"Задача о чердачных сферах" для случая n-точечного симплекса

Лукин Егор, СУНЦ НГУ
Научный руководитель – к-т физ.-мат. наук, доцент
Даурцева Н. А.

Случай на плоскости

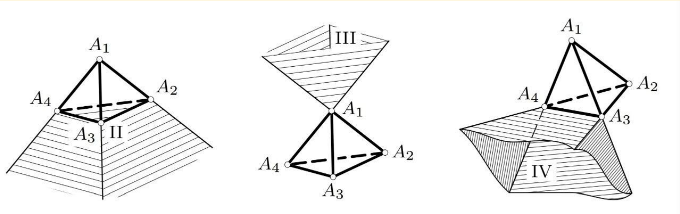
Пусть дан произвольный треугольник, каково возможное количество окружностей, касающихся всех прямых, содержащих стороны треугольника?

Для произвольного треугольника всегда существует 4 таких окружности.

Задача о чердачных сферах (I)

Пусть дан произвольный тетраэдр, каково возможное количество сфер, касающихся всех плоскостоей, содержащих грани тетраэдра?

Области тетраэдра[1]



[1] Я. П. Понарин. Элементарная геометрия. – М.: МЦНМО, Т.2. – 2015

Задача о чердачных сферах (II)

Пусть дан произвольный тетраэдр, каково возможное количество сфер, касающихся всех плоскостоей, содержащих грани тетраэдра?

Для произвольного тетраэдра может существовать от 5 до 8 таких сфер, и количество этих сфер зависит от соотношений площадей граней тетраэдра.[2]

Важное отличие от случая на плоскости

Вариативность ответа: количество сфер может быть разным.

---

[2] М. Берже. Геометрия. – М.: Мир, Т.1. – 1984

Обобщение

Пусть дан произвольный n-точечный симплекс, где $n > 3$, каково возможное количество сфер, касающихся всех гиперплоскостей, содержащих грани симплекса?

Определение симплекса

$A_1A_2...A_n$ называют симлексом, если

$$A_1A_2...A_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_iA_i : \left(\sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right) \wedge (\forall i \ t_i \geqslant 0) \right\}$$

Применение барицентрических координат для решения задачи (I)

Барицентрические координаты для произвольной точки $\mathbb{R}^{n-1}$

$$\zeta_i \stackrel{def}{=} \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

Пусть дан симплекс $A_1A_2A_3...A_n$ и произвольная точка M, тогда её барицентрические координаты можно записать как

$$\left(\frac{\zeta_1 V_{MA_2A_3...A_n}}{V_{A_1A_2A_3...A_n}}, \frac{\zeta_2 V_{MA_1A_3...A_n}}{V_{A_1A_2A_3...A_n}}, \ \dots \ , \frac{\zeta_n V_{MA_1A_2...A_{n-1}}}{V_{A_1A_2A_3...A_n}}\right)$$

Применение барицентрических координат для решения задачи (II)

Учитывая, что нас интересуют точки равноудалённые от гиперплоскостей, а также, что

$$\begin{aligned} V_{A_1 A_2 A_3 \ldots A_n} &= \frac{1}{n} \rho(A_1,\ A_2 A_3 A_4 \ldots A_n) V_{A_2 A_3 A_4 \ldots A_n} \\ &= \frac{1}{n} R V_{A_2 A_3 A_4 \ldots A_n} \end{aligned}$$

$$V_{A_1 A_2 A_3 \ldots A_n} = \zeta_1 V_{M A_2 A_3 \ldots A_n} + \zeta_2 V_{M A_1 A_3 \ldots A_n} + \ldots + \zeta_n V_{M A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}$$

можно получить удобную для работы запись координат.

