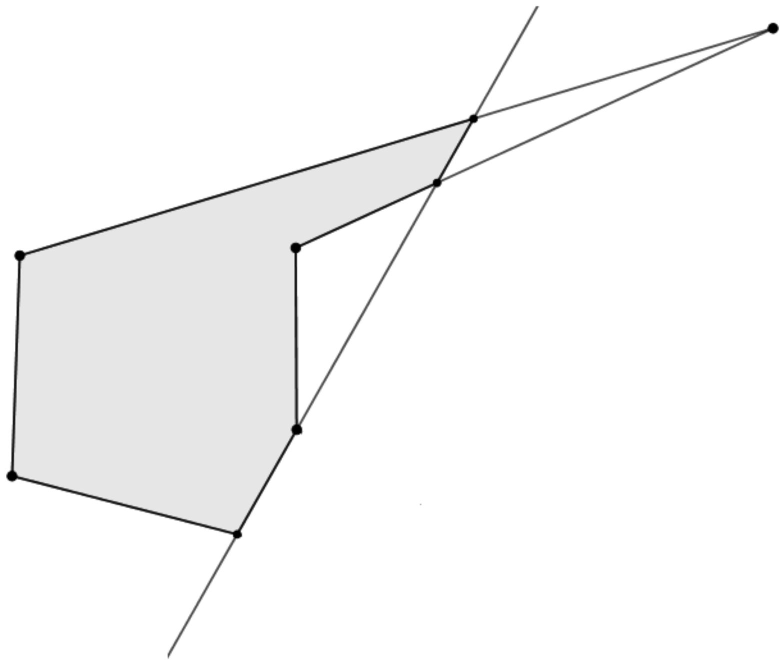
Решения и критерии проверки задач Первого этапа Всесибирской олимпиады школьников 2018-2019 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Вася нарисовал шестиугольник, а затем выбрал две его вершины и провёл через них прямую. Эта прямая отрезала от шестиугольника семиугольник. Как такое могло быть?

Решение: На этом чертеже прямая отсекает от шестиугольника семиугольник (подкрашен)



Критерии:

Любой пример без обоснования – 7 баллов.

7.2. Скучающий Юра сложил два числа и получил третье. Затем, он изменил каждую цифру в этом примере на 1 в ту или иную сторону (например, из числа 239 он мог получить число 148, но не мог получить 140). Мог ли новый пример оказаться верным?

Ответ: нет.

Решение: Будем следить за чётностью чисел. Заметим, что все числа поменяли чётность. Таким образом, чётность суммы поменялась, с одной стороны, два раза (вместе с чётностью каждого из слагаемых), с другой стороны, один раз (сама сумма). Значит, новый пример не может быть верным.

Критерии:

Ответ – 0 баллов.

Ответ с примерами – 0 баллов.

Перебор с пропущенными случаями – не более 1 балла.

Идея чётности – 3 балла.

7.3. В школе 1000 школьников и 35 классов. Каждому школьнику на лбу написали, сколько в его классе учеников. Чему может равняться сумма чисел, обратных написанным? Перечислите все варианты и докажите, что других нет. Напомним, что к числу a обратным является число $1/a$.

Ответ: 35.

Решение: Пусть в классе а человек, тогда сумма дробей, соответствующих числам из этого класса, равна 1 (a дробей, равных $1/a$). Всего классов 35. Значит, общая сумма равна 35.

Критерии:

Ответ – 0 баллов.

Ответ с примерами – 0 баллов.
Идея разбиения на классы и подсчёт сумм отдельно для каждого класса без дальнейших продвижений – 5 баллов.

7.4. Арсений сел за компьютер между 16 и 17 часами, когда часовая и минутная стрелки были направлены в противоположные стороны, а встал из-за него в этот же день между 22 и 23 часами, когда стрелки совпали. Сколько времени Арсений сидел за компьютером?
Решение: Посмотрим, где будут находиться стрелки через 6 часов после того, как Арсений сел за компьютер. Минутная 6 раз пройдёт круг целиком и вернётся на место. Часовая пройдёт ровно половину круга. Поэтому угол между стрелками изменится на 180 градусов, т.е. стрелки совпадут. Очевидно, что между 22 и 23 часами существует ровно один момент, когда стрелки совпадают, поэтому это и будет время, когда Арсений встанет из-за компьютера. Таким образом, Арсений сидел за компьютером 6 часов.
Критерии:
Только ответ – 1 балл.
В подобном решении не отмечено, что такой момент между 22 и 23 ровно один – снимать 1 балл.

