Всесибирская олимпиада школьников 2018-2019 г.г. по математике
Третий этап
7 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

7.1. Несколько гномиков несли конфеты своему вождю Шмебулоку. По дороге каждый гномик украл и съел по одной конфете у каждого другого. В результате Шмебулоку принесли только 53 конфеты. Сколько конфет было у каждого гномика изначально, если известно, что у всех было поровну?

7.2. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Точки M, N и Kлежат на сторонах BC, AC и AB соответственно, причём $BK = KM = MN = NC$. Оказалось, что $AN = 2AK$. Найдите углы B и C.

7.3. В городе модников живут 15 человек, каждый из которых носит по одной серёжке в каждом ухе. Всего у них 10 медных серёжек, 10 серебряных и 10 золотых. Однажды все жители встали в круг, и оказалось, что любые два соседа не носят серёжек из одного материала. Какое максимальное количество человек в этом городе может носить две серёжки из разных металлов?

7.4. Можно ли квадрат со стороной 8 см разрезать на 8 различных многоугольников, у каждого из которых площадь, выраженная в квадратных сантиметрах, в два раза меньше периметра, выраженного в сантиметрах? Многоугольники, получаемые друг из друга поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.

7.5. В некоторой стране есть 2019 городов, любые два из которых соединены двусторонним рейсом одной из многочисленных авиакомпаний. Известно, что каждая авиакомпания обслуживает не более 2017 рейсов. Докажите, что найдутся три таких города, что все попарные рейсы между ними обслуживают разные авиакомпании.

Всесибирская олимпиада школьников 2018-2019 г.г. по математике
Третий этап
7 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

7.1. Несколько гномиков несли конфеты своему вождю Шмебулоку. По дороге каждый гномик украл и съел по одной конфете у каждого другого. В результате Шмебулоку принесли только 53 конфеты. Сколько конфет было у каждого гномика изначально, если известно, что у всех было поровну?

7.2. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Точки M, N и K лежат на сторонах BC, AC и AB соответственно, причём $BK = KM = MN = NC$. Оказалось, что $AN = 2AK$. Найдите углы B и C.

7.3. В городе модников живут 15 человек, каждый из которых носит по одной серёжке в каждом ухе. Всего у них 10 медных серёжек, 10 серебряных и 10 золотых. Однажды все жители встали в круг, и оказалось, что любые два соседа не носят серёжек из одного материала. Какое максимальное количество человек в этом городе может носить две серёжки из разных металлов?

7.4. Можно ли квадрат со стороной 8 см разрезать на 8 различных многоугольников, у каждого из которых площадь, выраженная в квадратных сантиметрах, в два раза меньше периметра, выраженного в сантиметрах? Многоугольники, получаемые друг из друга поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.

7.5. В некоторой стране есть 2019 городов, любые два из которых соединены двусторонним рейсом одной из многочисленных авиакомпаний. Известно, что каждая авиакомпания обслуживает не более 2017 рейсов. Докажите, что найдутся три таких города, что все попарные рейсы между ними обслуживают разные авиакомпании.

Всесибирская олимпиада школьников 2018-2019 г.г. по математике
Третий этап
8 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

8.1. Юра задумал четыре числа и выписал на доску все их попарные суммы. Когда Юра отвернулся, Сева стёр одну из сумм, после чего на доске остались написаны числа 19, 21, 22, 26 и 28. Какое число было стёрто?

8.2. Про число N известно, что оно равно произведению десяти простых чисел (не обязательно различных). Кроме того, оказалось, что если каждый из этих десяти множителей увеличить на единицу, то полученное произведение будет делиться на N. Чему может быть равно N?

8.3. Про $n > 2$ точек на плоскости известно, что любые три из них можно накрыть треугольником площади не более 1 см^2 (разные тройки, возможно, разными треугольниками). Докажите, что все точки можно одновременно накрыть треугольником площади не более 4 см^2.

8.4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AD = BC$ и $\angle ADB + \angle ACB = \angle CAB + \angle DBA = 30°$. Докажите, что из отрезков DB, CA и DC можно составить прямоугольный треугольник.

8.5. Пусть m и n– нечётные натуральные числа. Каждую клетку таблицы из m строк и n столбцов покрасили в жёлтый или синий цвет. Назовём строку в этой таблице *желтоватой*, если в ней больше жёлтых клеток, чем синих. Назовём столбец *синеватым*, если в нём больше синих клеток, чем жёлтых. Чему равно наибольшее возможное общее количество желтоватых строк и синеватых столбцов?

Всесибирская олимпиада школьников 2018-2019 г.г. по математике
Третий этап
8 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

8.1. Юра задумал четыре числа и выписал на доску все их попарные суммы. Когда Юра отвернулся, Сева стёр одну из сумм, после чего на доске остались написаны числа 19, 21, 22, 26 и 28. Какое число было стёрто?

