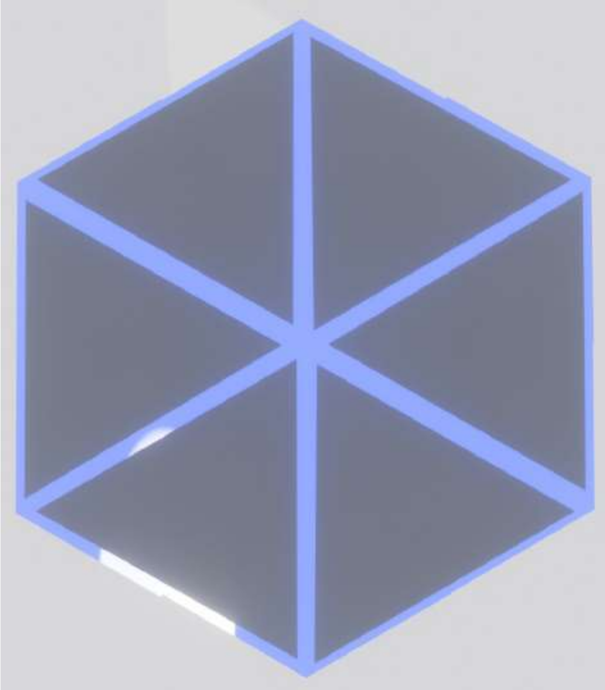
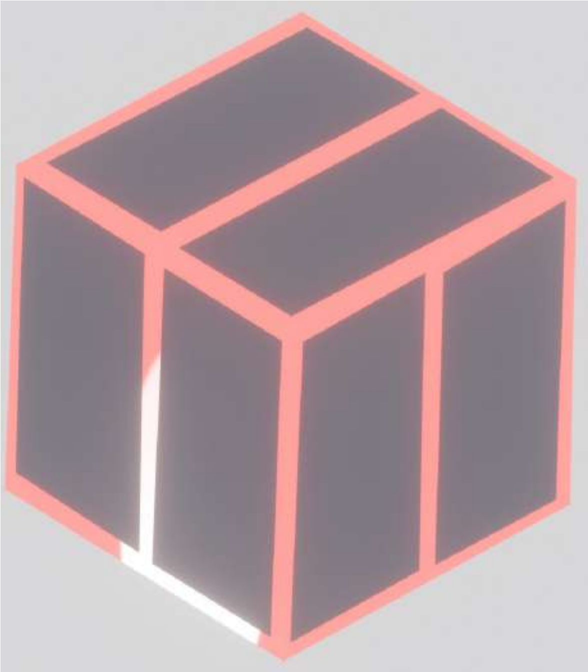
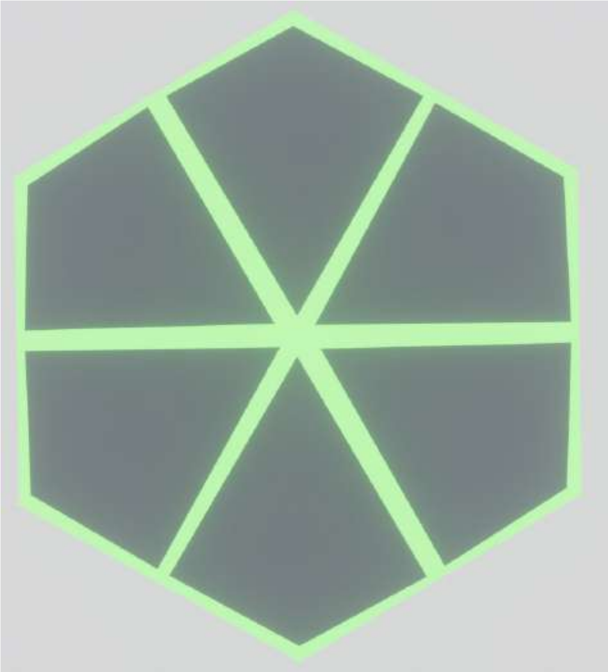
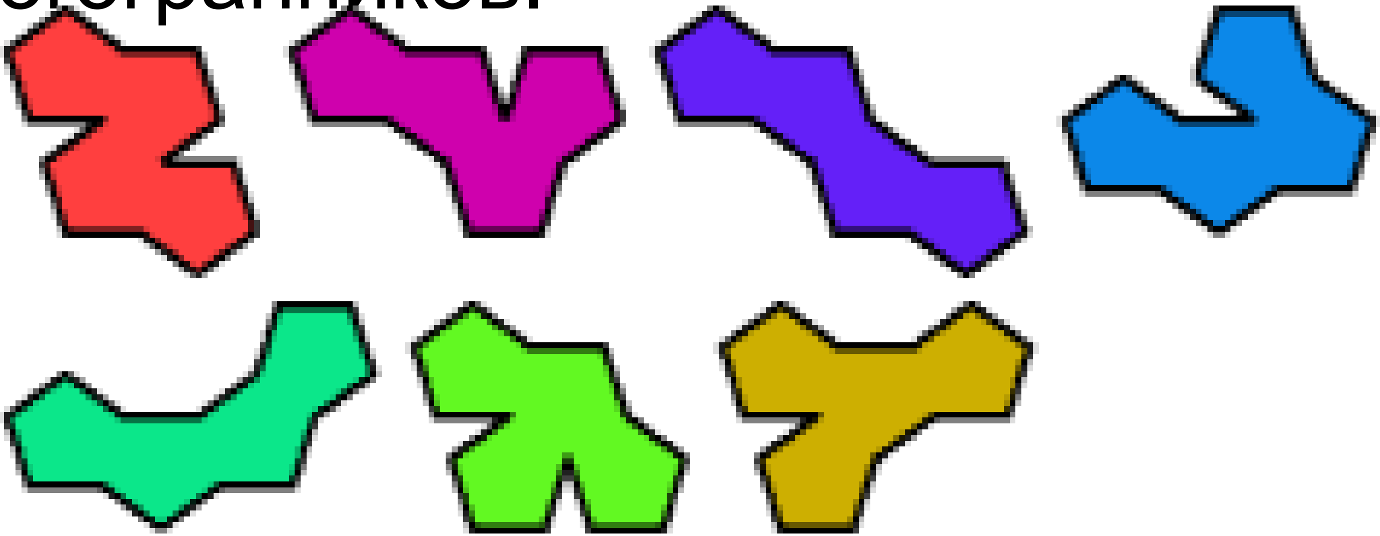
Общее кратное плоских фигур

- Селиванова Софья “СУНЦ НГУ”

Полиформы

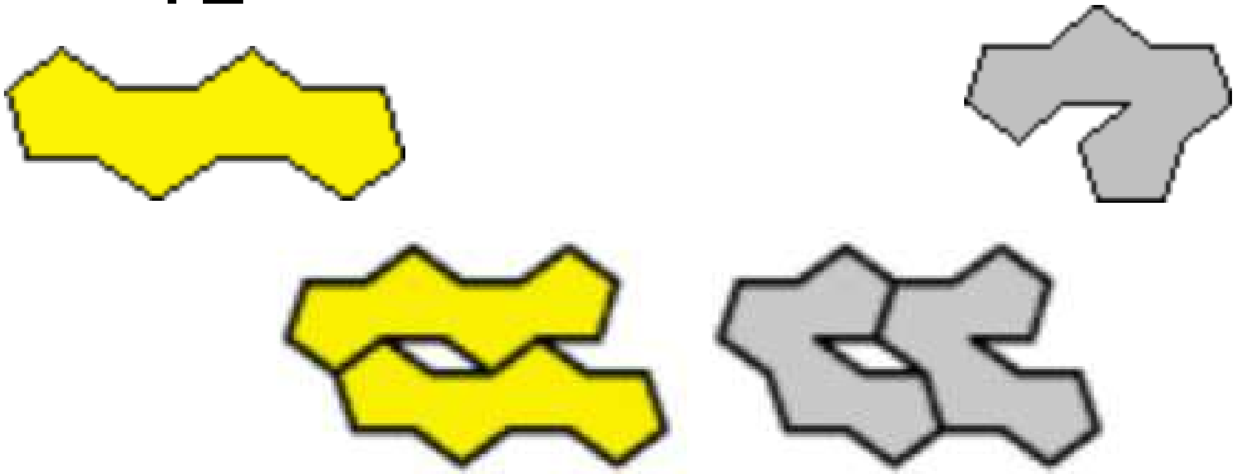
- Полиформа – это плоская или пространственная геометрическая фигура, образованная путём соединения одинаковых ячеек — многоугольников или многогранников.



Общее кратное

Общим кратным фигур f1 и f2 называется фигура, которая допускает замощение как фигурами f1, так и f2.

f1 f2



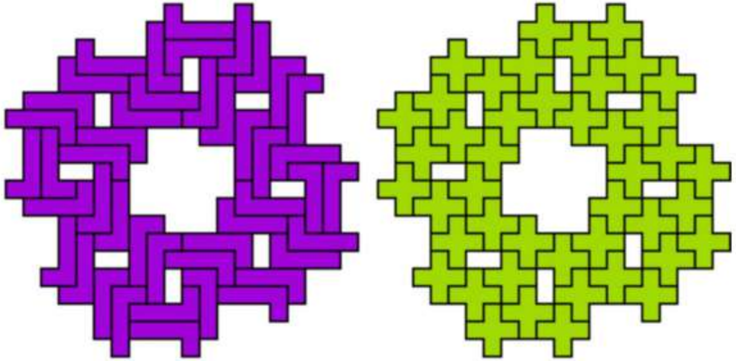
Известные случаи

- Эта задача решена для:
- полимино (фигур из 3-5 квадратов),
- полиамондов (фигур из 3-7 равносторонних треугольников),
- полигексов (фигур из 3-5 шестиугольников),
- полипентов (фигур из 3-5 пятиугольников)
- полиаболо (фигур из 3-5 равнобедренных прямоугольных треугольников).

