Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2025-26 гг

Любое верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

9 класс

9.1. Пусть x, y - действительные числа такие, что $x^2 + x \leq y$. Докажите, что тогда $y^2 + y \geq x$.

Доказательство. Предположим противное, тогда $y^2 + y < x$. Сложим это неравенство с неравенством из условия, получим $x^2 + y^2 + x + y < y + x$, откуда $x^2 + y^2 < 0$ – противоречие.

Критерии проверки. (●) При предположении противного записано нестрогое неравенство $y^2 + y \leq x$, а потом по умолчанию при сложении использовано, как строгое: минус 3 балла.

9.2. В равнобедренной трапеции *ABCD* с основаниями *AD*>*BC* точка *E* – основание перпендикуляра, опущенного из вершины *B* на основание *AD*, а *M* – середина диагонали *BD*. Докажите, что отрезок *EM* параллелен диагонали *AC*.

Доказательство. Отметим на основании *AD* точку *P* такую, что *PD*=*BC*. Отрезки *BC* и *PD* равны и параллельны, поэтому четырёхугольник *PBCD* является параллелограммом, следовательно, точка *M* – середина его диагонали *BD,* совпадает с серединой его второй диагонали *PC*.

Отрезки *CD*=*AB* и *PB* равны, как противоположныее стороны параллелограмма *PBCD,* поэтому треугольник *ABP* равнобедренный, следовательно его высота *BE* является и его медианой, значит, точка *E* – середина отрезка *AP*. Следовательно, отрезок *EM* – средняя линия треугольника *APC*, поэтому он параллелен его стороне *AC*, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) Идея построения точки *P*: 1 балл. (●) Доказано, что *M* совпадает с серединой *PC*: 2 балла. (●) Доказано, что *E* - середина отрезка *AP*: 2 балла. (●) Доказано, что *EM* – средняя линия треугольника *APC*: 2 балла.

9.3. В каждой клетке прямоугольной таблицы записано некоторое натуральное число. При этом для каждой клетки число, стоящее в ней, равно общему количеству различных значений чисел в клетках, находящихся в той же строке или том же столбце (включая саму клетку), что и данная. Найдите все таблицы, обладающие этим свойством.

Ответ. Независимо от размера, это только таблицы, в каждой клетке которых записана единица.

Решение. Рассмотрим максимальное изо всех записанных в клетках таблицы чисел, обозначим его за m, и любую клетку А, в которой записано m. По условию, строка и столбец, содержащие А, содержат в совокупности ровно m различных натуральных чисел, не превосходящих m, ввиду его максимальности. Следовательно, в этих строке и столбце в совокупности записаны в точности только числа $1,2,..,m$. Рассмотрим клетку Б, содержащую число 1. По условию, все клетки строки и столбца, содержащих Б, содержат одно и то же число, равное, следовательно, 1. Клетка А содержащая m, располагается в одной строке, либо одном столбце с клеткой Б, содержащей 1, поэтому $m = 1$, и во всех клетках таблицы записаны единицы.

Критерии проверки. (●) Доказано, что в строке и столбце, проходящих через А, записаны в точности только числа $1,2,..,m$: 3 балла. (●) Рассмотрена клетка Б с 1 и доказано, что все клетки строки и столбца, содержащих эту клетку, содержат только 1: 2 балла. (●) Доказано, что $m = 1$: 1 балл (●) Доказано, что все остальные клетки таблицы должны содержать 1: 1 балл.

(●) Доказано, что в таблице есть единица, - 3 балла.

(●) Доказано, что, если есть единица, вся таблица заполнена единицами, - 4 балла.

(●) При неправильно понятых условиях доказано, что в таблице есть единица, - 1 балл, ибо рассуждения аналогичные тем, что при правильном понимании условий.

9.4. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что $p^3 + p = q^2 + q$.

Ответ. $p = 3, q = 5$.

Решение. Перепишем уравнение в виде: $p(p^2 + 1) = q(q + 1)$. Очевидно, что p и q различны, а, значит, взаимно просты, следовательно p делит $q + 1$, откуда $q = k \cdot p - 1$ для некоторого натурального числа k. Подставим это выражение в уравнение, получим квадратное уравнение $p^2 - k^2 p + k + 1 = 0$ относительно p. Из него находим $p = \frac{k^2 \pm \sqrt{k^4 - 4k - 4}}{2}$ – целое число, в таком случае дискриминант уравнения $k^4 - 4k - 4$ должен быть точным квадратом. Ближайший к точному квадрату $k^4 = (k^2)^2$ меньший точный квадрат равен $k^4 - 2k^2 + 1 = (k^2 - 1)^2$ поэтому должно выполняться неравенство $2k^2 - 1 \leq 4k + 4$, то есть $2k^2 - 4k - 5 \leq 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k - \frac{5}{2} \leq 0$. Отсюда $k \leq 1 + \sqrt{\frac{7}{2}}$, то есть $k = 1,2$. В случае $k = 1$ дискриминант меньше 0, а вот случай $k = 2$ даёт $p = 3$ и $q = 5$. Эта пара и является единственным решением уравнения.