7.5. Несколько семиклассников решали задачи. Учитель не помнит, сколько было детей и кто из них сколько задач решил. Зато он помнит, что, с одной стороны, каждый решил больше, чем пятую от того, что решили остальные, а с другой стороны, каждый решил меньше, чем треть от того, что решили остальные. Сколько могло быть семиклассников? Найдите все варианты и докажите, что других нет.
Ответ: 5 семиклассников.
Решение: Пусть один семиклассник решил а задач, a все остальные $S - a$. Тогда

$$a < (S - a)/3$$
$$3a < S - a$$
$$4a < S$$
$$a < S/4.$$

Аналогично,

$$(S - a)/5 < a$$
$$S - a < 5a$$
$$S < 6a$$
$$S/6 < a.$$

Таким образом, если школьников 4 или меньше, и каждый решил меньше четверти всех задач, то значит, все вместе решили не все задачи, что невозможно. Аналогично, если школьников 6 или больше, и каждый решил больше пятой части всех задач, тогда все вместе они решили больше чем все задачи, что невозможно. Значит, всего школьников 5.
Критерии:
Ответ – 0 баллов.
Решено в предположение, что каждый решил больше пятой части всех задач и меньше четверти всех задач – 3 балла.

Решения и критерии проверки задач Первого этапа Всесибирской олимпиады школьников 2018-2019 г.г. по математике 8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Расставьте по кругу цифры от 1 до 9 таким образом, что любые две соседние цифры, если их прочитать по часовой стрелке, образуют составное двузначное число. Достаточно привести один пример.

Решение: Например, подойдёт расстановка 1 2 7 4 5 6 3 9 8. Возможны и другие решения.

Критерии:

Любой верный пример без объяснения – 7 баллов.

8.2. В соревновании участвует 2018 команд по доте, все разной силы. В поединке между двумя командами всегда побеждает более сильная. Все команды побились на пары и сыграли одну игру. Затем разбились на пары другим образом и сыграли ещё одну игру. Оказалось, что ровно одна команда выиграла обе игры. Как такое могло быть?

Решение: Пронумеруем команды по возрастанию силы от 1 до 2018. В первом туре проведём игры 1 – 2, 3 – 4, …, 2017 – 2018, во втором – 2018 – 1, 2 – 3, 4 – 5, …, 2016 – 2017. Очевидно, что только команда с номером 2018 победит в обоих турах.

Критерии:

Любой верный пример без объяснения – 7 баллов.

8.3. Юра выбрал три целых попарно различных числа a, b, c. Затем сложил числа a и b и получил число c. Потом он перемножил числа b и c и получил a. Найдите все такие тройки чисел и докажите, что других нет.

Ответ: $a = -4$, $b = 2$, $c = -2$.

Решение: Итак, $a + b = c$, $bc = a$. Значит, $bc + b = c$. Преобразуем это выражение в $b(c + 1) = c$. Левая часть делится на $c + 1$, значит, и правая часть делится. То есть, c кратно $c + 1$. При этом, если число $c + 1$ делится на m, то с даёт при делении на m остаток $m - 1$. Значит, либо $c + 1 = 1$ (но тогда $c = 0$ и $b = 0$), либо $c + 1 = -1$, тогда $c = -2$, а отсюда $b = 2$, $a = -4$.

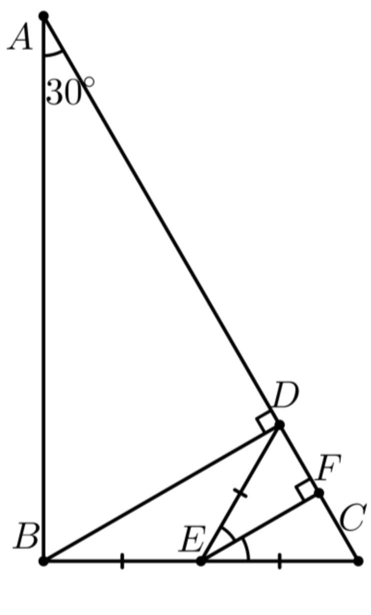
Критерии:

Ответ – 0 баллов.

Ответ с проверкой – 1 балл.

Получено равенство $b(c + 1) = c$, дальше рассматривается несколько случаев, но не все – не более 3 баллов.

