Заключительный этап Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике 12 марта 2023 г.

7 класс

***Возможные* решения с баллами. Максимальный балл за задачу – 10.**

1) Тренер следит за средней скоростью горнолыжника на скоростном спуске. По его измерениям на первой трети дистанции средняя скорость была равна V_1=30 км/час, а на следующей, второй трети дистанции V_2= 120 км/час. Какая средняя скорость V_3 была у лыжника на *заключительной* трети дистанции, если средняя скорость на всей дистанции была равна V_{CP} =60 км/час?

Решение. Обозначим длину всей дистанции как 3L, т.е. L – длина одной трети пути.

По определению средней скорости для всего спуска:

$$V_{CP} = \frac{3L}{\frac{L}{V_1} + \frac{L}{V_2} + \frac{L}{V_3}}$$ (+3 балла)

В знаменателе этой дроби стоит сумма времен, за которые лыжник проехал каждый из участков, т.е. полное время спуска.

Менее громоздкие выражения получатся, если записывать уравнения для обратных скоростей:

$\frac{3}{V_{CP}} = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3}$. (+3 балла за уравнение, из которого можно прямо выразить искомую величину)

Таким образом,

$$\frac{1}{V_3} = \frac{3}{V_{CP}} - \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{V_3} = \frac{3}{60} - \frac{1}{30} - \frac{1}{120} = \frac{6}{120} - \frac{4}{120} - \frac{1}{120} = \frac{1}{120}$$

Следовательно, искомая средняя скорость на третьем участке равна V_3= 120 км/час (+4 балла за явно сформулированный и обоснованный ответ).

Т.е. его средняя скорость осталась такой же, как и на втором участке.

Для справки: аналитическое выражение для искомой скорости имеет вид

$$V_3 = \frac{V_{CP}V_1V_2}{3V_1V_2 - V_1V_{CP} - V_2V_{CP}}$$

2) Деревни А и Б стоят на реке. Из А в Б отправилась моторная лодка, которая через T_1=3 часа хода встретила плот. Еще через T_2=1 час лодка добралась до Б и сразу отправилась обратно. Она поравнялась с тем же самым плотом, когда до А оставалась 1/5 всего расстояния между деревнями. *Сколько времени* затратила лодка на обратный путь от Б до А, если скорость течения реки и скорость лодки относительно воды всегда постоянны?

Решение. Обозначим как T_X искомое время обратной поездки. Дополнительно введем обозначения: V – скорость лодки относительно воды (то же самое, что и скорость в стоячей воде), U – скорость течения реки относительно берега, L – расстояние между А и Б вдоль реки. Для получения ответа значения этих параметров не понадобятся.

Из условия следует, что д. Б находится выше по течению, чем д. А, только в этом случае вторая встреча лодки с плотом происходит ближе к А, чем первая (+1 балл).

Так как скорость лодки постоянна, то первая встреча с плотом произошла на расстоянии $L \cdot T_2/(T_1+T_2)=L/4$ от Б (+1 балл). Вторая встреча лодки с плотом произошла, когда плот проплыл расстояние $L - \frac{L}{4} - \frac{L}{5} = \frac{11 \cdot L}{20}$, т.е. через время $T_3 = \frac{11 \cdot L}{20 \cdot U}$ (+1 балл).

Время движения лодки между этими встречами равно этой же величине, что дает следующее уравнение:

$$\frac{L}{4\cdot(V-U)}+\frac{4\cdot L}{5\cdot(V+U)}=\frac{11\cdot L}{20\cdot U}$$

(+2 балла за уравнение, которое каким-то нетривиальным образом определяет связь между временами движения плота и лодки).

