

**Решения и критерии проверки задач Первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2019-2020 г.г. по математике
7 класс**

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Назовём переверотом примера следующее действие: все знаки действий и знак равенства оставляем на местах, а числа записываем в обратном порядке. Например, из верного примера $6 : 3 + 5 = 7$ получится неверный пример $7 : 5 + 3 = 6$. Придумайте какой-нибудь верный пример, который остаётся верным после переворота. Все числа должны быть натуральными, однозначными и различными, и все знаки действий так же должны быть различны. Скобки использовать нельзя.

Решение: Например, $7 - 3 + 2 = 6$ верный пример и $6 - 2 + 3 = 7$ – его переверот, который тоже является верным примером.

Существует много других подходящих примеров.

Критерии: Любой подходящий пример (даже без проверки и при наличии неверных примеров) – 7 баллов.

Пример с опечаткой – 0 баллов.

7.2. Самолёт вылетел из Москвы в 9:20, а прилетел в Неаполь в 12:30. Обратно он вылетел в 8:30, а прилетел в 13:40. Какая разница по времени между Москвой и Неаполем?

Ответ: 1 час.

Решение: Пусть время полета равно x часов, а разница по времени равна d часов, то есть если в Неаполе t часов, в Москве будет $t + d$ часов, таким образом, получим систему уравнений $x - d = 3$ часа 10 минут и $x + d = 5$ часов 10 минут. Откуда вычитанием одного уравнения из другого получаем, что $d = 2/2 = 1$ час.

Критерии: Только ответ с проверкой («решение подбором») – 1 балл.

Только ответ – 0 баллов.

Приведена верная система уравнений, дальнейших продвижений нет – 3 балла.

Идея, что сумма разниц времен компенсирует разницу во времени, дальнейших продвижений нет – 3 балла.

7.3. В семье четыре ребенка. Возраст каждого из них выражается простым числом. Более того, сумма всех их возрастов тоже простое число. Может ли через несколько лет возраст каждого из них снова быть выражен простым числом?

Ответ: нет, не может.

Решение: Пусть такое возможно. Все простые числа нечётные, кроме числа 2. Если все возраста детей нечётные числа, то сумма возрастов число чётное, при этом оно больше двух, а значит, не может быть простым числом. Значит, хотя бы кому-то из детей 2 года.

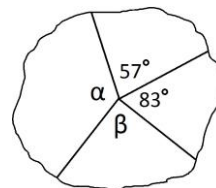
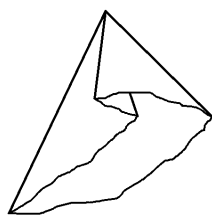
Если всем детям 2 года, то сумма возрастов равна 8, не простое число. Значит, есть ребёнок, которому 2 года, и есть ребёнок, которому нечётное число лет (хотя бы 3 года). Через чётное число лет первому из них будет чётное число лет, не равное 2. Через нечётное число лет второму из них будет чётное число лет, не равное 2.

Таким образом, ни через чётное, ни через нечётное количество лет такого быть не может, а значит, не может быть никогда.

Критерии: Забыт случай, когда всем детям 2 года – снимать 1 балл.

Есть идея чётности, дальнейших продвижений нет – 2 балла.

7.4. Листочек свернули, как на картинке, и сплющили. Когда листочек развернули, то там оказалось четыре линии сгибов, которые разделили лист на 4 угла. Два соседних угла оказались



равны 57 и 83 градусам. Чему равны углы, обозначенные на рисунке α и β ?

Ответ: $\alpha = 97^\circ$ и $\beta = 123^\circ$.

Решение: Перерисуем листочек и обозначим его ключевые точки так, как на рисунке. Пусть углы $\angle CAD$, $\angle DAE$, $\angle EAB$ равны соответственно z , x , y . Когда листочек развернут, то полученные углы будут $\angle CAB = x + y + z$, $\angle CAE = z + x$, $\angle EAD = x$, $\angle DAB = x + y$. Сумма этих четырёх углов, с одной стороны, равна 360° , с другой стороны, $4x + 2y + 2z$. При этом

$$\angle CAB + \angle EAD = \angle CAE + \angle DAB = 2x + y + z = 180^\circ.$$

Отсюда, $\alpha = 180^\circ - 83^\circ = 97^\circ$ и $\beta = 180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$.

Критерии: Только верный ответ (с правильным указанием на углы) – 2 балла.

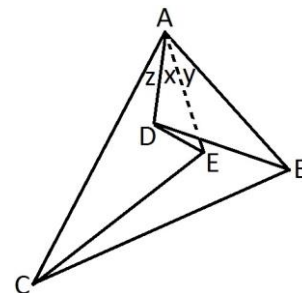
Ответ с неверным уточнением, какой угол α , а какой β – 0 баллов.

Только ответ без уточнения, какой угол α , а какой β – 0 баллов.

