1}}$$

$$\xrightarrow{V(\dots)V^{-1}} (T + a_2(n+\beta)^2 + \gamma)^2 - g(g+1)a_2^2(n+\beta)^2.$$

Это сопряжение ϕ есть автоморфизм алгебры операторов $\implies \phi(L'_{2g+1})$ коммутирует с $\phi(L'_2) = L_2$.

Поэтому оператор $L_{2g+1} = \phi(L'_{2g+1})$ является искомым.