# Решения заданий первого этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике

## 7 класс

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**7.1.** Лёшка записал число, а потом заменил в нём одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные – разными. У него получилось слово НОВОСИБИРСК. Могло ли исходное число делиться на 3?
**Ответ:** Да, могло.
**Решение:** Например,10203454638.
**Критерии:** Любой правильный пример без проверки – 7 балл.

**7.2.** Есть сломанные весы, которые в своих показаниях ошибаются не больше, чем на 500г. Когда Алексей взвесил дыню, они показали 4кг. Когда взвесил арбуз – 3 кг. Когда взвесил и дыню, и арбуз вместе – 8,5кг. Сколько на самом деле весят дыня и арбуз по отдельности? Весы могут ошибаться каждый раз по-разному.
**Ответ:** Дыня весит 4,5кг, а арбуз – 3,5кг
**Решение:** Из условия следует, что дыня весит не более 4,5 кг. Арбуз весит не более 3,5 кг. Значит, вместе они весят не более 8 кг. С другой стороны, из второго условия следует, что они весят вместе не менее 8 кг. Значит, они весят вместе ровно 8 кг. Этот вес достигается только при крайних значениях весов дыни и арбуза. Значит, дыня весит 4,5 кг, а арбуз весит 3,5 кг, так как при меньшем весе сумма не может достигать 8кг.
**Критерии:** Только ответ, ответ с проверкой – 1 балл. Верно выписаны все три оценки на веса – 2 балла. Эти баллы суммируются.

**7.3.** Данил провёл несколько прямых через одну точку. Из всех образованных углов он стал рассматривать только углы с целыми градусными мерами. Данил утверждает, что среди них углов с нечётными мерами ровно на 15 больше, чем с чётными. Может ли это быть правдой?
**Ответ:** Нет, не может.
**Решение:** Разобьём все углы на пары вертикальных друг другу. В каждой паре углы равны между собой, поэтому чётных углов чётное количество, так как их целое число пар. Аналогично, нечётных углов чётное число, поэтому разность числа чётных и нечётных углов тоже чётна, т.е. не может быть равна 15.
**Критерии:** Только ответ – 0 баллов.

**7.4.** Пароход “Раритет” после выхода из города три часа двигается с постоянной скоростью, затем час глохнет, двигаясь по течению, потом три часа двигается с той же скоростью и так далее. Если пароход начинает своё движение в городе А и идёт в город Б, то тратит на это 10 часов. Если начинает в городе Б и идёт в город А – 15. За какое время из города А в город Б можно добраться на плоту?
**Ответ:** 60 часов.
**Решение:** Обозначим скорость парохода за $U$, а скорость реки за $V$. Когда пароход идёт из Б в А, он приходит в пункт назначения как раз перед четвёртой остановкой двигателей, то есть 12 часов он плывёт со скоростью $U$-$V$ в сторону А, и три часа идёт назад со скоростью $V$ в сторону Б. Значит, расстояние между городами равно $S = 12(U\text{-}V) - 3V = 12U - 15V$ (1).
Когда пароход идёт из А в Б, он успевает дважды заглохнуть, а затем проплыть ещё два часа на своём ходу. Тогда он 8 часов плывёт со скоростью $U$+$V$ в сторону Б и 2 часа плывёт по течению со скоростью $V$ в сторону Б. Тогда расстояние равно $S = 8(U+V)+2V = 8U + 10V$ (2).
Приравнивая, получаем $12U - 15V = 8U + 10V$ или $4U = 25V$ или $(U/V) = (25/4)$. Время, которое мы потратим на путешествие на плоту, равно $S/V = 12(U/V) - 15(V/V) = 12*(25/4) - 15 = 60$ часов.

**Критерии:** Только ответ – 0 баллов. Верно составлено уравнение (1) или (2) – 1 балл (эти баллы суммируются).

**7.5.** Квадратная коробка 3 на 3 разделена на 9 ячеек. Разрешается в некоторые ячейки положить шарики (возможно, разное число в разные ячейки). Какое наименьшее число шариков нужно положить в коробку, чтобы во всех строках и столбцах коробки было разное количество шариков?

