Решения задач заочного этапа Всесибирской олимпиады 2009-2010 года

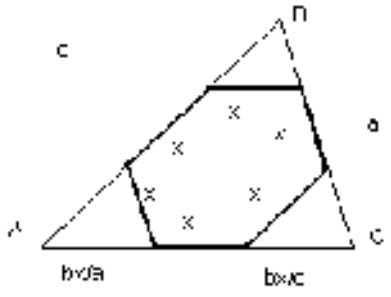
9 класс

9.1. **Ответ. 32.** Оба числа делятся на 4, поэтому, по признаку делимости на 4, числа АБ и БА делятся на 4. Отсюда следует, что цифры А и Б чётны и не равны нулю, так как обе являются первыми цифрами в числах АМЁБА и БАОБАБ соответственно. Двузначное число, делящееся на 4, цифра десятков которого чётна, должно оканчиваться на цифру, делящуюся на 4, поэтому для числа АБ остаются две возможности: 48 и 84. В обоих случаях сумма чисел в условии может оканчиваться только на 32. Чтобы завершить решение, необходимо построить хотя бы один пример, где А равно 4 и Б равно 8, или наоборот, удовлетворяющий условию задачи. Подходит, например БАОБАБ = 841848 и АМЁБА = 42084. Если пример при верной первой половине рассуждений отсутствует, решение считается неполным и получает 4 балла из 7 возможных. Такая оценка обусловлена ещё и непростотой поиска примера, скажем, для БАОБАБ'а решение вообще единственно, а для АМЁБЫ всего пять вариантов.

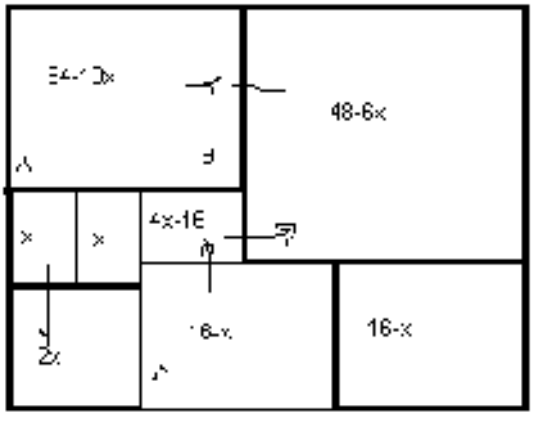
9.2. Ответ. В каждом подъезде дома по 72 квартиры.
Сначала заметим, что в первом подъезде есть двузначные номера квартир, иначе в каждом подъезде не более, чем по 9 квартир, и во втором не может быть 105-ой квартиры (Рассуждение оценивается в 1 балл). Далее, заметим, что в первом подъезде нет трёхзначных номеров квартир, иначе в первом подъезде было бы не более $9+2\cdot 90+3\cdot 5=204$ цифр во всех номерах, а во втором не менее $3\cdot 100$=300 цифр, что более, чем на 47 процентов превосходит количество цифр в первом подъезде. (Рассуждение оценивается в 2 балла). После этого необходимо отметить, что во втором подъезде нет четырёхзначных номеров. (Рассуждение оценивается в 1 балл.) Пусть теперь в первом подъезде $x, 10\le x\le 99$ квартир, тогда в нём на номерах $9+2(x-9)=2x-9$ цифр, а во втором $2(99-x)+3(2x-99)=4x-99$. По условию, $1{,}4(2x-9)=4x-99$, откуда $1{,}2x=86{,}4$, значит, $x=72$.

9.3. Ответ. Длина сторон искомого шестиугольника равна $\dfrac{abc}{ab+bc+ac}$, где a,b,c - длины сторон исходного треугольника.

Обозначим вершины и длины сторон, как показано на рисунке. Левый и правый нижние маленькие треугольники подобны исходному с коэффициентами x/a и x/c соответственно, поэтому их основания равны bx/a и bx/c. Для отрезков основания треугольника получаем уравнение $bx/a+x+bx/c=b$, откуда $1/x=1/a+1/b+1/c$.



9.4. Ответ. Длина вертикальной стороны искомого прямоугольника равна 29 см.
Обозначим длину стороны малого квадрата, примыкающего к левой вертикальной стороне прямоугольника за x, тогда длины остальных выразятся через x в таком порядке и так, как показано на рисунке. Для отрезка АВ получаем уравнение: $x+x+4x-16=64-10x$, откуда $x=5$, а длина вертикальной стороны параллелограмма равна $64-7x=29$ см.