Допущена арифметическая ошибка при правильной логике – 6 баллов.

Переборное решение с пропуском некоторых случаев – не больше 5 баллов.

Верное решение, но названия углов перепутаны местами – баллов не снижать.



7.5. Петя и Вася написали на доске натуральные числа от 1 до 30. Они играют в следующую игру: по очереди вычеркивают ещё не вычеркнутое число так, что никакие два вычеркнутых числа не могут иметь общих делителей, больших единицы. Петя начинает игру. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из ребят может обеспечить себе победу?

Ответ: Петя.

Решение: Число 1 может вычеркнуть любой игрок в любой момент. Про остальные числа можно сказать вот что: если мы вычёркиваем число, имеющее простые делители $p_1, p_2, \dots, p_k$, то больше ни одно число, делящееся на хотя бы одно из этих простых чисел, вычёркивать нельзя. Фактически игру можно понимать так: выписаны все простые числа, не превосходящие 30, и число 1, и можно "брать" одно или несколько таких чисел (если их произведение не больше 30). Так, зачёркивая 3, мы "берём" простое число 3, зачёркивая 9, тоже "берём" 3, а зачёркивая, скажем, 12, "берём" 2 и 3 одновременно.

Петя первым ходом вычеркивает 30, при этом на доске остаются: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 – восемь попарно взаимно простых чисел. Таким образом, после каждого хода любого из игроков можно будет вычеркивать любое из чисел. При этом никакие два числа нельзя брать вместе. Количество оставшихся чисел чётно, поэтому у Пети всегда будет последний ход.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.

Высказана идея, что если мы вычёркиваем число, имеющее простые делители $p_1, p_2, \dots, p_k$, то больше ни одно число, делящееся на хотя бы одно из этих простых чисел, вычеркнуть – 2 балла.

Переборное решение с пропущенными случаями (без других продвижений) – 0 баллов.

**Решения и критерии проверки задач Первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2019-2020 г.г. по математике
8 класс**

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Назовём переверотом примера следующее действие: все знаки действий и знак равенства оставляем на местах, а числа записываем в обратном порядке. Например, из верного примера $6 : 3 + 5 = 7$ получится неверный пример $7 : 5 + 3 = 6$. Придумайте какой-нибудь верный пример, который остаётся верным после переворота. Все числа должны быть натуральными, однозначными и различными, и все знаки действий так же должны быть различны. Скобки использовать нельзя.

Решение: Например, $7 - 3 + 2 = 6$ верный пример и $6 - 2 + 3 = 7$ – его переверот, который тоже является верным примером.

Существует много других подходящих примеров.

Критерии: Любой подходящий пример (даже без проверки и при наличии неверных примеров) – 7 баллов.

Пример с опечаткой – 0 баллов.

8.2. Артём в силу природной лени делает работу за 6 часов. Но если он выпьет квасу, то сделает работу в два раза быстрее. Артём начал делать работу в 12:00. В какой-то момент ему принесли квас. В итоге он закончил всю работу за 4 часа. В какое время ему принесли квас?

Ответ: в два часа.

Решение: Если бы Артёму сразу принесли квас, то он справился бы за 3 часа. Но он потратил 4 часа. Значит, лишний час он потратил на ту часть работы, которую выполнял без кваса. Так как без кваса он работает в два раза медленнее, то значит, он потратил на эту часть работы 2 часа (один лишний час и один час, который бы он потратил в любом случае). Значит, квас принесли через 2 часа после начала, то есть в 14.00.

Критерии: Только ответ – 1 балл.

Только ответ с проверкой – 2 балла.

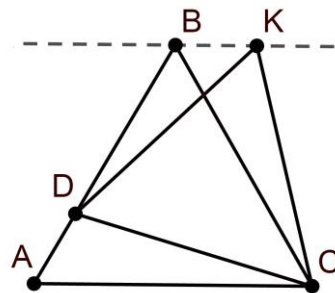
Составлено верное уравнение или система уравнений, дальнейших продвижений нет – 2 балла.

Решение, в котором сначала показано, что 2 часа подходит, а потом, что ни больше, ни меньше 2 часов быть не могло – 7 баллов.

8.3. Равносторонние треугольники расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что прямая BK параллельна прямой AC .

Решение: Рассмотрим треугольники DAC и KBC . В них: $AC = BC$, $DC = KC$ (как стороны равносторонних треугольников), $\angle ACD = 60^\circ - \angle DCB = \angle BCK$. Таким образом, эти треугольники равны. Значит, $\angle CBK = 60^\circ$, следовательно, $\angle ABK = 120^\circ$. Наконец, так как сумма односторонних углов $\angle ABK$ и $\angle CAB$ равна 180° , то прямые BK и AC параллельны.

Критерии: Доказано, что треугольники DAC и KBC равны (без дальнейших продвижений) – 4 балла.