**Ответ:** 8.

**Решение:** Сложим количества шариков во всех строках и столбцах. Так как это 6 различных неотрицательных чисел, то эта сумма составляет минимум 0+1+...+5 = 15.

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 3 | 2 |

Теперь заметим, что сумма чисел по строкам равна сумме чисел по столбцам, так как эти суммы равны количеству шариков во всей коробке. Поэтому сумма шести чисел равна удвоенной сумме чисел по строкам, то есть чётна. Итого, удвоенное количество шариков в коробке больше 15, то есть самих шариков больше 7. Пример на 8 изображён рядом.

**Критерии:** только ответ – 0 баллов, только пример – 2 балла, замечено только, что сумма 6 чисел не меньше 15 – 1 балл. Только верная оценка – 3 балла.

## 8 класс

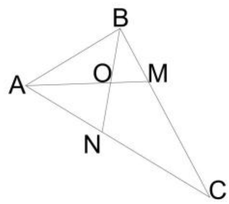
*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**8.1.** Лёшка записал число, а потом заменил в нём одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные – разными. У него получилось слово НОВОСИБИРСК. Могло ли исходное число делиться на 9?

**Ответ:** Да, могло.

**Решение:** Например, 10203454638.

**Критерии:** Любой правильный пример без проверки – 7 балл.




**8.2.** В треугольнике *ABC* на сторонах *BC* и *AC* взяты точки *M* и *N* соответственно. Отрезки *AM* и *BN* пересекаются в точке *O*. Докажите, что сумма углов *AMB* и *ANB* больше угла *AOB*.

**Решение:** Рассмотрим четырёхугольник *NOMC*. Сумма его углов равна

$$360^\circ = \angle MON + \angle ONC + \angle NCM + \angle CMO = \angle AOB + 180^\circ - \angle ANB + \angle NCM + 180^\circ - \angle AMB,$$

откуда следует $\angle ANB + \angle AMB = \angle AOB + \angle NCM$.

Так как $\angle NCM > 0$, отсюда следует искомое.

**8.3.** Найдите наибольшее шестизначное число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна сумме двух предыдущих цифр.

**Ответ:** 303369.

**Решение:** Пусть первые цифры у этого числа $a$ и $b$. Тогда третья его цифра равна $(a + b)$, четвёртая – $(a + 2b)$, пятая – $(2a + 3b)$, шестая – $(3a + 5b)$. Значит, $3a + 5b < 10$.

Если $b > 1$, то неравенство не выполнено. Если $b = 1$, то $3a < 5$, а значит $a = 1$, а само число равно 112358. Если, $b = 0$, то неравенство можно переписать $3a < 10$, откуда максимальное значение $a = 3$. Если $a < 3$, то получившееся число будет меньше, так как цифра в старшем разряде будет меньше. Тогда исходное число равно 303369. Отметим, что 303369 > 112358.

**Критерии:** Только ответ – 1 балл. Верно найдено представление всех цифр – 1 балл. Баллы складываются.

**8.4.** Пароход “Раритет” после выхода из города три часа двигается с постоянной скоростью, затем час глохнет, двигаясь по течению, потом три часа двигается с той же скоростью и так далее. Если пароход начинает своё движение в городе А и идёт в город Б, то тратит на это 10 часов. Если начинает в городе Б и идёт в город А – 15. За какое время из города А в город Б можно добраться на плоту?