Критерии проверки. (●) Только приведён верный ответ: 1 балл. (●) Доказано, что $q = k \cdot p - 1$: 2 балла. (●) Уравнение рассмотрено как квадратное относительно p и найден дискриминант: 1 балл. (●) Доказано, что $k = 1{,}2$: 2 балла. (●) Верный ответ: 1 балл.

9.5. В группе 20 учащихся, каждый из которых дружит ровно с тремя другими. Некоторые пятеро из них 1 марта купили билет на концерт 1 апреля. Дальше в каждый следующий день, начиная со 2 марта, ровно один из тех, кто ещё не купил билет, но, как минимум двое из его друзей уже купили, тоже покупает билет. а) Может ли случиться так, что в итоге все учащиеся купят билет?

б) Пусть дополнительно известно, что, если разбить всю группу произвольным образом на две подгруппы, то всегда найдутся двое дружащих между собой учащихся из разных подгрупп. Найдите минимальное n такое, что при любой схеме знакомств в группе, и любом выборе n купивших билет 1 марта, в итоге описанного выше процесса все учащиеся группы купят билет на концерт.

Ответ. а) Нет, б) $n = 18$.

Решение. а) Рассмотрим множество пар друзей (Р-пары), в которых один из них купил билет, а второй – нет, 1 марта их не больше $5 \cdot 3$ =15. В очередной день, если покупает билет учащийся, у которого все три друга уже с билетом, количество Р-пар уменьшается на 3. Если покупает билет учащийся А, у которого ровно два друга Б и В уже с билетом, а Г – нет, то количество Р-пар уменьшается на 1: пропадают пары АБ и АВ, но появляется пара АГ. Следовательно, если процесс не остановится раньше, то через 14 дней, 15 марта, останется не более 15-14=1 - одной Р-пары, и процесс на этом остановится. Обилеченными будут всегда не более 5+14=19 учащихся, то есть не все.

б) Если 1 марта обилечены не меньше 18 учащихся, то не обилечены всего не более двух. Если таковой всего один, у него три обилеченных друга и 2 марта он тоже купит билет. Если их два, то они либо не дружат и у каждого по три обилеченных друга, либо они дружат, тогда у каждого по два обилеченных друга. В любом случае, 2 марта они тоже купят билеты.

Осталось построить пример схемы дружб между 20 учащимися и указать 17 обилеченных из них так, чтобы каждый из трёх оставшихся имел ровно одного обилеченного друга. Всё изобразим в виде графа, где вершины – учащиеся, а рёбра – дружбы. Рассмотрим сначала два правильных семиугольника, один из которых расположен внутри другого, соединим рёбрами вершины первого и второго с одинаковыми номерами, получится кольцо, составленное из 7 четырёхугольников (это рёбра и грани семиугольной призмы). Внутри меньшего семиугольника возьмём треугольник, и соединим его первую вершину А с серединой первой стороны внутреннего семиугольника, вторую вершину В – с серединой третьей стороны семиугольника и третью вершину С – с серединой пятой его стороны. Обилетим всех, кроме А, В и С, тогда у каждого из A, B и C только по одному обилеченному другу и процесс дальнейшего обилечивания даже не начнётся. Если 1 марта обилечены некоторые $n \leq 17$ учащихся, кроме A, B и C, в итоге ни один из A, B и C обилечен не будет. В противном случае в момент, когда обилетится первый из них, он не может иметь больше одного обилеченного друга – противоречие.

Это только один из множества возможных примеров такого рода.

Критерии проверки. (●) Доказательство пункта а): 3 балла. (●) Доказательство того, что $n \leq 18$: 1 балл. (●) Любой верный пример с обоснованием для $n = 17$: 3 балла. Если пример не связен: 1 балл.

а)Доказательство в целом верное, но вместо неравенств использованы равенства (например, утверждается, что первые пять купивших билеты имеют ровно 15 друзей среди оставшихся, или что при покупке билета количество дружб между людьми с билетами и без них уменьшается ровно на 1) — снимаем 1 балл.
Не учтено, что у учащегося, покупающего билет, могут быть и двое, и трое друзей, купивших билет (два случая) — снимаем 1 балл (не суммируется с предыдущим).
Разбор частных случаев графа дружб — 0 баллов.

б)Утверждение, что контрпример для n=17 можно построить, взяв цикл из трех попарно дружащих не купивших билет учащихся, без построения оставшейся части графа дружб — 0 баллов.
Любая ошибка в контрпримере для n=17 — снимаем 2 или 3 балла.

Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2025-26 гг

Любое верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

10 класс

10.1. На доске 8 на 8 произвольным образом отмечены 12 клеток. Докажите, что всегда можно выбрать некоторые 4 горизонтали и некоторые 4 вертикали, содержащие все отмеченные клетки.

