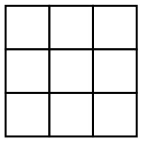
Решения и критерии проверки задач Первого этапа Всесибирской олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

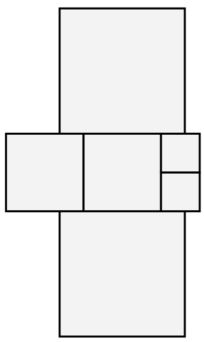


7.1. Квадрат 3х3 разбит на 9 квадратиков 1х1 так, как изображено на рисунке. Расставьте в этих квадратах натуральные числа от 1 до 9 (каждое ровно 1 раз), чтобы сумма чисел в любом квадрате 2х2 была одной и той же.
Решение: Например, можно расставить так, как показано на рисунке справа.
Критерии: Любая подходящая под условия расстановка без объяснения и проверки – 7 баллов.

9	1	6
2	8	5
7	3	4

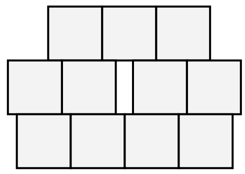
7.2. Однажды утром в 9:00 из деревни Федино в деревню Нововерандово вышел пешеход Федя. Одновременно навстречу ему из Нововерандово выехала велосипедистка Вера. Известно, что до момента встречи Федя успел пройти треть пути между деревнями, однако, если бы Федя вышел на час раньше, то успел бы пройти до встречи половину пути. В какое время Федя и Вера встретились? Скорости Веры и Феди постоянны.
Ответ: 10:20
Решение 1: Поймём, что если Федя прошёл какое-то расстояние до выезда Веры, то с момента, как выедет Вера, до встречи он пройдёт треть оставшегося пути. Тогда получаем, что середина всего пути - это треть оставшегося, то есть Федя за час прошёл одну четверть всего пути. Из первого условия понятно, что скорость Веры в два раза больше, т.е. Федя и Вера вместе проходят 3/4 пути за час, а значит, всего им понадобится 4/3 часа, чтобы встретится.
Решение 2: Обозначим скорость Феди за U, скорость Веры за V, расстояние между деревнями будем считать равным 1. Тогда из первого условия получаем, что $V = 2U$.
Второе интерпретируем так: сначала Федя прошёл 1 час со скоростью U, а затем с той же скоростью U, но $(1 - U) : (U + V)$ часов (расстояние делим на скорость сближения), а в сумме прошёл 1/2 пути. То есть, $U + U(1 - U) : (U + V) = 1/2$, откуда $U = 1/4$, а дальше как в первом решении.
Критерии: только ответ, ответ с проверкой - 1 балл.
Получено, что $V = 2U$ - ещё плюс балл.
Найдено, что за один час ребята проходят вместе 3/4 пути, дальнейших продвижений нет – 5 баллов.

7.3. Арсений собирается нарисовать на плоскости несколько (больше двух) неперекрывающихся квадратов, возможно, различного размера, и могущих иметь общие участки границы. Иван утверждает, что в любом случае сможет раскрасить все эти квадраты в 3 цвета таким образом, что никакие два квадрата одного цвета не будут иметь общего участка границы (единственная общая точка общим участком границы не считается). Арсений считает, что это не так. Кто из мальчиков прав? Ответ обоснуйте.
Ответ: Арсений.
Решение: Можно рассмотреть конфигурацию, изображённую на рисунке. Предположим, её можно правильно покрасить в три цвета. Тогда пусть центральный квадрат имеет цвет номер 1. Все остальные тогда имеют цвета 2 и 3, в причём в цепочке из пяти квадратов вокруг центрального эти цвета должны чередоваться. Однако, в ней нечётное число квадратов, а значит, это невозможно.



Критерии: Подходящий чертёж без обоснования – 5 баллов. Описана идеи чертежа (возьмём квадрат и окружим его цепочкой из нечётного числа квадратиков), но без явного примера с обоснованием, почему эта конструкция будет работать– 5 баллов, без обоснования – 3 балла.

Комментарий: Аресений будет прав даже если все квадраты должны быть одинаковыми. В этом случае можно предъявить пример из, например, 11 квадратов.



7.4. Имеется 100 монет, из которых 99 настоящие, одинаковых по весу, и 1 фальшивая, которая легче остальных. У Дмитрия в распоряжении есть чашечные весы без гирь, которые всегда показывают неверный результат взвешивания (например, если левая чаша окажется тяжелее, то они покажут либо равенство, либо перевес правой, но что именно - неизвестно). Помогите Дмитрию найти 98 настоящих монет.