**Ответ:** 60 часов.
**Решение:** Обозначим скорость парохода за $U$, а скорость реки за $V$. Когда пароход идёт из Б в А, он приходит в пункт назначения как раз перед четвёртой остановкой двигателей, то есть 12 часов он плывёт со скоростью $U$-$V$ в сторону А, и три часа идёт назад со скоростью $V$ в сторону Б. Значит, расстояние между городами равно $S = 12(U\text{-}V) - 3V = 12U - 15V$ (1).
Когда пароход идёт из А в Б, он успевает дважды заглохнуть, а затем проплыть ещё два часа на своём ходу. Тогда он 8 часов плывёт со скоростью $U$+$V$ в сторону Б и 2 часа плывёт по течению со скоростью $V$ в сторону Б. Тогда расстояние равно $S = 8(U+V)+2V = 8U + 10V$ (2).
Приравнивая, получаем $12U - 15V = 8U + 10V$ или $4U = 25V$ или $(U/V) = (25/4)$. Время, которое мы потратим на путешествие на плоту, равно $S/V = 12(U/V) - 15(V/V) = 12*(25/4) - 15 = 60$ часов.
**Критерии:** Только ответ – 0 баллов. Верно составлено уравнение (1) или (2) – 1 балл (эти баллы суммируются).

**8.5.** Кондитер при приготовлении булочек использует различные пряности. Однажды он испёк 10 булочек, причем оказалось, что в любой из них имеется больше половины всего ассортимента пряностей. Докажите, что можно выбрать три пряности таким образом, что в каждой булочке будет хотя бы одна из этих пряностей.
**Решение:** Построим двудольный граф, где вершинами первой доли будут 10 булочек, а вершинами второй доли – все $n$ пряностей. Ребро между булочкой $k$ и пряностью $m$ будет означать, что для приготовления булочки номер $k$ использовалась пряность номер $m$.
Посчитаем сумму степеней вершин первой доли, по условию она строго больше $10*(n/2) = 5n$. Очевидно, она равна сумме степеней вершин второй доли. Так как во второй доле ровно $n$ вершин, найдётся одна, степень которой хотя бы 6 (если у всех степень не больше пяти, то в сумме будет не более $5n$). Выберем эту пряность и все булочки, для приготовления которых она использовалась, и удалим их из графа. После этого возможно два варианта.
Вариант первый. Осталось 4 вершины в первой доле. Степень каждой из них всё ещё больше $n/2$, так как мы удалили вершину, которая не была с ними связана. Значит, сумма степеней первой доли строго больше $2n$. С другой стороны, в правой доле $n$-1 вершина, и если степень каждой меньше 3, то сумма степеней не превосходит $2n$-2. Значит, найдётся пряность, у которой степень хотя бы 3. Уберём её и все булочки, содержащие её. Выбирая затем любую пряность, которая соединена с оставшейся булочкой, если она осталась, мы находим искомую тройку (очевидно, такая пряность найдётся, так как с какой-то пряностью каждая булка точно соединена).
Вариант второй. Осталось не более трёх булочек. Тогда степень каждой вершины больше $n/2$, а во второй доле $n$-1 вершина. Докажем, что найдётся пряность, которая используется для двух булок. Предположим, что это не так. Тогда первая булка содержит хотя бы $[n/2 + 1]$ пряность, а второй остаётся $n - 1 – [n/2 + 1] < n/2$ пряностей, чего не хватает. Значит, можем выбрать в качестве второй пряности ту, которая используется для двух булочек, а в качестве третьей – любую пряность, которая используется для оставшийся третьей булочки (если она осталась).
**Критерии:** Только идея двудольного графа – 0 баллов. Доказано, что есть вершина степени больше 5 – 3 балла. Забыт “вариант второй” – 5 баллов.

## 9 класс

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**9.1.** Какое количество 5%-ого и 20%-ого растворов соли в воде нужно взять, чтобы получить 90 кг 7%-ого раствора?
**Ответ.** 78 кг 5%-ого и 12 кг 20%-ого растворов.
**Решение.** Обозначим массу 5%-ого раствора за $x$ кг, масса 20%-ого раствора будет $90 - x$ кг, а общая масса соли в 5%-ом и 20%-ом растворах равна массе соли в 90 кг 7%-ого раствора:

$\frac{5}{100}x+\frac{20}{100}(90-x)=\frac{7}{100}90$, откуда $1800-15x=630$ и $x=78$.