8.4. Назовём набор различных простых чисел хорошим, если сумма любых трёх чисел из этого набора – простое число. Какое наибольшее количество чисел может быть в хорошем наборе?

Ответ: четыре числа.

Решение: Задача состоит из оценки и примера.

Оценка: рассмотрим, какие остатки при делении на три могут давать эти числа.

Если среди остатков встречаются все три возможных (0, 1 и 2), то сумма этих трёх чисел делится на три и не равна трём, а значит, не простое число. Таким образом, в хорошем наборе не может быть трёх различных остатков при делении на три.

Если в наборе встречаются три одинаковых остатка, то сумма соответствующих чисел делится на три и не равна трём, а значит, не может быть простым числом.

Таким образом, в наборе не более двух разных различных остатков, при этом каждого из них не больше двух. Значит, всего чисел не больше четырёх.

Пример: возьмём числа 7, 11, 13, 23. Проверим, что они подходят: $7 + 11 + 13 = 31$, $7 + 11 + 23 = 41$, $7 + 13 + 23 = 43$, $11 + 13 + 23 = 47$.

Критерии: Считаем, что простые числа в пределах первой сотни общеизвестны. Простота больших чисел требует проверки.

В примере используются большие простые числа без проверки их простоты – снимать 1 балл вне зависимости от того сколько таких чисел.

Отсутствует проверка примера – снимать 1 балл.

Только оценка – 3 балла.

Только верный пример с проверкой – 3 балла.

8.5. Петя и Вася написали на доске натуральные числа от 1 до 15. Они играют в следующую игру: по очереди вычёркивают ещё не вычеркнутое число так, что никакие два вычеркнутых числа не могут иметь общих делителей, больших единицы. Петя начинает игру. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из ребят может обеспечить себе победу?

Ответ: Вася

Решение: Число 1 может вычеркнуть любой игрок в любой момент. Про остальные числа можно сказать вот что: если мы вычёркиваем число, имеющее простые делители $p_1, p_2, \dots, p_k$, то больше ни одно число, делящееся на хотя бы одно из этих простых чисел, вычёркивать нельзя. Фактически игру можно понимать так: выписаны все простые числа, не превосходящие 15, и число 1, и можно "брать" одно или несколько таких чисел (если их произведение не больше 15). Так, вычёркивая 3, мы "берём" простое число 3, вычёркивая 9, тоже "берём" 3, а вычёркивая, скажем, 12, "берём" 2 и 3 одновременно.

Итак, в новой формулировке, на доске выписан набор чисел 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 – всего 7 чисел. Если за игру будет один раз взято два числа, а остальные ходы будут по одному числу, то всего ходов будет 6 и победит Вася. Докажем, что Вася всегда может этого добиться.

Вместе можно брать только числа 2 и 3, 2 и 5, 2 и 7, 3 и 5.

Пусть Петя взял какое-то из чисел из набора 2, 3, 5. Тогда Вася возьмёт два других. Дальше все ходы будут по одному числу.

Пусть Петя возьмёт два каких-то числа из набора 2, 3, 5. Тогда Вася возьмёт оставшееся число и сведёт задачу к предыдущему случаю.

Пусть Петя возьмёт числа 2 и 7. Тогда Вася возьмёт число 5. После этого никакие два числа нельзя будет брать вместе. Все ходы будут по одному числу.

Пусть Петя возьмёт одно число не из набора 2, 3, 5. Тогда Вася возьмёт 2 и 3. Так как во всех парах чисел используется хотя бы одно из этих чисел, то дальнейшие ходы будут по одному числу.

Рассмотрены все варианты первого хода, во всех случаях у Васи есть выигрышная стратегия.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.

Высказана идея, что если мы вычёркиваем число, имеющее простые делители $p_1, p_2, \dots, p_k$, то больше ни одно число, делящееся на хотя бы одно из этих простых чисел, вычеркнуть нельзя – 2 балла.

Переборное решение с пропущенными случаями (без других продвижений) – 0 баллов.

Выделение группы чисел 2, 3, 5 (или другой группы, рассмотрение которой уменьшает перебор) – 2 балла. Эти баллы суммируются.

**Решения заданий 9 класса Всесибирской открытой олимпиады
школьников по математике**

Каждая задача оценивается из 7 баллов

9.1. Найти самое маленькое натуральное число, делящееся на 7, в десятичной записи которого используются все цифры от 0 до 9 ровно по одному разу.

Ответ. 1023456798.

Решение. Самое маленькое число, в десятичной записи которого используются все цифры ровно по одному разу – это 1023456789, в нём в каждом разряде стоит минимально возможная цифра, однако оно на 7 не делится. Следующим по возрастанию является 1023456798, в нём минимально возможные цифры стоят в первых восьми разрядах, оно уже делится на 7: $1023456798 = 7 \cdot 146208114$, поэтому является ответом задачи. Какой-то подсказкой к решению является замечание, что числа 56,7 и 98 делятся на 7.