Решение:

Пронумеруем монеты от 1 до 100. Взвесим первую монету и вторую. Если весы показали равенство, то одна из них фальшивая, а все остальные монеты настоящие, и мы добились желаемого. Если не равновесие, то будем считать, что перевесила монета под номером 1. Тогда вторая монета точно настоящая (иначе весы показали бы правильный результат). Отложим вторую монету в мешочек для настоящих монет.

Перенумеруем имеющиеся монеты от 1 до 99, повторим процесс.

Либо каждым взвешиванием будем получать по новой настоящей монете, и за 98 взвешиваний найдём 98 настоящих, либо в какой-то момент весы покажут равенство, и мы получим желаемое.

Критерии: Только алгоритм без обоснования – 1 баллов. Не рассмотрен случай равенства в аналогичном решении, остальное обосновано верно – 5 баллов.

7.5. Дана доска 4x2017. Двое по очереди ставят на неё ладей. Первый должен ставить ладью так, чтобы она била чётное число уже поставленных ладей, а второй - нечётное. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника? Ладья бьёт на любое расстояние по вертикали и по горизонтали, однако не перепрыгивает через фигуры. Например, если три ладьи стоят на одной горизонтали, то левая бьёт только центральную, а центральная - правую и левую.

Ответ: второй

Решение: Разобьём мысленно доску 4x2017 на две части по 2x2017. Тогда пусть второй повторяет ходы первого в другой части. Например, если первый походит в верхнюю левую клетку первой части, второй походит в другую часть, но тоже в верхнюю левую клетку. Таким образом, у второго всегда будет ход, а значит, он победит, так как игра конечна. Осталось доказать, что второй действительно может повторять ходы указанным образом.

Заметим, что второй при указанной стратегии ходит всегда в тот же столбец, что и первый. Рассмотрим два случая

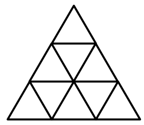
1) В этом столбце до хода первого игрока не стояло ни одной ладьи. Назовём клетку, куда первый поставил ладью А, а куда второй хочет сходить - Б. Ладья в А бьёт чётное количество других ладей, но второй играл симметрично, поэтому из Б бьётся столько же ладей, плюс новая ладья в А, т.е. нечётное количество. Значит, походить можно.

2) В этом столбце уже стояло две ладьи. Заметим, что стоят они тогда через одну клетку друг от друга. Опять назовём клетки А и Б. Заметим, что горизонтали с этими клетками одинаковы, но из одной из этих клеток бьётся 2 ладьи в этом столбце, а из другой - 1. То есть, если первый поставил ладью в ту клетку, откуда билось чётное число ладей, то он, во-первых, никак не повлиял на вторую клетку, и, во-вторых, из другой клетки бьётся нечётное количество, то есть, туда теперь может сходить второй.

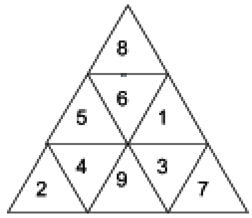
Критерии: только стратегия – 1 балл. Стратегия верная, в обосновании упущен один из случаев – 4 балла.

Решения и критерии проверки задач Первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

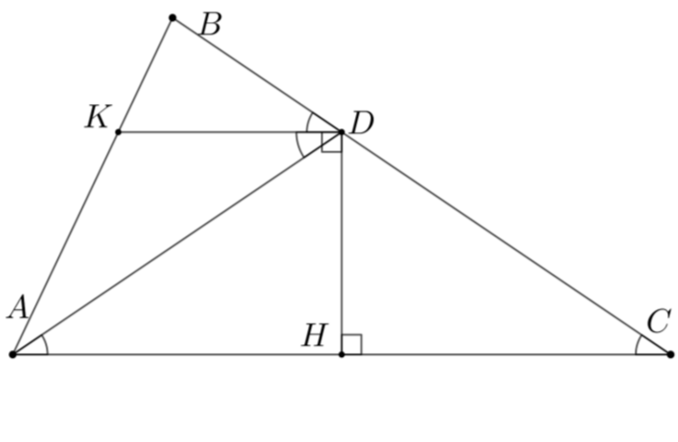


8.1. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на 9 треугольников со стороной 1 так, как изображено на рисунке. Расставьте в этих треугольниках числа от 1 до 9 (каждое ровно 1 раз), чтобы сумма чисел в любом правильном треугольнике со стороной 2 была одной и той же.
Решение: Например, так, как показано на рисунке.
Критерии: Любой пример, даже без проверки – 7 баллов.