**Критерии проверки.** Ответ найден угадыванием с проверкой: 1 балл. Выписаны уравнения, но не решены: 2 балла.

**9.2.** В детском саду каждому ребёнку выдали по три карточки, на каждой из которых написано либо «МА», либо «НЯ». Оказалось, что слово «МАМА» из своих карточек могут сложить 20 детей, слово «НЯНЯ» - 30 детей, а слово «МАНЯ» - 40 детей. У скольких детей все три карточки были одинаковы?

**Ответ.** У 10-ти детей.

**Решение.** Обозначим число детей, получивших три карточки «МА» за $x$, две карточки «МА» и одну карточку «НЯ» - за $y$, две карточки «НЯ» и одну карточку «МА» - за $z$, три карточки «НЯ» - за $t$, Тогда, слово «МАМА» могут сложить все дети из первой и второй групп и только они, слово «НЯНЯ» - все дети из третьей и четвёртой групп и только они, слово «МАНЯ» - все дети из второй и третьей групп и только они. Следовательно, $x+y=20, z+t=30, y+z=40$, значит искомое число равно $x+t=(x+y)+(z+t)-(y+z)=20+30-40=10$ детей.

**Критерии проверки.** Угаданный ответ с какими-то примерами предлагается никак не оценивать. Составленная, но не решённая система уравнений: 3 балла. Неправильно истолковано условие: 0 баллов.

**9.3.** По кругу записаны 14 положительных чисел (не обязательно целых). Сумма любых четырёх чисел, стоящих подряд, равна 30. Докажите, что каждое из этих чисел меньше 15.

**Доказательство. Первый способ.** Из условия следует, что все числа, между которыми стоят 3 числа, равны. Следовательно, равны между собой числа с номерами: 1,5,9,13,3,7,11 и равны между собой числа с номерами 2,6,10,14,4,8,12, то есть все числа с нечётными номерами равны $x$, а все числа с чётными номерами равны $y$. Сумма любых четырёх чисел, идущих подряд, равна $2x+2y=30$, откуда $x+y=15$. Значит, $x=15-y<15, y=15-x<15$, что и требовалось доказать.

**Второй способ.** Разобьём числа на 7 пар соседних. Из условия следует, что сумма чисел с первого по четвёртое равна сумме чисел с третьего по шестое, поэтому сумма чисел в первой паре равна сумме чисел в третьей паре. Далее, аналогично, эти суммы равны суммам в пятой, седьмой, второй, четвёртой и шестой парах. Следовательно, суммы чисел в каждой паре равны 15 и, ввиду их положительности, каждое число меньше 15..

**Критерии проверки.** Доказано, что любые два числа, стоящие через три, равны: 1 балл. Доказано, что любые два числа через одно равны: 3 балла (в решении можно обойтись и без этого!). Доказано, что сумма любых двух чисел, стоящих рядом равна 15: 5 баллов.

**9.4.** На плоскости дан отрезок AB длины 1 и на нём произвольная точка M. На отрезках AM и MB как на сторонах построены квадраты AMCD и MBEF, лежащие по одну сторону от AB. Пусть P и Q - точки пересечения диагоналей этих квадратов соответственно. Найдите геометрическое место середин отрезков PQ, когда точка M пробегает весь отрезок AB.

**Ответ.** Средняя линия ST равнобедренного прямоугольного треугольника AKB, построенного на AB, как на гипотенузе по ту же строну от AB, что и квадраты. Это отрезок длины ½ на высоте ¼ от AB, параллельный AB, проекция которого на AB совпадает с интервалом $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$.

**Решение.** Опустим из точек P и Q перпендикуляры PX и QY на AB, четырёхугольник PXYQ является трапецией, поэтому расстояние от середины PQ до AB равно длине её средней линии, то есть полусумме длин PX и QY. Длины PX и QY равны половинам длин рёбер квадратов AMCD и MBEF и их сумма равна половине длины AB, то есть ½. Значит, расстояние от середины PQ до AB равно ¼. Далее, если обозначит длину AX через $x \le \frac{1}{2}$, то длина AY равна $1-\left(\frac{1}{2}-x\right) = x+\frac{1}{2}$ и расстояние от A до проекции середины PQ равно полусумме этих длин, то есть $x+\frac{1}{4}$, что находится в пределах от ¼ до ¾. Таким образом, мы доказали, что середина PQ всегда лежит на указанном в ответе отрезке ST. Заметим, что точки P и Q при этом перемещаются по катетам AK и BK треугольника AKB из ответа.

