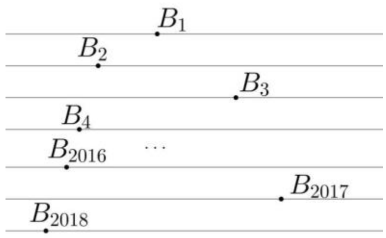
Всесибирская олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике
Заключительный этап
7 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. На некотором острове живёт 2018 человек, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Известно, что каждый человек дружит ровно с двумя другими. Однажды каждый из островитян заявил, что дружит ровно с одним лжецом. Обязательно ли все островитяне лжецы?

7.2. Квадрат со стороной 6 клеточек разрезан по сторонам сетки на 8 прямоугольников. Докажите, что какие-то два из этих прямоугольников равны по площади.

7.3. На плоскости через одинаковое расстояние расположены 2018 параллельных прямых. На каждой прямой расположено по одной точке. Точки B_1 и B_2 взяты произвольно на двух первых прямых. Затем точка B_3 взята так, что $B_1B_2 = B_2B_3$; B_4 так, что $B_1B_3 = B_3B_4$; …; B_i так, что $B_1B_{i-1} = B_{i-1}B_i$; …; B_{2018} так, что $B_1B_{2017} = B_{2017}B_{2018}$. При этом, если очередную точку можно выбрать двумя способами, то для нечётного номера выбирают правую точку, для чётного – более левую точку (см. рисунок). Докажите, что расположение точки B_{2018} зависит только от расположения точки B_1.



7.4. Число называется хорошим, если любые две соседние цифры в его записи отличаются хотя бы на 5. Вера написала хорошее число, а потом заменила одинаковые его цифры на одинаковые буквы, а разные – на разные. Могло ли у неё получиться слово НОВОСИБИРСК?

7.5. Шахматную доску со стороной в 100 клеток по линиям сетки разрезали на квадраты с нечётными сторонами (не обязательно равные), а затем в каждом полученном квадрате отметили центральную клетку. Докажите, что белых и черных клеток оказалось отмечено поровну.

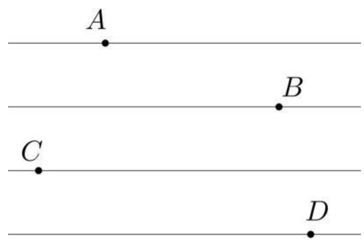
Всесибирская олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике
Заключительный этап
8 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Число называется хорошим, если любые две соседние цифры в его записи отличаются хотя бы на 4. Вера написала некоторое хорошее число, а потом заменила одинаковые его цифры на одинаковые буквы, а разные – на разные. Могло ли у неё получиться слово НОВОСИБИРСК?

8.2. Матвей вышел из Тотьмы, а одновременно с ним Пётр выбежал навстречу из Калуги по той же дороге. В одинаковых условиях скорости мальчиков относятся как 2 : 3 и постоянны. В какой-то момент на их пути начинается бездорожье (возможно, в различное время) и продолжается до самого момента встречи. На бездорожье скорость каждого падает в два раза. Как относятся расстояния, пройденные по бездорожью Петром и Матвеем, если они встретились ровно посередине между городами, а бездорожье составляет 2/3 пути между Калугой и Тотьмой?

8.3. Найдите угол DAC, если известно, что $AB = BC$ и $AC = CD$, а прямые, на которых лежат точки A, B, C, D, параллельны, причём расстояния между соседними прямыми равны. Точка A левее B, C левее B, D правее C (см.рис).



8.4. Дядя Андрей и девочка Маша играют в игру. У них имеются две упаковки сока по 24 литра: один грушёвый, другой вишнёвый. Кроме того, у Андрея есть кружка в 500 мл, а у Маши – две кружки по 240 мл. Игроки пьют сок по очереди по следующим правилам: они наполняют все свои кружки до краёв, а затем выпивают налитое до дна. При этом запрещается смешивать два вида сока в одной ёмкости. Если кто-то не может сделать ход, то ходит его соперник. Игра заканчивается, когда никто не может сделать ход. Побеждает тот, кто выпил больше сока. Может ли кто-либо обеспечить себе победу, если Андрей выбирает, кто ходит первым?