8.2. Однажды утром в 9:00 из деревни Федино в деревню Нововерандово вышел пешеход Федя. Одновременно навстречу ему из Нововерандово выехала велосипедистка Вера. Известно, что до момента встречи Федя успел пройти треть пути между деревнями, однако, если бы Федя вышел на час раньше, то успел бы пройти до встречи половину пути. В какое время Федя и Вера встретились? Скорости Веры и Феди постоянны.
Ответ: 10:20
Решение 1: Поймём, что если Федя прошёл какое-то расстояние до выезда Веры, то с момента, как выедет Вера, до встречи он пройдёт треть оставшегося пути. Тогда получаем, что середина всего пути - это треть оставшегося, то есть Федя за час прошёл одну четверть всего пути. Из первого условия понятно, что скорость Веры в два раза больше, т.е. Федя и Вера вместе проходят 3/4 пути за час, а значит, всего им понадобится 4/3 часа, чтобы встретится.
Решение 2: Обозначим скорость Феди за U, скорость Веры за V, расстояние между деревнями будем считать равным 1. Тогда из первого условия получаем, что $V = 2U$.
Второе интерпретируем так: сначала Федя прошёл 1 час со скоростью U, а затем с той же скоростью U, но $(1 - U) : (U + V)$ часов (расстояние делим на скорость сближения), а в сумме прошёл 1/2 пути. То есть, $U + U(1 - U) : (U + V) = 1/2$, откуда $U = 1/4$, а дальше как в первом решении.
Критерии: только ответ, ответ с проверкой - 1 балл.
Получено, что $V = 2U$ - ещё плюс балл.
Найдено, что за один час ребята проходят вместе 3/4 пути, дальнейших продвижений нет – 5 баллов.

8.3. Дан треугольник ABC, в котором выбраны точка D на стороне BC и точка H на стороне AC. Кроме того проведена DK – биссектриса треугольника BDA. Оказалось, что углы CHD и HDK прямые. Найдите HC, если $AC = 2$.
Ответ: $HC = 1$.



Решение: Так как углы CHD и HDK прямые, то прямая KD параллельна прямой AC. Тогда углы HAD и ADK равны как накрест лежащие, а углы DCA и BDK - как соответственные. Но DK биссектриса, поэтому углы DAC и DCA равны, следовательно, треугольник ADC равнобедренный, HD - высота в равнобедренном треугольники, а значит и медиана. Поэтому $HC = AC/2 = 1$.
Критерии: только ответ - 0 баллов.
Доказано, что прямые KD и AC параллельны - 1 балл.
доказано, что ADC равнобедренный или что DH биссектриса — 4 балла.

8.4. У Всеволода есть 20 одинаковых квадратов: один белый, а остальные чёрные. Всеволод расположил белый квадрат на столе и собирается закрыть его 19-ью чёрными так, чтобы стороны всех чёрных были параллельны сторонам белого (чёрные квадраты могут пересекаться). Ярослав утверждает, что как бы Всеволод не справился с этой задачей, всегда можно будет убрать один чёрный так, что белый квадрат всё равно будет покрыт чёрными полностью. Прав ли Ярослав? Ответ обоснуйте.
Ответ: нет.
Решение: Будем считать, что каждый квадрат имеет размеры 10x10, мысленно поделим их все на маленькие квадратики 1x1. Выделим в белом квадрате диагональ из 10 квадратиков, идущую из нижнего левого края в верхний правый. Назовём эту диагональ *А*. Диагональ сразу над ней состоит из 9 квадратиков, назовём её *Б*.
Расположим теперь чёрные квадраты следующим образом: 10 из них положим так, чтобы их верхний левый квадратик совпадал с одним 10 квадратов диагонали *А* (для разных чёрных квадратов разные квадратики). Оставшиеся 9 квадратов положим так, чтобы их нижний правый квадратик совпал с одним из квадратиков *Б*. Очевидно, что весь белый квадрат будет накрыт, причём любая клетка из *А* или *Б* накрыта ровно одним чёрным квадратом, поэтому никакой чёрный квадрат убрать не получится.
Критерии: правильный пример без обоснования - 5 баллов.