Критерии оценивания. Только найден правильный ответ, без обоснования его минимальности: 3 балла. Обоснование минимальности: 4 балла. Отсутствие явной записи $1023456798 = 7 \cdot 146208114$ или иного явного доказательства делимости найденного числа на 7: снимаем 1 балл.

9.2. Можно ли окрасить все натуральные числа от 1 до 15 включительно в два цвета так, чтобы никакие два числа одного цвета в сумме не давали точный квадрат (то есть квадрат некоторого натурального числа)?

Ответ. Нет.

Решение. Расположим числа 1,3,6,10,15 по кругу, сумма любых двух соседних является точным квадратом, поэтому они должны быть окрашены в разные цвета, что невозможно ввиду нечётности их количества.

9.3. На стороне AC равностороннего треугольника ABC как на диаметре во внешнюю сторону построен полукруг, разделенный точками P и Q на три равных дуги. Докажите, что точки пересечения M и N стороны AC с отрезками BP и BQ соответственно делят AC на три одинаковых отрезка.

Доказательство 1. Отметим середину O стороны AC и будем считать длину AC равной 12, а точку P расположенной ближе к A, чем к C. Треугольник AOP равнобедренный с углом 60 градусов при вершине O. Следовательно, AOP – равносторонний со стороной длины 6, он подобен ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Углы OAP и OCB равны 60 градусам, поэтому отрезки AP и BC параллельны, следовательно, четырёхугольник APCB – трапеция и треугольники AMP и BMC подобны с коэффициентом $AM:MC=AP:BC=\frac{1}{2}$. Значит, точка M делит AC в отношении 1:2 и длина AM равна $\frac{1}{3}$ длины AC. Аналогично и длина CN равна $\frac{1}{3}$ длины AC, поэтому точки M и N делят AC на три одинаковых отрезка.

Доказательство 2. (Идея та же, но воплощение длиннее) Отметим середину O стороны AC и будем считать длину AC равной 12, а точку P расположенной ближе к A , чем к C . Треугольник AOP равнобедренный с углом 60° градусов при вершине O . Следовательно, AOP – равносторонний со стороной длины 6, он подобен ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Опустим из P высоту PH на AO , тогда H – середина AO . Прямоугольные треугольники MPH и MBO тоже подобны по двум углам с коэффициентом $PH:BO=\frac{1}{2}$. Следовательно, точка M делит отрезок HO в отношении $HM:MO=1:2$, поэтому длина HM равна трети от HO , то есть 1. Значит, длина AM равна сумме длин $AH=3$ и $HM=1$, то есть 4. Аналогично $CN=4$, значит и $MN=12-4-4=4=AM=CN$, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Показано, что AOP – равносторонний и подобен ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$: 3 балла.

9.4. График функции $y = x^2 + px + q$ касается прямой $y = 2x + p$. Доказать, что все такие функции имеют одно и то же минимальное значение. Найти это значение (в виде числа).

Доказательство. Условие касания графика функции $y = x^2 + px + q$ и прямой $y = 2x + p$ равносильно тому, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 2x + p \Leftrightarrow x^2 + (p-2)x + q - p = 0$ имеет единственное решение, а это эквивалентно равенству нулю его дискриминанта: $D = (p-2)^2 - 4(q-p) = p^2 - 4q + 4 = 0$. Минимальное значение функции $y = x^2 + px + q$ достигается при $x = -\frac{p}{2}$ и равно $q - \frac{p^2}{4} = \frac{4q - p^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ – не зависит от p и q .

Критерии оценивания. Высказывание идеи, что касание графика функции и прямой равносильно тому, что соответствующее квадратное уравнение имеет единственное решение: 1 балл. Нахождение условия $p^2 - 4q + 4 = 0$: ещё 2 балла.

9.5. В ходе футбольного турнира в один круг каждая команда сыграла с каждой ровно один матч, который либо выиграла, либо свела вничью, либо проиграла. Оказалось, что количество побед, одержанных каждой командой, в полтора раза больше, чем количество игр, сыгранных ею вничью. Могло ли число команд, участвовавших в турнире равняться 1) десяти, 2) девяти?

Ответ. 1) нет, 2) да.

Решение. Просуммируем количества побед, одержанных каждой командой, и количества игр, сыгранных каждой командой вничью. Первая сумма равна общему числу результативных (не окончившихся вничью) игр в турнире, вторая – удвоенному общему числу ничьих в турнире, и, по условию, первая сумма в полтора раза больше второй. Следовательно, общее число результативных игр втрое больше общего числа ничьих, значит, общее число

игр в турнире делится на 4. В случае 1) в турнире было сыграно $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ игр, что не делится на 4, поэтому ответ отрицательный. В случае 2) в турнире было сыграно $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ игр, что делится на 4, поэтому разумно построить пример. Приведём сразу два примера, демонстрирующих основные техники построения примеров такого рода.