8.4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B и углом A, равным 30, провели высоту BD. Затем в треугольнике BDC провели медиану DE, а в треугольнике DEC – биссектрису EF. Найдите отношение FC к AC.



Решение: Так как угол BDC прямой, отрезок DE – это медиана в прямоугольном треугольнике BDC, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $BE = ED = EC$. В частности, треугольник EFC равнобедренный, значит, EF – медиана, и $2FC = DC$. Так как угол BAD равен 30, то угол ABD равен 60, и, следовательно, угол DBC равен 30.

Наконец, в прямоугольном треугольнике BDC угол DBC равен 30, следовательно, противолежащий катет равен половине гипотенузы, т.е. $2DC = BC$. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 30, следовательно, $2BC = AC$. Соединяя все полученные равенства, получаем, что $8FC = AC$, т.е. искомое отношение равно 1:8.

Критерии:
Только ответ – 0 баллов.
Замечено, что $DE = EB = EC$ – 1 балл.
Доказано, что $FC = FD$ – 1 балл.
Хотя бы раз применено свойство треугольника с углом 30 – 1 балл.
Все предыдущие баллы суммируются.

8.5. Одиннадцать лучших футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному матчу. При этом оказалось, что каждая команда забила в первом матче 1 гол, во втором матче 2 гола, .., в десятом матче — 10 голов. Какое наибольшее количество сыгранных матчей могло закончиться вничью?

Решение: По условию каждая команда в первой игре забила 1 гол. В случае ничьей она и пропустила 1 гол. Тогда для другой команды эта встреча также была первой. Так как количество команд нечётно, их нельзя разбить на пары. Значит, хотя бы одна из команд сыграла не вничью свой первый матч. Аналогичное верно для вторых, третьих, …, десятых матчей. Поскольку каждый матч учтён дважды, результативных матчей (то есть не ничейных) было не менее 5, а тогда ничьих было не больше $11\cdot10/2 - 5 = 50$.

Приведём пример турнира с 50 ничьими. Занумеруем команды числами от 1 до 11. Составим 5 пар из соседних команд (оставив 11-ю команду без пары). Сначала играют между собой команды в парах, а затем 11-я играет с 1-й (со счётом 1 : 2). Снова объединяем команды в пары, исключая на этот раз 1-ю, и пусть снова встретятся команды в парах (и вновь будет 5 ничьих). Теперь расположим команды по кругу с шагом 2, а именно в порядке 1 3 5 7 9 11 2 4 6 8 10 (у каждой команды оба соседа поменялись). Применив ту же схему розыгрыша, получим ещё 11 игр, из которых одна результативная. Далее применим эту же схему для шага 3, 4 и 5.

Можно даже выписать конкретную таблицу:

Все играют первую игру, везде ничьи	1 2, 3 4, 5 6, 7 8, 9 10
11 – первая игра, 1 – вторая игра	11 1
Все играют вторую игру, везде ничьи	2 3, 4 5, 6 7, 8 9, 10 11
Все играют третью игру, везде ничьи	1 3, 5 7, 9 11, 2 4, 6 8
10 – третья игра, 1 – четвёртая игра	10 1
Все играют четвёртую игру, везде ничьи	3 5, 7 9, 11 2, 4 6, 8 10
Все играют пятую игру, везде ничьи	1 4, 7 10, 2 5, 8 11, 3 6
9 – пятая игра, 1 – шестая игра	9 1
Все играют шестую игру, везде ничьи	4 7, 10 2, 5 8, 11 3, 6 9
Все играют седьмую игру, везде ничьи	1 5, 9 2, 6 10, 3 7, 11 4
8 – седьмая игра, 1 – восьмая игра	8 1
Все играют восьмую игру, везде ничьи	5 9, 2 6, 10 3, 7 11, 4 8
Все играют девятую игру, везде ничьи	1 6, 11 5, 10 4, 9 3, 8 2
7 – девятая игра, 1 – десятая игра	7 1
Все играют десятую игру, везде ничьи	6 11, 5 10, 4 9, 3 8, 2 7

Критерии:
Только ответ – 0 баллов.
Только оценка, что ничьих не более 50 – 2 балла.
Только пример на 50 ничьих – 3 балла.
Есть оценка и верная идея примера, но есть неточности – 5 или 6 баллов в зависимости от размеров неточностей.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап 2018-2019 г.г.