Решение для пентамино

Two well-known websites, Poly2ominoes by Jorge Mireles and Polypolyominoes by Giovanni Resta, present the results of their authors' systematic searches for compatibility figures

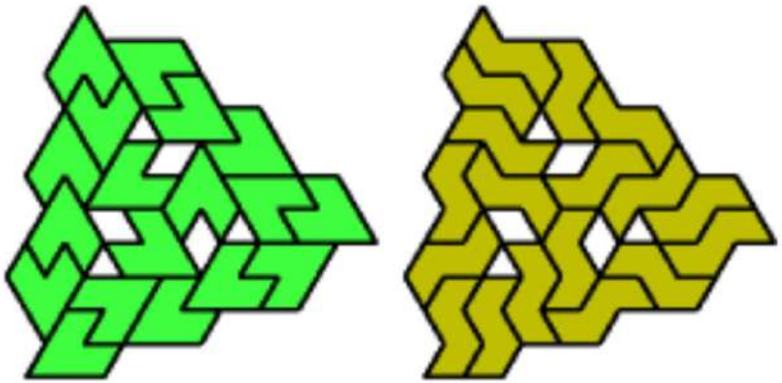
	F	I	L	N	P	T	U	V	W	X	Y	Z
F	*	10	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2
I	10	*	2	2	2	4	12	4	10	×	2	20
L	2	2	*	4	2	2	2	2	2	44	2	2
N	2	2	4	*	2	2	2	2	2	16	2	2
P	2	2	2	2	*	2	2	2	2	4	2	2
T	2	4	2	2	2	*	4	2	14	4	2	2
U	4	12	2	2	2	4	*	2	2	×	2	4
V	4	4	2	2	2	2	2	*	6	×	2	4
W	2	10	2	2	2	14	2	6	*	?	2	4
X	2	×	44	16	4	4	×	×	?	*	2	?
Y	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	*	2
Z	2	20	2	2	2	2	4	4	4	?	2	*



Решение для гексиамондов

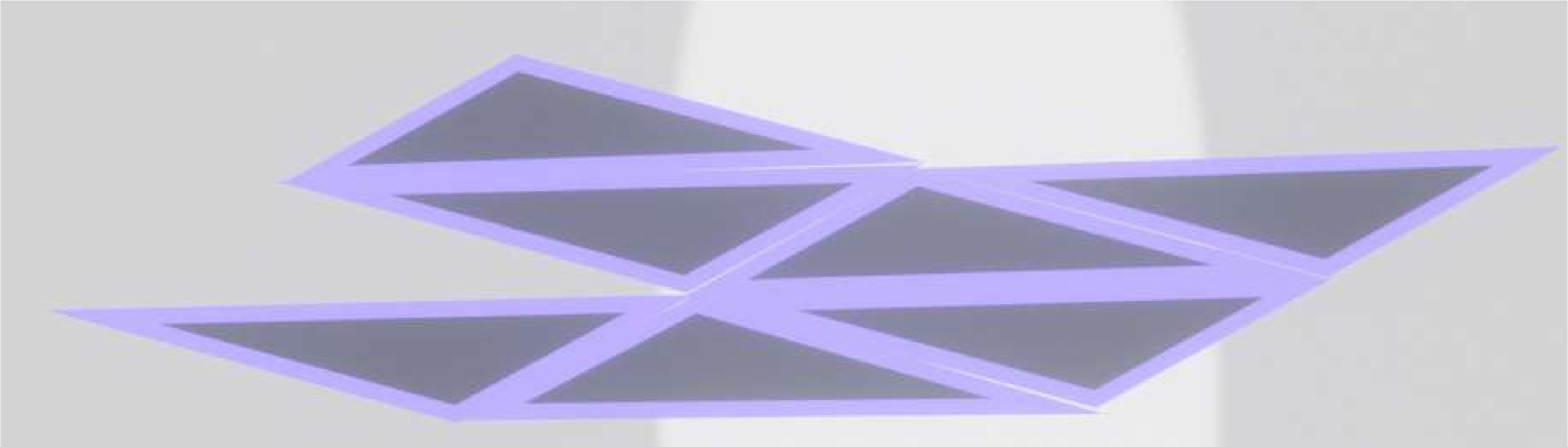
Margarita Lukjanska and Andris Cibulis, who published a paper about it with Andy Liu in 2004 in the Journal of Recreational Mathematics

	A	E	F	H	I	L	O	P	S	U	V	X
A	*	3	2	3	2	3	×	2	18	3	2	×
E	3	*	6	2	3	3	×	6	4	3	6	3
F	2	6	*	2	2	2	6	2	2	2	2	6
H	3	2	2	*	3	2	6	2	2	2	3	3
I	2	3	2	3	*	3	×	2	3	3	2	×
L	3	3	2	2	3	*	6	2	3	2	3	3
O	×	×	6	6	×	6	*	6	3	3	3	×
P	2	6	2	2	2	2	6	*	2	2	2	2
S	18	4	2	2	3	3	3	2	*	2	3	×
U	3	3	2	2	3	2	3	2	2	*	3	×
V	2	6	2	3	2	3	3	2	3	3	*	×
X	×	3	6	3	×	3	×	2	×	×	×	*

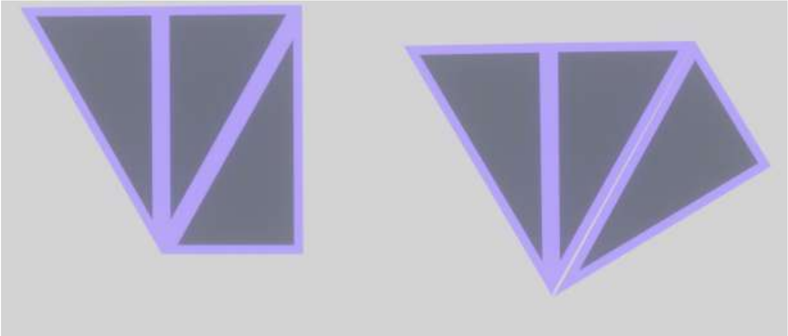


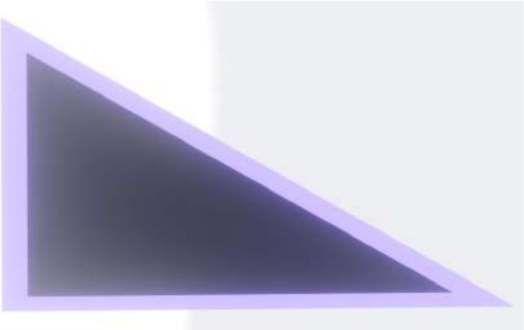
Обобщенные полиамонды (тема данной работы)

Обобщенным полиамондом называется плоская фигура, составленая из одинаковых (не обязательно правильных) треугольников путём присоединения их по целой стороне.

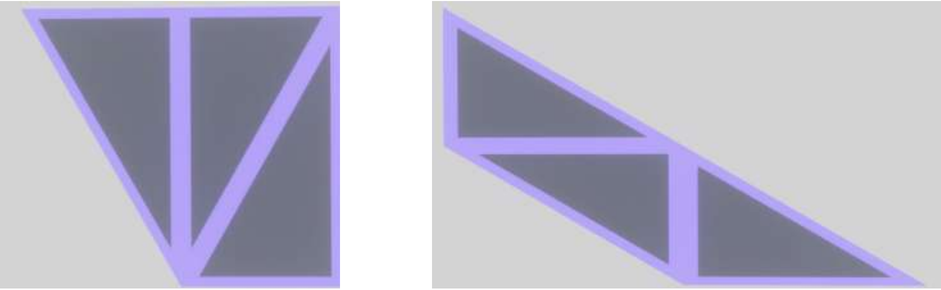


1. Есть ли у этих двух обобщённых тримондов общее кратное?

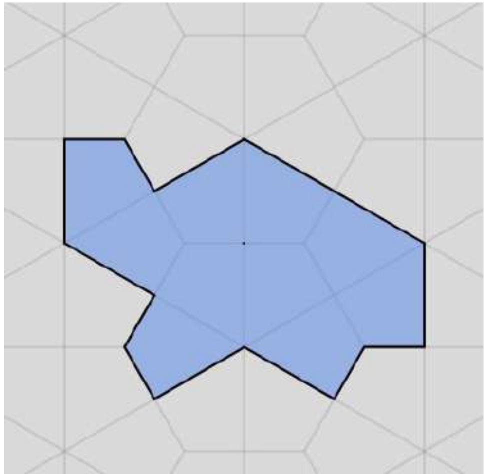




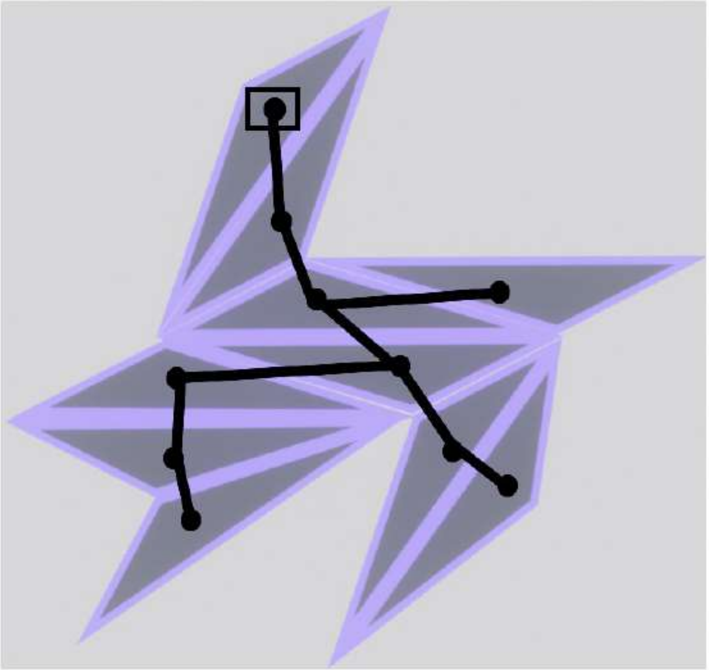
2. А у этих двух?



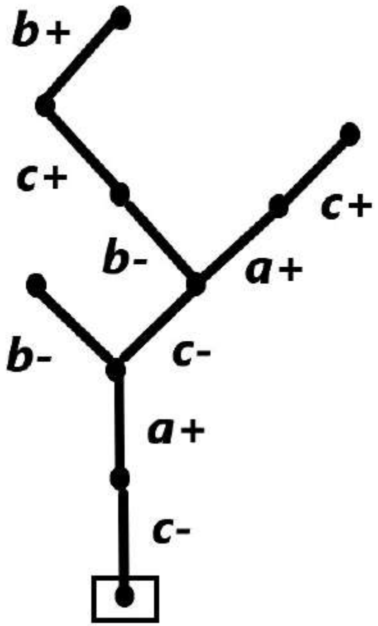
3. Можно ли этих обобщённым полиамондом замостить плоскость?