Доказательство. Обозначим за $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_8$ количество отмеченных клеток в 8 вертикалях доски, по условию $a_1 + a_2 + \cdots, +a_8 = 12$. Если $a_5 \geq 2$, то $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 8$, а $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 4$. В этом случае можно взять 4 максимальных вертикали, содержащие соответственно a_5, a_6, a_7, a_8 отмеченных клеток и те, не более, чем 4 горизонтали, содержащие остальные $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 4$ отмеченные клетки.

Если $a_5 \le 1$, то $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le 1$, поэтому $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \le 4$ и $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \ge 12 - 4 = 8$ и снова можно повторить рассуждение предыдущего случая.

Критерии проверки. (●) Только доказано, что 4 максимальных вертикали содержан не меньше 8 отмеченных клеток: 4 балла. (●) Замечено, что для оставшихся ≤ 4 клеток достаточно четырёх горизонталей: 3 балла. Если первый пункт не доказан, то только за второй пункт 3 балла на ставятся.

10.2. Сумма некоторого составного натурального числа и его максимального делителя, отличного от 1 и самого числа, равна p^k для некоторого простого числа p и $k \ge 2$. Найти все возможные значения p.

Ответ. $p = 3$.

Решение. Обозначим за n исходное натуральное число из условия, тогда для его максимального собственного делителя d имеем $n = dq$, где q – минимальный простой делитель числа n. Из условия следует равенство $d(1+q) = p^k$. Число d делит p^k, поэтому d является некоторой степенью p и делится на p, следовательно, p −простой делитель n. Из минимальности q получаем $p \ge q$. Если $p = q$, то $1 + p$ должно быть степенью p, что невозможно, поэтому $p \ge q+1$. В таком случае число $1 + q$ может быть степенью p только при $p = q+1$, поэтому одно из простых чисел p и q чётно, а другое – нечётно. Следовательно, $p = 3$ и $q=2$. Примером является $n = 6, d = 3$, тогда $n + d = 9 = 3^2 = p^2$.

Критерии проверки. (●) Показано, что p −простой делитель n: 2 балла. (●) Показано, что $p \ge q+1$: 1 балл. (●) Показано, что $p = q+1$: 1 балл. (●) Доказано, что $p = 3$ и $q=2$: 1 балл. (●) Пример $p = 3$ и $q=2$, $n = 6, d = 3$: 2 балла. (●) -1 балл за включение p=2 в ответ из-за арифметической ошибки при проверке существования x. (●) -3 балла за включение p=2 в ответ из-за отсутствия проверки существования x.

10.3. Отрезок разделен 19 точками на 20 частей. Каждый из 20 отрезков разбиения нужно сделать стрелкой так, чтобы стрелок, указывающих налево, было столько же, сколько указывающих направо, и для каждой стрелки количество других стрелок, на которые она указывает, отличалось от аналогичного количества у других стрелок. Например, вот в такой расстановке 6 стрелок →←←→←→ они показывают соответственно, на 5,1,2,2,4,0 других стрелок. Найти количество всех расстановок 20 стрелок, удовлетворяющих условию.

Ответ. Количество хороших расстановок равно $C_{10}^5 = 252$.

Решение. Будем называть k -ой k - ую слева направо стрелку, $k = 1,2,\ldots,20$. Произвольная стрелка может указывать на 0,1,2,…,19 других, всего 20 возможных значений, и все эти числа должны различаться у всех стрелок, поэтому числа, на которые указывают последовательно первая, вторая, …, двадцатая стрелки - это некоторая перестановка чисел 0,1,2,…,19. Заметим, что числа 0 и 19 могут стоять только на крайних местах этой перестановки, так как не указывать ни на одну или указывать сразу на все остальные стрелки могут только крайние стрелки. При этом возможны два варианта: первая и 20 – ая стрелки обе указывают налево, или наоборот, первая и 20 – ая стрелки обе указывают направо. Далее берём числа 1 и 18, они могут стоять в перестановке только на местах 2 и 19, перед крайними с соответствующих концов, причём снова, обе стрелки либо одновременно указывают направо, либо одновременно указывают налево. Продолжая так далее, мы разобьём все стрелки на 10 пар: 1-ая и 20-ая, 2-ая и 19-ая, 3-я и 18-ая, …, 10-я и 11-я, стрелки в парах согласованно указывают в любую из двух возможных сторон, в k -ой паре одна стрелка указывает на $k-1$ стрелок, а вторая $-$ на $20-k$ стрелок, $k = 1,2,\ldots,20.$. Кроме того, по условию, налево и направо указывают по 10 стрелок, поэтому ровно в пяти парах стрелки указывают направо, и в пяти – налево. Таким образом, общее число всех расстановок 20 стрелок, удовлетворяющих условию, равно количеству выборок пяти из десяти пар, указывающих направо, то есть $C_{10}^5 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$=$3\cdot 2\cdot 7\cdot 6 = 252$.

