

**Заключительный этап Всесибирской Открытой Олимпиады
Школьников по физике 10 марта 2024 г.
7 класс**

Возможные решения с баллами. Максимальный балл за задачу – 10.

1) При сплаве на плотах по длинной неисследованной реке туристы используют беспилотник с камерой. Максимальная скорость беспилотника равна $V=5$ м/с, а время полета T_1 на одной зарядке аккумулятора равно 10 минут. Туристы ждут, пока беспилотник отлетит вниз по течению на $L=500$ м, и начинают сплав, изучая русло перед плотом через камеру все время летящего впереди беспилотника. К моменту разрядки аккумулятора туристы возвращают беспилотник на плот, сразу пристают к берегу и устраивают привал на $T_2=25$ минут, пока аккумулятор заряжается от солнечной батареи. Затем путь продолжается. Какова максимально возможная средняя скорость такого движения туристов вдоль реки, если средняя скорость ее течения равна $U=6$ км/ч?

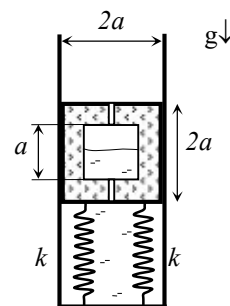
Решение. Сначала заметим, что максимальное непрерывное время движения плота на воде равно $T_1-L/V=500$ с (+3 балла). Так будет, если беспилотник удаляется от плота на L с максимальной скоростью. Причем не важно, как он движется после этого (+1 балл).

За это время плот спустится вдоль реки на $S=U(T_1-L/V)$ (+2 балла). Согласно условию задачи, следующий отрезок такой длины плот преодолеет после привала продолжительностью T_2 . Таким образом, средняя скорость движения вдоль реки у туристов с плотом составит

$$V_{\text{ср}} = S / (T_1 + T_2) = U(T_1 - L/V) / (T_1 + T_2) = 10/7 \text{ км/час}$$

(+4 балла за явно сформулированный и обоснованный ответ).

2) В вертикальный сосуд квадратного сечения вставлен поршень в виде куба с ребром $2a$. В центре этого куба имеется полость, также имеющая форму куба, но с ребром a . Эта полость соединена с окружающей средой очень тонкими вертикальными каналами (см. рис.). Поршень прикреплен ко дну сосуда двумя пружинами жесткостью k . В сосуд заливают жидкость плотностью ρ . В момент, когда полость заполнена наполовину, пружины не деформированы. Какой объем жидкости надо еще долить, чтобы весь поршень оказался в жидкости? Считать, что трение, внешнее давление, а также зазоры между поршнем и стенками сосуда пренебрежимо малы. Поршень до края сосуда не доходит.



Решение. Обозначим массу поршня M , деформацию пружин в конечном состоянии X , площадь сечения вертикального канала s (она считается очень малой).

Условие равновесия поршня в ситуации, когда пружины не деформированы:

$$Mg - (4a^2 - s)\rho ga + (a^2 - s)\rho ga/2 = 0 \quad (+2 \text{ балла})$$

Здесь учтено, что *разница* давлений в жидкости определяется *разностью* глубин. В любом случае при заливании жидкости поршень сдвигается вверх (+1 балл).

Пренебрегая вкладом ненулевого сечения каналов, т.е. считая $a^2 \gg s$, получаем, что

$$Mg = a^3 \rho g \cdot 7/2 \quad (+1 \text{ балл})$$

Из этого уравнения также следует, что плотность материала поршня равна $\rho/2$.

В том случае, когда поршень погружается полностью, равнодействующая сил давления жидкости на него становится равной

$$(4a^2 - s)\rho g 2a - (a^2 - s)\rho ga \cdot 3/2 + (a^2 - s)\rho ga/2 = (7a^3 - sa)\rho g \quad (+1 \text{ балл})$$

Это равенство можно получить и формально применяя закон Архимеда к погруженному телу с полостью (так как силы давления на вертикальные грани поршня были бы все равно горизонтальны, если бы поршень был окружен жидкостью).