Применение барицентрических координат для решения задачи (III)

$$\left(\frac{\zeta_1 \mathrm{V}_{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\ldots\mathrm{A}_n}}{\zeta_1 \mathrm{V}_{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\ldots\mathrm{A}_n} + \zeta_2 \mathrm{V}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\ldots\mathrm{A}_n} + \ldots + \zeta_n \mathrm{V}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{n-1}}},\right.$$

$$\frac{\zeta_2 \mathrm{V}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\ldots\mathrm{A}_n}}{\zeta_1 \mathrm{V}_{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\ldots\mathrm{A}_n} + \zeta_2 \mathrm{V}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\ldots\mathrm{A}_n} + \ldots + \zeta_n \mathrm{V}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{n-1}}},$$

$$\ldots$$

$$\left., \frac{\zeta_n \mathrm{V}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{n-1}}}{\zeta_1 \mathrm{V}_{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\ldots\mathrm{A}_n} + \zeta_2 \mathrm{V}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\ldots\mathrm{A}_n} + \ldots + \zeta_n \mathrm{V}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{n-1}}}\right)$$

Применение барицентрических координат для решения задачи (IV)

После проделанного, можно заметить, что для существования центра, а значит и сферы, необходимо, чтобы

$$\zeta_1 V_1 + \zeta_2 V_2 + ... + \zeta_n V_n > 0,$$

где $V_1 = V_{A_2 A_3 \ldots A_n}$, $V_2 = V_{A_1 A_3 \ldots A_n}$, ... , $V_n = V_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}$.

Максимальное количество сфер (I)

Понятно, что

$$+V_{i_1} + V_{i_2} + ... + V_{i_k} - V_{i_{k+1}} - V_{i_{k+2}} - V_{i_n} > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-V_{i_1} - V_{i_2} - ... - V_{i_k} + V_{i_{k+1}} + V_{i_{k+2}} + V_{i_n} < 0$$

Это значит, что из этих двух сфер существует только одна. Существование сферы исключает существование другой, "противоположной" ей сферы. Ни одной сферы из двух сфер не существует, когда это выражение обращается в ноль.

Максимальное количество сфер (II)

n - нечётное

(0 минусов) - C_n^0 сфер
(1 минус) - C_n^1 сфер
$\vdots$
($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ минусов) - $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ сфер
($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ минусов) - 0 сфер
$\vdots$
(n-2 минуса) - 0
(n-1 минусов) - 0
(n минусов) - 0

Максимальное количество сфер (III)

n - чётное

(0 минусов) - C_n^0 сфер
(1 минус) - C_n^1 сфер

$\vdots$

($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ минусов) - $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ сфер
($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ минусов) - $\frac{1}{2} C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ сфер
($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ минусов) - 0 сфер

$\vdots$

(n-2 минуса) - 0 сфер
(n-1 минусов) - 0 сфер
(n минусов) - 0 сфер

Максимальное количество сфер (IV)

Тогда для случаев чётного и нечётного n имеем:

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} C_n^i = 2^{n-1},\ n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$$

$$C_n^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} C_n^i = 2^{n-1},\ n = 2k,\ k > 1,\ k \in \mathbb{N}$$

Максимальное количество сфер (V)

Теорема о максимальном значении

Для произвольного n-точечного симплекса, где $n > 3$, может существовать не более 2^{n-1} сфер, касающихся всех гиперплоскостей, содержащих грани симплекса.

Минимальное количество сфер

Теорема о минимальном значении

Для произвольного n-точечного симплекса, где $n > 3$, может существовать не менее $2^{n-1} - C_{n-1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}$ сфер, касающихся всех гиперплоскостей, содержащих грани симплекса.

Между минимальным и максимальным значением

Лемма о промежуточных значениях

Все значения между минимальным и максимальным достижимы.

Ответ

Пусть дан произвольный n-точечный симплекс, где $n > 3$, каково возможное количество сфер, касающихся всех гиперплоскостей, содержащих грани симплекса?

Теорема о возможных значениях

Для произвольного n-точечного симплекса, где $n > 3$, может существовать $k \in [2^{n-1} - C_{n-1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}; 2^{n-1}]$ сфер, касающихся всех гиперплоскостей, содержащих грани симплекса.