8.2. Про число N известно, что оно равно произведению десяти простых чисел (не обязательно различных). Кроме того, оказалось, что если каждый из этих десяти множителей увеличить на единицу, то полученное произведение будет делиться на N. Чему может быть равно N?

8.3. Про $n > 2$ точек на плоскости известно, что любые три из них можно накрыть треугольником площади не более 1 см^2 (разные тройки, возможно, разными треугольниками). Докажите, что все точки можно одновременно накрыть треугольником площади не более 4 см^2.

8.4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AD = BC$ и $\angle ADB + \angle ACB = \angle CAB + \angle DBA = 30°$. Докажите, что из отрезков DB, CA и DC можно составить прямоугольный треугольник.

8.5. Пусть m и n– нечётные натуральные числа. Каждую клетку таблицы из m строк и n столбцов покрасили в жёлтый или синий цвет. Назовём строку в этой таблице *желтоватой*, если в ней больше жёлтых клеток, чем синих. Назовём столбец *синеватым*, если в нём больше синих клеток, чем жёлтых. Чему равно наибольшее возможное общее количество желтоватых строк и синеватых столбцов?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Заключительный этап **2018-2019 г.г.**
9 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

9.1. Найти максимальное количество последовательных трёхзначных чисел, в записи каждого из которых есть хотя бы одна нечётная цифра.

9.2. Для положительных чисел a и b выполняется неравенство $a+b>4$. Доказать, что тогда $\frac{a}{b}>3-b$.

9.3. Последовательность чисел a_n, $n=1,2,...$ такова, что, $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n+a_{n+1}}$ для всех натуральных n. Найти a_n, $n=1,2,...$.

9.4. На продолжении медианы AM равнобедренного треугольника ABC с основанием AC за точку M взята точка P такая, что угол CBP равен углу BAP. Найти величину угла ACP.

9.5. Вася и Петя по очереди красят в синий и красный цвета вершины правильного 100-угольника. Вася красит в синий любую не окрашенную на момент его хода вершину, у которой ни одна из двух соседних вершин не окрашена к этому моменту в синий цвет, а Петя красит в красный любую не окрашенную на момент его хода вершину. Вася ходит первым. Какое максимальное количество вершин он всегда может окрасить в синий цвет, как бы ни мешал ему Петя?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Заключительный этап **2018-2019 г.г.**
9 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

9.1. Найти максимальное количество последовательных трёхзначных чисел, в записи каждого из которых есть хотя бы одна нечётная цифра.

9.2. Для положительных чисел a и b выполняется неравенство $a+b>4$. Доказать, что тогда $\frac{a}{b}>3-b$.

9.3. Последовательность чисел $a_n, n=1,2,...$ такова, что, $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n+a_{n+1}}$ для всех натуральных n. Найти $a_n, n=1,2,...$.

9.4. На продолжении медианы AM равнобедренного треугольника ABC с основанием AC за точку M взята точка P такая, что угол CBP равен углу BAP. Найти величину угла ACP.

9.5. Вася и Петя по очереди красят в синий и красный цвета вершины правильного 100-угольника. Вася красит в синий любую не окрашенную на момент его хода вершину, у которой ни одна из двух соседних вершин не окрашена к этому моменту в синий цвет, а Петя красит в красный любую не окрашенную на момент его хода вершину. Вася ходит первым. Какое максимальное количество вершин он всегда может окрасить в синий цвет, как бы ни мешал ему Петя?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Заключительный этап **2018-2019 г.г.**
10 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

10.1. Прямые l и m пересекают ось OX в различных точках, симметричных друг другу относительно начала координат, и параболу $y = x^2$ в точках $(a,a^2),(b,b^2)$ и $(c,c^2),(d,d^2)$ соответственно. Доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$.

10.2. Множество А содержит 15 различных натуральных чисел, не превосходящих 100, одно из которых равно 84, и обладает следующим свойством: модуль разности любых двух различных чисел из А снова содержится в А. Доказать, что А обязательно содержит число 42.

10.3. Пусть в каждой клетке квадратной таблицы n на n, где n - нечётно, стоит 1 или –1. Обозначим произведения всех чисел в первой, второй,..., n-ой строках таблицы через $a_1, a_2, ..., a_n$, а в первом, втором, ... , n-ом столбцах – через $b_1, b_2, ..., b_n$. Доказать, что $a_1 + a_2 + ... + a_n + b_1 + b_2 + ... + b_n \neq 0$.

10.4. Докажите, что для любых положительных чисел a и b и любого натурального n выполняется неравенство $(1+\frac{a}{b})^n + (1+\frac{b}{a})^n \geq 2^{n+1}$.