9 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

9.1. Из пунктов А и Б навстречу друг другу с постоянными скоростями одновременно выехали соответственно мотоциклист и велосипедист. Спустя 20 минут после старта мотоциклист оказался на 2 км ближе к Б, чем середина АБ, а спустя 30 минут велосипедист оказался на 3 км ближе к Б, чем середина АБ. Через сколько минут после старта встретились мотоциклист и велосипедист?

Ответ. Через 24 минуты.

Решение. За 10 минут мотоциклист проезжает ¼ часть пути от А до Б и ещё 1 км, а велосипедист 1/6 часть пути от А до Б минус 1 км. Следовательно, за 10 минут оба они, двигаясь навстречу, проедут ¼ + 1/6=5/12 пути от А до Б. Значит, они вместе преодолеют путь от А до Б, то есть встретятся, через 10*12/5=24 минуты.

Критерии оценивания. Верный ответ с проверкой: 3 балла. Верно составлена система уравнений: 3 балла.

9.2. Может ли число, оканчивающееся на 222, быть нетривиальной степенью некоторого натурального числа, то есть представляться в виде x^y, где $x, y > 1$- натуральные числа?

Ответ. Нет, не может**.**

Решение. Число, оканчивающееся на 2, чётно, поэтому искомое в условии основание степени x должно быть чётно. В таком случае его $y \geq 2$-ая степень должна делиться на 2^y и, следовательно, делиться на 4. Но, в соответствии с признаком делимости на 4, число, оканчивающееся на 222, не делится на 4, так как две его последних цифры образуют число 22, не делящееся на 4.

Критерии оценивания. Замечено, что x должно быть чётно: 2 балла. Показано, что степень должна делиться на 4: 2 балла. Доказано, что число, оканчивающееся на 222 не может делиться на 4: 3 балла.

9.3. Вася должен на каждой грани нескольких кубиков написать по одной цифре так, чтобы любую упорядоченную комбинацию из трёх цифр от 000 до 999 включительно можно было получить, выбрав некоторых три различных кубика и положив их подходящими сторонами вверх в нужном порядке. При этом цифры 6 и 9 при повороте на 180 градусов не считаются переходящими друг в друга. Какое минимальное количество кубиков должен использовать Вася?

Ответ. 5.

Решение. Ввиду того, что среди возможных комбинаций должны быть 000,111,222,…,999, каждая цифра должна встречаться не менее, чем на трёх разных гранях (разных кубиков), поэтому всего на гранях должны быть записаны не менее 30 цифр, следовательно, должно быть не меньше 30:6=5 кубиков.

С другой стороны, покажем что, если цифры записаны так, что каждая цифра от 0 до 9 встречается на гранях трёх разных кубиков, то требование задачи выполнено. Рассмотрим произвольную комбинацию АВС из трёх цифр, первым выберем любой кубик, содержащий цифру А. Цифра В встречается кроме, возможно, первого кубика, ещё минимум на двух других, берём любой из них в качестве второго. Наконец, цифра С встречается ещё минимум на одном, кроме перового и второго кубиков, возьмём его в качестве третьего. Разложив их по порядку соответствующими гранями вверх, получим требуемую комбинацию АВС. Заметим, что рассуждения не зависят от того, различаются ли цифры А,В,С, или нет.

Приведём возможный способ записи цифр на гранях пяти кубиков так, чтобы каждая цифра встречалась на гранях трёх разных кубиков. Запишем в ряд все цифры от 0 до 9 с повторами по 3

раза: 000111222…888999. Первые пять цифр этого ряда запишем на первые грани пяти разных кубиков, вторые пять цифр запишем на вторые грани пяти разных кубиков, и так далее.
Критерии оценивания. Доказательство минимальности 5 кубиков: 3 балла. Приведение верного примера для 5 кубиков с обоснованием: 4 балла. Отсутствие обоснования: минус 2 балла.

9.4. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка P такая, что PC=2AP. Точка O – центр вписанной окружности треугольника PBC, E – точка касания этой окружности с прямой PB. Оказалось, что PB=BC. Доказать, что прямая AE параллельна прямой PO.
Доказательство. Поскольку треугольник PBC равнобедренный, вписанная в него окружность касается основания PC в его середине M. При этом, по свойству касательных PE=PM=PC/2=PA, следовательно, треугольник AEM вписан в окружность с диаметром AM и угол AEM – прямой. Значит, прямая AE перпендикулярна прямой ME. С другой стороны, в равнобедренном треугольнике EPM прямая PO является биссектрисой угла EPM и перпендикулярна его основанию ME. Таким образом, прямые AE и PO перпендикулярны ME и, следовательно, параллельны.
.**Критерии оценивания**. Перпендикулярность AE и EM: 3 балла. Перпендикулярность PO и EM: 2 балла.