В обратную сторону, рассмотрим произвольную точку R на отрезке ST. Нужно показать, что она является серединой отрезка PQ при некотором выборе точки M. Если R совпадает с S или T, нужно взять M совпадающей с A или B соответственно. Если R — внутренняя точка отрезка ST, проведём отрезок KZ с серединой в R и Z на AB, через Z проведём прямые, параллельные катетам AK и BK. Их точки пересечения с отрезками BK и AK соответственно будут точками P и Q, так как R будет точкой пересечения диагоналей параллелограмма PKQZ. Точка M при этом симметрична точке A относительно проекции $P_1$ точки P на AB, или симметрична точке B относительно проекции $Q_1$ точки Q на AB. Эти проекции совпадают, так как сумма длин A $P_1$ и $BQ_1$ равна сумме длин $PP_1$ и $QQ_1$, которая равна удвоенному расстоянию от R до AB, то есть ½.

**Критерии проверки.** Доказано, что геометрическое место середин отрезков PQ лежит на отрезке ST: 3 балла. Доказано, что любая точка отрезка ST является серединой отрезка PQ при подходящем выборе точки M: 4 балла.

**Замечание.** Если точки S и T не включены в ответ, оценка не снижается.

**9.5.** Про семь натуральных чисел $a,b,c,a+b-c,a+c-b,b+c-a,a+b+c$ известно, что все они — различные простые числа. Найти все значения, которые может принимать наименьшее из этих семи чисел.

**Ответ.** 3.

**Решение.** Из условия следует, что, в частности, $a,b,c$ - тоже простые. Если бы минимальное из семи чисел равнялось двойке, четыре последних числа были различными чётными, то есть не могли быть все простым. Если все семь чисел больше трёх, в силу простоты они не делятся на 3, их остатки от деления на 3 равны 1 или -1. Рассмотрим варианты остатков от деления на 3 самих чисел $a,b,c$. Если все их остатки равны между собой, то делиться на 3 будет число $a+b+c$. Если два из них равны, а третье имеет противоположный знак, то на 3 будет делиться одно из чисел $a+b-c,a+c-b,b+c-a$. В обоих случаях одно из семи чисел делится на 3 и по предположению больше 3, что противоречит его простоте. Следовательно, минимальное из семи чисел в условии может быть равно только 3. Пример таких чисел: $a=7,b=13,c=17,a+b-c=3,a+c-b=11,b+c-a=23,a+b+c=37$

**Критерии проверки.** Верный ответ с примером: 2 балла. Доказательство минимальности числа 3: 5 баллов. Если не рассмотрен случай с двойкой — снимаем 2 балла.

## 10 класс

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**10.1.** Найти все решения уравнения: $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$.

**Ответ.** $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

**Решение.** Сначала, как и положено, найдём область допустимых значений переменной $x$.

Из неотрицательности подкоренных выражений имеем: $2x-1\geq 0, x\geq\frac{1}{2}$ и $x-\sqrt{2x-1}\geq 0, x\geq 0, x\geq\frac{1}{2}$**,** второе эквивалентно $(x-1)^2\geq 0$**.** Итого, $x\geq\frac{1}{2}$.

Ввиду неотрицательности левой и правой частей уравнения можно возвести всё в квадрат, получив $2x+2\sqrt{(x-1)^2}=2$, то есть $x+|x-1|=1$. При $x\geq 1$ получим единственный ответ $x=1$, а при $\frac{1}{2}\leq x<1$ получим верное тождество 1=1, поэтому весь этот промежуток является решением.

**Критерии проверки.** Верно найдена ОДЗ: 1 балл. При возведении в квадрат не упомянута неотрицательность сторон равенства: снимаем 1 балл. Приобретение лишних решений: итоговая оценка не выше 3 баллов. Потеря одного значения из множества решений – снимаем 2 балла, потеря более одного – снимаем 3 балла.