А новое условие равновесия поршня имеет вид

$$Mg - (7a^3 - sa)\rho g + 2kX = 0 \quad (+2 \text{ балла})$$

При условии $a^2 \gg s$, получаем

$$X = \frac{-Mg + 7\rho ga^3}{2k} = \frac{7\rho ga^3}{4k} \quad (+1 \text{ балл})$$

Значит, доливаемый объем жидкости должен заполнить всю полость (a^3) до конца и освободившийся из-за смещения поршня объем под поршнем ($4Xa^2$), т.е. искомый объем жидкости равен

$$V = \frac{a^3}{2} + \frac{7\rho ga^5}{k} \quad (+2 \text{ балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ}).$$

Можно было бы решить задачу быстрее, заметив, что после доливания воды добавочная сила, растягивающая пружины, равна $7a^3\rho g/2$ (архимедовой силе, действующей на половину поршня) и обойтись меньшим числом уравнений.

3) У N быстрых белок есть $M < N$ шишек, и они все сразу играют с ними, без остановки бегая по сосне вверх-вниз. Игра такая: каждая из белок поднимает одну шишку на самый верх сосны, бросает эту шишку вниз, бежит до самой земли, ловит ту шишку, которая в этот момент падает на землю, и опять поднимается. Определите, сколько времени T падает вниз шишка, если белка, поднимая шишку вверх, тратит время T_1 , а сбегает вниз по сосне за время T_2 .

Решение. Обозначим переменной $X > 0$ число белок, которые одновременно бегут вверх по сосне, поднимая шишки, $Y > 0$ - число белок, которые одновременно бегут по сосне вниз, $Z > 0$ - число шишек, которые одновременно летят между верхушкой сосны и землей.

В этих обозначениях $N = X + Y$, $M = X + Z$, так как каждая из поднимающихся белок несет одну шишку. Также заметим, что каждая белка забегает на вершину через T_1/X после предыдущей (+1 балл), добегает до земли через T_2/Y (+1 балл), а шишки долетают до земли через время T/Z (+1 балл).

Также заметим, что все повторяется циклически, т.е. частота бросания шишек (количество брошенных шишек за единицу времени, например, в расчете на секунду), равна частоте подхватывания падающей шишки, частоте подъема белок на верх сосны и т.д., т.е.

$$\frac{T_1}{X} = \frac{T_2}{Y} = \frac{T}{Z} \quad (+2 \text{ балла})$$

Из свойств дробей известно, что из этих равенств следует

$$\frac{T_1}{X} = \frac{T_2}{Y} = \frac{T_1 + T_2}{X + Y} = \frac{T_1 + T}{X + Z} \quad (+2 \text{ балла})$$

Проводя преобразования, получаем

$$T_1 X + T_1 Z + T_2 X + T_2 Z = T_1 X + T_1 Y + T X + T Y$$

$$T_2(X + Z) + T_1(Z - Y) = T(X + Y)$$

Имея в виду, что $Y - Z = N - M$, получаем

$$T = \frac{T_1(M - N) + T_2 M}{N} = \frac{(T_1 + T_2)M}{N} - T_1$$

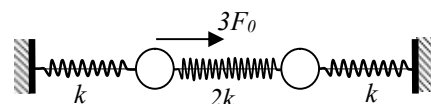
(+3 балла за явно сформулированный и обоснованный ответ).

Из ответа видно, что не при всяком наборе N , M , T_1 и T_2 можно реализовать описанную в условии ситуацию.