8.5. В школе прошёл турнир по перетягиванию одеяла, состоявший из нескольких раундов. В каждом раунде участвовали две команды, состоящие из ненулевого количества школьников, причём, конечно, человек не мог быть в обеих командах сразу. После турнира выяснилось, что каждая возможная команда, которую можно составить из учащихся этой школы (кроме команды, состоящей из всех людей сразу), участвовала ровно в одном раунде турнира. Докажите, что в таком случае в каждом раунде соревновались в точности все школьники.
Решение 1: Назовём две команды дополнительными, если одна из них состоит из всех учеников, не вошедших в другую. Каждый ученик школы входит только в одну из двух дополнительных команд, следовательно, он входит ровно в половину всех команд. Но половина числа всех команд равна числу всех раундов. Таким образом, число раундов совпадает с числом выступлений каждого ученика, а значит, в каждом раунде выступать все ученики, то есть две дополнительные команды.
Решение 2: Утверждение, которое требуется доказать, эквивалентно тому, что в каждом раунде команды соревновались с командами, состоявшими из всех остальных учащихся школы. Пусть в школе N людей.
Рассмотрим любую команду, состоящую ровно из N-1 человека. Так как она против кого-то играла, то в точности против оставшегося человека, который в неё не входит. Заметим, что тогда любого одиночного человека придётся поставить к кому-то и свободных не останется. Таким образом, все команды из 1 и N-1 человека разобьются на пары, игравших друг против друга.
Рассмотрим теперь любую команду, состоящую из N-2 людей. Она играла либо против 1, либо против 2 человек. Но все одиночные люди уже “разобраны”, поэтому против 2, но тогда в точности против тех, кого среди этих N-2 нет. Заметим, что все пары людей какой-то команде из N-2 придётся поставить в соответствие, и свободных пар не останется. Таким образом, все команды из 2 и N-2 тоже разобьются на пары.
Продолжая рассуждения, получим, что все команды разобьются таким образом. Заметим, что если N чётно, то это ничему не противоречит, так как мы просто придём к тому, что все команды из N/2 людей должны играть с командами из N/2 людей, так как других свободных команд не осталось. Но тогда они обязаны дополнять друг друга.
Критерии: замечено только, что N-1 и 1 разбиваются на пары - 2 балла.
Не разобран случай чётного N, если для него требуется отдельное рассуждение - минус 1 балл.

Решения заданий первого этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике

Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

9 класс

9.1. Фирма получает яблочный и виноградный соки в одинаковых стандартных бидонах, а производит коктейль (смесь) из этих соков в одинаковых стандартных банках. В прошлом году одного бидона яблочного сока хватало на 6 банок коктейля, а одного бидона виноградного сока — на 10. В новом году пропорцию соков в коктейле (смеси) изменили и теперь стандартного бидона яблочного сока хватает на 5 банок коктейля. На сколько банок коктейля теперь хватает стандартного бидона виноградного сока?
Ответ. На 15 банок.
Решение. В прошлом году одного бидона яблочного сока хватало на 6 банок коктейля, значит каждая банка содержала 1/6 бидона яблочного сока. Аналогично, одного бидона виноградного сока хватало на 10 банок, значит, каждая банка содержала 1/10 бидона виноградного сока. Следовательно, ёмкость банки составляет 1/6+1/10=4/15 стандартного бидона. После изменения пропорции в новом году, каждая банка содержит 1/5 бидона яблочного сока, значит виноградного сока в ней стало 4/15 – 1/5 = 1/15 бидона. Следовательно, бидона виноградного сока теперь хватает на 15 банок коктейля.
Критерии проверки. Чёткое объяснение, что ёмкость банки равна 4/15 бидона: 3 балла.
За не исключение неправильного ответа при правильном решении и правильном ответе минус 2 балла.
За отсутствие пояснений от -2 до 0 баллов.

9.2. Известно, что $\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$. Найти все возможные значения выражения $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Решение. Умножим на знаменатель и преобразуем равенство в условии к виду $b^2(a^2+b^2)=a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$. При этом a,b не могут одновременно равняться нулю, иначе знаменатель дроби в условии обращается в 0. Следовательно, скобка a^2+b^2 тоже не равна нулю. Разделив на неё, получим $b^2=a^2-b^2$, откуда $a^2=2b^2$ (где a,b не равны 0). Подставив это выражение в дробь $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, получим, что она равна $\frac{b^2}{3b^2}=\frac{1}{3}$.

Критерии проверки. Не обращается внимание на то, что происходит деление на выражение, которое может равняться нулю: снимаем 2 балла.
Если решено с помощью деления на b^2, не разбирая $b=0$, минус 2 балла, если при преобразовании выражено a^2 + 1 балл.

