

# Трассирование лучей для задач обработки сейсмических данных

Докладчик: К. А. Буцковский, СУНЦ НГУ



Решения, основанные на лучевых представлениях повсеместно используются для задач обработки сейсмических данных!

Достаточно сказать, что большинство производственных предприятий для двух основных процедур обработки данных: определения скоростной модели среды и построения сейсмических изображений, используют сейсмическую томографию и миграцию, в основе которых лежит трассирование лучей.

Но сами лучевые решения в сложных средах (сильно-изменчивая неоднородная верхняя часть, базальтовые интрузии) имеют ограничения, поэтому необходимо их изучить и предложить пути для преодоления этих ограничений!

## Понятие луча. Принцип Ферма.

Предположим, что сигнал или волновое поле распространяется вдоль гладкой кривой  $S$  из точки  $A$  в точку  $B$ :



Чтобы рассчитать время пробега сигнала из точки  $A$  в точку  $B$  вдоль кривой  $S$ , необходимо проинтегрировать вдоль кривой  $S$ :

$$T(S) = \int_S \frac{ds}{c},$$

который называется **функционалом Ферма**, где  $c$  – скорость распространения волн.

**Принципа Ферма:** волновые колебания распространяются из точки  $A$  в точку  $B$  вдоль пути  $S$ , доставляющего минимальное значение **функционала Ферма**.

Эта кривая называется **экстремалью функционала Ферма** в вариационном анализе или **лучом** в геофизике.

## Система уравнений Эйлера в Гамильтоновой форме

$$\frac{dx}{ds} = c(x,z) * P_x;$$

$$\frac{dz}{ds} = c(x,z) * P_z;$$

$$\frac{dP_x}{ds} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{c(x,z)} \right);$$

$$\frac{dP_z}{ds} = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{c(x,z)} \right);$$

**Система уравнений Эйлера в  
Гамильтоновой форме**

$$P_x(0) = P_{x0};$$

$$P_z(0) = P_{z0};$$

$$x(0) = x_0;$$

$$z(0) = z_0;$$

**Начальные данные для задачи Коши.**

**Луч находится решением задачи Коши  
для системы уравнений Эйлера!**

## Явные решения: лучи в однородной среде

$C(x,z) = c = \text{const}$ : скорость постоянна.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_x = P_{x0}; \\ P_z = P_{z0}; \\ x(s) = x_0 + s * c * P_{x0}; \\ z(s) = z_0 + s * c * P_{z0}; \\ P_{x0}^2 + P_{z0}^2 = \frac{1}{c^2}; \end{array} \right.$$

**В однородной среде лучи – прямые линии!**

## Явные решения: лучи в градиентной среде

$C(x,z) = a + b \cdot z$ : скорость линейно зависит от глубины.

$$x(s) = -R * \cos\left(\frac{s}{R} + \theta\right) + x_c;$$

$$z(s) = R * \sin\left(\frac{s}{R} + \theta\right) + z_c;$$

$$R = \frac{z_0 - z_c}{\sin(\theta)};$$

$$x_c = x_0 - R * \cos(\theta);$$

$$z_c = -\frac{a}{b};$$

**В градиентной среде лучи – дуги окружности!**

# Метод Рунге-Кутты для численного решения задачи Коши системы ОДУ (Обыкновенных Дифференциальных Уравнений)

Используется схема  
Рунге-Кутты 1-го порядка - Схема Эйлера!