Можно также заметить, что, например, на вершине белка появляется через время $\frac{T_1 + T_2}{N}$ после предыдущей (каждая из N белок тратит на один оборот $T_1 + T_2$), а шишка,

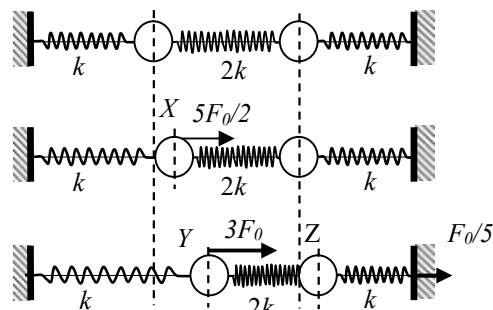
которую несет эта же белка, появится через то же самое время, но равное $\frac{T_1 + T}{M}$ (время, за которое проходит один оборот каждая из M шишек, равно $T_1 + T$).

4) Между двумя стенками закреплен стержень, на который надето 2 одинаковых бусины. Между бусинами и стержнем есть трение, и чтобы двигать любую бусину вдоль стержня надо прикладывать к ней, как минимум, силу F_0 . Эти бусины прикрепляют пружинами к стенкам, а также друг к другу, как показано на рисунке. Жесткость пружин равна, начиная от стенки, $k, 2k, k$ (см. рис.). К левой бусине прикладывают внешнюю силу, направленную вправо, и медленно увеличивают эту силу до значения $3F_0$. Найдите силу, которая в конечном итоге действует на правую стену со стороны прикрепленной к ней пружины. Вначале все пружины не деформированы.



Решение. Сначала определим, до какой величины должна возрасти внешняя сила, чтобы правая бусина сдвинулась с места. Согласно условию, для этого надо, чтобы со стороны центральной пружины к правой бусине была приложена сила F_0 (+1 балл). Здесь учтено, что правая пружина исходно не деформирована и ни на бусину, ни на стенку не действует.

Значит, левая бусина должна быть смещена на $X = F_0/2k$ (+1 балл). Чтобы деформации левой и центральной пружин были этому равны, к левой бусине должна быть приложена сила $F_1 = \frac{F_0}{2} + F_0 + F_0 = \frac{5F_0}{2}$ (+1 балл). Здесь учтено, что кроме сил упругости передвигаемой пружине приложена сила трения, направленная против движения, т.е. влево и туда же, куда и обе силы упругости, действующие со стороны пружин.



Так как $F_1 < 3F_0$, то при дальнейшем увеличении внешней силы будут двигаться обе бусины (+1 балл). Значит, если правая бусина сместится на Z , а левая – на Y от начальных положений, то условие равновесия правой бусины запишется так:

$F_0 = 2k(Y-Z) - kZ = 2kY - 3kZ$ (+1 балл). Здесь F_0 – величина силы трения, приложенной к правой бусине, смещающей ее вдоль стержня. В правой части записаны силы упругости, приложенные к этой бусине со стороны соприкасающихся пружин.

Для левой бусины (при этих расположениях бусин) будет справедливо равенство

$3F_0 = F_0 + 2k(Y-Z) + kY$ (+1 балл). Здесь левая часть уравнения – внешняя сила, в правой части суммируются сила трения и силы упругости, так как они все направлены в одну сторону.

Решая эту систему уравнений, получаем, что $Y = 4F_0/5k$ (+1 балл), $Z = F_0/5k$ (+1 балл).

Можно было бы также получить этот результат, заметив, что $Z = \frac{2k}{2k+k}(Y-X)$.

Отсюда непосредственно следует, что искомая сила, действующая на правую стенку, равна $kZ = F_0/5$, направленная вправо (+2 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

Для справки, на левую стенку действует сила, также направленная вправо и равная $kH = 4F_0/5$. Т.е. сумма внешних сил, приложенных к системе из трех пружин и двух бусин, равна нулю, как и должно быть в равновесии. Этим силами являются направленные влево две силы трения, действующие со стороны стержня и равные F_0 каждая, и силы со стороны стенок, а также направленная вправо внешняя сила, приложенная к левой бусине и равная $3F_0$. С помощью этого соображения получить искомый результат можно проще.