Пример 1. Его удобно представить так: считаем команды вершинами правильного 9-угольника, игры – его сторонами и диагоналями, на результативных играх нарисуем стрелки от проигравшей команды к выигравшей. Стороны 9-угольника при этом соответствуют ничьим, а остальные – результативным играм, причём все стрелки ориентированы по часовой стрелке. Каждая команда проиграла 2-ой, 3-ей и 4-ой командам, следующим за ней по часовой стрелке и выиграла у 2-ой, 3-ей и 4-ой команд, предшествующих ей по часовой стрелке, а с остальными двумя сделала ничью.

Пример 2. Разобьём участников турнира на три подгруппы А, В и С по три команды. Внутри каждой подгруппы все игры окончились ничьими, команды из группы А проиграли все игры командам из группы В, команды из группы В проиграли все игры командам из группы С, команды из группы С проиграли все игры командам из группы А.

В обоих примерах у каждой команды будет по три выигрыша и проигрыша и по две ничьих, что соответствует условию задачи.

Критерии оценивания. Доказательство невозможности в пункте 1): 3 балла.

Пример с обоснованием в пункте 2): 4 балла. Пример без обоснования в

пункте 2): 3 балла. Верное доказательство в 1), в предположении, что у каждой команды было 3 выигрыша, 2 ничьих и 4 проигрыша: 1 балл.

Пропущен случай 0 выигрышей и 0 ничьих в 1). Снимается 1 балл.

**Решения заданий 10 класса Всесибирской открытой олимпиады
школьников по математике**

Каждая задача оценивается из 7 баллов

10.1. Найти все тройки чисел a, b, c таких, что оба квадратных уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $\frac{x^2}{a} + \frac{x}{b} + \frac{1}{c} = 0$ имеют корни.

Ответ. Все тройки (a, b, c) , где a, b, c - любые не равные 0, такие, что $ac < 0$.

Решение. По условию, дискриминанты обоих уравнений неотрицательны, следовательно: $b^2 \geq 4ac, \frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{ac}$. Обе правых части имеют один знак, если они положительны, то, перемножив неравенства, получим $1 \geq 16$, чего быть, разумеется, не может. С другой стороны, если $ac < 0$, то неравенства $b^2 \geq 4ac, \frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{ac}$ очевидно, выполнены, оба дискриминанта неотрицательны и уравнения имеют корни.

Критерии оценивания. Выписывание неравенств $b^2 \geq 4ac, \frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{ac}$: 1 балл.

Попытки дальнейшего перемножения неравенств без рассмотрения знаков правых частей: 0 баллов. Если рассмотрен только случай положительных правых частей: 2 балла. Неупоминание того, что a, b, c не равны 0: минус 1 балл.

10.2. Женя и Вадик разделили одно и то же натуральное число с остатком на 12 и 13 соответственно. Сумма неполного частного, полученного Женей и остатка, полученного Вадиком, равна 14. Чему равен остаток, полученный Женей?

Ответ. 1.

Решение. Обозначим делимое число за n , тогда $n = 12k + a$, где k и a - частное и остаток, полученные Женей, и $n = 13l + b$, где l и b - частное и остаток, полученные Вадиком. По условию $k + b = 14$, откуда $12k + a = n = 13l + 14 - k$, следовательно $13(k - l) = 14 - a$ - делится на 13. Ввиду того, что $0 \leq a \leq 11$, получаем единственно возможный ответ $a = 1$. Минимальным примером такого n является число $25 = 12 \cdot 2 + 1 = 13 \cdot 1 + 12$, сумма неполного частного, полученного Женей и остатка, полученного Вадиком, при этом действительно равна 14. Все возможные остальные примеры: 37, 49, 61, ..., 169.

Критерии оценивания. Доказано, что остаток, полученный Женей, может равняться только 1: 5 баллов. Пример числа, для которого выполнены условия задачи и остаток, полученный Женей, равен 1: 2 балла.

10.3. Вася, Петя и Коля пошли покупать мороженое, у каждого были только сторублёвые купюры. При этом мороженое все брали одинаковое, одна порция стоила целое число рублей, а у Пети было ровно 100 рублей. Пете денег хватило только на 2, Васе на 6, а Коле – на 11 порций. Даже если бы Вася и Коля объединили свои капиталы, то на 18 порций им всё равно бы не хватило. Сколько стоила одна порция мороженого?

Ответ. 45 рублей.