Переписываем полученное уравнение и получаем

$[5(V+U)+16(V-U)]\cdot U= 11\cdot(V^2-U^2)$ и, далее,

$21\cdot U=11\cdot V$ (+2 балла за связь между скоростями лодки относительно воды и течения реки)

Поскольку время движения от А до Б известно: $\frac{L}{(V-U)}=T_1+T_2$, а скорость движения лодки относительно берега при ходе лодки по течению увеличивается в

$$\frac{(V+U)}{(V-U)}=\frac{21/11+1}{21/11-1}=\frac{32}{10}$$ раза (+1 балл),

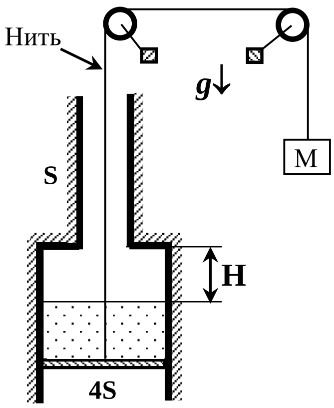
то искомое время равно

$$T_X=\frac{L}{(V+U)}=(T_1+T_2)\frac{5}{16}=75\,мин$$

(+2 балла за явно сформулированный и обоснованный ответ).

Правильный ответ может быть получен и с помощью другой последовательности рассуждений.

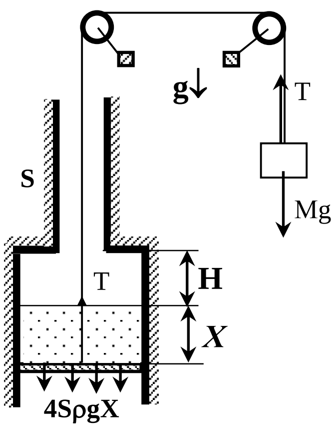
3) Цилиндрическая труба, составленная из двух частей, с площадью сечения S (сверху) и 4S (снизу), закреплена вертикально. Нижняя часть трубы перекрыта подвижным невесомым поршнем, к которому с помощью нити и блоков прикреплен груз с массой M (см. рис. справа). В трубе *над* поршнем находится жидкость, уровень которой *ниже* места соединения частей на H. Массу груза *удваивают*, и в новом положении равновесия уровень жидкости становится *выше* места соединения частей на H/2. Чему равна плотность **ρ** жидкости, налитой в трубу? Считать, что поршень до места сужения трубы не доходит, внешним давлением пренебречь.

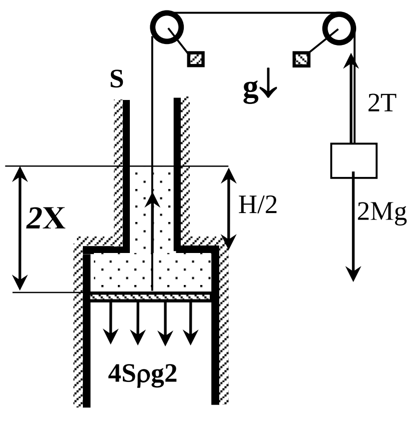


Решение. Введем обозначения: пусть X – высота слоя жидкости, налитой в трубу в начальной ситуации, т.е. объем жидкости V=4SX, а масса равна 4SXρ.

Согласно условию, в начальной ситуации вес жидкости уравновешивается весом груза, т.е. M=4SXρ (+2 балла).

Если точнее, то сила тяжести (4SXρ)·g, действующая на жидкость, равна по величине силе давления жидкости на поршень, равной (4S)·(Xρg) (разумеется, выражения совершенно одинаковы). Поскольку поршень также находится в равновесии, то сила, действующая на поршень со стороны жидкости (4SXρg), равна силе натяжения нити T (см. левый рисунок). С другой стороны, груз с массой M также находится в равновесии, т.е. 4SXρg=T=Mg.





В начальной ситуации равновесие безразличное, т.е. расстояние между уровнем жидкости и местом соединения разных частей трубы может быть и другим.