9.3. Точка M является серединой гипотенузы BC прямоугольного треугольника ABC, а точка P делит катет AC в отношении AP:PC = 1:2. Докажите, что величины углов PBC и AMP равны.
Доказательство. По свойству медианы к гипотенузе прямоугольного треугольника, треугольник AMC является равнобедренным. Отметим на катете AC точку T — середину отрезка PC, тогда длины отрезков AP,PT и TC равны. Следовательно, треугольника AMP и CMT равны по паре сторон AP=CT,AM=CM и углам MAP и MCT между ними, поэтому равны и их соответствующие углы AMP и CMT. Теперь заметив, что T- середина CP и M — середина CB, из теоремы, обратной теореме Фалеса, получаем параллельность прямых MT и BP, и равенство углов PBC и CMT, последний из которых равен AMP, что и требовалось доказать.
Критерии проверки. Доказана равнобедренность треугольника AMC: 1 балл. Доказано

равенство треугольников AMP и CMT: 2 балла. Замечено равенство углов AMP и CMT: 1 балл. Доказана параллельность прямых MT и BP: 2 балла. Доказано равенство углов PBC и CMT: 1 балл.

9.4. Можно ли в некоторых клетках шахматной доски 8 на 8 поставить по одной фишке так, чтобы число фишек в любых двух соседних горизонталях отличалось в 3 раза, а в любых двух соседних вертикалях — в 4 раза? Хотя бы одна фишка на доске должна быть.

Ответ. Нет.

Решение. Горизонталь или вертикаль доски 8 на 8 не может содержать больше 8 фишек, поэтому минимальное число фишек в горизонтали равно 1 или 2, в противном случае в одной из соседних с минимальной горизонталей будет не меньше 9 фишек. Из условия легко следует, что в первом случае горизонтали содержат 1,3,1,3,1,3,1,3 или 3,1,3,1,3,1,3,1 фишек, а во втором — 2,6,2,6,2,6,2,6 или 6,2,6,2,6,2,6,2 фишек, то есть всего 16 или 32 фишки. Разобьём вертикали на пары соседних, по условию, число фишек в каждой паре соседних вертикалей делится на 5. поэтому и общее число фишек на доске должно делиться на 5, однако 16 и 32 не делятся на 5 — противоречие.

Критерии проверки. Чёткое обоснование того, что горизонтали содержат 1,3,1,3,1,3,1,3 либо 2,6,2,6,2,6,2,6 фишек: 3 балла. Чёткое обоснование того, что общее число фишек на доске должно делиться на 5: 3 балла. Получение противоречия: 1 балл.

Решения, где выражение «в 3 раза» понимается, как «хотя бы в три раза», или «не больше, чем бы в три раза»: не рассматриваются.

9.5. При каком минимальном n в любом множестве из n различных натуральных чисел, не превосходящих 100, найдутся два, сумма которых является простым числом?

Ответ. n=51.

Решение. Сумма двух чётных натуральных чисел всегда чётна и больше двух, следовательно, не может быть простым числом. Поэтому пример множества из всех пятидесяти чётных чисел, не превосходящих 100 показывает, что минимальное n не меньше 51.

С другой стороны, разобьём все натуральные числа от 1 до 100 на 50 пар, сумма чисел в каждой из которых равна простому числу 101: 1 и 100, 2 и 99, …, 50 и 51. Если в выбранном множестве не меньше 51 числа, то, по принципу Дирихле, хотя бы два из них попадут в одну пару, и их сумма будет простым числом.

Критерии проверки. Пример, показывающий, что n больше 50: 2 балла. Доказательство того, что в любом множестве из 51 различных натуральных чисел, не превосходящих 100, найдутся два, сумма которых является простым числом: 5 баллов.

Идея примера, но он не приведен явно +1 балл.

10 класс *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Два спортсмена с постоянными скоростями бегают по овальной дорожке спортплощадки, первый из них пробегает дорожку полностью на 5 секунд быстрее, чем второй. Если они побегут по дорожке с одной точки старта в одном направлении, то в первый раз снова встретятся через 30 секунд. Через сколько секунд они в первый раз снова встретятся, если побегут по дорожке с одной точки старта в противоположных направлениях?

Ответ. Через 6 секунд.