Кодировка

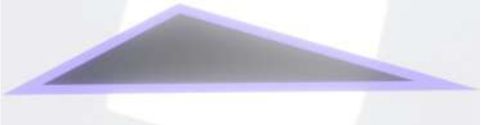


c-a+(b-,c-(b-c+b+, a+c+))

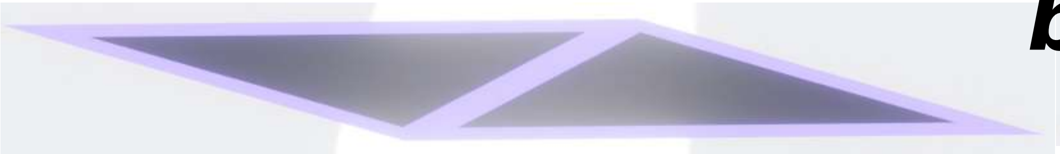


Обобщённые полиамонды кодируются раскрашенными плоскими корневыми 3-деревьями

Бимонды

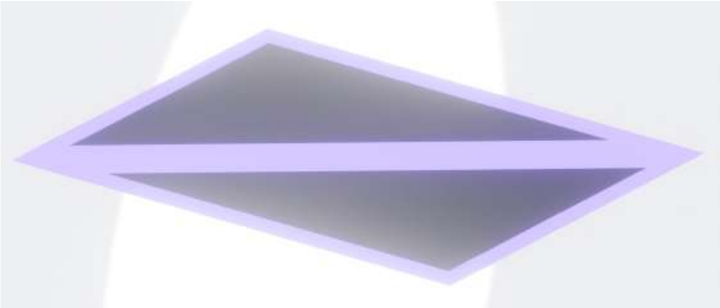


a-



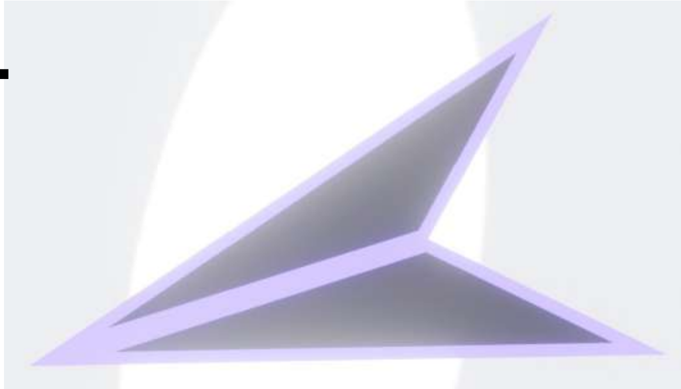
b-

c-



a+

b+



c+

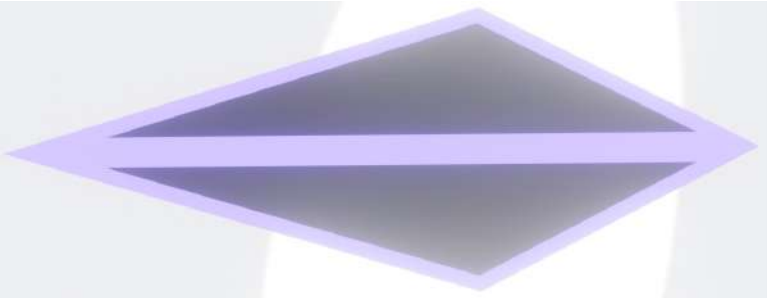
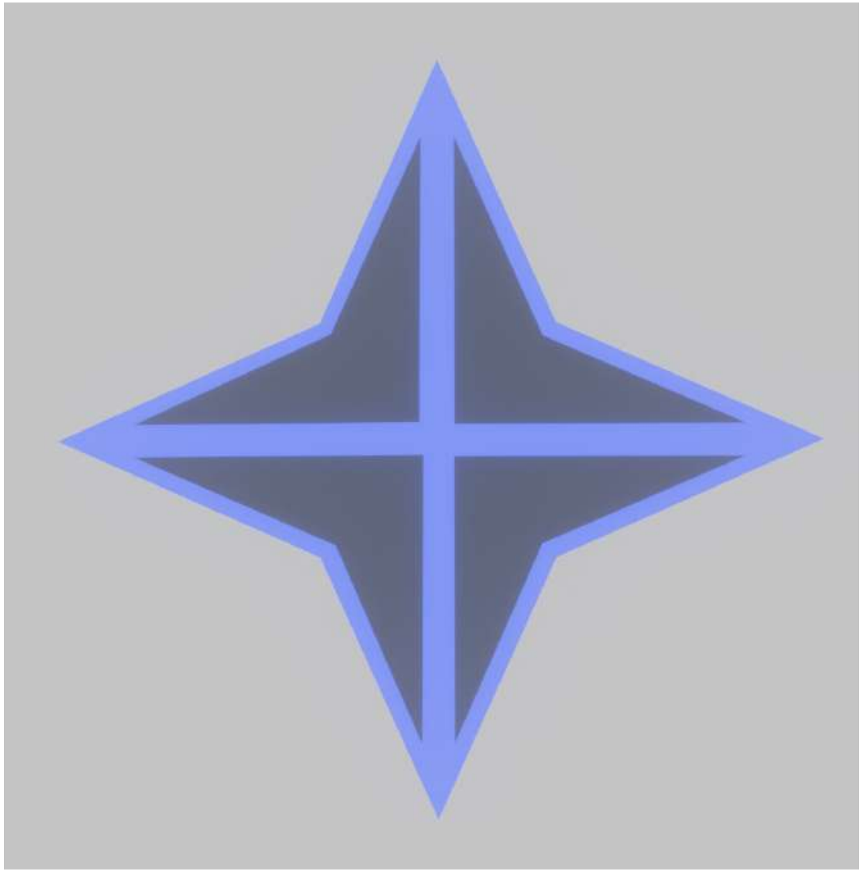


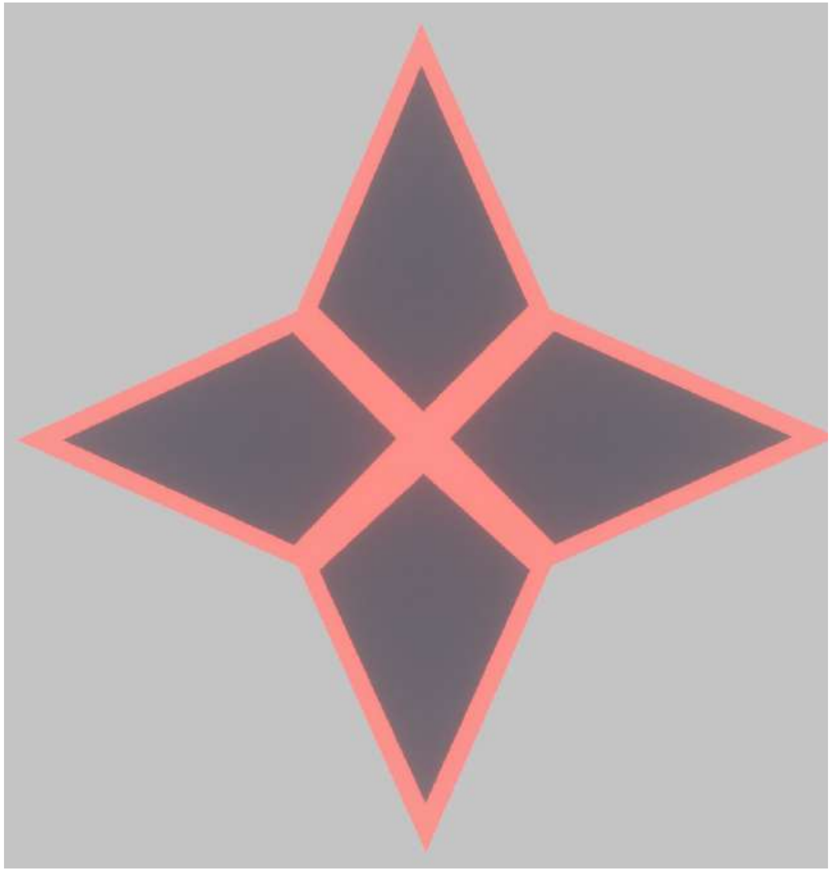
Таблица для бимондов с несоизмеримыми углами и сторонами и присоединению по стороне

	a-	b-	c-	a+	b+	c+
a-	*	-	-	-	-	-
b-	-	*	-	-	-	-
c-	-	-	*	-	-	-
a+	-	-	-	*	2n	2n
b+	-	-	-	2n	*	2n
c+	-	-	-	2n	2n	*

(2n) только для углов 180/n, где n – натуральное число >2, для остальных все минусы