10.5. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность и длины сторон BC и DC равны, а длина стороны AB равна длине диагонали AC. Пусть точка P – середина дуги CD, не содержащей точку A, и Q – точка пересечения диагоналей AC и BD. Доказать, что прямые PQ и AB перпендикулярны.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Заключительный этап **2018-2019 г.г.**
10 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

10.1. Прямые l и m пересекают ось OX в различных точках, симметричных друг другу относительно начала координат, и параболу $y = x^2$ в точках $(a,a^2),(b,b^2)$ и $(c,c^2),(d,d^2)$ соответственно. Доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$.

10.2. Множество А содержит 15 различных натуральных чисел, не превосходящих 100, одно из которых равно 84, и обладает следующим свойством: модуль разности любых двух различных чисел из А снова содержится в А. Доказать, что А обязательно содержит число 42.

10.3. Пусть в каждой клетке квадратной таблицы n на n, где n - нечётно, стоит 1 или –1. Обозначим произведения всех чисел в первой, второй,..., n-ой строках таблицы через $a_1, a_2, ..., a_n$, а в первом, втором, ... , n-ом столбцах – через $b_1, b_2, ..., b_n$. Доказать, что $a_1 + a_2 + ... + a_n + b_1 + b_2 + ... + b_n \neq 0$.

10.4. Докажите, что для любых положительных чисел a и b и любого натурального n выполняется неравенство $(1+\frac{a}{b})^n + (1+\frac{b}{a})^n \geq 2^{n+1}$.

10.5. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность и длины сторон BC и DC равны, а длина стороны AB равна длине диагонали AC. Пусть точка P – середина дуги CD, не содержащей точку A, и Q – точка пересечения диагоналей AC и BD. Доказать, что прямые PQ и AB перпендикулярны.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Заключительный этап **2018-2019 г.г.**
11 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

11.1. Последовательность чисел $a_n, n=1,2,...12$ такова, что, $a_1=1, a_{12}=2$. $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}$ для всех натуральных $n=1,2,...,11$. Найти a_4.

11.2. Найти все натуральные числа n, которые можно представить в виде суммы $n=x+y+(x,y)+[x,y]$ для некоторых натуральных чисел x и y. Здесь (x,y) и $[x,y]$ обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел x и y соответственно.

11.3. Вася и Петя по очереди красят в синий и красный цвета клетки доски размера 10 на 10 клеток. Вася красит в синий любую не окрашенную на момент его хода клетку, у которой ни одна из соседних по стороне клеток уже не окрашена в синий цвет, а Петя красит в красный любую не окрашенную на момент его хода клетку. Вася ходит первым, какое максимальное количество клеток он всегда может окрасить в синий цвет, как бы ни мешал ему Петя?

11.4. В прямоугольном треугольнике ABC точка M – середина гипотенузы BC, а точки P и T делят катеты AB и AC в отношении AP:PB=AT:TC=1:2. Обозначим за K точку пересечения отрезков BT и PM, за E – точку пересечения отрезков CP и MT, и за O - точку пересечения отрезков CP и BT. Доказать, что четырёхугольник OKME – вписанный.

11.5. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$x^2+x-1=y,\ \ y^2+y-1=z,\ \ z^2+z-1=x.$$

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Заключительный этап **2018-2019 г.г.**
11 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

11.1. Последовательность чисел $a_n, n=1,2,...12$ такова, что, $a_1=1, a_{12}=2$. $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}$ для всех натуральных $n=1,2,...,11$. Найти a_4.

11.2. Найти все натуральные числа n, которые можно представить в виде суммы $n=x+y+(x,y)+[x,y]$ для некоторых натуральных чисел x и y. Здесь (x,y) и $[x,y]$ обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел x и y соответственно.

11.3. Вася и Петя по очереди красят в синий и красный цвета клетки доски размера 10 на 10 клеток. Вася красит в синий любую не окрашенную на момент его хода клетку, у которой ни одна из соседних по стороне клеток уже не окрашена в синий цвет, а Петя красит в красный любую не окрашенную на момент его хода клетку. Вася ходит первым, какое максимальное количество клеток он всегда может окрасить в синий цвет, как бы ни мешал ему Петя?

11.4. В прямоугольном треугольнике ABC точка M – середина гипотенузы BC, а точки P и T делят катеты AB и AC в отношении AP:PB=AT:TC=1:2. Обозначим за K точку пересечения отрезков BT и PM, за E – точку пересечения отрезков CP и MT, и за O - точку пересечения отрезков CP и BT. Доказать, что четырёхугольник OKME – вписанный.

11.5. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$x^2+x-1=y,\ \ y^2+y-1=z,\ \ z^2+z-1=x.$$