Всесибирская олимпиада школьников 2010 г. по математике I этап
9 класс

1. Мне и тебе сейчас вместе 35 лет. Мне сейчас вдвое больше лет, чем было тебе тогда, когда мне было столько лет, сколько тебе сейчас. Сколько лет сейчас мне и сколько - тебе?

2. Найти все решения в целых числах уравнения: $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах B и D прямые, стороны AB и BC равны, а длина перпендикуляра, опущенного из вершины B на сторону AD равна 1 см. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$.

4. Обозначим последнюю цифру натурального числа A за a, число, полученное из A вычёркиванием последней цифры – за B.Доказать, что А делится на 13 тогда и только тогда, когда $B + 4a$ длится на 13**.**

5. Восемь школьников решили восемь задач, каждую задачу решили пять школьников. Доказать, что всегда найдутся два школьника таких, что каждая задача решена хотя бы одним из них.

Всесибирская олимпиада школьников 2010 г. по математике I этап
9 класс

1. Мне и тебе сейчас вместе 35 лет. Мне сейчас вдвое больше лет, чем было тебе тогда, когда мне было столько лет, сколько тебе сейчас. Сколько лет сейчас мне и сколько - тебе?

2. Найти все решения в целых числах уравнения: $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах B и D прямые, стороны AB и BC равны, а длина перпендикуляра, опущенного из вершины B на сторону AD равна 1 см. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$.

4. Обозначим последнюю цифру натурального числа A за a, число, полученное из A вычёркиванием последней цифры – за B.Доказать, что А делится на 13 тогда и только тогда, когда $B + 4a$ длится на 13**.**

5. Восемь школьников решили восемь задач, каждую задачу решили пять школьников. Доказать, что всегда найдутся два школьника таких, что каждая задача решена хотя бы одним из них.

Всесибирская олимпиада школьников 2010 г. по математике **I этап**

10 класс

1. Из Останкино на Шаболовку шёл Степашка. Ровно в полдень, когда он преодолел треть пути, вдогонку ему из Останкино выбежал Филя, а навстречу ему с Шаболовки – Хрюша. Филя обогнал Степашку в 13 часов, и встретил Хрюшу в 13 часов 30 минут. Когда встретятся Степашка и Хрюша?

2. Доказать, что среди любых шести последовательных натуральных чисел, больших десяти, найдётся число, меньшее суммы всех своих делителей, включая единицу, но не включая само число.

3. В прямоугольнике $ABCD$ точка E - основание перпендикуляра из вершины B на диагональ AC, точки P и Q – середины отрезков AE и CD соответственно. Доказать, что угол BPQ - прямой.

4. Многочлен $f(x)$ таков, что уравнение $f(x)=x$ не имеет решений. Доказать, что уравнение $f(f(x))=x$ тоже не имеет решений.

5. В стране некоторые пары городов соединены дорогами с двусторонним движением так, что из каждого города можно проехать в каждый, возможно, через другие. Доказать, что найдётся город такой, что если мы закроем для движения все дороги, из него выходящие, то по-прежнему, из каждого оставшегося города можно будет проехать в каждый.

Всесибирская олимпиада школьников 2010 г. по математике **I этап**

10 класс

1. Из Останкино на Шаболовку шёл Степашка. Ровно в полдень, когда он преодолел треть пути, вдогонку ему из Останкино выбежал Филя, а навстречу ему с Шаболовки – Хрюша. Филя обогнал Степашку в 13 часов, и встретил Хрюшу в 13 часов 30 минут. Когда встретятся Степашка и Хрюша?

2. Доказать, что среди любых шести последовательных натуральных чисел, больших десяти, найдётся число, меньшее суммы всех своих делителей, включая единицу, но не включая само число.

3. В прямоугольнике $ABCD$ точка E - основание перпендикуляра из вершины B на диагональ AC, точки P и Q – середины отрезков AE и CD соответственно. Доказать, что угол BPQ - прямой.

4. Многочлен $f(x)$ таков, что уравнение $f(x)=x$ не имеет решений. Доказать, что уравнение $f(f(x))=x$ тоже не имеет решений.

5. В стране некоторые пары городов соединены дорогами с двусторонним движением так, что из каждого города можно проехать в каждый, возможно, через другие. Доказать, что найдётся город такой, что если мы закроем для движения все дороги, из него выходящие, то по-прежнему, из каждого оставшегося города можно будет проехать в каждый.

Всесибирская олимпиада школьников 2010 г. по математике **I этап**

11 класс

1. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

2. Билет, номер которого состоит из шести цифр и может начинаться с нуля, называется счастливым, если сумма трёх его первых цифр равна сумме трёх его последних цифр. Доказать, что сумма номеров всех счастливых билетов делится на 13.

3. Пусть многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют корни, а $f(x)+g(x)$ - не имеет. Доказать, что тогда многочлен $f(x)-g(x)$ имеет корни.

4. В треугольнике ABC величины углов B и C равны 40 градусов, а биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Доказать, что $BC = BD + AD$.

5. Записаны тридцать натуральных чисел 1,2,3,…,30. За одну операцию мы можем вычесть из некоторых из них произвольное одинаковое число. Какое минимальное число операций необходимо, чтобы сделать все числа равными нулю?

Всесибирская олимпиада школьников 2010 г. по математике **I этап**

11 класс

1. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

2. Билет, номер которого состоит из шести цифр и может начинаться с нуля, называется счастливым, если сумма трёх его первых цифр равна сумме трёх его последних цифр. Доказать, что сумма номеров всех счастливых билетов делится на 13.

3. Пусть многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют корни, а $f(x)+g(x)$ - не имеет. Доказать, что тогда многочлен $f(x)-g(x)$ имеет корни.

4. В треугольнике ABC величины углов B и C равны 40 градусов, а биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Доказать, что $BC = BD + AD$.

5. Записаны тридцать натуральных чисел 1,2,3,…,30. За одну операцию мы можем вычесть из некоторых из них произвольное одинаковое число. Какое минимальное число операций необходимо, чтобы сделать все числа равными нулю?