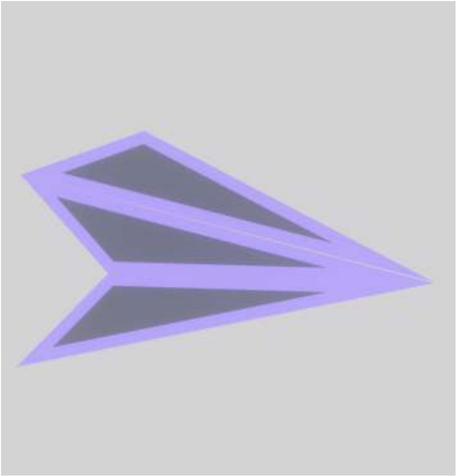
Звёздчатая конструкция

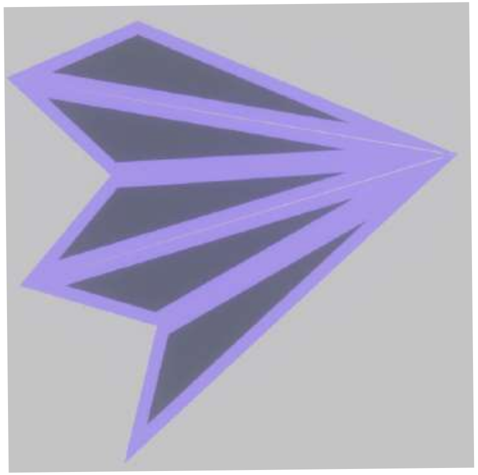


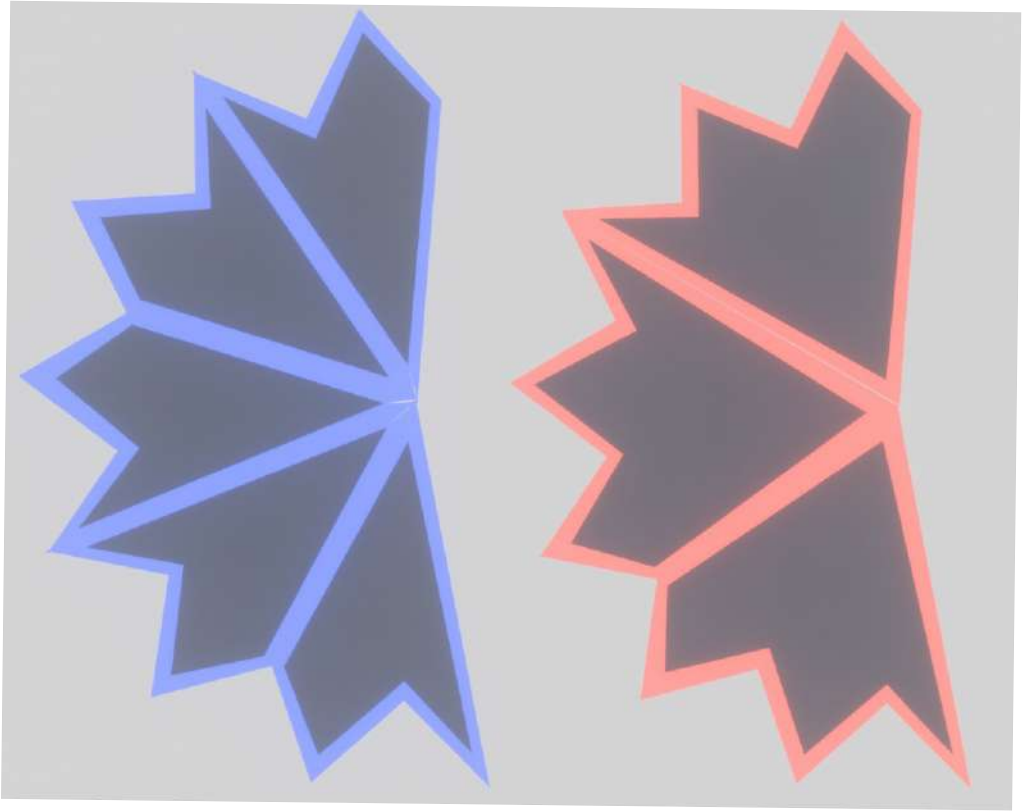


Пример с углом 45 градусов, n=4

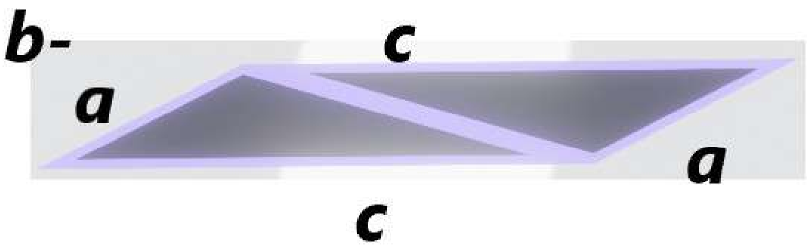
Обобщённая звёздчатая конструкция

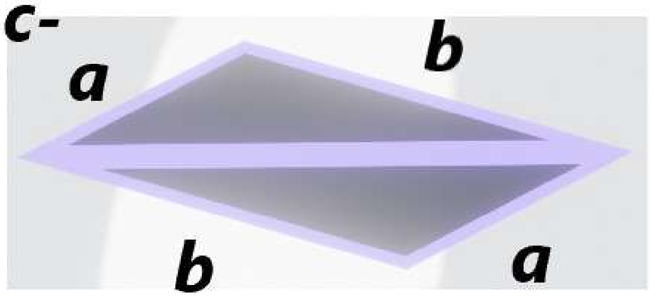






Об отсутствии общего кратного параллелограмм-параллелограмм





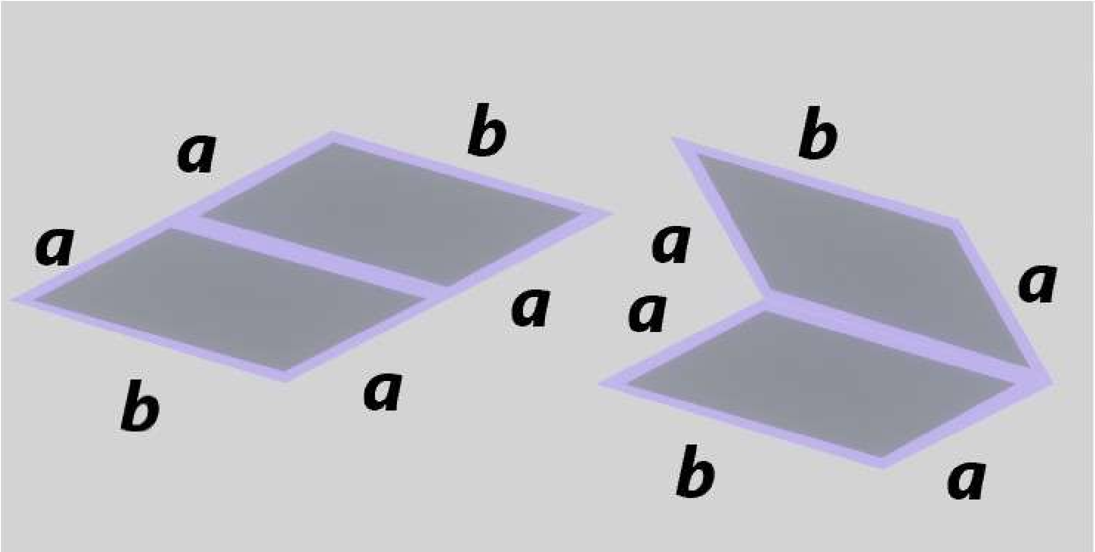
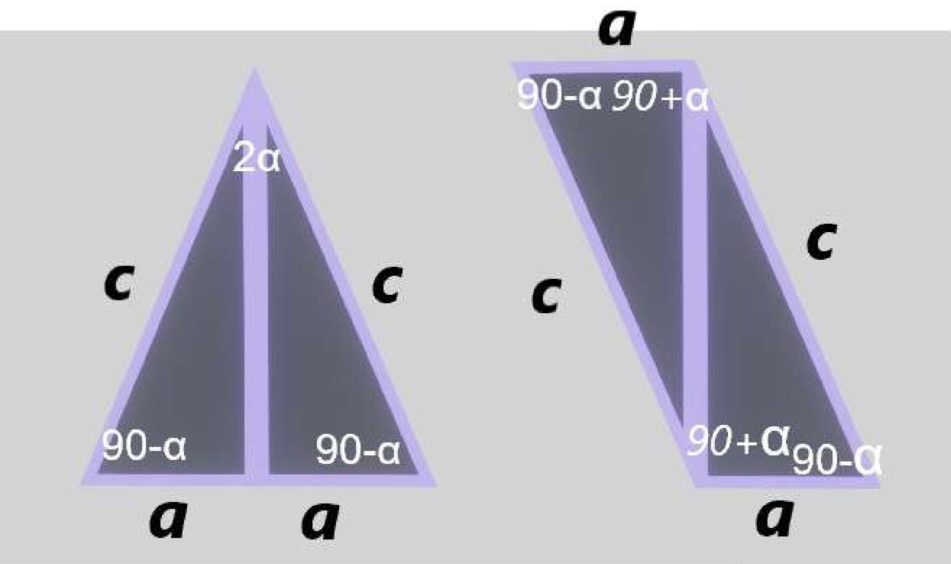


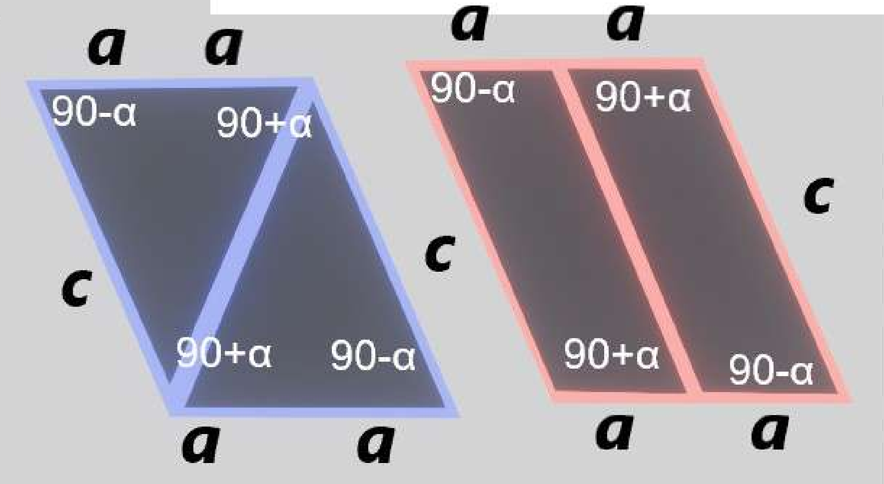
Таблица 90-α-β (бивкадры)

	a-	b-	c-	a+	b+	c+
a-	*	2 При α=45	-	2	-	-
b-	2 При α=45	*	-	2 При α=30	2	+ При α=30, α=45
c-	-	-	*	4 При α=45	4 При α=45	-
a+	2	2 При α=30	4 При α=45	*	2	2n При β=180/n
b+	-	2	4 При α=45	2	*	2n При α=180/n
c+	-	+ При α=30, α=45	-	2n При β=180/n	2n При α=180/n	*