Решение. Обозначим цену одной порции мороженого за x рублей. Из того, что Пете денег хватило только на 2 порции следует $2x \leq 100 < 3x$, откуда $34 \leq x \leq 50$. В таком случае у Васи было число рублей, делящееся на 100 из интервала от $6 \cdot 34 = 204$ до $7 \cdot 50 - 1 = 349$, то есть 300 рублей. Из того, что Васе денег хватило только на 6 порций следует $6x \leq 300 < 7x$, откуда $43 \leq x \leq 50$. В таком случае у Коли было число рублей, делящееся на 100 из интервала от $11 \cdot 43 = 473$ до $12 \cdot 50 - 1 = 599$, то есть 500 рублей. Из того, что Коле денег хватило только на 11 порций следует $11x \leq 500 < 12x$, откуда $42 \leq x \leq 45$. С учётом предыдущих неравенств $43 \leq x \leq 45$. Наконец, из того, что Васе и Коле вместе 800 рублей хватило только на 17 порций следует $17x \leq 800 < 18x$, откуда $45 \leq x \leq 47$. Пересекая это с предыдущим неравенством, получим $x = 45$ рублей - цена одной порции мороженого. Проверка показывает, что при этом условия задачи выполнены. Впрочем, в области натуральных чисел все приведённые неравенства в точности эквивалентны соответствующим условиям задачи, поэтому проверка не обязательна, но тогда нужно хотя бы упоминание об этой эквивалентности.

Критерии оценивания. Показано, что $34 \leq x \leq 50$: 1 балл. Найдено количество денег у Васи – 1 балл и показано, что $43 \leq x \leq 50$ - 2 балла. Найдено количество денег у Коли - 1 балл и показано, что $42 \leq x \leq 45$ - 2 балла. Показано, что $45 \leq x \leq 47$: 1 балл.

Если ошибка в строгости неравенств минус 1 балл.

10.4. В треугольнике ABC отрезки AM и CP являются биссектрисами углов A и C соответственно, причём $AP + CM = AC$. Найдите величину угла B.

Ответ. 60 градусов.

Решение 1. (Рассудительно-геометрическое, непростое). 1) Обозначим за O точку пересечения биссектрис AM и CP и отметим на стороне AC точку K такую, что $AK = AP$, тогда по условию $CK = CM$. Треугольники APO и AKO равны по двум сторонам $AP = AK$, $AO = AO$ и углам $PAO = KAO$ между ними, следовательно, $OP = OK$. Аналогично, равны треугольники CMO и CKO, откуда $OK = OM$. Отсюда следует $OP = OM$.

2) Опустим из O перпендикуляры OE, OH и OT на стороны AB, BC и AC соответственно, при этом E, H и T – точки касания вписанной окружности треугольника ABC с соответствующими сторонами и $OE = OH = OT$ – радиус вписанной окружности. Если точка P принадлежит отрезку AE, то $AP < AE$, поэтому $AK = AP < AE = AT$, следовательно $CM = CK > CT = CH$ и точка M принадлежит отрезку BH и наоборот.

3) Прямоугольные треугольники ОЕР и ОНМ равны по катетам ОЕ=ОН и гипотенузам ОР=ОМ, следовательно, равны углы ЕРО и НМО. При этом, по доказанному в пункте 2), если ЕРО внутренний для четырёхугольника ВРОМ, то НМО – внешний и наоборот. Отсюда следует, что сумма углов ОРВ и ОМВ равна 180 градусов и четырёхугольник ВРОМ – вписанный.

4) Найдём сумму углов треугольника ОРМ. В силу свойств вписанных углов и того, что ОВ – биссектрисы угла АВС, величины ОМР и ОРМ равны по В/2. Из треугольника АОС находим РОМ=АОС=180-(ОАС+ОСА)=180-(А+С)/2=90+В/2. Следовательно, 90+В/2+ В/2+ В/2=180, откуда величина угла АВС равна В=60 градусов.

Решение 2. (Вычислительное, идейно проще и уж точно короче первого). Обозначим длины сторон ВС, АС и АВ за a, b, c соответственно и воспользуемся свойством биссектрисы – она делит противоположащую сторону в отношении двух прилежащих. Несложно подсчитать, что $AP = \frac{bc}{a+b}$,

$CM = \frac{ab}{b+c}$. По условию $b = \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{a+b}$, откуда $b^2 + ac + bc + ab = a^2 + ab + c^2 + bc$ и

$b^2 = a^2 + c^2 - ac$. По теореме косинусов $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$ и величина угла В

равна 60 градусам.

Критерии оценивания. 1. решения, использующие счёт в координатах или в тригонометрических функциях, но не доведённые до конца = 0 баллов.

2. получение ответа, зависящего от каких-либо параметров = 0 баллов.

3. Доказательство, что треугольник РМК - равносторонний, где К - точка из решения = 1 балл.

10.5. Найти все натуральные n такие, что из любых n натуральных чисел, сумма которых равна 100, всегда можно выбрать 30 чисел, сумма которых равна 60.