После увеличения массы груза вдвое в условиях равновесия должна увеличиться вдвое и сила натяжения нити (+1 балл). Отсюда следует, что сила давления на поршень тоже должна удвоиться. Поскольку площадь поршня не меняется, это означает, что должно удвоиться давление на поршень за счет подъема уровня жидкости над поршнем до 2X (+2 балла, см. правый рисунок).

Объем жидкости остается прежним, т.е.

$4S \cdot X = S \cdot H/2 + 4S \cdot (2X - H/2)$ (+1 балл)

Второе слагаемое в правой части уравнения возникло из условия, что полная высота столба жидкости равна 2X. Несмотря на сохранение массы жидкости сила, действующая на поршень, увеличивается за счет увеличения силы давления на жидкость со стороны горизонтальной поверхности трубы в месте соединения частей (см. «гидростатический парадокс»). Проводя преобразования, получаем

$4X = H/2 + 8X - 2H$ и, следовательно, $X = 3H/8$ (+2 балла)

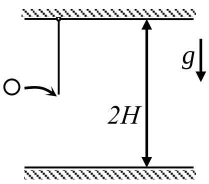
Узнав таким образом объем жидкости, получаем ответ для плотности

$\rho = 2M/(3SH)$

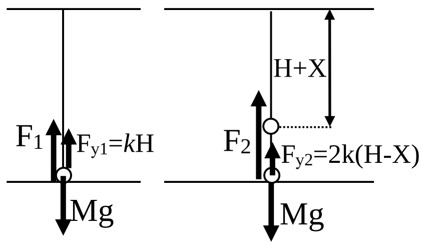
(+2 балла за явно сформулированный и обоснованный ответ).

Заметим, что учет внешнего давления не меняет ответ.

4) Комната имеет высоту 2H. С потолка комнаты свисает резинка, конец которой находится на высоте H над полом. К концу резинки прикрепляют небольшой груз с неизвестной массой, который опускается до самого пола и давит на пол с силой F_1. Затем к середине растянутой резинки прикрепляют еще один такой же груз. После установления нового равновесия нижний груз давит на пол с силой F_2. Чему равна жесткость всей этой резинки? Считать, что любая часть резинки всегда остается растянутой.



Решение. Введем обозначения: k – искомая жесткость всей резинки (при этом 2k – жесткость половины резинки), масса груза - M (для ответа не потребуется), X - смещение второго груза ниже середины высоты комнаты после установления нового равновесия (см. рис.).



На поясняющем рисунке показаны силы, действующие на нижний груз. Здесь учтено, что сила, действующая на пол со стороны груза, и сила, действующая на груз со стороны пола, равны по величине. Стрелки, изображающие некоторые силы, смещены от реальных точек приложения, чтобы не загромождать рисунок.

Условие равновесия тела на полу имеет вид

$Mg = F_1 + kH$ (+2 балла)

Здесь учтено, что растяжение резинки в этом случае равно H.

После того, как к середине резинки, т.е. к точке, которая была на расстоянии H/2 от потолка в исходном состоянии, прикрепили груз, можно записать такие условия равновесия для грузов:

Нижний: $Mg = F_2 + 2k[(H-X) - H/2] = F_2 + 2k(H/2 - X)$ (+2 балла)

Верхний: $Mg = 2k[(H+X) - H/2] - 2k(H/2 - X) = 2k(H/2 + X) - 2k(H/2 - X) = 4kX$ (+2 балла)

Здесь учтено, что верхний груз делит резинку на две равных части, у которых недеформированная длина равна H/2, а коэффициент жесткости равен 2k.

Сравнивая первое и третье уравнение, получаем, что

$4kX = F_1 + kH$

А из первого и второго уравнений получается

$2kX = F_2 - F_1$ (+2 балла за верные преобразования, позволяющие приблизиться к ответу).

Т.е. $2F_2 - 3F_1 = kH$ или $k = \dfrac{2F_2 - 3F_1}{H}$ (+2 балла за явно сформулированный и обоснованный ответ). *Для справки*: в условиях задачи $Mg = 2(F_2 - F_1)$.