Решение. Обозначим длину дорожки стадиона за S метров, а скорости первого и второго бегунов за x и y метров в секунду соответственно. Тогда из первого условия: $\frac{S}{x}+5=\frac{s}{y}$, а из второго $\frac{S}{x-y}=30$, так как при этом первый догоняет второго с начальным отставанием S метров. Из второго уравнения выражаем $S=30(x-y)$, подставляем в первое, делаем замену переменной $t=\frac{x}{y}>1$ и получаем уравнение $t^2-\frac{13}{6}t+1=0$, откуда $t=\frac{3}{2}=\frac{x}{y}$. выражаем $y=\frac{2}{3}x$, подставляем во второе уравнение, имеем $\frac{S}{x}=10$, то есть $S=10x$.

Если же бегуны побегут в противоположных направлениях, то их скорости будут складываться и они пробегут до встречи дорожку за $\frac{S}{x+y}=\frac{S}{\frac{5}{3}x}=\frac{3}{5}\frac{S}{x}=6$ секунд.

Критерии проверки. Верное составление системы уравнения: 3 балла.

10.2. Найти все пары действительных значений a и b, при которых оба уравнения $x^2+ax+b^2=0$ и $x^2+bx+a^2=0$ имеют хотя бы один общий корень.

Ответ. $a=b=0$ **.**

Решение. Чтобы уравнения имели общий корень, необходимо, чтобы каждое из них имело корни, то есть их дискриминанты должны быть неотрицательны. Следовательно, . $a^2\geq 4b^2, b^2\geq 4a^2$, откуда $a^2\geq 16a^2, b^2\geq 16b^2$, что возможно только при $a=b=0$. В этом случае оба уравнения имеют общий корень 0.

Критерии проверки. Присутствует утверждение о необходимости выполнения неравенств $a^2\geq 4b^2, b^2\geq 4a^2$: 3 балла. Упущена явная проверка того, что при $a=b=0$ уравнения действительно имеют общий корень, равный 0: снимаем 1 балл.

10.3. В ряд слева направо записаны все натуральные числа от 1 до 37 в таком порядке, что каждое число, начиная со второго по 37-ое, делит сумму всех чисел, стоящих левее него: второе делит первое, третье — сумму первого и второго, и т.д, последнее — сумму первых тридцати шести**.** На первом слева месте оказалось 37, какое число стоит на третьем месте?

Ответ. 2**.**

Решение. Если на первом месте стоит простое число 37, то на втором обязательно 1, на третьем должен быть делитель числа 37+1=38, то есть 2 или 19. Однако 19 должно стоять на последнем месте, так как 37-ое число должно делить сумму всех остальных и самого себя, то есть делить сумму всех чисел, равную $\frac{(1+37)\cdot 37}{2}=19\cdot 37$ и должно равняться 19, так как 37 уже занято. Следовательно, на третьем месте стоит число 2.

Критерии проверки. Решение не предполагает приведения примера расстановки чисел, удовлетворяющей условию. Если же приведён полный правильный пример с расстановкой, где на третьем месте стоит число 2 без доказательства его единственности: ставим 3 балла.

За построение примера расстановки, если всё остальное доказано верно, дополнительных баллов не добавляем.

10.4. В квадрат ABCD вписана окружность, касающаяся его сторон AB, BC, CD, DA в точках P,Q,R и S соответственно. На отрезках AP и AS взяты точки M и N так, что отрезок MN касается вписанной окружности. Докажите, что отрезки MC и NR параллельны.

Доказательство. Для удобства вычислений длину стороны квадрата примем равной 2, обозначим длины отрезков AN и AM за x и y соответственно. Тогда отрезки SN и PM имеют длины $1-x$ и $1-y$. По свойству касательных из одной точки отсюда следует, что длина MN равна их сумме, то есть $2-x-y$. Теорема Пифагора для треугольника AMN даёт $x^2+y^2=(2-x-y)^2$, откуда $BM \cdot DN=(2-x)(2-y)=2$. Последнее равенство запишем как $\frac{BM}{BC}=\frac{BM}{2}=\frac{1}{DN}=\frac{DR}{DN}$, откуда сразу следует подобие прямоугольных треугольников BMC и DRN, влекущее параллельность их гипотенуз MC и NR.

Критерии проверки. Получено соотношение типа $BM \cdot DN=(2-x)(2-y)=2$: 3 балла.

10.5. Какое максимальное число квадратов 2 на 2 можно уложить на клетчатую доску размера 7 на 7 квадратов так, чтобы каждые два уложенных квадрата имели не больше одной общей клетки? Квадраты 2 на 2 укладываются по линиям сетки так, что каждый закрывает ровно 4 клетки. Квадраты не выходят за границу доски.

Ответ. 18 квадратов.