9.5. На доске записаны 10 чисел: 1,2,3,4,4,5,5,11,12,13. С ними можно производить операции двух типов: либо из любых девяти из них вычесть 1, а к оставшемуся прибавить 9, либо наоборот, из одного вычесть 9, а к остальным прибавить по 1. При этом отрицательные числа получать нельзя. Можно ли, применив несколько таких операций, сделать все десять чисел разными?
Ответ. Нет**.**
Решение. Заметим, что при любой из описанных операций разность между любыми двумя написанными числами либо не изменяется, либо изменяется на 10. Разобьём все числа на 5 пар: 1 и 11, 2 и 12,3 и 13, 4 и 4,5 и 5, разности чисел в каждой паре равны 0 или 10. Если после нескольких операций все числа станут разными, то разности чисел в каждой паре станут не меньше 10.
Меньшие числа в парах будут не меньше 0,1,2,3,4, большие числа в парах не меньше 10,11,12,13,14 и сумма всех полученных чисел будет не меньше 0+10+1+11+2+12+3+13+4+14=70. Однако сумма исходных чисел равна 60, и при каждой операции она, очевидно, не меняется, поэтому сумма полученных чисел тоже должна равняться 60 – противоречие.
Критерии оценивания. Замечено, что при любой из описанных операций разность между любыми двумя написанными числами либо не изменяется, либо изменяется на 10: 2 балла.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап 2018-2019 г.г.

10 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

10.1. Найти все числа a и b, для которых равенство $|ax+by|+|bx+ay|=|x|+|y|$ выполнено при всех значениях переменных x и $.y$.

Ответ. $a=\pm 1, b=0$ или $a=0, b=\pm 1$, всего четыре пары значений.

Решение. Подставим в формулу из условия сначала $x=1, y=0$, получим $|a|+|b|=1$. Затем подставим $x=1, y=1$, откуда $|a+b|=1$. Наконец, положив $x=1, y=-1$, имеем $|a-b|=1$.Из двух последних равенств получаем $a+b=\pm(a-b)$, откуда либо $a=0$, либо $b=0$. Из первого равенства тогда следует $a=\pm 1, b=0$ или $a=0, b=\pm 1$.

Убедимся, что найденные пары a и b удовлетворяют условию задачи. Например, если $a=1, b=0$, то $|ax+by|+|bx+ay|=|ax|+|ay|=|a|(|x|+|y|)=|x|+|y|$. Остальные варианты проверяются аналогично.

Критерии оценивания. Если приведён верный ответ с проверкой: 2 балла. Только ответ: 0 баллов. Если отсутствует проверка того, что найденные кандидаты в ответы $a=\pm 1, b=0$ или $a=0, b=\pm 1$ удовлетворяют условию задачи: снимаем 2 балла.

10.2. Найти все пары натуральных чисел x и y таких, что их наименьшее общее кратное равно $1+2x+3y$.

Ответ. $x=4, y=9$ или $x=10, y=3$.

Решение. Пусть сначала $x \le y$ Заметим, что y не может делиться на x, иначе наименьшее общее кратное x и $.y$ равно y, а это меньше $1+2x+3y$. В частности, $x>1$.

Далее, наименьшее общее кратное x и y делится на x и $.y$, поэтому $1+2x+3y$ делится на x и $.y$, а значит $1+2x$ делится на y и $1+3y$ делится на x. Из делимости $1+2x$ на y следует $1+2x=ky \ge y$, что вместе с предположением $x \le y$ влечёт $k=1, y=2x+1$. Тогда из делимости $1+3y=6x+4$ на x и $x>1$ следуют делимость 4 на x и возможности $x=2,4$. Проверка показывает, что решением в этом случае является $x=4, y=9$.

Теперь рассмотрим случай $x \ge y > 1$, из делимости $1+3y \le 1+3(x-1)=3x-2$ на x следует $1+3y=x$ или $1+3y=2x$. Если $1+3y=x$, то $1+2x=6y+3$ делится на y, тогда 3 делится на y и $x=10, y=3$ является решением задачи.

Если $1+3y=2x$, то y нечётно, $y=2k+1, k>0$, $x=3k+2$.Тогда $1+2x=6k+5$ должно делиться на $y=2k+1$, значит $6k+5-3(2k+1)=2$ делится на $y=2k+1 \ge 3$, что невозможно.