Ответ. $n = 70$

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 70$ чисел. Из них не менее 40 равны 1, иначе общая сумма не меньше $39 \cdot 1 + 31 \cdot 2 = 101 > 100$. Тогда сумма $70 - 40 = 30$ оставшихся чисел равна как раз $100 - 40 = 60$.

С другой стороны, если $n < 70$, то среди чисел $\{101-n, 1, 1, \dots, 1\}$ ($101-n$ и $n-1$ единица) сумма любых тридцати равна либо 30, либо $101-n+29=130-n \geq 130-69=61$, и не равна 60. Если же $n > 70$, то среди чисел $\{2, 2, \dots, 2, 1, 1, \dots, 1\}$ ($100-n \leq 29$ двоек и $2n-100$ единиц) сумма любых тридцати чисел не превосходит $2(100-n)+1 \cdot (30-(100-n)) = 130-n \leq 59$ и тоже не равна 60.

**Решения заданий 11 класса Всесибирской открытой олимпиады
школьников по математике**

Каждая задача оценивается из 7 баллов

11.1. Сумма 11 натуральных чисел равна 441. Найти минимальное значение, которое может принимать наименьшее общее кратное всех этих чисел

Ответ. 42.

Решение. Среди этих чисел всегда найдётся число не меньшее, чем $441:11 > 40$, то есть не меньше 41, следовательно, наименьшее общее кратное всех этих чисел всегда не меньше 41. Если оно равно 41, то, ввиду простоты числа 41, все эти числа должны быть равны 41 или 1. Но $41 \cdot 10 + 1 = 411 < 441$, а $41 \cdot 11 = 454 > 441$, значит, такого быть не может и наименьшее общее кратное всех этих чисел не меньше 42. Пример для 42 таков: $441 = 10 \cdot 42 + 21$, наименьшее общее кратное 42 и 21 равно 42, так как 42 делится на 21.

Критерии оценивания. Замечено, что наименьшее общее кратное всех этих чисел всегда не меньше 41: 1 балл. Приведён верный пример для 42: 2 балла. Доказана минимальность 42: 5 баллов.

11.2. В каждой из пяти кучек различное число камней, при этом любую из кучек можно убрать, и все камни из неё разложить по оставшимся так, чтобы число камней в них стало одинаковым. Какое наименьшее число камней может быть в самой большой кучке?

Ответ. 10.

Решение. При раскладывании самой маленькой кучки по четырём остальным в каждую из них для уравнивания нужно переложить разное число камней, значит, в ней не меньше, чем $0+1+2+3=6$ камней. С другой стороны, по условию число камней в самой большой кучке превосходит число камней в самой маленькой кучке не меньше, чем на 4, поэтому в ней не меньше $6+4=10$ камней. В качестве примера возьмём кучки с 6, 7, 8, 9 и 10 камнями. Всего в них 40 камней, поэтому уравнивать нужно до 10 камней в каждой из оставшихся. При раскладывании первой нужно переложить 3, 2, 1 и 0 камней соответственно, при раскладывании второй – 4, 2, 1 и 0, третьей – 4, 3, 1 и 0, четвёртой – 4, 3, 2 и 0, пятой – 4, 3, 2 и 1.

Критерии оценивания. Доказана минимальность 6 в самой маленькой кучке: 2 балла. Доказана минимальность 10 в самой большой кучке: 4 балла (предыдущие 2 балла включаются сюда). Приведён пример для 10: 3 балла. Отсутствие точной схемы раскладывания каждой кучки в примере: минус 1 балл.

11.3. На катетах СА, СВ и гипотенузе АВ прямоугольного треугольника ABC вовне него построены равносторонние треугольники ACM, BCN и ABP соответственно. Докажите, что длины отрезков CP и MN равны.

Решение 1. (Рассудительно-геометрическое, довольно короткое).

1) Величины углов MCH и MCB равны $360-60-90-60=150$ и $60+90=150$ градусов соответственно, поэтому треугольники MCH и MCB равны по сторонам $MC=MC$, $HC=CB$ и углам $MCH=MCB$ между ними. В частности, $MH=MB$.

2) Величины углов CAP и MAV равны $CAB+60$ и $60+CAB$, поэтому треугольники MAV и CAB равны по сторонам $MA=CA$ и $AV=AB$ и углам MAV и CAP между ними. Следовательно, равны и их третьи стороны MB и CP , то есть $MH=MB=CP$, что и требовалось доказать.

Решение 2. (Координатно – вычислительное, тоже вполне компактное). Расположим треугольник ABC на координатной плоскости, поместив вершину C прямого угла в начало координат, катет CA на ось OX , катет CB на координатную ось OY . Обозначим координаты точек A и B через $(a,0)$ и $(0,b)$ соответственно, где $a,b > 0$. Координаты точек M и N в таком случае

равны $(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2})$ и $(-\frac{b\sqrt{3}}{2}, \frac{b}{2})$, координаты вектора MN равны $(-\frac{a+b\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}+b}{2})$, а его длина равна $a^2+ab\sqrt{3}+b^2$. Координаты точки T –

середины гипотенузы AB равны $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$, а вектор TP перпендикулярен вектору

$BA(a,-b)$ и в $\frac{\sqrt{3}}{2}$ раз короче его, поэтому имеет координаты $(\frac{b\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$.