Решение. Приведём сначала пример укладки 18 квадратов 2 на 2: 9 из них покрывают левый нижний квадрат размера 6 на 6 доски, а остальные 9 покрывают правый верхний квадрат размера 6 на 6 доски.

Докажем, что 19 квадратов правильно уложить нельзя. Заметим, что, если клетка доски, примыкающая к границе, покрывается двумя квадратами, то они пересекаются минимум по двум клеткам, и, если клетка доски, не примыкающая к границе, покрывается тремя квадратами, то два из них пересекаются минимум по двум клеткам. Следовательно, граничные клетки доски могут быть покрыты квадратами не более одного раза, а внутренние — не более двух. Следовательно, всего квадраты могут содержать не более $24 \cdot 1+25 \cdot 2=74$ клеток и всего квадратов не более 74/4=18,5 штук.

Критерии проверки. Любой правильный пример: 2 балла. Доказательство того, что квадратов не больше 18: 5 баллов.

11 класс *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

11.1. Два лыжника стартовали из одной точки друг за другом с интервалом 9 минут. Второй лыжник догнал первого в 9 км от точки старта. Дойдя до отметки «27 км», второй лыжник развернулся и пошёл обратно, встретив первого на расстоянии 2 км от точки поворота. Найти скорость второго лыжника.

Ответ. 15 км в час**.**

Решение. Обозначим скорости первого и второго лыжников за x и y километров в минуту соответственно. Из условия получаем: $\frac{9}{y}+9=\frac{9}{x},\frac{29}{y}+9=\frac{25}{x}$, вычитая первое уравнение из второго, имеем $\frac{20}{y}=\frac{16}{x}$, значит $x=\frac{4}{5}y$. Подставляя в первое, получаем $y=\frac{1}{4}$ км в минуту., что равно 15 км в час. Второй лыжник бежит со скоростью 12 км в час.

Критерии проверки. Верное составление системы уравнения: 3 балла.

11.2. Могут ли биссектрисы двух соседних внешних.углов треугольника (примыкающих к некоторой его стороне) пересекаться на его описанной окружности?

Ответ. Не могут.

Решение. Возьмём соседние внешние углы треугольника ABC, примыкающие к его стороне BC, обозначим их точку пересечения их биссектрис за P. Обозначив величины углов треугольника при вершинах B и C самими этими буквами, получим, что величины углов PBC и PCB равны 90 — B/2 и 90 — C/2 соответственно, а величина угла BPC равна B/2 + C/2 = 90 – A/2. Однако, если бы точка P лежала на описанной окружности треугольника ABC, то четырёхугольник ABPC был бы вписанным и сумма его противоположных углов BAC и BPC равнялась бы 180 = A +90 - A /2 = 90 + A/2, откуда A=180 градусов, что невозможно.

Критерии проверки. Найдена величина угла BPC: 2 балла.

11.3. Три действительных числа таковы, что модуль каждого из них не меньше модуля суммы двух остальных. Докажите, что сумма всех трёх этих чисел равна нулю**.**

Доказательство. Обозначим числа в условии за $a\le b\le c$, по условию, $|a|\ge|b+c|,|b|\ge|a+c|,|c|\ge|a+b|$. Если $a\ge 0$, то первое неравенство возможно лишь при $a=b=c=0$ и в этом случае их сумма равна нулю. Если $b=0$, то из второго неравенства следует $a+c=|a+c|=0$ и снова сумма всех чисел равна 0.

Умножая числа на -1, если нужно, дальше можем считать $a<0<b\le c$. Тогда $-a=|a|\ge|b+c|=b+c$, откуда $a+b+c\le 0$ и $-a\ge b+c>c$, откуда $a+c<0$ и $|a+c|=-a-c$. Из второго неравенства условия теперь получаем $b=|b|\ge|a+c|=-a-c$ и $a+b+c\ge 0$. Следовательно, $a+b+c=0$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. При нерассмотрении каждого из случаев $a\ge 0$ или $b=0$ снимаем по 1 баллу. Если нет правильного сведения к случаю $a<0<b\le c$ и не разобран симметричный случай $a\le b<0<c$: снимем 1 балл.

11.4. Найти все натуральные числа n, которые можно представить в виде $n=\frac{x+\frac{1}{x}}{y+\frac{1}{y}}$, для некоторых натуральных чисел x и y.