Критерии оценивания. Только правильный ответ: с проверкой: 1 балл. Замечено, что y не может делиться на x и $x, y>1$.: 1 балл. Верно найдено только одно решение: 4 балла.

10.3. Найти количество различных способов расстановки 8 ладей в клетках шахматной доски 8 на 8 таких, чтобы каждая клетка доски находилась под боем хотя бы одной из них. Ладьи могут бить друг друга, ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, в которой она стоит, включая саму клетку, в которой стоит.

Ответ. $2\cdot 8^8-8!$.

Решение. Докажем, что расстановка 8 ладей, удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда либо в каждой горизонтали стоит по ладье, либо в каждой вертикали стоит по ладье, либо и то и

другое одновременно. Положение ладей в горизонталях или вертикалях при этом произвольное. Достаточность приведённого условия очевидна.
Если есть вертикаль, в которой нет ладьи, то каждая из её 8 клеток должна биться ладьёй, стоящей на одной с ней горизонтали. Следовательно, если ладьи стоят не во всех вертикалях, то они стоят на всех горизонталях.

Расстановок, при которых в каждой вертикали стоит ладья будет 8^8, так как для каждой из 8 ладей есть 8 независимых способов размещения в одной из клеток соответствующей вертикали. Аналогично, есть 8^8 расстановок, при которых на каждой горизонтали стоит ладья. При этом расстановки, в которых одновременно и в каждой вертикали, и на каждой горизонтали стоит ладья, то есть когда ладьи не бьют друг друга, учитывается дважды, поэтому ответ получается вычитанием из 8^8+8^8 количества таких расстановок, равного 8!. Итого получаем ответ $2\cdot 8^8-8!$

Критерии оценивания. Доказательство того, что, либо в каждой горизонтали стоит по ладье, либо в каждой вертикали стоит по ладье: 2 балла. Правильный подсчёт числа расстановок, где в каждой горизонтали (вертикали) стоит по ладье: 1 балл. Правильный подсчёт числа расстановок, в которых и в каждой вертикали, и на каждой горизонтали стоит ладья: 1 балл.
Вычитание числа таких расстановок из числа 8^8+8^8: 3 балла.

10.4. Пусть для положительных чисел a,b,c,x,y,z выполнены соотношения: $ac-b^2>0$ и $az-2by+cx=0$. Доказать, что тогда $xz-y^2\le 0$.

Доказательство. От противного, пусть $xz-y^2>0$. Запишем соотношения в виде $ac>b^2, xz>y^2, 2by=az+cx$. Все части неравенств положительны, перемножив первые два и домножив на 4, а также возведя третье в квадрат, получим $4b^2y^2=(az+cx)^2<4ac\cdot xz=4az\cdot cx$, откуда $(az-cx)^2<0$, что невозможно. Ввиду полученного противоречия предположение о том, что $xz-y^2>0$ неверно, следовательно $xz-y^2\le 0$, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Отсутствие комментариев о положительности частей при умножениях неравенств: минус 1 балл.

10.5. Доказать, что разность длин диагонали A_1A_4 и стороны A_1A_2 правильного десятиугольника $A_1A_2A_3...A_{10}$ равна радиусу его описанной окружности. Десятиугольник называется *правильным*, если все его углы равны между собой и все его стороны равны между собой.

Доказательство. Величины дуг описанной окружности, на которые её разбивают вершины вписанного десятиугольника, все равны по 36 градусов, поэтому величина дуги между вершинами десятиугольника равна 36 градусов, умножить на разность номеров этих вершин по модулю 10. Заметим, что дуги A_2A_5 и A_1A_8 описанной окружности равны, следовательно, диагональ A_5A_8 параллельна стороне A_1A_2. Дуги A_5A_8 и A_1A_4 также равны, следовательно, равны длины соответствующих диагоналей A_5A_8 и A_1A_4. Аналогично можно заметить, что параллельны диагонали A_1A_8, A_2A_7 и A_4A_5, причём A_2A_7 является диаметром описанной окружности, так как соответствующая ей дуга A_2A_7 равна 180 градусов. Отметим Р – точку пересечения диагоналей A_2A_7 и A_5A_8 и О – центр описанной окружности, совпадающий с серединой диагоналей A_2A_7 .и A_4A_9, параллельной A_5A_8. Четырёхугольники $A_1A_2PA_8$ и OPA_5A_4 - параллелограммы, значит, A_1A_2 = A_8P и $PA_5=OA_4=R$-радиусу описанной окружности. Следовательно, разность длин A_1A_4 и A_1A_2 равна разности длин A_5A_8 и A_8P, то есть равны $PA_5=OA_4=R$-радиусу описанной окружности, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Замечены равенства и параллельности определённых диагоналей в правильном 10-угольнике: 1 балл.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап 2018-2019 г.г.