Критерии проверки. (●) Замечено, что количества стрелок, на которые указывают другие стрелки, это перестановка чисел 0,1,2,…,19: 1 балл. (●) Замечено, что числа 0 и 19 могут стоять только на крайних местах этой перестановки и как ориентированы там стрелки: ещё 1 балл. (●) Указано разбиение на пары: 1 балл. (●) Указана одинаковая ориентация стрелок в парах: 1 балл. (●) Подсчитано число возможных ориентаций всех стрелок при условии того, что налево и направо указывают по 10 стрелок: 3 балла.

10.4. В остроугольном треугольнике ABC обозначим за I центр вписанной в него окружности, а за P - точку пересечения прямой, зеркально симметричной прямой AB относительно биссектрисы CI и прямой, зеркально симметричной прямой BC относительно биссектрисы AI. Докажите, что прямая PI перпендикулярна стороне AC.

Доказательство. 1. Обозначим за a, b, c длины сторон BC, AC и AB соответственно, а за M - точку касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Хорошо известно, что $AM = \frac{b+c-a}{2}, CM = \frac{a+b-c}{2}$.

2. Рассмотрим образ треугольника ABC при зеркальном отражении относительно биссектрисы CI, обозначим за A_1 образ его вершины B. Точка A_1 лежит на прямой AC на расстоянии a от вершины C. После зеркального

отражения прямой AB относительно биссектрисы CI её образ проходит через точку A_1 под углом $\angle CA_1P = \angle CBA$ к стороне AC. При этом $CM < CA_1 \Leftrightarrow \frac{a+b-c}{2} < a \Leftrightarrow b < a + c$, поэтому точка M лежит между точками C и A_1. Следовательно, $MA_1 = CA_1 - CM = \frac{a+c-b}{2}$.

3. Аналогично, после зеркального отражения прямой BC относительно биссектрисы AI её образ проходит через точку C_1 – образ вершины B - на расстоянии c от вершины A под углом $\angle AC_1P = \angle ABC = \angle CBA$ к стороне AC. При этом $AM < AC_1 \Leftrightarrow \frac{b+c-a}{2} < c \Leftrightarrow b < a + c$, поэтому точка M лежит между точками A и C_1. Следовательно, $MC_1 = AC_1 - AM = \frac{a+c-b}{2} = MA_1$.

4. Таким образом, мы доказали, что $MA_1 = MC_1$, а углы $\angle C_1A_1P = \angle CA_1P = \angle AC_1P = \angle A_1C_1P$, поэтому треугольник A_1PC_1 – равнобедренный с серединой основания M. Тогда прямая PM является медианой и высотой из вершины P и перпендикулярна основанию A_1C_1. Радиус MI вписанной окружности треугольника ABC тоже проходит через M и перпендикулярен A_1C_1, поэтому точка M лежит на прямой PI. Следовательно, прямая PI совпадает с перпендикуляром к стороне AC в точке M, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) Чёткая и верная формулировка без доказательства того, что $AM = \frac{b+c-a}{2}, CM = \frac{a+b-c}{2}$: 1 балл. (●) То же с доказательством: 2 балла. (●) Доказательство того, что точка M лежит между точками C и A_1, и между точками A и C_1: 1 балл. (●) Доказательство равнобедренности треугольника A_1PC_1 с серединой основания M: 2 балла. (●) Вывод отсюда того, что прямая PI совпадает с перпендикуляром к стороне AC в точке M: 2 балла.

10.5. Найти все тройки действительных чисел (a, b, c), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} a(b^2 + c) = c(c + ab), \\ b(c^2 + a) = a(a + bc), \\ c(a^2 + b) = b(b + ca). \end{cases}$

Ответ. $a = b = c$.

Решение. 1. Сначала представим уравнения системы в следующем виде
$ab(b - c) = c(c - a), bc(c - a) = a(a - b), ca(a - b) = b(b - c)$.

2. Предположим, что одно из чисел равно 0, можно считать, $a = 0$. Тогда из первого уравнения следует $c^2 = 0 \Leftrightarrow c = 0$, подставим в третье уравнение, получим $b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 0$. В итоге получим решение $a = b = c = 0$. Далее считаем все числа a, b, c ненулевыми.

3. Предположим, что два из чисел равны, можно считать, $a = b$. Тогда из второго уравнения $bc(c-a) = 0 \Leftrightarrow c = a$. В итоге получим решение $a = b = c$. Далее считаем все числа a, b, c ненулевыми и различными.

4. Перемножим все уравнения, получим $(abc)^2(b-c)(c-a)(a-b) = abc(c-a)(a-b)(b-c)$, сокращаем на $abc(c-a)(a-b)(b-c) \neq 0$, получаем $abc = 1$. Отсюда следует, что, либо все числа a, b, c положительны, либо среди них одно положительно, а два – отрицательны.

5. Предположим, что среди чисел a, b, c одно положительно, а два – отрицательны, можно считать $a > 0 > b, c$. Тогда в уравнении $b(c^2 + a) = a(a + bc)$ левая часть отрицательна, а правая – положительна – противоречие. Далее считаем все числа a, b, c положительными и различными.