**10.2.** В прямоугольной трапеции ABCD сумма длин оснований AD и BC равна её высоте AB. В каком отношении делит боковую сторону CD биссектриса угла ABC?

**Ответ.** 1:1.

**Решение.** Обозначим пересечение биссектрисы угла ABC с прямой AD за Q. Угол ABC прямой, поэтому треугольник ABQ – прямоугольный равнобедренный и длина отрезка AQ равна длине высоты AB, то есть сумме длин AD и BC. Следовательно, точка Q расположена на продолжении основания AD за точку D и длина отрезка DQ равна длине основания BC. Значит, четырёхугольник BCQD является параллелограммом и биссектриса BQ угла ABC, являющаяся в нём диагональю, делит боковую сторону CD, являющаяся в нём другой диагональю, пополам.

**Критерии проверки.** Доказано, что Q расположена на продолжении основания AD за точку D и длина отрезка DQ равна длине основания BC: 3 балла. Если не доказано, что Q расположена на продолжении основания AD за точку D: снимаем 2 балла.

**10.3.** Сначала шарики были разложены по нескольким белым и чёрным коробкам так, что в каждой белой было по 31 шарику, а в каждой чёрной - по 26 шариков. Затем принесли ещё три коробки и разложили шарики так, что в каждой белой коробке стало по 21 шарику, а в каждой чёрной - по 16 шариков. Можно ли принести ещё несколько коробок и разложить шарики так, чтобы в каждой белой коробке стало по 15 шариков, а в каждой чёрной - по 10 шариков?

**Ответ.** Нельзя.

**Решение.** Если бы требуемое в условии было возможно, то общее число шариков делилось бы на 5. Тогда, поскольку остатки всех чисел 31,26,21 и 16 от деления на 5 равны 1, то общее количество коробок и в первом и во втором случаях делилось бы на 5. Этого не может быть, потому что количества коробок в первом и втором случаях отличаются на 3.

**Критерии проверки.** Замечено, что, если бы требуемое в условии было возможно, то общее число шариков делилось бы на 5: 1 балл. Замечено, что остатки всех чисел 31,26,21 и 16 от деления на 5 равны 1: 1 балл. Замечено, что количество коробок в первом и втором случаях делится на 5: 3 балла. Замечено, что этого не может быть, потому что количества коробок в первом и втором случаях отличаются на 3: 2 балла.

**10.4.** На плоскости расположено конечное множество кругов так, что любые два из них можно накрыть кругом диаметра 10. Докажите, что все эти круги можно накрыть квадратом со стороной 10.

**Доказательство.** Спроектируем круги на ось абсцисс, получим конечное множество отрезков, выберем в нём самую левую точку A и самую правую точку B, докажем, что расстояние между ними не превосходит 10. Действительно, рассмотрим произвольную пару кругов, проекция одного из которых содержит A, а другого — B, радиусы их обозначим, соответственно, за $a$ и $b$, центры — за $O_A$ и $O_B$. Нарыв их кругом диаметра 10 мы видим, что хорда этого круга, проходящая через точки $O_A$ и $O_B$ имеет длину не больше 10, значит, длина отрезка $O_AO_B$ не больше $10-a-b$. Тогда и горизонтальная проекция отрезка $O_AO_B$ имеет длину не больше $10-a-b$, поэтому длина отрезка AB не больше $O_AO_B+a+b\le 10$. Аналогично, расстояние между самой верхней и самой нижней точками вертикальных проекций множества кругов не больше 10. Следовательно, вся система кругов помещается в прямоугольнике с горизонтальными и вертикальными сторонами длины не больше 10, который, очевидно, накрывается квадратом со стороной 10.

**Критерии проверки.** Доказательство того, что длина отрезка $O_AO_B$ не больше $10-a-b$: 2 балла. Доказательство того, что расстояние между самой левой и самой правой точками горизонтальных проекций кругов не превосходит 10: 3 балла.