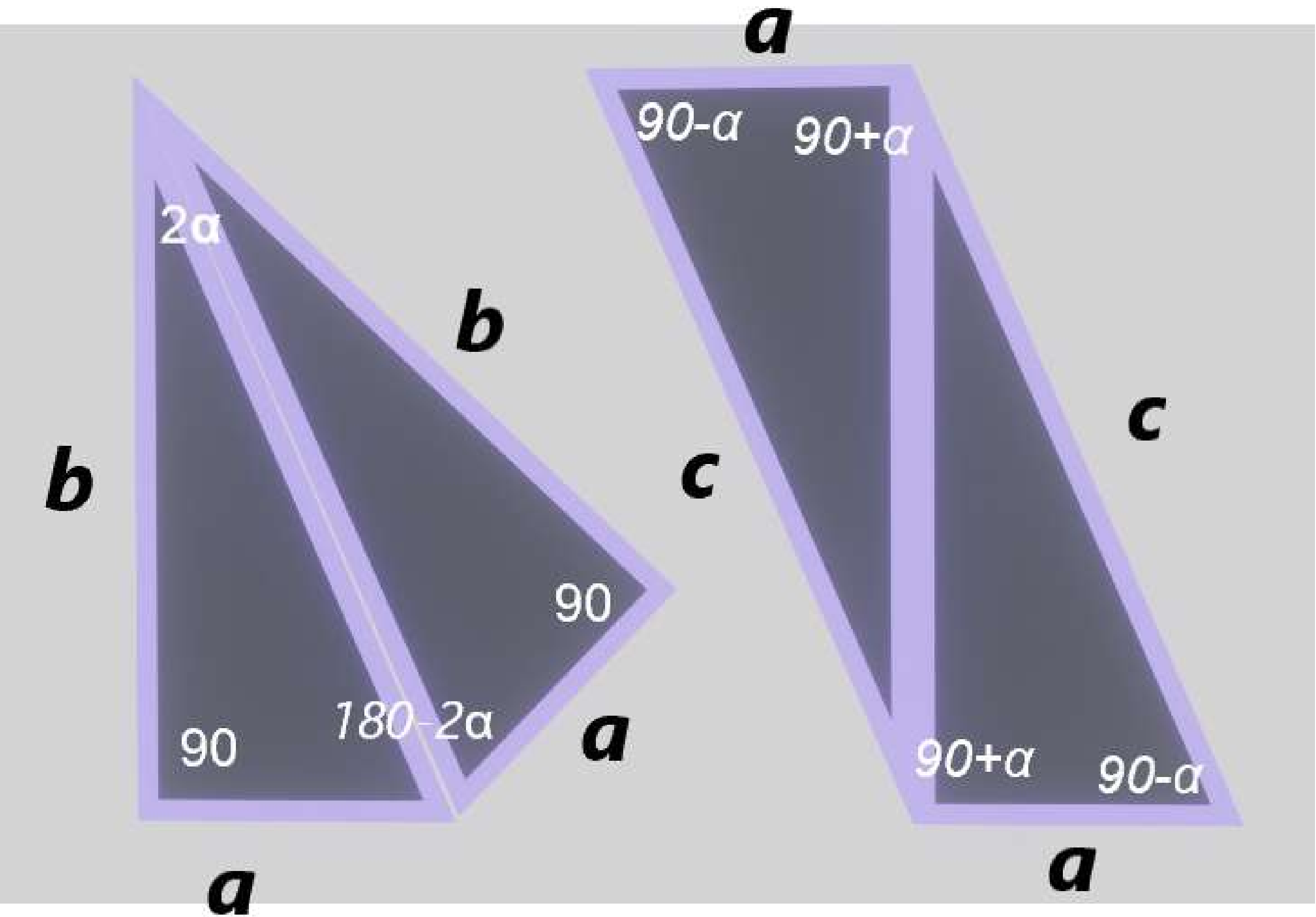
Параллелограммная конструкция

(b+;b-)=2





$(c+;\ b-)=+$ при $\alpha=30$, $\alpha=45$



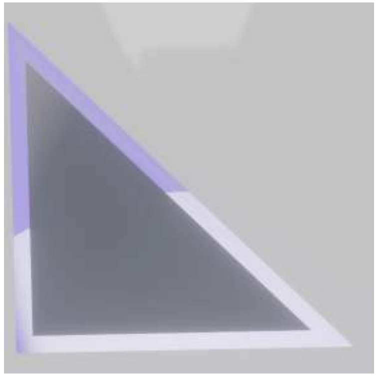
c+:(2α, 90,180-2α, 90);
b-:(90-α, 90+α, 90-α, 90+α)

1) $(180-2\alpha)=(90+\alpha)$
$\alpha=30$

2) $(90)+(2\alpha)=(90-\alpha)+(90+\alpha)$
$\alpha=45$

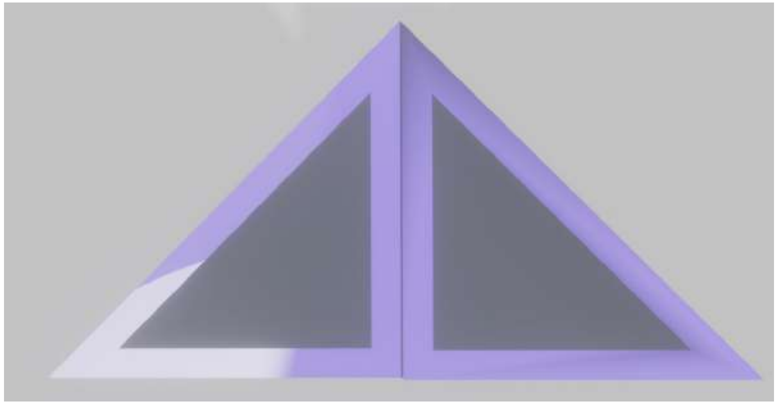
Особые случаи

- Треугольник 90-45-45 (полиаболо)



c-

a+



a-

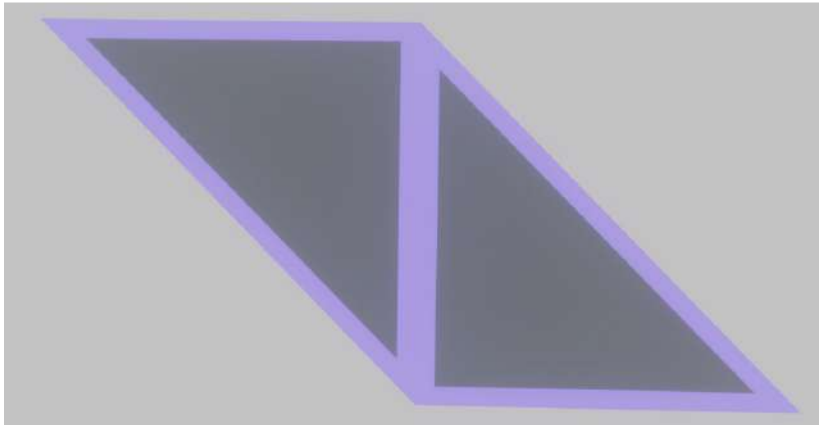
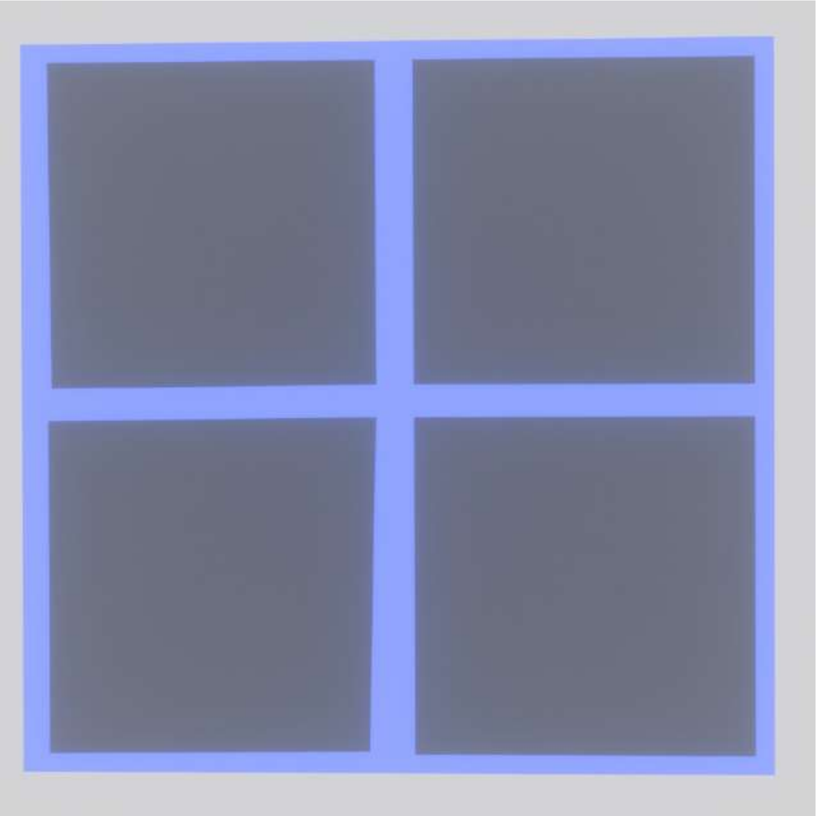
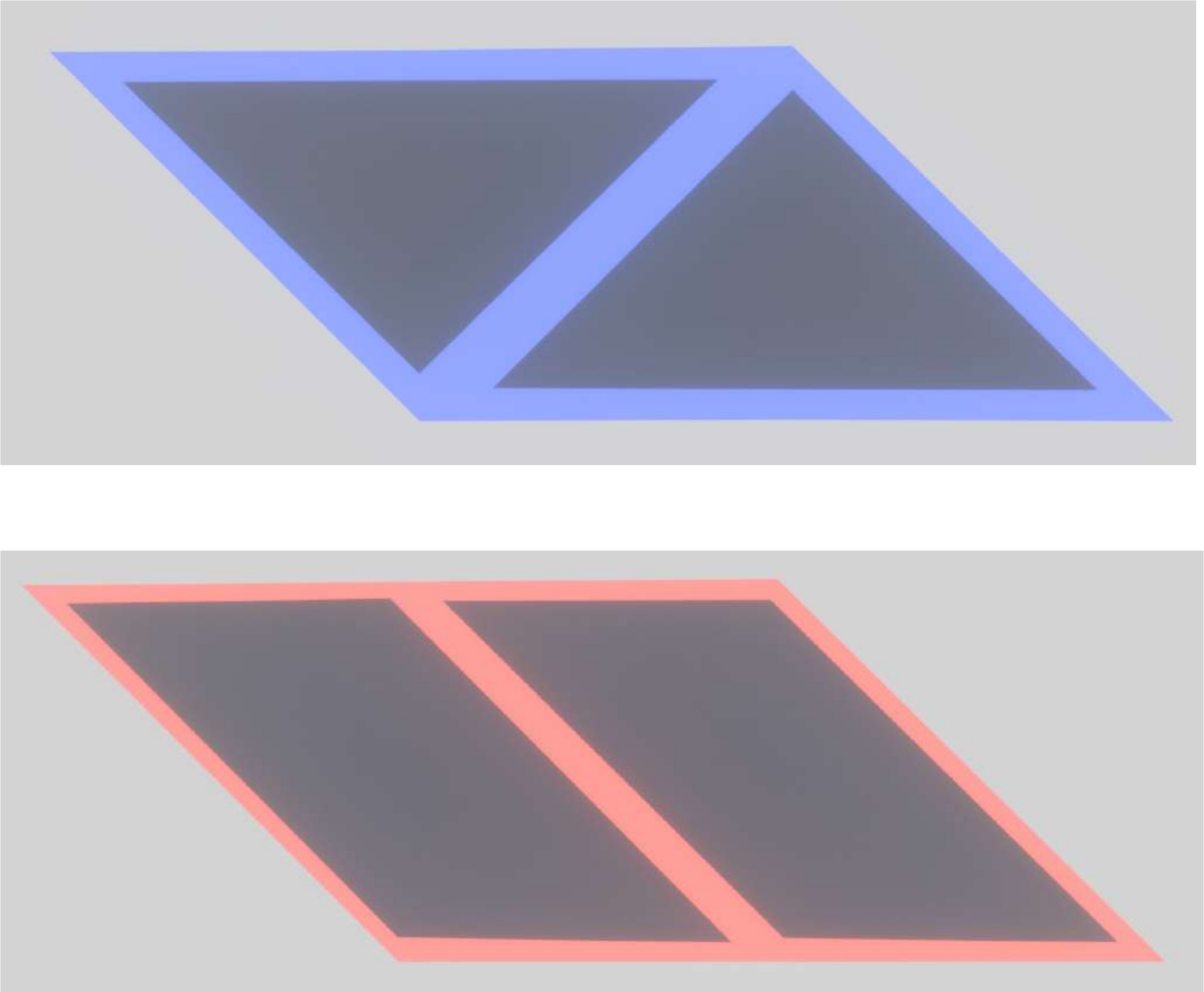