11 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

11.1. Параболы P и S являются графиками функций $y = kx^2$ и $y = kx^2 + b, b > 0$ соответственно. Доказать, что любая хорда параболы P, касающаяся параболы S, делится этой точкой касания на два равных отрезка.

Доказательство. Пусть хорда AB параболы P касается параболы S в точке M с координатами $(x_0, kx_0^2 + b)$. Выпишем уравнение прямой AB: $y = 2kx_0(x - x_0) + kx_0^2 + b = 2kx_0x - kx_0^2 + b$, абсциссы x_1 и x_2 точек A и B её пересечения с параболой P являются решениями уравнения $2kx_0x - kx_0^2 + b = kx^2$, то есть квадратного уравнения $kx^2 - 2kx_0x + kx_0^2 - b = 0$ По теореме Виета сумма корней этого уравнения равна $x_1 + x_1 = -\dfrac{-2kx_0}{k} = 2x_0$. Следовательно, середина отрезка AB имеет абсциссу $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = x_0$ и совпадает с M.

Критерии оценивания. Верно выписано уравнение касательной к S: 2 балла.
Верно записано уравнение для нахождения абсцисс точек A и B: 1 балл.

11.2. Найти количество пятизначных чисел, содержащих в записи две цифры, одна из которых делится нацело на другую.

Ответ. 89760=$9 \cdot 10^4 - 2 \cdot 5!$.

Решение. Подсчитаем количество пятизначных чисел, у которых ни одна из цифр записи не делится нацело ни на одну другую, а потом вычтем полученное число из общего количества пятизначных чисел, равного 90000, получим ответ задачи.
Заметим, что число, ни одна из цифр записи которого не делится нацело ни на одну другую, не содержит в записи 0 (0 делится на любую цифру), 1 (любая цифра делится на 1) и не содержит одинаковых цифр (они всегда делятся друг на друга). Следовательно, минимальная цифра такого пятизначного числа может равняться 2,3,4 или 5. Если это 2, то остальные четыре цифры нечётны, это в точности 3,5,7 и 9, но 9 делится на 3. Если это 3, остальные четыре цифры могут равняться в точности только 4,5,7,8, но 8 делится на 4. Остаются только числа, составленные из цифр 4,5,6,7,9 или 5.6,7,8,9. В каждом случае есть по 5!=120 вариантов всевозможных расстановок этих цифр, итого 240 чисел. Следовательно, искомых в задаче чисел 90000-240=89760.

Критерии оценивания. Идея применения принципа вычитания: 3 балла. Верный подсчёт количества 5-значных чисел: 1 балл. Верный подсчёт количества 5-значных чисел, у которых ни одна из цифр записи не делится нацело ни на одну другую: 3 балла. Если в решении не учитывается делимость 0 на любую цифру или делимость любой цифры на 1 или равных цифр друг на друга: минус 3 балла.

11.3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M и P такие, что отрезок PM параллелен стороне BC. Из точки M восстановлен перпендикуляр к прямой AB, а из P восстановлен перпендикуляр к AC, их точку пересечения обозначена за T. Доказать, что точки A, T и O – центр описанной окружности треугольника ABC – лежат на одной прямой.

Доказательство. Утверждение задачи равносильно тому, что угол CAO равен углу CAT. Сначала рассмотрим случай, когда угол ABC не больше 90 градусов. 1) Найдём угол CAO. В описанной окружности треугольника ABC угол ABC является вписанным, а угол AOC –

соответствующим ему центральным, поэтому величина AOC равна удвоенной величине ABC. Из равнобедренного треугольника AOC получаем, что величина CAO равна 90-ABC.
2) Найдём угол CAT. Заметим, что четырёхугольник AMTP является вписанным в окружность с диаметром AT, поэтому вписанные углы CAT=PAT и PMT равны, как опирающиеся на общую хорду PT. А угол PMT равен углу PMB минус 90 градусов, С учётом параллельности MP и BC, PMB=180 – ABC, следовательно, CAT=PAT=(180-ABC)-90=90-ABC. Таким образом, углы CAO и CAT равны, откуда следует утверждение задачи.
В случае, когда величина угла ABC больше 90 градусов, рассуждения проводятся по той же схеме со следующими поправками: величина CAO равна ABC-90 и CAT=PAT=PMT=ABC-90.
Критерии оценивания. Нахождение угла CAO: 1 балл. Обоснование вписанности четырёхугольника AMTP: 2 балла. Равенство PAT=PMT = углу PMB минус 90 градусов: 1 балл. Равенство PMB=180 – ABC: 1 балл. Не рассмотрен случай, когда величина угла ABC больше 90 градусов: снимаем 1 балл.