9.5. Ответ. Нельзя. Занумеруем все горизонтальные и вертикальные линии сетки доски снизу вверх и слева направо цифрами от 1 до 9. Покажем, что при указанной в условии укладке каждая линия сетки пересекает (пополам) количество домино, чётность которого равна чётности номера этой линии. Рассмотрим самый левый столбик доски, находящиеся в нём вертикальные домино занимают чётное число клеток, значит он пресекается с нечётным числом горизонтальных домино, каждое из которых пересекает первую вертикаль сетки. Следовательно, первая вертикаль пересекается с нечётным количеством горизонтальных домино, в частности, хотя бы с одним. Эти домино вместе занимают нечётное число клеток второго столбца доски. Вертикальные домино, лежащие во втором столбце, занимают чётное число клеток, следовательно, горизонтальных домино, пересекающих вторую вертикаль сетки доски, должно быть чётное количество. С остальными линиями рассуждаем аналогично. Всего линий с нечётными номерами десять, пять горизонтальных и пять вертикальных, каждая из них пересекает хотя бы одно домино и все эти домино различны. Значит, искомая укладка требует не меньше десяти домино, а у нас только девять.

10 класс

10.1. **Ответ. 32.** Оба числа делятся на 4, поэтому, по признаку делимости на 4, числа АБ и БА делятся на 4. Отсюда следует, что цифры А и Б чётны и не равны нулю, так как обе являются первыми цифрами в числах АМЁБА и БАОБАБ соответственно. Двузначное число, делящееся на 4, цифра десятков которого чётна, должно оканчиваться на цифру, делящуюся на 4, поэтому для числа АБ остаются две возможности: 48 и 84. В обоих случаях сумма чисел в условии может оканчиваться только на 32. Чтобы завершить решение, необходимо построить хотя бы один пример, где А равно 4 и Б равно 8, или наоборот, удовлетворяющий условию задачи. Подходит, например БАОБАБ = 841848 и АМЁБА = 42084. Если пример при верной первой половине рассуждений отсутствует, решение считается неполным и получает 4 балла из 7 возможных. Такая оценка обусловлена ещё и непростотой поиска примера, скажем, для БАОБАБ'а решение вообще единственно, а для АМЁБЫ всего пять вариантов.

10.2. **Ответ.** $x=y=z=\frac{1}{2}$ или $x=y=z=0$. Если хотя бы одна переменная равна нулю, получаем очевидное решение $x=y=z=0$. В противном случае левые части равенств положительны, поэтому и сами переменные положительны. Далее, функция $f(t)=\frac{4t^2}{4t^2+1}=1-\frac{1}{1+4t^2}$ монотонно возрастает при положительном t, следовательно, между числами y,z,x и между числами x,y,z стоят одинаковые знаки. Если, скажем, $x\geq y$, то $y\geq z$ и $z\geq x$, откуда $x=y=z$. Аналогично и при $x\leq y$. Подставляя равные переменные в первое уравнение, получим, $(2x-1)^2=0$, откуда $x=y=z=\frac{1}{2}$.

10.3. Из того, что внутренний шестиугольник – вписанный, следует, что сумма длин его сторон, лежащих в маленьких треугольниках, равна сумме длин его сторон, лежащих на сторонах большого треугольника. Следовательно, сумма периметров маленьких треугольников равна периметру большого треугольника. Далее, все маленькие треугольники подобны большому с коэффициентом, равным отношению периметров, поэтому сумма коэффициентов подобия равна единице. Осталось заметить, что отношение радиусов вписанных окружностей треугольников тоже равно коэффициенту подобия, поэтому

сумма отношений радиусов вписанных окружностей маленьких треугольников к радиусу вписанной окружности большого треугольника равна единице, то – есть, сумма радиусов маленьких окружностей равна радиусу большой окружности.

10.4. **Ответ. 9.** Разобьём квадрат 5 на 5 на 9 частей, как показано на рисунке. В каждой части не может быть больше одной зелёной клетки, поэтому всего зелёных клеток не больше девяти. С другой стороны, на том же рисунке пример требуемой покраски с девятью зелёными клетками. Только верная оценка сверху оценивается в 4 балла, только пример – в 3 балла.

10.5. **Ответ. 1, 2 и 3.** Не ограничивая общности, можем считать, что $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Пусть q – знаменатель геометрической прогрессии $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$. Заметим теперь, что, либо все числа одного знака, либо в геометрической прогрессии знаки чередуются. При этом во втором случае числа одного знака тоже образуют геометрическую прогрессию (со знаменателем q^2). Но три различных числа одного знака не могут одновременно образовывать арифметическую и геометрическую прогрессию в одном порядке (так как нарушается неравенство между средним арифметическим и геометрическим). Следовательно, в последовательности не более двух чисел каждого знака и $n \le 4$.

Если $n = 4$, то $a_1 < a_2 < 0 < a_3 < a_4$. Можно считать $q < -1$ и геометрическая прогрессия образована одним из двух способов: a_2, a_3, a_1, a_4 или a_3, a_2, a_4, a_1. Рассмотрим первый случай (второй аналогичен): $2a_2 = a_1 + a_3 = a_2 q^2 + a_2 q$ и $2a_3 = 2a_2 q = a_2 + a_4 = a_2 + a_2 q^3$. Откуда получаем $q = 1$, что невозможно.