8.5. В большом вольере живёт сто попугайчиков. В некоторый момент оказалось, что каждый из них за свою жизнь клюнул ровно пять других попугайчиков из этого вольера. Докажите, что можно выпустить на волю десять таких попугайчиков, что никто из них друг друга не клевал.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике
Заключительный этап **9 класс** **18.02.2018**

Каждая задача оценивается в 7 баллов Время выполнения заданий олимпиады: 4 астрономических часа

9.1. На какое максимальное число различных прямоугольников можно разрезать шахматную доску 8 на 8 клеток? Все разрезы должны проходить только по линиям сетки. Прямоугольники различны, если они не равны как геометрические фигуры.

9.2. Могут ли в некотором остроугольном треугольнике ABC точки пересечения биссектрисы угла A, высоты, проведённой из вершины B и медианы, проведённой из вершины C являться вершинами невырожденного равностороннего треугольника?

9.3. Пусть двузначные числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ таковы, что отношение четырёхзначного числа $\overline{abcd}$ к сумме $\overline{ab}+\overline{cd}$ является целым числом. Найти все возможные значения, которые может принимать это число.

9.4. Известно, что значения квадратного трёхчлена $a x^2+b x+c$ на интервале $[-1,1]$ не превосходят по модулю 1. Найти максимальное возможное значение суммы $|a|+|b|+|c|$.

9.5. Какое наибольшее количество целых чисел можно записать в ряд так, чтобы сумма любых пяти подряд идущих из них была больше нуля, а сумма любых семи подряд идущих из них была меньше нуля?

.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике
Заключительный этап **10 класс** **18.02.2018**

Каждая задача оценивается в 7 баллов Время выполнения заданий олимпиады: 4 астрономических часа

10.1. Найти все решения уравнения: $\sqrt{1-x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{3x+2y-7}$.

10.2. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от единицы и самого числа. Найти все натуральные числа, имеющие не меньше двух различных собственных делителей и делящиеся на разность любых двух из них.

10.3. Различные прямые a и b пересекаются в точке О. Рассмотрим всевозможные отрезки АВ длины l, концы А и В которых лежат на a и b соответственно, и обозначим за Р точку пересечения перпендикуляров к прямым a и b, восстановленным из А и В соответственно. Найти геометрическое место точек Р.

10.4. Действительные числа a и b таковы, что $a^3+b^3=1-3ab$. Найти все значения, которые может принимать сумма $a+b$.

10.5. Найти число всевозможных расстановок фишек по одной в некоторых клетках шахматной доски 8 на 8 таких, что количество фишек, стоящих в каждой строке различно и количество фишек, стоящих в каждом столбце различно.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике
Заключительный этап **11 класс** **18.02.2018**

Каждая задача оценивается в 7 баллов Время выполнения заданий олимпиады: 4 астрономических часа

11.1. Пусть $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ и $ac+bd=0$ для некоторых действительных чисел a, b, c, d. Найти все возможные значения выражения $ab+cd$.

11.2. Решить уравнение: $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=2$.

11.3. Может ли сумма объёма, длин всех рёбер и площадей всех граней некоторого прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого являются целыми числами, равняться 866?

11.4 В множестве X из 17 элементов выделено семейство из N различных непустых подмножеств таких, что каждый элемент множества X содержится ровно в двух подмножествах из этого семейства. Каково максимальное значение N? Найдите число всех возможных различных типов таких семейств для максимального N. Два семейства подмножеств имеют различные типы, если не получаются друг из друга перестановкой элементов X.

11.5. Пусть A и B — две различные фиксированные точки окружности, C — произвольная точка этой окружности, отличная от A и B, и MP — перпендикуляр, опущенный из середины M хорды BC к хорде AC. Доказать, что прямые PM при любом выборе C проходят через некоторую общую точку T.