6. Ввиду цикличности системы, нам достаточно рассмотреть два различных случая: $a > b > c>0$ и $a > c > b > 0$. В первом из них $a(a + bc) = b(c^2 + a) < a(bc + a)$ - противоречие. Во втором случае $b(b + ca) = c(a^2 + b) > b(b + ca)$ – тоже противоречие.

В итоге, получается только одна бесконечная серия решений $a = b = c$.

Критерии проверки. 1. Ответ с проверкой или без: 0 баллов.

2. Доказано, что если в решении одна из неизвестных равна нулю, то и две другие тоже равны нулю: 1 балл.

3. Доказано, что если значения двух неизвестных в решении равны, то значения всех трех неизвестных равны: 1 балл.

4. Получено равенство $(abc)^2(b-c)(c-a)(a-b) = abc(c-a)(a-b)(b-c)$ (возможны ``аналоги" типа $(b-c)(c-a)(a-b) = abc(c-a)(a-b)(b-c)$ или $abc = 1$ даже если в работе участник забыл, что сокращать можно только на ненулевые множители: 1 балл.

5. Доказано, что нет решений, в которых ровно одна из неизвестных больше нуля: 1 балл.

6. Доказано, что нет решений, в которых все три неизвестные положительны и различны, за каждый из случаев $a > b > c>0$ и $a > c > b > 0$ (или их аналоги): по 1 баллу.

7. Ошибка в преобразованиях, не повлиявшая на ход решения в целом: снимаем -1 балл.

Баллы за все пункты суммируются друг с другом.

Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2025-26 гг

Любое верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

11 класс

ПЕРВЫЙ ВАРИАНТ

11.1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют уравнениям $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 2$. Найти все возможные значения выражения $xy + yz + zx$.
Ответ. -2.

Решение. Перепишем первое уравнение как $x^2 - yz = y^2 - zx \Leftrightarrow (x - y)(x + y + z) = 0$, и второе, как $y^2 - zx = z^2 - xy \Leftrightarrow (y - z)(x + y + z) = 0$. Если $x + y + z \neq 0$, то $x = y = z$, но в таком случае $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 0$, что противоречит условию. Следовательно, $x + y + z = 0$, тогда $z = -x - y$. Подставим это в уравнение $z^2 - xy = 2 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = 2$. С другой стороны, $xy + yz + zx = xy + z(x + y) = xy - (x + y)^2 = -(x^2 + xy + y^2) = -2$. Достигается это значение, например, при $x = \sqrt{2}, y = 0, z = -\sqrt{2}$.
Критерии проверки. (●) Угадан верный ответ с соответствующим примером: 1 балл. (●) Доказано, что $x + y + z = 0$: 3 балла. (●) Доказано, что $x^2 + xy + y^2 = 2$: ещё 1 балл. (●) отсюда найдено $xy + yz + zx = -2$: 2 балла. (●) Не приведён пример, когда достигается ответ $xy + yz + zx = -2$: минус 2 балла.

ВТОРОЙ ВАРИАНТ

11.1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют уравнениям $x^2 + yz = y^2 + zx = z^2 + xy = 2$. Найти все возможные значения выражения $xy + yz + zx$.
Ответ. 2 и 3.

Решение. Перепишем первое уравнение, как $x^2 + yz = y^2 + zx \Leftrightarrow (x - y)(x + y - z) = 0$, второе, как $y^2 + zx = z^2 + xy \Leftrightarrow (y - z)(-x + y + z) = 0$, и третье, как $x^2 + yz = z^2 + xy \Leftrightarrow (x - z)(x - y + z) = 0$. Если все числа x, y, z различны, то первые скобки в каждом произведении не равны нулю, значит, равны нулю все вторые скобки, то есть $x + y - z = 0, -x + y + z = 0, x - y + z = 0$, складывая эти уравнения попарно, получим $x = y = z = 0$, противоречие.

Пусть $x = y$, тогда из второго и третьего равенств $zx = z^2 \Leftrightarrow z(x - z) = 0$, то есть либо $x = y = z$, либо $z = 0$. Подставляя в исходные уравнения, получим в первом случае, $x = y = z = \pm 1$, во втором $x = y = \pm\sqrt{2}, z = 0$. В первом случае $xy + yz + zx = 3$, во втором $xy + yz + zx = 2$. Аналогично рассматриваются случаи $x = z$ и $x = z$, дающие тот же ответ.

Критерии проверки. (●) Угаданы верные ответы с соответствующими примерами: по 1 баллу за каждый. (●) При решении системы упущено одно из значений $xy + yz + zx$: 4 балла.

11.2. Пусть $a_n, n = 1,2, ..$ - бесконечная последовательность положительных действительных чисел таких, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n, n = 1,2, ...$ Докажите, что $a_n \geq \frac{1}{n}$ для всех натуральных n.

