

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2025-26 г.г.
Заключительный этап **9 класс**
Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

- 9.1. Для действительных x, y выполнено $x^2 + x \leq y$. Докажите, что $y^2 + y \geq x$.
- 9.2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD > BC$ точка E – основание перпендикуляра из вершины B на основание AD , а M – середина диагонали BD . Докажите, что прямая EM параллельна диагонали AC .
- 9.3. В каждой клетке прямоугольной таблицы записано некоторое натуральное число. Для каждой клетки число, стоящее в ней, равно количеству различных значений чисел в клетках, находящихся в той же строке или том же столбце (включая саму клетку), что и данная. Найдите все таблицы с этим свойством.
- 9.4. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что $p^3 + p = q^2 + q$.
- 9.5. В группе 20 учащихся, каждый из которых дружит ровно с тремя другими. Некоторые пятеро из них 1 марта купили билет на концерт 1 апреля. Дальше в каждый следующий день, начиная со 2 марта, ровно один из тех, кто ещё не купил билет, но, как минимум двое из его друзей к этому моменту уже купили, тоже покупает билет. а) Может ли случиться так, что в итоге все учащиеся купят билет?
б) Известно, что, если разбить всю группу произвольным образом на две подгруппы, то всегда найдутся двое дружащих учащихся из разных подгрупп. Найдите минимальное n такое, что при любой схеме знакомств в группе, и любом выборе n учащихся, купивших билет 1 марта, в итоге описанного выше процесса все учащиеся группы купят билет на концерт.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2025-26 г.г.
Заключительный этап **9 класс**
Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

- 9.1. Для действительных x, y выполнено $x^2 + x \leq y$. Докажите, что $y^2 + y \geq x$.
- 9.2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD > BC$ точка E – основание перпендикуляра из вершины B на основание AD , а M – середина диагонали BD . Докажите, что прямая EM параллельна диагонали AC .
- 9.3. В каждой клетке прямоугольной таблицы записано некоторое натуральное число. Для каждой клетки число, стоящее в ней, равно количеству различных значений чисел в клетках, находящихся в той же строке или том же столбце (включая саму клетку), что и данная. Найдите все таблицы с этим свойством.
- 9.4. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что $p^3 + p = q^2 + q$.
- 9.5. В группе 20 учащихся, каждый из которых дружит ровно с тремя другими. Некоторые пятеро из них 1 марта купили билет на концерт 1 апреля. Дальше в каждый следующий день, начиная со 2 марта, ровно один из тех, кто ещё не купил билет, но, как минимум двое из его друзей к этому моменту уже купили, тоже покупает билет. а) Может ли случиться так, что в итоге все учащиеся купят билет?
б) Известно, что, если разбить всю группу произвольным образом на две подгруппы, то всегда найдутся двое дружащих учащихся из разных подгрупп. Найдите минимальное n такое, что при любой схеме знакомств в группе, и любом выборе n учащихся, купивших билет 1 марта, в итоге описанного выше процесса все учащиеся группы купят билет на концерт.