Таблица (90-45-45)

	a+	c-	a-
a+	*	4	2
c-	4	*	-
a-	2	-	*

$(c-;a+)=4$

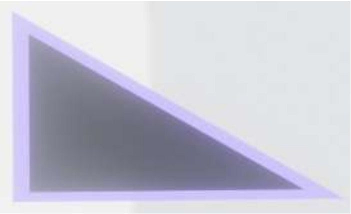




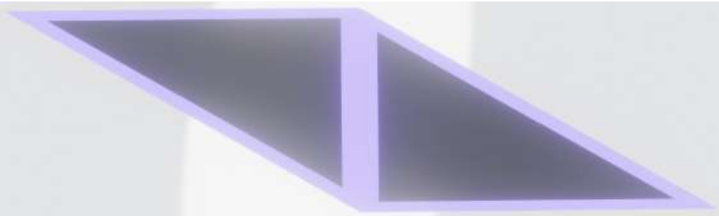
$(a+;a-)=2$

Особые случаи

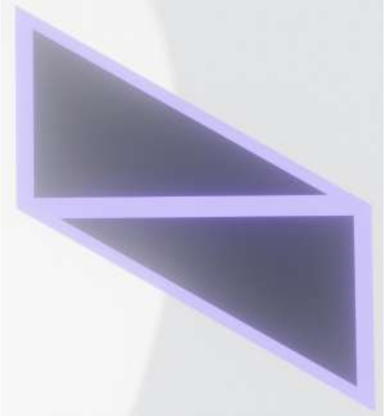
- Треугольник 90-60-30 (полидрафтер)



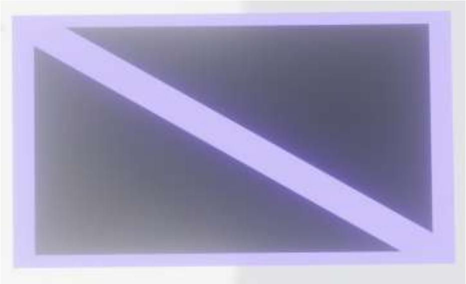
a-



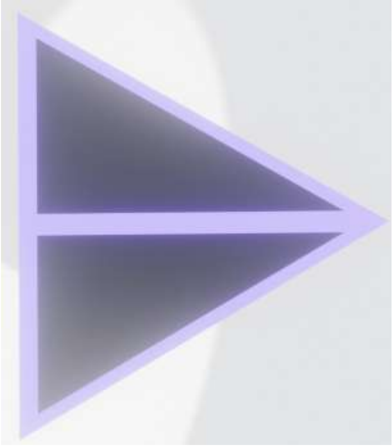
b-



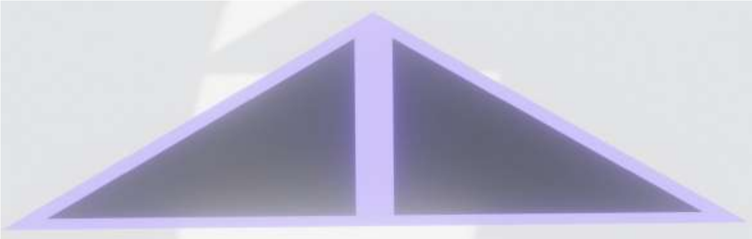
c-



b+



a+



c+

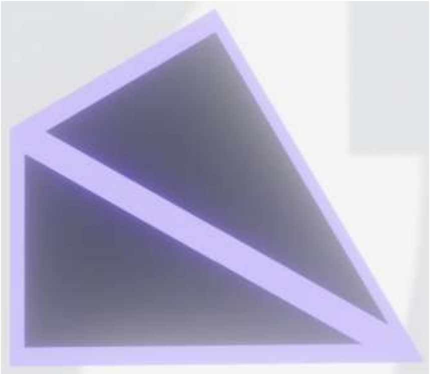
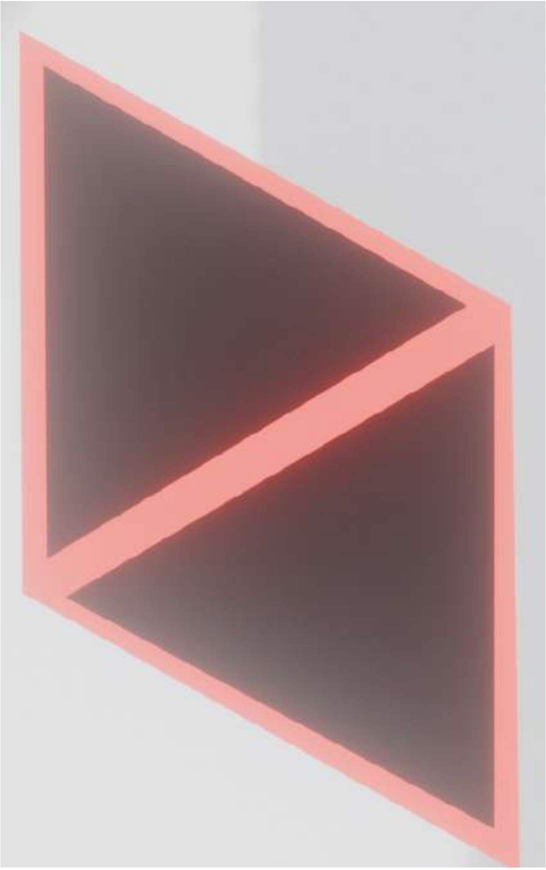
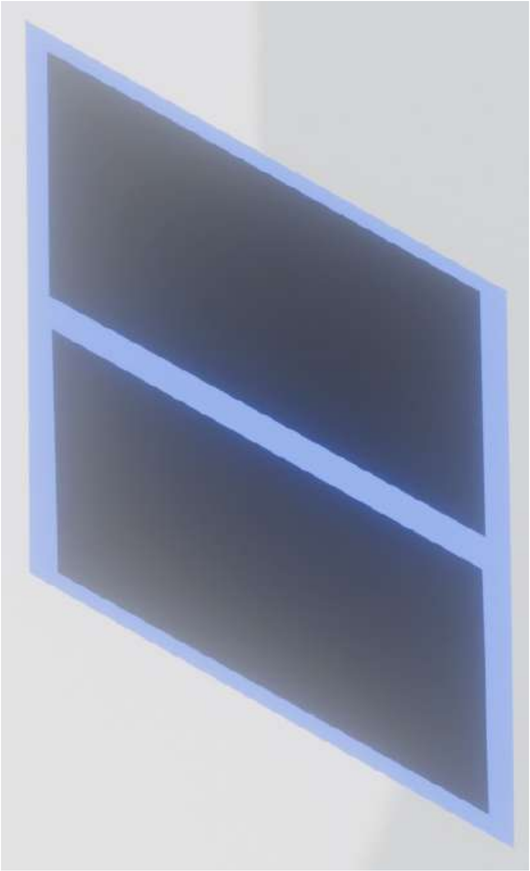


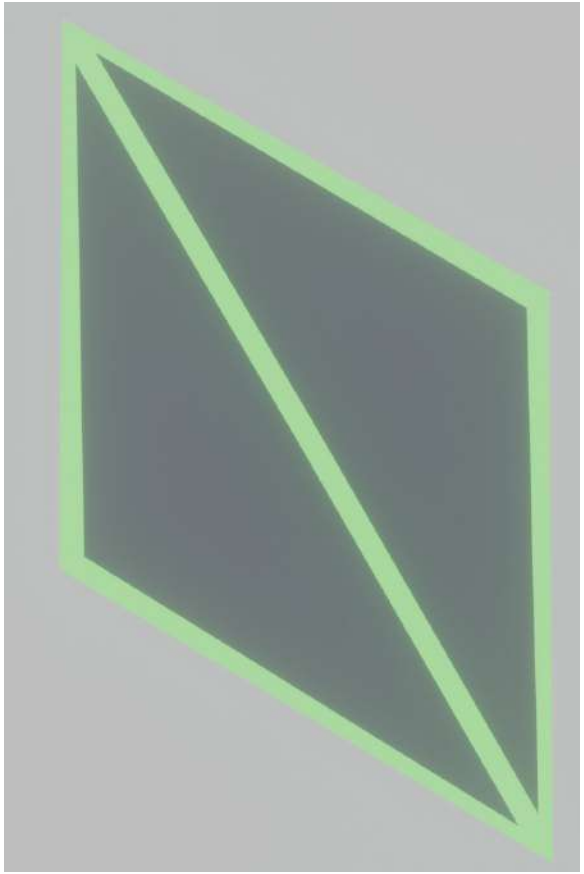
Таблица (90-60-30)

	a-	b-	c-	a+	b+	c+
a-	*	-	-	2	-	-
b-	-	*	-	2	2	6
c-	-	-	*	-	-	-
a+	2	2	-	*	2	3
b+	-	2	-	2	*	6
c+	-	6	-	3	6	*