Следовательно, вектор CP имеет координаты $(\frac{a+b\sqrt{3}}{2}, \frac{b+a\sqrt{3}}{2})$ и длину

$a^2+ab\sqrt{3}+b^2$, равную длине вектора MN , что и требовалось доказать.

Решение 3. (Тригонометрическое). Обозначим, как в решении 2, длины сторон CA и CB через a и b соответственно, длину AB – через c , величину угла CAB – через α . По теореме косинусов в треугольнике MCH квадрат длины отрезка MN равен

$$a^2+b^2-2ab\cos MCH=a^2+b^2-2ab\cos 150=a^2+b^2+ab\sqrt{3}.$$

Длину CP найдём по теореме косинусов в треугольнике CAP . Её квадрат равен $a^2+c^2-2accosCAP=a^2+c^2-2accos(\alpha+60)=$

$$=a^2+c^2-2accos\alpha \cdot \cos 60 + 2acsina \cdot \sin 60 = a^2+c^2-a \cdot c \cos \alpha + a \cdot c \sin \alpha \cdot \sqrt{3} =$$

$$=a^2+c^2-a \cdot a + a \cdot b \cdot \sqrt{3} = c^2 + a \cdot b \cdot \sqrt{3} = a^2+b^2+ab\sqrt{3}, \text{ то есть совпадает с квадратом длины } MN.$$

Критерии оценивания. В решении первого типа доказано $MH=MB$ или $MB=CP$: 3 балла. В координатном и тригонометрических решениях наличие любых ошибок, кроме простейших арифметических в конце вычислений: 0 баллов. При наличии простейших арифметических ошибок: снимаем 1-2 балла.

11.4. Докажите, что каждое целое число n можно представить в виде $n = a^2 + b^2 - c^2$ для некоторых натуральных чисел a, b, c .

Доказательство. Заметим, что $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ для произвольного целого k . Если число $n=2k$ чётно, то при $k \geq 2$ положим $a=1, b=k, c=k-1$, при $k \leq -1$ положим $a=1, b=-k, c=-k+1$, а в случаях $k=0, k=1$ положим $0=3^2+4^2-5^2, 2=3^2+3^2-4^2$. Если же число $n=2k+1$ нечётно, то при $k \geq 3$ положим $a=2, b=k-1, c=k-2$, а при $k \leq 0$ положим $a=2, b=-k+1, c=-k+2$. При $k=1, k=2$ имеем $3=4^2+6^2-7^2, 5=4^2+5^2-6^2$.

Критерии оценивания. Найдены верные представления либо только для всех чётных или либо только для всех нечётных чисел: по 3 балла. Найдены верные представления только для всех натуральных чисел: 3 балла. Упущены представления для некоторого конечного количества исключительных чисел: минус 1-2-3 балла в зависимости от их числа. Нет контроля над натуральностью чисел a, b, c (то есть отличием их от 0): минус 1-2-3 балла в зависимости от числа возникающих ненатуральностей.

11.5. Действительные числа x, y удовлетворяют неравенствам $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$. Найти минимальное и максимальное значения выражения $x^2 + xy + y^2$.

Ответ. $\frac{1}{2}$ и 3.

Решение 1. Несложно убедиться, что $-\frac{x^2+y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ при всех действительных x, y . Следовательно, $\frac{1}{2} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \leq x^2 + xy + y^2 \leq \frac{3}{2}(x^2+y^2) \leq 3$.

Минимальное значение достигается при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, а максимальное – при $x = y = 1$.

Решение 2. Сделаем замену $x = r \cos t, y = r \sin t, 0 \leq r, 0 \leq t < 2\pi$, тогда неравенство $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ равносильно тому, что $1 \leq r \leq \sqrt{2}$. Перепишем $x^2 + xy + y^2 = r^2(1 + \sin t \cdot \cos t) = r^2(1 + \frac{1}{2} \sin 2t)$. Ввиду очевидного неравенства $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2t \leq \frac{1}{2}$, последнее выражение не меньше $\frac{1}{2}r^2 \geq \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, и не больше $\frac{3}{2}r^2 \leq \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$.

Критерии оценивания. Доказана верхняя оценка $x^2 + xy + y^2 \leq 3$: 3 балла.

Доказана нижняя оценка $x^2 + xy + y^2 \geq \frac{1}{2}$: 3 балла. Не приведены примеры,

когда они достигаются: минус 1 балл по каждой. Угаданы верные верхняя и нижняя границы и приведены примеры их достижимости: 1 балл.