$$Px[i] = Px[i-1] + ds * d/dx (1/c(x[i-1], z[i-1]));$$

$$Pz[i] = Pz[i-1] + ds * d/dz (1/c(x[i-1], z[i-1]));$$

$$x[i] = x[i-1] + ds * (c[i-1] * Px[i-1]);$$

**Схема Эйлера – расчёт значений на i-м шаге с использованием уже известных с шага i-1.**

$$z[i] = z[i-1] + ds * (c[i-1] * Pz[i-1]);$$

$$x[0] = x0;$$

$$z[0] = z0;$$

$$Px[0] = Px0;$$

$$Pz[0] = Pz0;$$

**Начальные данные – начальные значения в схеме Эйлера!**

## Интерполяция скорости волн и аппроксимация её производных в схеме Эйлера!

$$f2 = C[kz1 + kx4 * nz];$$

$$f1 = C[kz1 + kx3 * nz];$$

$$f3 = C[kz3 + kx3 * nz];$$

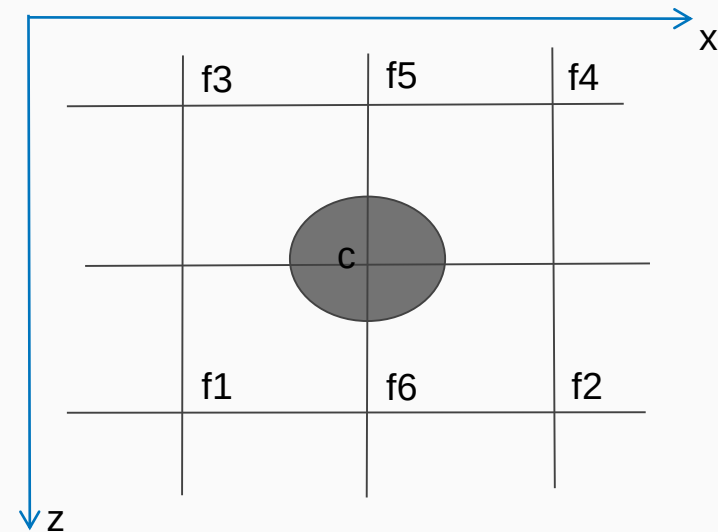
$$f4 = C[kz3 + kx4 * nz];$$

$$f5 = f3 + ((f4 - f3) / (x4 - x3) * (x - x3));$$

$$f6 = f1 + ((f2 - f1) / (x4 - x3) * (x - x3));$$

$$c = f5 + ((f6 - f5) / (z1 - z3) * (z - z3));$$

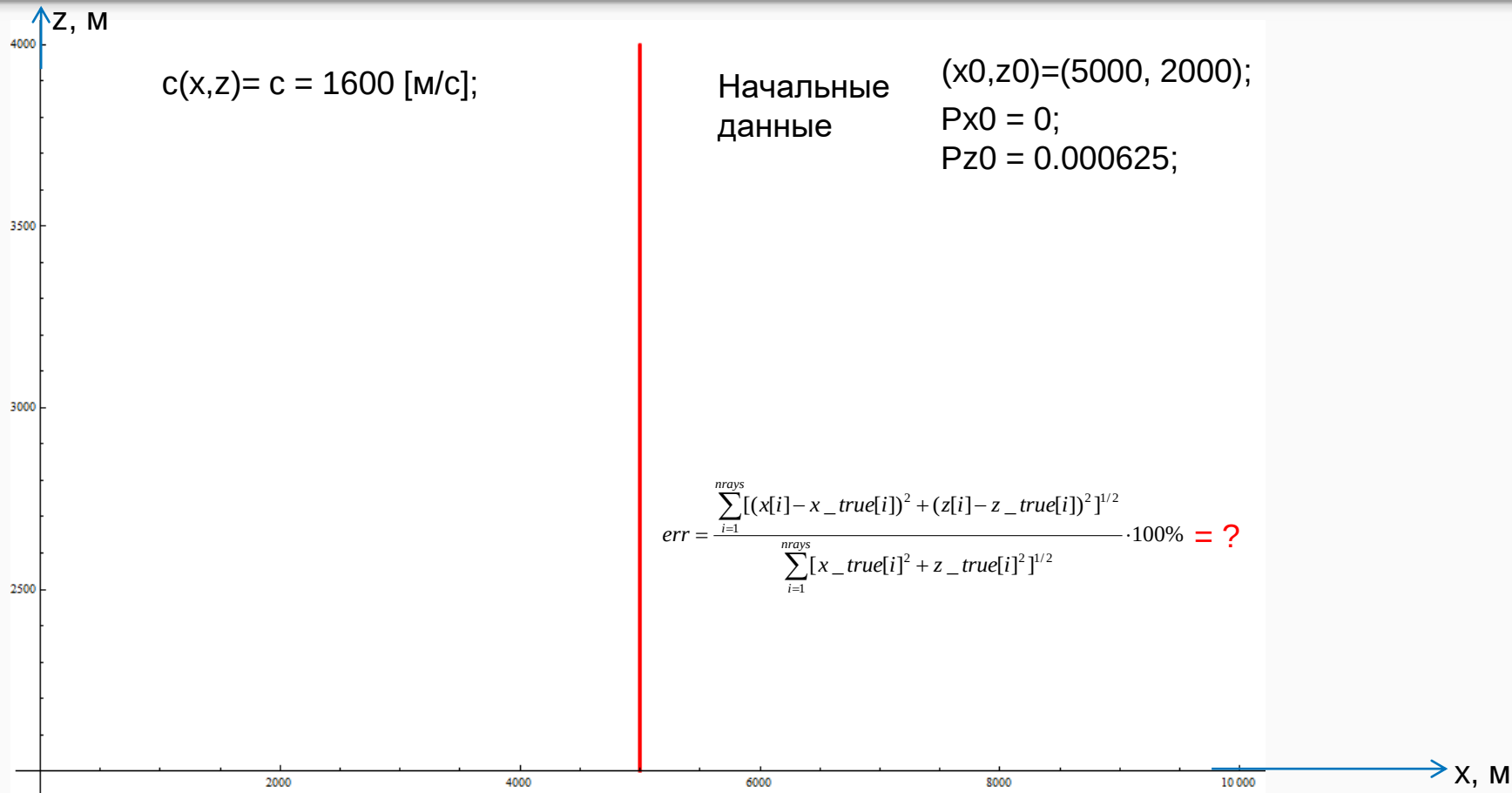