**10.5.** Можно ли число 2016 представить в виде суммы нескольких попарно различных натуральных чисел таких, что среди всех возможных попарных сумм этих чисел ровно 7 различных?

**Ответ.** Нельзя.

**Решение.** Предположим, что 2016 можно представить в виде суммы попарно различных натуральных чисел $a_1<a_2<\ldots<a_n$ таких, что среди всех возможных попарных сумм этих чисел ровно 7 различных. Общее количество пар из $n$ чисел равно $\frac{n(n-1)}{2}$ и должно быть не меньше 7, поэтому $n\ge 5$. С другой стороны, ввиду очевидных неравенств: $a_1+a_2<a_1+a_3<\ldots<a_1+a_n<a_2+a_n<\ldots<a_{n-1}+a_n$, имеем $n-1+n-2=2\mathrm{n}-3\le 7$ и $n\le 5$. Следовательно, $n=5$ и каждая невыписанная попарная сумма чисел $a_1<a_2<\ldots<a_n$ равна одной из семи сумм, рассмотренных в длинном неравенстве. Всего нерассмотренных сумм три: $a_2+a_3<a_2+a_4<a_3+a_4$ и все они больше $a_1+a_3$ и меньше $a_3+a_5$. По условию, они должны совпадать с суммами $a_1+a_4<a_1+a_5<a_2+a_5$ в указанном порядке. Отсюда: $a_2-a_1=a_4-a_3=a_5-a_4=a_3-a_2$, следовательно, числа $a_1<a_2<\ldots<a_5$ образуют арифметическую прогрессию. Тогда их сумма равна $5\frac{a_1+a_5}{2}=2016$, откуда следует, что число 4032 должно делиться на 5 - противоречие.

**Критерии проверки.** Оценка $n\ge 5$: 1 балл. Оценка $n\le 5$: 2 балла. Доказательство, что пять чисел образуют арифметическую прогрессию: 2 балла. Доказательство, что сумма этой арифметической прогрессии не может равняться 2016: 2 балла.

## 11 класс

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**11.1.** Найти все натуральные числа $n$ такие, что существуют $n$ последовательных натуральных чисел, сумма которых равна $n^2$.

**Ответ.** Все нечётные $n$.

**Решение.** Пусть $n$ удовлетворяет условию и первое из $n$ последовательных натуральных чисел равно $x+1$, тогда последнее равно $x+n$, а их сумма равна $n\left(x+\frac{n+1}{2}\right)$, откуда $n=2x+1$ - нечётно. С другой стороны, для любого нечётного $n$ сумма $n$ последовательных натуральных чисел $\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2},...,\frac{3n-1}{2}$ равна, очевидно, $n^2$, поэтому любое нечётное $n$ удовлетворяет условию.

**Критерии проверки.** Доказано, что все подходящие $n$ нечётны: 4 балла. Доказано, что все нечётные $n$ подходят: 3 балла.

**11.2.** Найти все решения уравнения: $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$.

**Ответ.** $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\pm\frac{\pi}{4}+\frac{l\pi}{2},\pm\frac{\pi}{6}+m\pi$

**Решение.** Можно, действуя прямо в лоб, заменить $\cos 2x=2\cos^2 x-1, cos3x=4\cos^3 x-3cosx$, после преобразований получим: $8\cos^6 x-10\cos^4 x+3\cos^2 x=0$, откуда $\cos x=0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\pm\frac{\pi}{4}+\frac{l\pi}{2},\pm\frac{\pi}{6}+m\pi$.

Можно решать по-другому, заменить квадраты косинусов через косинусы двойного угла, получив $\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=-1$, затем свернуть сумму первого и третьего слагаемых в удвоенное произведение косинусов, выразить всё через $\cos 2x$, получив уравнение $2\cos^3 2x+\cos^2 2x-\cos 2x=0$ с решениями $\cos 2x=0,-1,\frac{1}{2}$.

**Критерии проверки.** Нахождение значений $\cos x=0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos 2x=0,-1,\frac{1}{2}$: 4 балла. Верное выписывание всех серий решений: 3 балла. Потеря части решений: снимаем 2-3 балла.

