Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Заключительный этап **7 класс** **1 марта 2015 г.**

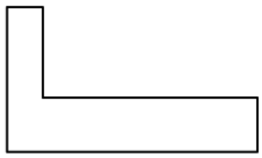
Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

7.1. Составьте три несократимые (не обязательно правильные) дроби, произведение которых равно 1, используя в качестве числителей и знаменателей шесть чисел из набора $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. (Каждое число можно использовать один раз или не использовать вовсе).

7.2. Оля, Олег, Поля и Паша участвовали в соревновании и заняли первый 4 места, после соревнования Поля сразу же ушла, а остальные сделали по 2 заявления, причем правду сказал только один ребенок, а остальные оба раза соврали. Каждый сказал, что первое место занял он. Кроме этого, Оля сказала, что все нечетные места заняли мальчики; Олег, что они с Олей заняли два соседних места; Паша, что все нечетные места заняли люди, чьи имена начинаются на О. Определите, кто какое место занял.

7.3. Известно, что у всех кракозябр есть рога или крылья (возможно, и то, и то). По результатам всемирной переписи кракозябр, выяснилось, что у 20% кракозябр, имеющих рога, есть ещё и крылья, а 25% кракозябр, у которых есть крылья, имеют ещё и рога. Сколько кракозябр осталось в мире, если известно, что их больше 25, но меньше 35?

7.4. Дана следующая фигура (см. рисунок, все углы прямые). С помощью линейки без делений разделите его на два многоугольника равной площади.



7.5. Вася выписал на доске все натуральные числа от 1 до 2014, после чего Петя стёр 1011 из них. Докажите, что среди оставшихся чисел найдутся два таких, что одно будет делителем другого.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Заключительный этап **1 марта 2015 г.**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

8 класс

8.1. Оля, Олег и Паша заняли первые три места в соревновании. Каждый из них сказал, что занял первое место. Оля, кроме этого, сказала, что все нечетные места заняли мальчики, а Олег, что Оля не права. Известно, что дети либо всегда врут, либо всегда говорят правду. Кто какое место занял?

8.2. Запишите в строку 20 чисел так, чтобы сумма любых трёх чисел, записанных подряд, была положительна, а сумма всех 20 чисел была отрицательна.

8.3. Какое максимальное число ладей можно расположить на шахматной доске 8 на 8 так, чтобы каждая ладья била не более чем одну другую? Ладья бьет все клетки вертикали и горизонтали, на которых стоит.

8.4. На сторонах треугольника AB, BC и AC треугольника ABC произвольным образом выбраны соответственно точки C_1, A_1, B_1. Пусть K_1, K_2, K_3 - середины AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что эти точки не могут лежать на одной прямой.

8.5. В некотором итальянском городе ведут свои тёмные делишки 20 мафиозных кланов, причём известно, что каждый клан враждует хотя бы с 14-ю другими. Всегда ли найдутся 4 клана, попарно враждующих друг с другом?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Заключительный этап **9 класс** **1 марта 2015 г.**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

9.1. В школе лодырей устроили соревнования по списыванию и подсказке. Известно, что 75% учеников школы вообще не явились на соревнования, а все остальные приняли участие хотя бы в одном из соревнований. При подведении итогов оказалось, что в обоих соревнованиях участвовало 10% всех явившихся и что участвовавших в соревновании по подсказке было в полтора раза больше, чем участвовавших в соревновании по списыванию. Найти наименьшее возможное число учеников в школе лодырей.

9.2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD взята произвольная точка M и через M параллельно диагоналям проведены прямые, пересекающие стороны AB и CD соответственно в точках P и Q. Доказать, что площади треугольников MPB и MQC равны.

9.3. Окружность разбита на двадцать равных дуг двадцатью точками, являющимися вершинами правильного 20-ти угольника, каждая вершина окрашена в один из трёх цветов, все три цвета присутствуют. Доказать, что всегда можно выбрать по одной вершине каждого цвета так, что образованный этими вершинами треугольник содержит центр окружности. Центр может лежать внутри треугольника или на одной из его сторон.

9.4. На классном вечере каждый мальчик танцевал по крайней мере с половиной девочек, а каждая девочка – не более, чем с половиной мальчиков. Доказать, что как девочек, так и мальчиков на классном вечере было чётное число.

9.5. Найти все натуральные n такие, что при любом разбиении множества всех натуральных чисел от 1 до n включительно на два подмножества, в одном из подмножеств обязательно найдутся два различных числа, сумма которых является квадратом натурального числа.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Заключительный этап **10 класс** **1 марта 2015 г.**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Из пунктов А и В не одновременно выехали друг навстречу другу автомобилист и велосипедист. Встретившись в точке С, они тотчас развернулись и поехали обратно с теми же скоростями. Доехав до своих пунктов А и В, они снова развернулись, поехали и встретились второй раз в точке D. Здесь они вновь развернулись и так далее. В какой точке отрезка АВ произойдёт их 2015-ая встреча?

10.2. Найти все значения параметров a,b,c , при которых система уравнений $\begin{cases} ax+by=c, \\ bx+cy=a, \\ cx+ay=b, \end{cases}$ имеет хотя бы одно отрицательное решение (когда $x,y<0$).

10.3 В равностороннем треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки P и Q соответственно такие, что $AP:PB=CQ:QA=2$. Пусть O – точка пересечения отрезков CP и BQ, доказать, что угол AOC – прямой.

10.4. 25 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000 таковы, что произведение любых двух из них является квадратом некоторого натурального числа. Доказать, что и сами числа являются квадратами натуральных чисел.

10.5. Окружность разбита на 21 равную дугу двадцатью одной точкой, являющимися вершинами правильного 21- угольника, каждая вершина окрашена в один из трёх цветов, все три цвета присутствуют. Доказать, что всегда можно выбрать по одной вершине каждого цвета так, что образованный этими вершинами треугольник содержит центр окружности.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Заключительный этап **11 класс** **1 марта 2015 г.**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

11.1. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 40 км, в 4 часа утра вышел пешеход, а в 7-20 утра выехал велосипедист, который догнал пешехода точно посредине между А и В, после чего оба продолжили движение. Из В в А в 8-30 выехал второй велосипедист с той же скоростью, что и первый, который встретился с пешеходом спустя час после встречи пешехода с первым велосипедистом. Найти скорости пешехода и велосипедистов.

11.2. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC со стороной 10 взяты точки P и Q соответственно такие, что отрезок PQ касается вписанной в треугольник окружности и его длина равна 4. Найти площадь треугольника APQ.

11.3. Найдите множество, образуемое решениями систем уравнений $\left\{\begin{array}{l} ax+y=2a+3, \\ x-ay=a+4, \end{array}\right\}$ при всевозможных значениях параметра a .(Для каждого значениях a находится решение (x,y) данной системы и все эти решения вместе составляют искомое множество точек на координатной плоскости.)

11.4. Докажите, что в любой компании из 13 человек либо найдётся человек, знающий четырёх других, либо найдутся четверо, попарно не знакомых. Знакомства обоюдны — если А знает Б, то и Б знает А.

11.5. Найти все решения в натуральных числах уравнения: $2^x+3^y=z^2$ **.**