Доказательство. Индукция по n. База индукции: при $n = 1$ имеем $a_1 = 1 \geq \frac{1}{1}$ -верно.

Шаг индукции. Пусть $a_n \geq \frac{1}{n}$, тогда $a_{n+1}^2 + a_{n+1} - a_n = 0$, отсюда положительный корень $a_{n+1} = \frac{-1+\sqrt{1+4a_n}}{2}$, нужно убедиться в том, что $\frac{-1+\sqrt{1+4a_n}}{2} \geq \frac{1}{n+1}$. Ввиду того, что, по предположению индукции, $a_n \geq \frac{1}{n}$, требуемое неравенство следует из более сильного $\frac{-1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{2} \geq \frac{1}{n+1}$. Последнее равносильно неравенству $\frac{n+4}{n} \geq \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^2 \Leftrightarrow (n+4)(n+1)^2 \geq n(n+3)^2 \Leftrightarrow n^3 + 6n^2 + 9n + 4 \geq n^3 + 6n^2 + 9n$, которое, очевидно, верно.

Критерии проверки. (●) Замечено, что достаточно доказать более сильное неравенство $\frac{-1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{2} \geq \frac{1}{n+1}$: 3 балла. (●) Если отсутствует замечание о том, что неравенство $\frac{-1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{2} \geq \frac{1}{n+1}$ более сильное, чем $\frac{-1+\sqrt{1+4a_n}}{2} \geq \frac{1}{n+1}$: снимем 3 балла. (●) При доказательстве от обратного и отсутствии базы $n = 1$: минус 1 балл. (●) Получено промежуточное утверждение с верным обоснованием - 3 балла. (●) Доказательство утверждения, которое нужно доказать, без указания равносильности, засчитывалось как логическая ошибка.

11.3. Докажите, что любой неравнобедренный треугольник можно разбить на три треугольника, радиусы описанных окружностей которых равны.

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC.

1. Пусть сначала ABC – остроугольный, обозначим за H точку пересечения его высот, в этом случае H лежит внутри треугольника. Хорошо известно, что угол, скажем, AHC равен 180-ABC, поэтому точка, симметричная H относительно стороны AC, лежит на описанной окружности (ABC) треугольника ABC. Отсюда следует, что окружность, симметричная (ABC) относительно AC, является описанной окружностью треугольника AHC (Достаточно широко известный факт, за его недоказательство в решении снимаем всего 1 балл). Аналогично рассуждая для сторон AB и BC, получим, что описанные окружности треугольников AHB, BHC и AHC получаются из (ABC) симметрией относительно сторон AB, BC и AC соответственно и имеют одинаковые радиусы описанных окружностей, равные радиусу описанной

окружности треугольника ABC, что даёт требуемое в условии разбиение в случае остроугольного ABC.

Заметим, что в случае остроугольного треугольника его не равнобедренность неважна. Она существенна только для прямо- и тупоугольного треугольников.

2. Пусть ABC – тупоугольный не равнобедренный, считаем тупым угол B и, без ограничения общности, что угол C больше угла A. Восстановим серединный перпендикуляр к стороне AB, пусть P - точка его пересечения со стороной AC, треугольник APB – равнобедренный.

Рассмотрим описанную окружность треугольника PBC, угол между её касательной в точке B и хордой PB равен углу C и больше угла ABP, равного A. Кроме того, угол A острый и поэтому меньше тупого угла 180-C, поэтому вершина A лежит вне описанной окружности треугольника PBC. Следовательно, эта окружность пересекает сторону AB в некоторой внутренней точке K, отличной от A и B. Четырёхугольник PKBC вписанный, поэтому описанная окружность треугольника PBC является и описанной окружностью треугольника PBK. Осталось заметить, что в силу равнобедренности треугольника APB радиусы описанных окружностей треугольников APK и PBK равны: $\frac{AP}{2\sin AKP} = \frac{BP}{2\sin BKP} = \frac{AP}{2\sin(180 - AKP)}$. Таким образом, треугольники BPC, APK и PBK образуют требуемое в условии разбиение для тупоугольного треугольника ABC.

Есть ещё один подходящий вариант расположения точки K на стороне AB – когда угол BKP равен углу C, а не 180-C, как в рассмотренной выше конструкции, тогда радиусы описанных окружностей треугольников PBC и PBK равны: $\frac{BP}{2\sin ACB} = \frac{BP}{2\sin BKP} = \frac{AP}{2\sin ACB}$.

Рассуждение пункта 2 проходит и в остроугольном неравнобедренном треугольнике, если считать величины углов в порядке по возрастанию A, B, C, поэтому конструкция пункта 2 является универсальной для любого не равнобедренного треугольника.

3. Есть ещё один способ искомого разбиения. Снова считаем, что величины углов в порядке идут по возрастанию A, B, C. Отметим на стороне AB точку P такую, что AP=AC, треугольник APC – равнобедренный. На отрезке PC отметим точку K такую, что AK=B. Тогда радиусы описанных окружностей треугольников AKC, ABK и BCK равны: : $\frac{AK}{2\sin AKC} = \frac{AK}{2\sin APK} = \frac{BC}{2\sin(180 - APK)}$.