**11.3.** При каком наименьшем $n$ выполнено условие: если в некоторых клетках таблицы размера $6\times 6$ в произвольном порядке расставить $n$ крестиков (не более одного в клетке), то обязательно найдутся три клетки, образующие полоску длины 3, вертикальную или горизонтальную, в каждой из которых поставлен крестик?

**Ответ.** $n$ =25.

**Решение.** Если крестиков не меньше 25, то одна из строк таблицы содержит не меньше 5 крестиков, и не больше одной пустой клетки. Тогда либо три левых клетки этой строки, либо три правых её клетки все содержат крестики и являются искомой полоской.

Если крестиков меньше 25, то их можно расставить так, чтобы не было трёх крестиков, образующих полоску. Для этого пустыми нужно оставить все клетки одной главной диагонали, и клетки двух диагоналей длины 3, ей параллельных.

**Критерии проверки.** Оценка (если больше 24, то полоска всегда найдётся): 3 балла. Пример расстановки 24 и меньше крестиков без трёх крестиков подряд: 4 балла.

**11.4.** Найдите все натуральные числа $x$ такие, что произведение всех цифр в десятичной записи $x$ равно $x^2-10x-22$

**Ответ.** $x$ =12.

**Решение.** Во-первых, произведение всех цифр натурального числа неотрицательно, поэтому $x^2-10x-22$, откуда $x\ge\frac{10+\sqrt{188}}{2}$, то есть $x\ge 12$. Во-вторых, если в произведении всех цифр натурального числа заменить все цифры, кроме первой, на десятки, то произведение не уменьшится, но будет не больше самого числа, поэтому произведение всех цифр числа не превосходит самого числа, значит $x^2-11x-22\le 0$, откуда $x\le\frac{11+\sqrt{209}}{2}$, то есть $x\le 12$. Для

$x = 12$ условие, очевидно, выполнено, следовательно, это единственный ответ.
**Критерии проверки.** Только ответ с проверкой: 1 балл. Доказательство того, что произведение всех цифр числа не превосходит самого числа: 3 балла.

**11.5.** На плоскости дан отрезок AB и на нём произвольная точка M. На отрезках AM и MB как на сторонах построены квадраты AMCD и MBEF , лежащие по одну сторону от AB, и N – точка пересечения прямых AF и BC. Докажите, что при любом положении точки M на отрезке AB каждая прямая MN проходит через некоторую точку S, общую для всех таких прямых.
**Доказательство.** Треугольники AMF и CMB равны по двум прямым углам и двум парам катетов. Более того, второй получается из первого поворотом на 90 градусов относительно точки M по часовой стрелке, следовательно, их гипотенузы AF и BC перпендикулярны. Значит, точка N лежит на окружности с диаметром AB. Кроме того, угол FNB, равный углу ANB, тоже прямой, следовательно, точка N лежит на описанной окружности квадрата MBEF. Отсюда получаем в случае, когда точка M ближе к B, угол FNM равен углу FEM как вписанный, опирающийся на одну хорду FM, и имеет величину 45 градусов. В случае, когда точка M ближе к A, угол BNM равен углу BEM как вписанный, опирающийся на одну хорду FM, и имеет величину 45 градусов.
В обоих случаях прямая MN всегда является биссектрисой прямого угла ANB и проходит через середину дуги окружности с диаметром AB, не содержащей точку N и не зависящей от выбора M.
**Критерии проверки.** Замечено равенство треугольников AMF и CMB: 1 балл. Доказана перпендикулярность AF и BC: 1 балл. Замечено, что N лежит на окружности с диаметром AB: 1 балл. Замечено, что N лежит на описанной окружности квадрата MBEF и угол FNM имеет величину 45 градусов (в случае, когда точка M ближе к B), или угол BNM имеет величину 45 градусов (в случае, когда точка M ближе к A): 2 балла. Доказано, что MN всегда проходит через середину дуги окружности диаметром AB, не содержащей точку N и не зависящей от выбора M: 2 балла.