Ответ. $n=1$

Решение. Преобразуем равенство в условии к виду $n=\frac{(x^2+1)y}{(y^2+1)x}$. Заметим, что числа x^2+1 и x, а также числа y^2+1 и y взаимно просты, поэтому x в знаменателе может сократиться только с y в числителе, поэтому y делится на x и, в частности, y не меньше x. Аналогично, y^2+1 в знаменателе может сократиться только с x^2+1 в числителе, поэтому y^2+1 делит x^2+1, в частности, не превосходит его, откуда y не превосходит x. Следовательно, y равен x и $n=1$. Число $n=1$ получается при любой паре равных x и y, скажем, когда они равны 1.

Критерии проверки. Фразу в решении типа «числа x^2+1 и x, а также числа x^2+1 и y взаимно просты» можно считать верной без подробных пояснений. Если ссылок на взаимную простоту нет: оценка не более 2 баллов. Если не сказано явно, что число $n=1$ всё же получается при любой паре равных x и y, скажем, когда они равны чему-то конкретному: снимем 1 балл.

11.5. а) Квадрат размера 1 на 1 разбит на 25 не обязательно одинаковых прямоугольников, каждый из которых имеет одинаковый периметр ***p***. Найти минимальное и максимальное возможное значение ***p***. б) Можно ли разбить единичный квадрат на 30 не обязательно одинаковых прямоугольников периметра 2?

Ответ. а) Минимальное значение p равно 0,8 = 4/5, максимальное значение p равно 2,08=2+2/25. б) Да, можно, способ указан в решении.

Решение. а) Один из прямоугольников разбиения должен иметь площадь не меньше, чем 1/25, обозначим его стороны за x и y. По неравенству о среднем арифметическом и средним геометрическом имеем $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\geq\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$, значит, периметр этого прямоугольника, равный $2(x+y)$. не меньше $\frac{4}{5}=0{,}8$. Это значение достигается для разбиения квадрата на 25 одинаковых квадратиков со стороной 0,2.

С другой стороны, разбиение квадрата на 25 равных прямоугольников со сторонами 1 и 1/25 даёт пример $p=2{,}08$, поэтому p максимальное точно больше 2. В любом разбиении единичного квадрата на 25 прямоугольников найдётся прямоугольник площади не больше 1/25, обозначим его стороны за $x\leq 1$ и $y\leq 1$., при этом . $x+y=\frac{p}{2}>1$., и $x\geq\frac{p}{2}-y\geq\frac{p}{2}-1$. Следовательно, должен найтись такой x из интервала $\left[\frac{p}{2}-1,1\right]$, для которого $x\left(\frac{p}{2}-x\right)\leq\frac{1}{25}$.Данная функция является квадратичной с отрицательным старшим коэффициентом, поэтому её минимум на отрезке принимается в одном из концов этого отрезка. Соответствующие значения на концах равны $\frac{p}{2}-1$. Следовательно, $\frac{p}{2}-1\leq\frac{1}{25}$ и $p\leq 2{,}08$.

б) Опишем способ разбиения единичного квадрата на 30 прямоугольников периметра 2. Расположим четыре из них со сторонами $x<\frac{1}{2}$ и $1-x$ большими сторонами вдоль сторон квадрата так, чтобы в центре остался квадрат со стороной $1-2x$. Разобьём его на 26 равных прямоугольников со сторонами $1-2x$ и $\frac{1-2x}{26}$, их периметры равны $\frac{1-2x}{13}+2-4x$, что должно равняться 2, откуда $x=\frac{1}{54}$. Заметим, что в данном разбиении присутствуют всего два типа прямоугольников, и что данный способ позволяет разбить квадрат на любое, не меньшее 4, число прямоугольников периметра 2.

Критерии проверки. В пункте а) каждая из оценок стоит по 2 балла. Если при этом не приводятся точные примеры (один или оба) достижимости оценок, снимаем 1 балл. Пункт б) оценивается в 3 балла.

Если приведены верные примеры разбиений для правильных минимального и максимального значений "p" (обоих!): 1 балл.

Если при этом сделаны попытки обосновать минимальность и максимальность этих значений

с применением соображений типа: "максимальная площадь прямоугольника с фиксированным периметром достигается для квадрата" и "минимальная площадь прямоугольника с фиксированным периметром достигается для максимально вытянутого прямоугольника, когда одна из его сторон равна 1": ещё 1 балл.
И, если по принципу Дирихле в разбиении были найдены прямоугольники площадей не меньше 1/25 и не больше 1/25, и к ним уже верно применены предыдущие соображения для оценки минимального и максимального значений "р": ещё 2 балла.
Если при этом имеются неточности: снимать 1-2 балла.