Критерии проверки. (●) Решение содержит только случай остроугольного треугольника ABC в духе пункта 1: 3 балла. (●) Полное решение в духе конструкции пункта 2: 7 баллов, (●) если отсутствует точное объяснение того, что точка K лежит на стороне AB: минус 2 балла. (●) нет обоснования равенства радиусов описанных окружностей треугольников PBC и PBK: минус 1 балл. (●) нет обоснования равенства радиусов описанных окружностей треугольников APK и PBK: минус 2 балла.

11.4. Множество X состоит из десяти различных натуральных чисел таких, что для произвольного $k = 2, \dots, 10$ сумма любых k из этих чисел делится на k. Найти минимальное значение, которое может принимать максимальное из этих чисел.

Ответ. 22681.

Решение. Обозначим числа множества X за $x_1 < x_2 < \cdots < x_{10}$. Докажем, что в условиях задачи разность любых двух соседних чисел делится на все натуральные числа от 1 до 9. Рассмотрим произвольные соседние числа $x_i, x_{i+1}, i = 1,2, \dots, 9$ и натуральное число k из интервала от 2 до 9, докажем, что разность $x_{i+1} - x_i$ делится на k. Рассмотрим два $k-$ элементных подмножества A и B множества X, различающихся ровно одним элементом, первое из них содержит x_i, но не содержит x_{i+1}, а второе содержит x_{i+1}, но не содержит x_i. Для этого можно взять в качестве A любые $k - 1 \leq 8$ изо всех 8 чисел множества, кроме x_i, x_{i+1}, и x_i, а в качестве B – те же $k - 1$ чисел и x_{i+1}.

Разность сумм чисел в B и A как раз равна $x_{i+1} - x_i$ и делится на k .

Делимость на каждое из чисел 2,3,...,9 равносильно делимости на их наименьшее общее кратное, равное $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Для дальнейшего отметим, что полученное число делится и на 10. Следовательно, каждая разность $x_{i+1} - x_i$ делится на 2520, поэтому не меньше 2520 для всех $i = 1,2, \dots, 9$. Значит, $x_{10} = x_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \cdots + x_{i+10} - x_9 \geq 1 + 9 \cdot 2520 = 22681$. Соответствующий пример множества X выглядит так – это арифметическая прогрессия $x_i = 1 + 2520 \cdot (i - 1), i = 1,2, \dots, 10$. Сумма любых $k = 1,2, \dots, 10$ из этих чисел равна k плюс число, делящееся на 2520, поэтому делится на k.

Критерии проверки. (●) Приведён правильный пример множества X с верным ответом и обоснованием его верности: 3 балла. (●) Пример приведён без обоснования: 2 балла. (●) Доказана оценка $x_{10} \geq 1 + 9 \cdot 2520 = 22681$: 4 балла.

11.5. В таблице размера 8 на 8 клеток отмечены некоторые 8 клеток так, что в каждой строке и каждом столбце отмечена ровно одна клетка. Кроме того, в некоторых 8 клетках таблицы расставлены 8 фишек так, что в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна фишка. За один ход можно переставить одну из фишек в любую соседнюю с ней по стороне пустую клетку. Найти минимальное N такое, что при любых допустимых расстановке 8 фишек и отметке 8 клеток в таблице можно все фишки переставить на отмеченные клетки не более, чем за N ходов. Некоторые фишки могут изначально стоять в отмеченных клетках.

Ответ. N=32.

Решение. Покажем, что N не меньше 32. **Пример 1.** Занумеруем клетки таблицы как в шахматах, вертикали - слева направо латинскими буквами от *a* до *h*, горизонтали –снизу вверх цифрами от 1 до 8. Отметим все клетки главной диагонали таблицы из нижнего левого угла в правый верхний: *a1, b2,…,h8*, а фишки расставим на клетках побочной диагонали таблицы из левого верхнего угла в правый нижний: *a8,b7,..,g2,h1*. Несложно убедиться в том, что для того, чтобы попасть на главную диагональ, фишкам с полей *a8* и *h1* потребуется не менее 7 ходов, фишкам с полей *b7* и *g2* – не менее 5 ходов, фишкам с полей *c6* и *f3* – не менее 3 ходов, фишкам с полей *d5* и *e4*– не менее 1 хода. Итого, чтобы передвинуть все фишки на отмеченные поля в данной конфигурации потребуется не менее 7+7+5+5+3+3+1+1=32 хода. Подсчёт сделан даже без учёта возможных помех со стороны других фишек при движении. **Пример 2.** Отметим все клетки главной диагонали таблицы из нижнего левого угла в правый верхний: *a1, b2,…,h8*, а фишки расставим на клетках *a5, b6,c7,d8,e1,f2,g3,h4.* В этом случае для того, чтобы попасть на главную диагональ, каждой фишке нужно сделать не меньше 4 ходов, а всем вместе 32 хода. Все приведённые участниками примеры были только как в примерах 1 и 2.