11.4. Пусть a,b,c произвольные числа из интервала $(0,1)$. Доказать, что одно из трёх произведений $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$ всегда не больше 1/4.

Доказательство. Квадратичная функция $f(x)=x(1-x)$ достигает максимума, равного $\frac{1}{4}$, в точке $x=\frac{1}{2}$. Следовательно, произведение $a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c)$ не превосходит $(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$. Предположим, что каждое из трёх произведений $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$ больше ¼, перемножив их, получим $a(1-b)\cdot b(1-c)\cdot c(1-a)=a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c)>(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$ - противоречие. Таким образом, одно из них всегда не больше ¼.

Критерии оценивания. Доказательство того, что $a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c)\le\frac{1}{64}$: 4 балла.

11.5. Найти все пары натуральных чисел a и b такие, что оба числа $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ и $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ являются целыми.
Ответ. $(a,b)=(2,2),(3.3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$ - шесть пар.
Решение. При замене a на b и b на a дроби в условии меняются местами, поэтому можно сразу предположить, что $a\le b$, добавив потом решения, симметричные полученным. При этом случай $a=b=1$ исключается ввиду неравенства $b^2-a\ne 0$, поэтому $b^2-a>0$ и первая дробь должна являться натуральным числом. Значит, $a^2+b=n(b^2-a)\ge b^2-a$, то есть $a+b\ge b^2-a^2=(a+b)(b-a)$, делим на натуральное число $a+b>0$, получаем $b-a\le 1$. С учётом неравенства $a\le b$ получим $a=b$ либо $b=a+1$.
В первом случае $\frac{a^2+b}{b^2-a}=\frac{a^2+a}{a^2-a}=\frac{a+1}{a-1}=1+\frac{2}{a-1}$ - натуральное число, и $a-1$ делит 2, откуда $a=2$ или $a=3$. Вторая дробь при этом равна первой, поэтому оба варианта подходят. Получаем здесь два ответа $a=b=2$ и $a=b=3$.
Во втором случае $\frac{a^2+b}{b^2-a}=\frac{a^2+a+1}{a^2+a+1}=1$, $\frac{b^2+a}{a^2-b}=\frac{a^2+3a+1}{a^2-a-1}=1+\frac{4a+2}{a^2-a-1}$, откуда $4a+2$ делится на a^2-a-1, последнее число является натуральным при натуральном $a\ge 2$, так как минимальное значение этой квадратичной функции достигается при $a=\frac{1}{2}$, она возрастает при $x\ge\frac{1}{2}$ и положительна при $a=2$. Следовательно, должно быть $4a+2\ge a^2-a-1$, то есть

$a^2-5a-3\le 0$. Решая квадратичное неравенство, получаем $a\in(\frac{5-\sqrt{37}}{2},\frac{5+\sqrt{37}}{2})$, откуда $a=1,2,3,4,5$, проверяем подстановкой, $a=1,2$ подходят, а $a=3,4,5$ - нет. Получаем ещё два ответа $a=1,b=2$ и $a=2,b=3$. Отметим, что в первом из этих случаев вторая дробь будет целым числом –5, что разрешено условием. Остаётся добавить симметричные решения $a=2,b=1$ и $a=3,b=2$, .и получим полный ответ: $(a,b)=(2,2),(3.3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$- всего шесть пар решений.

Критерии оценивания. Верно получено, что $a=b$ либо $b=a+1$.: 3 балла. Найдены только решения с $a=b$: 2 балла. Найдены только решения с $a+1=b$: 2 балла. Забыли добавить симметричные решения: минус 1 балл. Решения $a=1,b=2$ и $a=2,b=1$ ошибочно исключены ввиду отрицательности одной из дробей в условии: минус 2 балла. Отсутствие проверок в случаях $a=1,b=2$ и $a=2,b=3$. снимаем 1 балл.