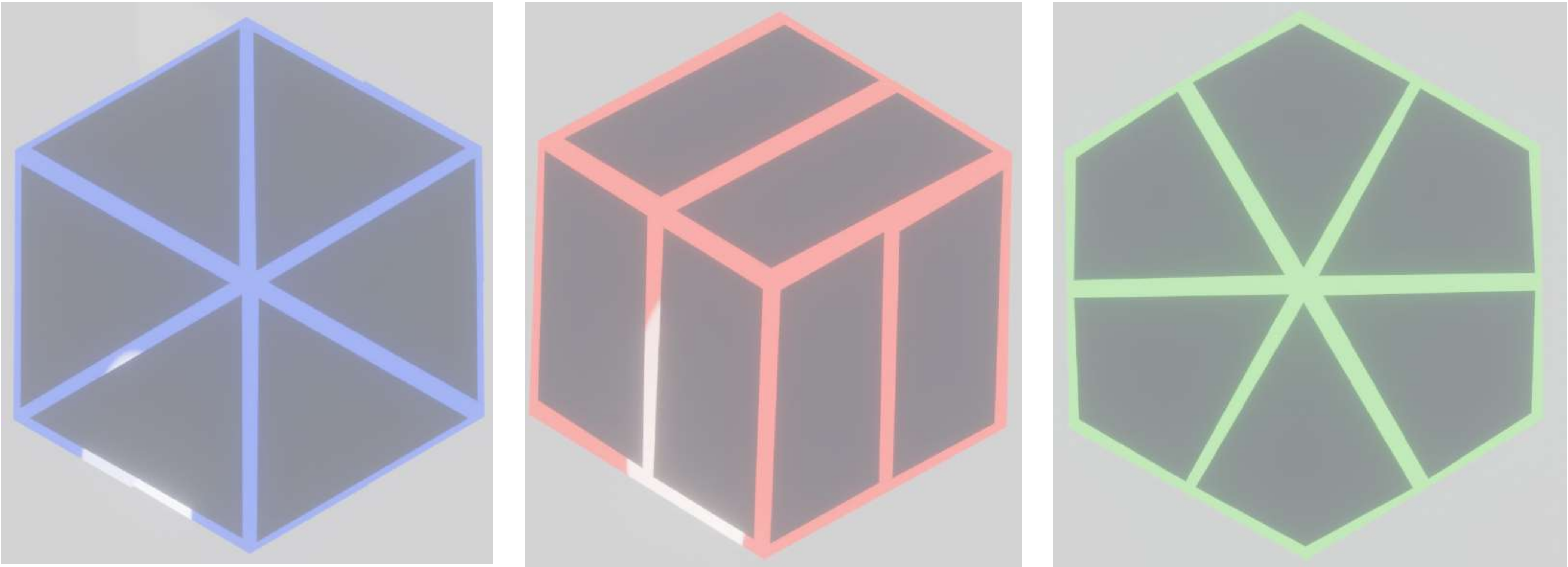
$$(b+;\ b-;\ a+)=2$$



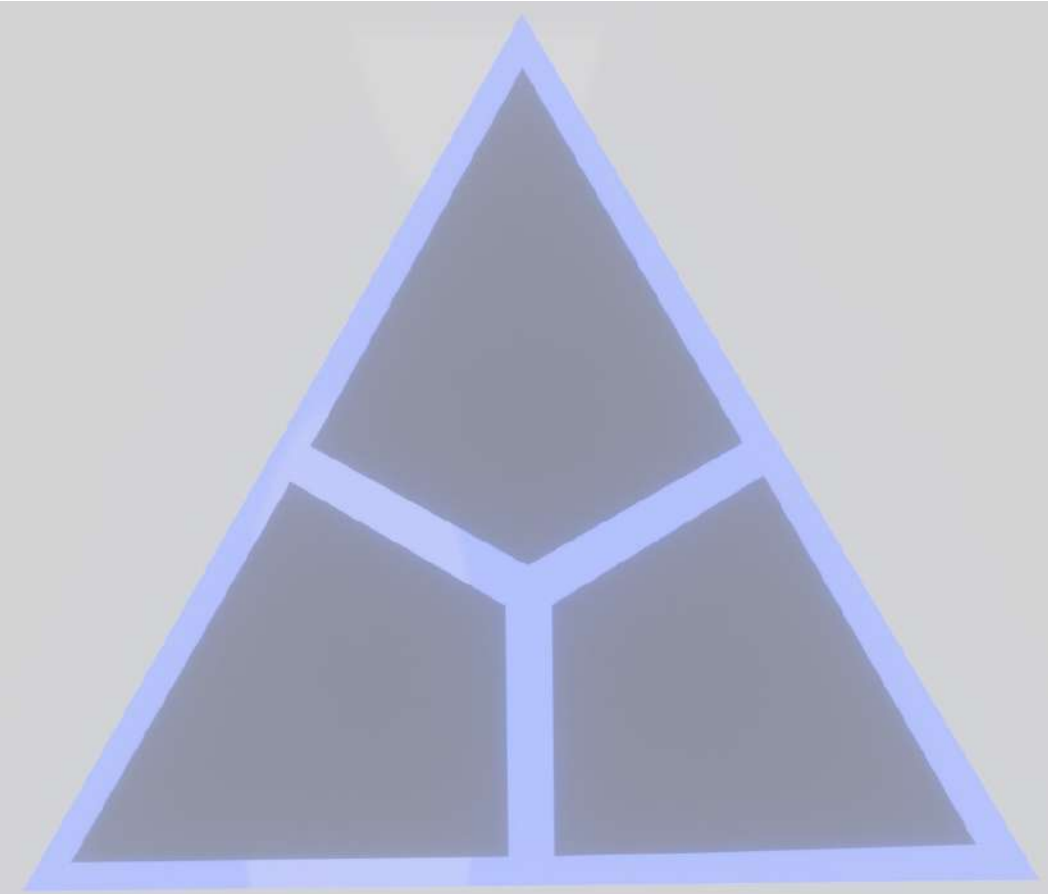


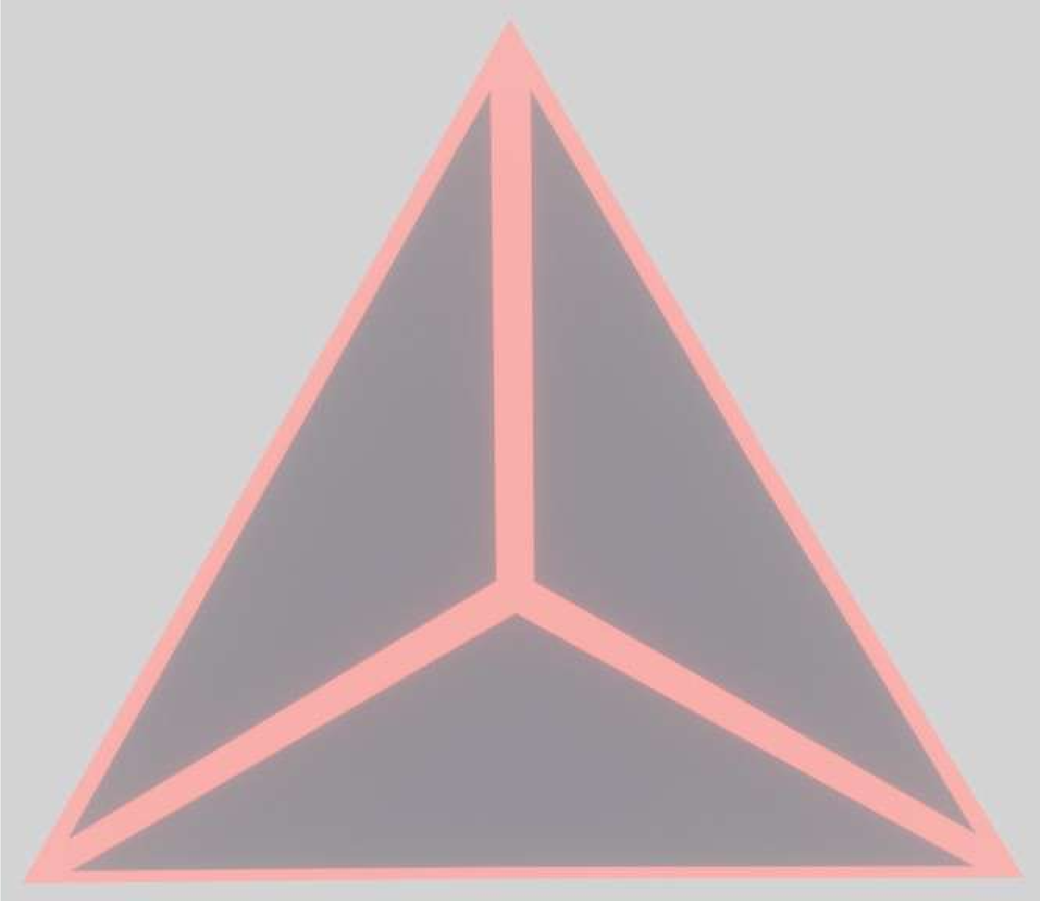


(b+; b-; c+)=6

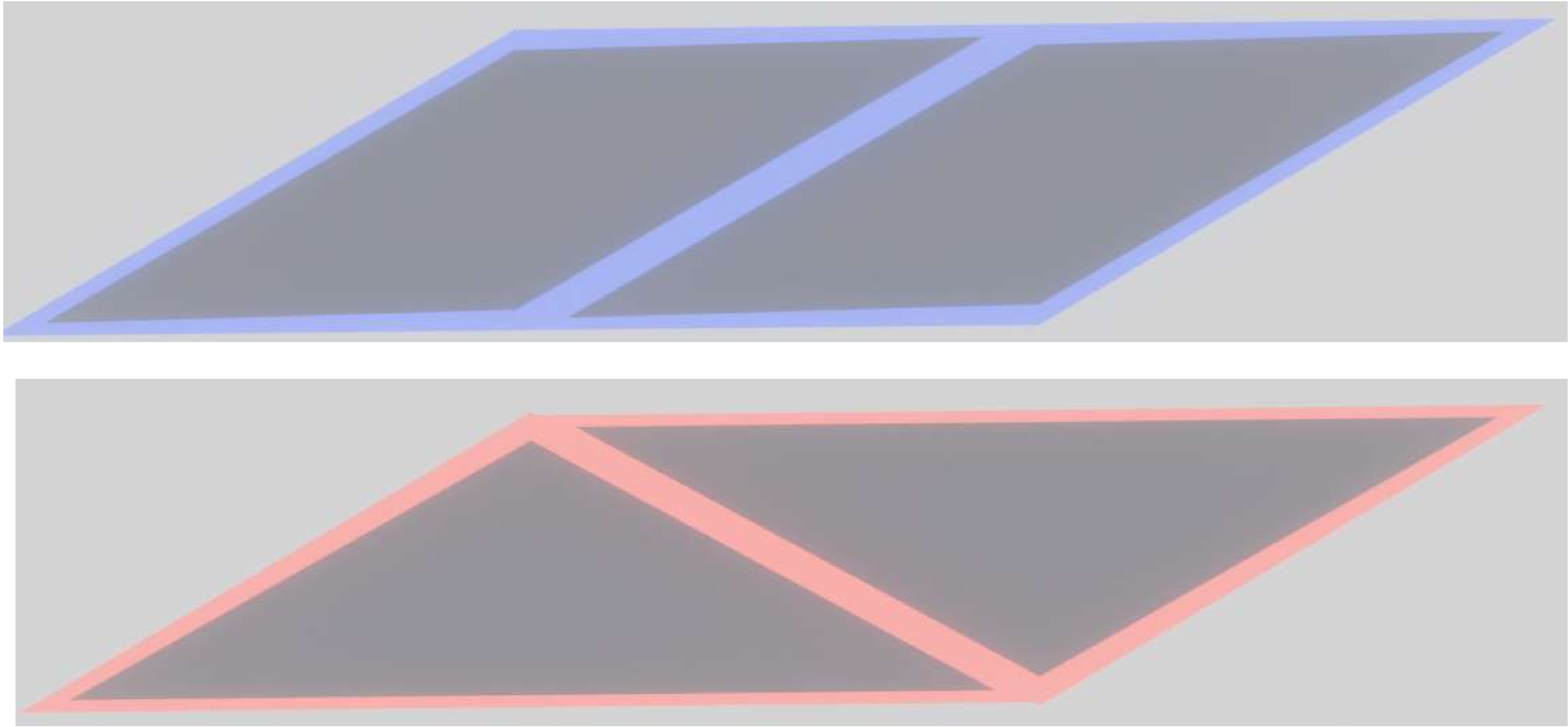


$(c+;\ a+)=3$





(a-; a+)=2

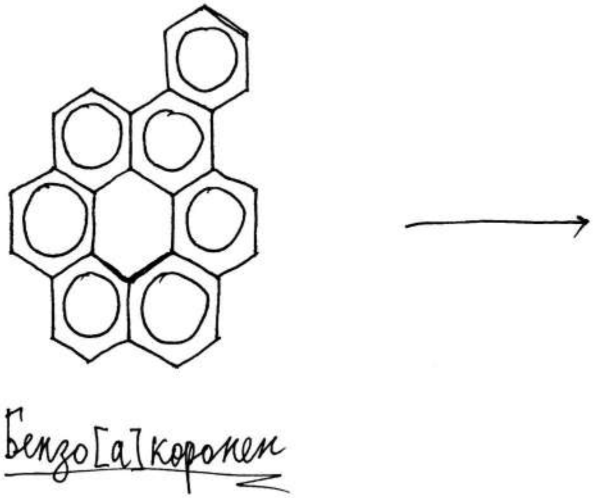


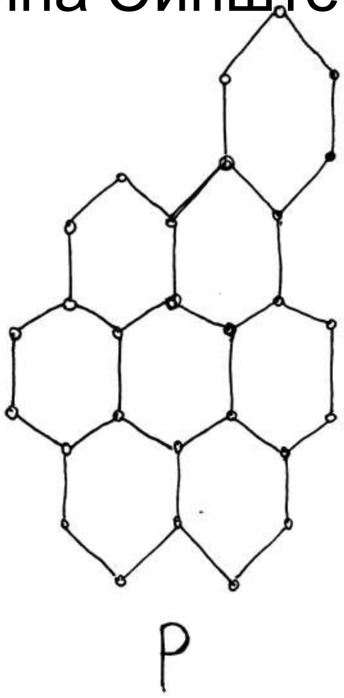
Итоги

- предложен способ кодирования и перечисления обобщённых полиамондов
- перечислены все пары обобщённых бимондов, бидрафтеров, биаболов и биквадров
- приведён ряд конструкций позволяющий искать общее кратное для разных классов плоских фигур, допускающих общее кратное
- выявлена связь между возможностью замостить плоскость определённой фигурой и её способностью иметь общее кратное с другими фигурами

Актуальность

Среди задач имеющих отношение к кристаллографии, бензеноидным графам особое место занимает проблема поиска общего кратного. Также полиамонды применяются в задаче о минимальных сетях Штейнера. А шляпа Эйнштейна состоит из полидрафтеров.