**Билинейная интерполяция скорости!**



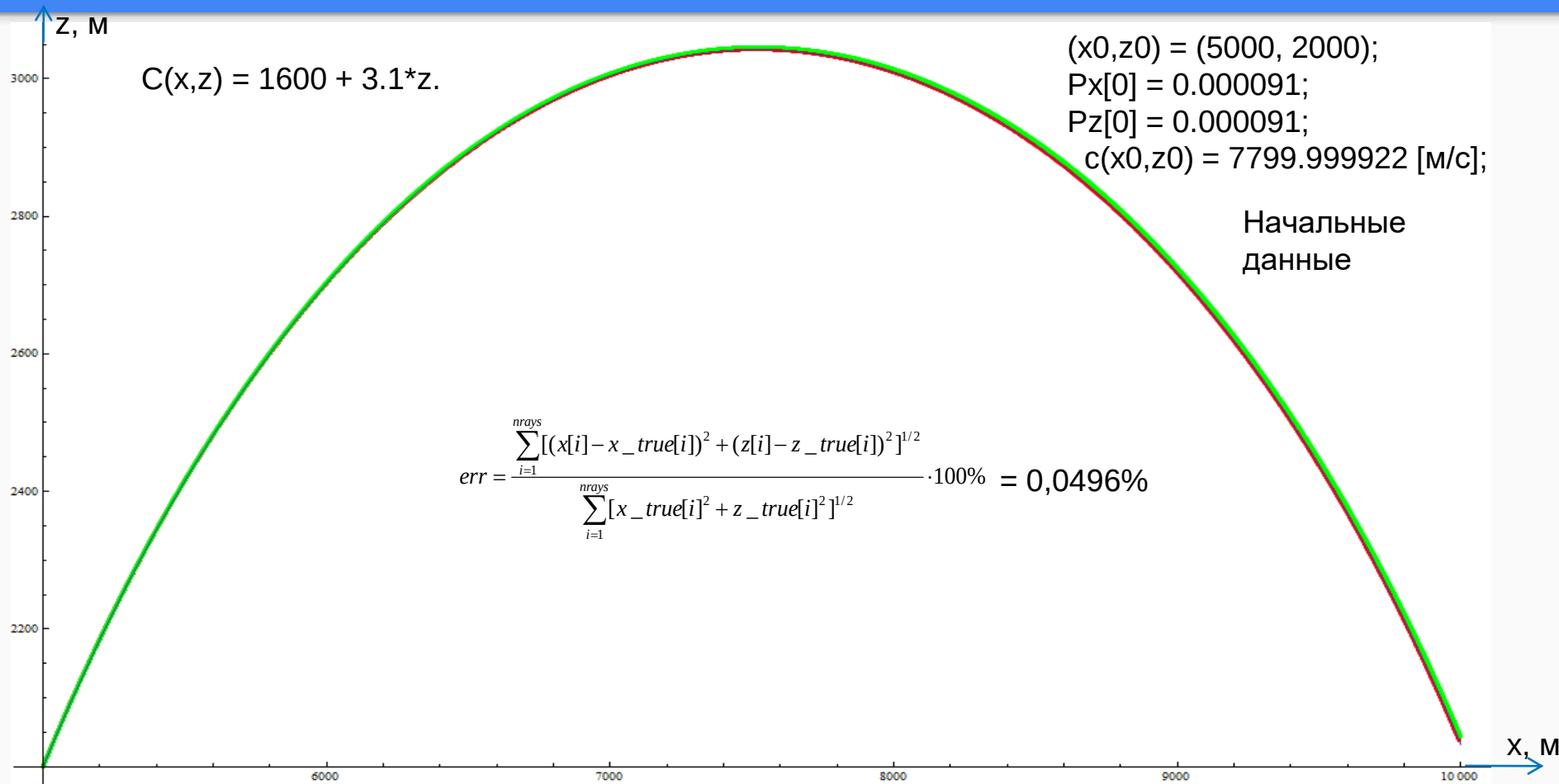
**Аппроксимация производных скорости  
основана на интерполяционных формулах !**



## Тестирование в однородной среде!



# Тестирование в градиентной среде!



## Заключение. Дальнейшие планы.

Построены аналитические решения для однородной и градиентной сред.

Реализована программа трассирования лучей в неоднородных средах.

Программа оттестирована в однородной и градиентной средах, где существуют аналитические решения.

В средах со сложной верхней частью неучёт частотной зависимости сигнала в рамках стандартного лучевого трассирования приводит к значимым ошибкам.

Поэтому дальнейшая модификация разработанной программы с учётом частотной зависимости лучей предлагается в качестве пути преодоления трудностей стандартного трассирования.

Благодарю за внимание!

С удовольствием отвечу на вопросы!