Далее строим примеры для $n = 3$: -2, 1, 4. Для $n = 2$: 1, 2. И для $n = 1$ подойдет любое число.

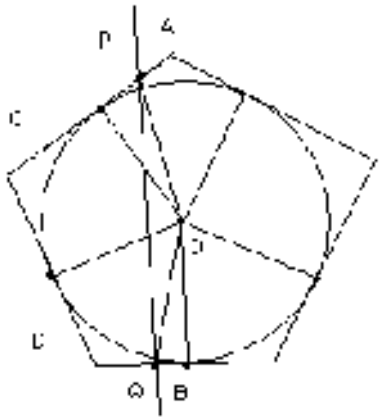
11 класс

11.1. **Ответ. 32.** Оба числа делятся на 4, поэтому, по признаку делимости на 4, числа АБ и БА делятся на 4. Отсюда следует, что цифры А и Б чётны и не равны нулю, так как обе являются первыми цифрами в числах АМЁБА и БАОБАБ соответственно. Двузначное число, делящееся на 4, цифра десятков которого чётна, должно оканчиваться на цифру, делящуюся на 4, поэтому для числа АБ остаются две возможности: 48 и 84. В обоих случаях сумма чисел в условии может оканчиваться только на 32. Чтобы завершить решение, необходимо построить хотя бы один пример, где А равно 4 и Б равно 8, или наоборот, удовлетворяющий условию задачи. Подходит, например БАОБАБ = 841848 и АМЁБА = 42084. Если пример при верной первой половине рассуждений отсутствует, решение считается неполным и получает 4 балла из 7 возможных. Такая оценка обусловлена ещё и непростотой поиска примера, скажем, для БАОБАБ'а решение вообще единственно, а для АМЁБЫ всего пять вариантов.

11.2. **Ответ. Объём стакана равен** $\frac{3}{16} = 0{,}1875$ литра, что близко к обычному гранёному стакану. Обозначим количества соли в первом и втором стаканах за А и В соответственно, из неравенства концентраций следует $A \ne \frac{5}{3}B$, объём стакана – за x литров. Тогда после переливаний в стаканах окажется, соответственно, $A(1 - \frac{x}{0{,}5}) + B\frac{x}{0{,}3}$ и $A\frac{x}{0{,}5} + B(1 - \frac{x}{0{,}3})$ соли, причём, по условию равенства концентраций, первое число в x

раза больше второго. После преобразований получим $\frac{5}{3}(A-\frac{5}{3}B)(1-\frac{16}{3}x)=0$. Ввиду неравенства нулю первой скобки, $x=\frac{3}{16}=0{,}1875$.

11.3. **Ответ.** $x=1$ и $x=-2$. Область определения уравнения $x\in[-3,2]$. Умножим обе части на $\sqrt{x+3}+1$, после преобразований получим либо $x=-2$ - в ответ, либо $3\sqrt{2-x}+1=2\sqrt{x+3}$. Обе части положительны, возводим в квадрат, преобразовываем: $6\sqrt{2-x}=13x-7$, поэтому дальше необходимо $x\geq\frac{7}{13}$. Возводим в квадрат, преобразовываем: $169x^2-146-23=0$. У этого, несомненно, злобного уравнения два корня: $x=1$ и $x=-\frac{23}{169}$. Второй корень нужно отбросить из-за условия $x\geq\frac{7}{13}$. Если это не сделано, или второй корень не ищется, снимается 2 балла. Если с самого начала подбором находится очевидный корень $x=1$ и всё, даётся 1 балл.

11.4. **Ответ. Нельзя.** Занумеруем лампы, начиная с горящей, по часовой стрелке цифрами 1,2,3 в циклическом порядке, ламп каждого типа четыре – чётное число. Каждая операция изменяет состояние ровно одной лампы каждого типа. Чтобы горевшая лампа осталась в итоге гореть, её состояние надо изменить чётное число раз, а чтобы не горевшая зажглась – нечётное число раз. Следовательно, чтобы горели все лампы первого типа, нужно нечётное число операций (ч+н+н+н), а чтобы горели все лампы второго и третьего типа, нужно чётное число операций (н+н+н+н), что невозможно, так как эти количества должны совпадать.

11.5. Обозначим всё, как показано на рисунке, прямая l делит пополам периметр и площадь многоугольника, P и Q - её точки пересечения с многоугольником, O- центр вписанной окружности. Заметим, что длина ломаной *PA…BQ* составляет половину периметра всего многоугольника. Тогда площадь многоугольника *OPA… BQ* равна половине произведения длины этой ломаной на радиус вписанной окружности, то – есть половине площади многоугольника. Но, по условию, половине равна и площадь многоугольника *PA…BQ*! Следовательно, O лежит на отрезке PQ, то – есть, на прямой *l*.