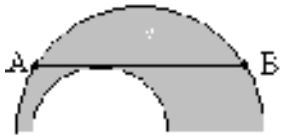
Заочный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008 г
9 класс

9.1. Найти множество всех точек плоскости, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $(|x|+|y|)(|x+y|+|x-y|-2)=0$.

9.2. В большем полукруге расположен меньший, диаметр которого лежит на диаметре большего, как показано на рисунке. Длина хорды АВ, параллельной диаметрам полукругов, и касающейся меньшего полукруга, равна 4 см. Найти площадь части большего полукруга, лежащей вне меньшего.



9.3. Пусть $a_n, n=1,2,3,\ldots$ - произвольная бесконечная строго возрастающая арифметическая прогрессия из натуральных чисел и s_n - сумма цифр числа $a_n, n=1,2,3,\ldots$. Доказать, что среди чисел $s_n, n=1,2,3,\ldots$ найдутся сколь угодно большие.

9.4. В каждой клетке таблицы размера 10 на 10 записан плюс ими минус, причём известно, что среди любых четырёх строк таблицы есть две одинаковых. Доказать, что таблица содержит, как минимум, два одинаковых столбца.

9.5. На каждой стороне правильного выпуклого шестиугольника внутрь него построен равносторонний треугольник. Вокруг каждого такого треугольника описана окружность. Доказать, что эти шесть окружностей вместе покрывают весь шестиугольник.

9.6. Найти все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.

Заочный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008 г
10 класс

10.1. Найти все пары чисел x, y, для которых выполнено равенство $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{y^2+1}+y)=1$.

10.2. В полукруг радиуса 2 вписана окружность ω радиуса 1, касающаяся полукруга в середине О его диаметра АВ. Найти радиус окружности, касающейся ω и полукруга, как показано на рисунке.

10.3. Пусть $a_n, n=1,2,3,\ldots$ - произвольная бесконечная строго возрастающая арифметическая прогрессия из натуральных чисел и s_n - сумма цифр числа $a_n, n=1,2,3,\ldots$. Доказать, что найдётся бесконечно много n таких, что $s_{n+1}<s_n$.

10.4. Каждая клетка таблицы 8 на 8 раскрашена произвольным образом в белый или чёрный цвет. За одну операцию разрешается выбрать некоторый столбец и некоторую строку и поменять цвет всех расположенных в них клеток на противоположный. Цвет клетки, расположенной на их пересечении, при этом меняется только один раз. Всегда ли можно ли за несколько таких операций сделать все клетки доски белыми?

10.5. На разных сторонах угла с вершиной О берутся точки А и В такие, что сумма длин ОА и ОВ постоянна. Доказать, что описанные окружности всевозможных треугольников АОВ проходят, кроме О, ещё через одну общую точку.

10.6. Назовем натуральное число *хорошим*, если его десятичная запись не содержит цифры 7. Доказать, что сумма всех чисел, обратных к хорошим, не превосходит 27.

Заочный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008 г
11 класс

11.1. Найти центр симметрии графика функции $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

11.2. На плоскости расположены три одинаковых шара радиуса 1, каждый из которых касается двух других и плоскости. Найти радиус четвёртого шара, касающегося каждого из этих трёх и плоскости.

11.3. Имеется пять кусков сыра разного веса. Доказать, что один из них можно разрезать на две части так, что получившиеся шесть кусков удастся разделить на две кучки равного веса, по три куска в каждой.

11.4. В каждой клетке таблицы размера 10 на 10 записан плюс ими минус, причём известно, что среди любых четырёх строк таблицы есть две одинаковых. Доказать, что таблица содержит, как минимум, два одинаковых столбца.

11.5. В остроугольном треугольнике ABC высоты BD и AE пересекаются в точке P. Доказать, что $AB^2 = AP \cdot AE + BP \cdot BD$.

11.6. Имеется произвольный бесконечный набор коробок, имеющих форму прямоугольных параллелепипедов с целочисленными сторонами. Доказать, что из части этих коробок можно устроить бесконечную матрёшку, в которой первая коробка вложена во вторую, вторая в третью и т.д. Коробка А вкладывается в коробку Б, если длина, ширина и высота А не больше длины, ширины и высоты Б соответственно. Поворачивать коробки не разрешается.