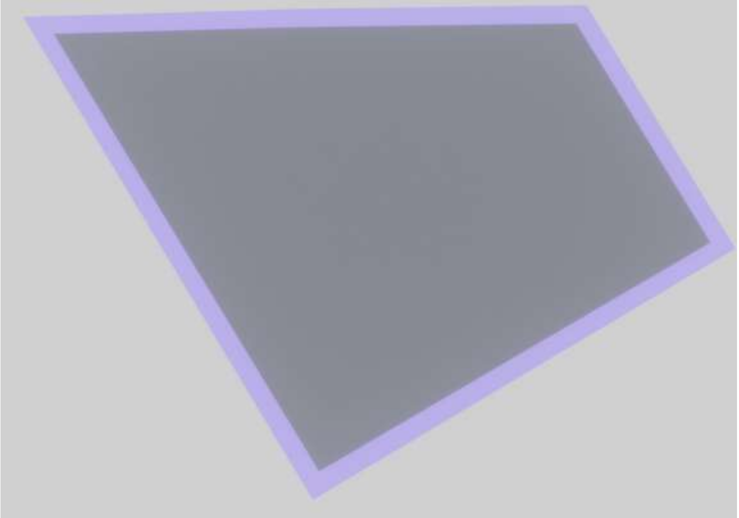


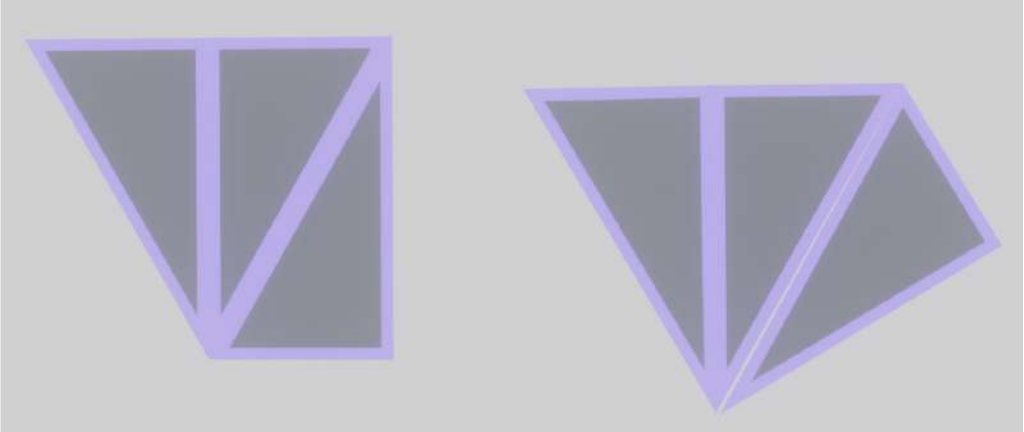


Будущие исследования

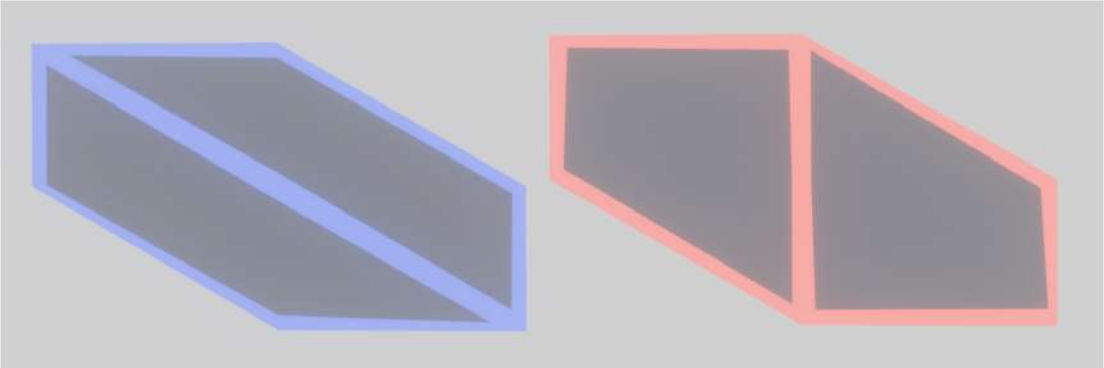
- Исследовать общее кратное обобщённых полиамондов с соизмеримыми углами и/или сторонами
- Посчитать количество полидрафтеров составленных из n копий данного треугольника
- Общее кратное тридрафтеров
- Общее бидрафтеров и тридрафтеров
- Можно ли определённым обобщённым полиамондом замостить плоскость (интуиция подсказывает, что если фигурой можно замостить плоскость и многобразие таких замощений велико, то фигура с большей вероятностью находит общее кратное с другими фигурами)
- Рассмотреть особый класс полимино, возникающий в бильярдах

1.

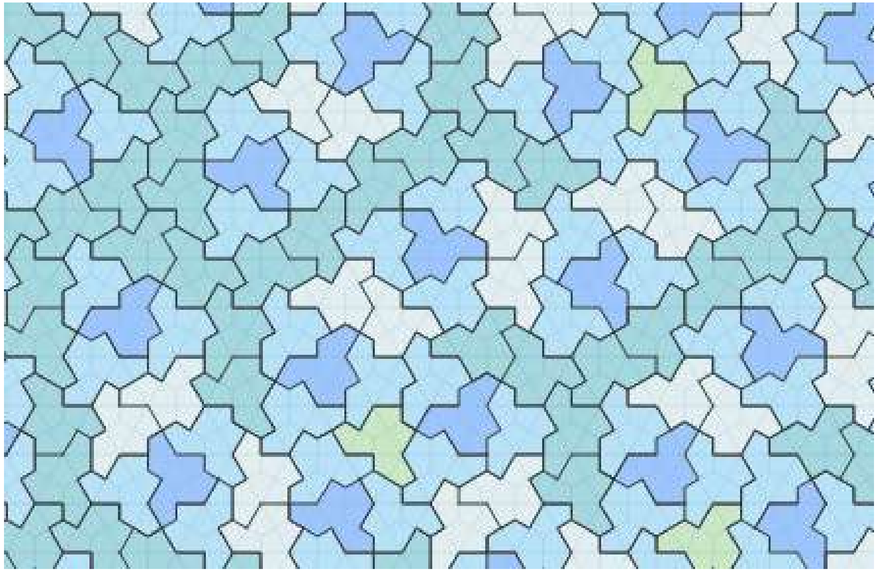




2.



3.



Спасибо за внимание!