Теперь докажем, что 32 ходов всегда хватит, причём достаточно просто переставить каждую фишку в отмеченную клетку, расположенную с ней в одном столбце. Фишки, уже стоящие в отмеченных клетках, мы не трогаем, и они не влияют на оценку потому, что в столбцах и строках, их содержащих, нет других фишек и отмеченных клеток. Каждую из остальных фишек переставим последовательными ходами в отмеченную клетку того столбца, в котором она стоит. **Способ 1.** Заметим, что при этом линию сетки, разделяющую первую и вторую горизонтали, могли пересечь не более двух фишек – уходящая с первой строки и приходящая на неё. Аналогично, линию сетки, разделяющую вторую и третью строки, могли пересечь не более четырёх фишек – уходящие с первой и второй строк и приходящие на первую и вторую строки. Продолжая так далее, получим, что следующие горизонтальные линии сетки могли соответственно пересечь не более 6, 8, 6, 4, 2 фишек. Каждое пересечение горизонтальных линий сетки - это ход некоторой фишки, и каждый ход в нашем алгоритме – это пересечение горизонтальных линий сетки, поэтому всего при любом начальном расположении фишек и клеток будет сделано не более 2+4+6+8+6+4+2=32 ходов, и все фишки окажутся на отмеченных клетках.

Способ 2. Обозначим за a_i и b_i номер фишки и номер отмеченной клетки в $i-$ом столбце, $i = 1,2, \ldots ,8$ соответственно. Тогда количество ходов только по вертикали, требующихся для постановки фишек на отмеченные клетки, не превосходит максимума суммы $|a_1 - b_1| + \cdots + |a_8 - b_8|$. Среди чисел a_i и b_i, $i = 1,2, \ldots ,8$ по одному разу встречаются все числа от 1 до 8. При раскрытии модулей получатся 8 из этих чисел со знаком плюс и восемь из этих чисел со знаком минус. Сумма восьми чисел со знаком плюс не превосходит суммы восьми максимальных чисел из множества 1,1,…,7,7,8,8, то есть 8+8+7+7+6+6+5+5=52, а сумма восьми чисел со знаком минус не меньше суммы восьми минимальных чисел из множества 1,1,…,7,7,8,8, то есть 1+1+2+2+3+3+4+4=20. Следовательно, количество ходов только по вертикали, требующихся для постановки фишек на отмеченные клетки, не превосходит разность этих сумм, не превосходящую 52-20=32.
Заметим, что для многих расположений клеток и фишек минимальное число ходов достигается только при использовании и горизонтальных и вертикальных ходов, правда, оно при этом меньше 32.
Ответ. N=32.

Критерии проверки. (●) Приведение примера того, что N не меньше 32, с полным обоснованием: 3 балла. (●) Верный пример с ответом, но без обоснования: 1 балл. (●) Верный пример с ответом, в обосновании которого есть недостатки: скажем, прямо стрелками на рисунке или текстом указано, что рассматриваются только вертикальные, или только горизонтальные ходы. В примере этого делать нельзя, это ограничивает общность рассмотрения: минус 1 балл.
(●) Доказательство того, что 32 ходов достаточно: 4 балла. (●) Только явная и чёткая формулировка верного алгоритма для достижения не более, чем 32 ходов (ходим только по горизонтали или только по вертикали), но без обоснования: 1 балл. (●) **Очень распостранённая логическая ошибка** (не менее 100 работ) - написано примерно следующее: только 2 фишки могут сделать ход длины 7, исключаем две содержащие их строки (столбцы), из оставшихся только две фишки могут сделать ход длины 5, исключаем их строки и т.д., тогда всего фишки смогут сделать не более $2(7+5+3+1) = 32$ хода и оценка «доказана». Это попытка реализации «жадного алгоритма», когда на каждом шагу выбирается оптимальное именно для этого шага решение, а оценка сложности работы «жадного алгоритма» считается оценкой сложности ВСЕЙ задачи. Но хорошо известно, что этот алгоритм не всегда оптимален. **Основная проблема** в том, что, если нет двух строк, где расстояния от фишек до клеток равны 7, то утверждение о том, что из оставшихся только две фишки могут сделать ход длины 5, уже неверно. В примере 2 к данной задаче, когда отмеченные клетки идут по главной диагонали, а 4 фишки стоят выше неё на 2 клетки и 4 фишки ниже неё на 2 клетки, каждая фишка делает по 4 хода, и работает не жадный алгоритм. А почему тогда нет чего-то ещё более оптимального? ПОЭТОМУ попытка ТАКОГО и РОДСТВЕННЫХ ему доказательств, что 32 ходов достаточно,

никак не оценивается. Большая просьба - честно осознать, что ваш подход основан на этой схеме (если это так) и подобные попытки не пытаться апеллировать.