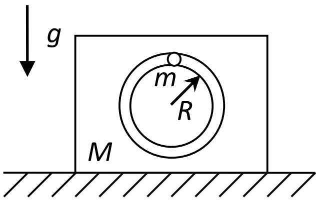
Заключительный этап Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике 10 марта 2024 г.

Решения и критерии оценки, 10 класс



1. На столе покоится брусок массой M, внутри которого сделан тонкий кольцевой канал радиусом R (плоскость кольца вертикальна). В самой верхней точке этого канала находится шарик массой m. Поскольку положение шарика неустойчивое, то он из-за малого внешнего возмущения сваливается в правую сторону и начинает скользить по каналу. Опишите качественно поведение бруска за время одного оборота шарика по каналу. Найдите при этом максимальную скорость υ бруска. Ускорение свободного падения g. Трения нет. Брусок не подпрыгивает.

Возможное решение

Брусок будет иметь максимальную скорость, когда шарик достигнет самой нижней точки кольцевого канала. < 2 балла >. Пусть u – скорость шарика в низшей точке. Тогда согласно закону сохранения импульса

$$mu = M\upsilon . < 2 \text{ балла} >$$

Закон сохранения энергии

$$2mgR = \frac{mu^2}{2} + \frac{M\upsilon^2}{2} . < 2 \text{ балла} >$$

Брусок будет двигаться таким образом, что положение центра масс всей системы будет неизменным. < 2 балла >

Решая систему уравнений, получим ответ

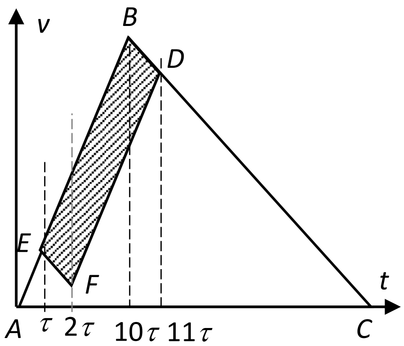
Ответ: $\upsilon = \sqrt{\frac{4gRm^2}{M(m+M)}}$ < 2 балла >

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Утверждение о том, что брусок будет иметь максимальную скорость, когда шарик достигнет низшей точки кольцевого канала		2
2	Закон сохранения импульса	$mu = M\upsilon$	2
3	Закон сохранения энергии	$2mgR = \frac{mu^2}{2} + \frac{M\upsilon^2}{2}$	2
4	Описание качественного поведения движения бруска	Брусок будет двигаться таким образом, что положение центра масс всей системы будет неизменным	2
5	Получение ответа	$\upsilon = \sqrt{\frac{4gRm^2}{M(m+M)}}$	2

2. Ракета стартует вертикально и при включенном двигателе движется вверх с ускорением a, $a>g$. Двигатель ракеты должен был отработать в течение времени 10τ непрерывно, но в результате произошедшего сбоя выключился через время τ после пуска, в момент времени 2τ снова включился и далее отработал оставшиеся 9τ. Насколько ниже оказалась точка наибольшего подъема ракеты в результате перерыва в работе двигателя? Ускорение свободного падения g, сопротивлением воздуха пренебречь.

Возможное решение



Из приведенного графика скорости ракеты видно, что разница в максимальной высоте подъема ракеты при нормальной и аварийной работе двигателя равна разнице ее перемещения в интервале *EBD* в первом случае и в интервале *EFD* во втором <2 балла>. Перемещение при равноускоренном движении $S = v_1 t + \frac{at^2}{2} = \frac{(v_1+v_2)t}{2}$, где v_1, v_2 - начальная и конечная скорости на промежутке времени протяженностью t. Скорость, отвечающая точке F, $v_F = v_E - g\tau$, где $v_E = a\tau$ - скорость, отвечающая точке E. Аналогично для точек D и B: $v_D = v_B - g\tau$, для B и E: $v_B = v_E + 9a\tau$, для F и D: $v_F = v_D - 9a\tau$ <2 балла>.

Перемещение на участке *EBD*:

$$S(EBD) = \frac{(v_E+v_B)9\tau}{2} + \frac{(v_B+v_D)\tau}{2} = \frac{119a\tau^2 - g\tau^2}{2} \text{ <2 балла>}$$

Перемещение на участке *EFD*

$$S(EFD) = \frac{(v_E+v_F)\tau}{2} + \frac{(v_F+v_D)9\tau}{2} = \frac{101a\tau^2 - 19g\tau^2}{2} \text{ <2 балла>}$$

Вычитая разницу перемещений $S(EBD) - S(EFD)$, получаем ответ.

Ответ: $\delta H = 9\tau^2(a+g)$ <2 балла>

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Утверждение, что разница высот подъема ракеты определяется промежутком $<\tau, 11\tau>$	$\delta H = S(EBD) - S(EFD)$	2
2	Определение соотношения между скоростями ракеты в крайних точках промежутков равноускоренного движения	$v_E = a\tau$, $v_F = v_E - g\tau$, $v_D = v_B - g\tau$, $v_B = v_E + 9a\tau$	2
3	Определение перемещения на участке *EBD*	$S(EBD) = \frac{(v_E+v_B)9\tau}{2} + \frac{(v_B+v_D)\tau}{2} = \frac{119a\tau^2 - g\tau^2}{2}$	2
4	Определение перемещения на участке *EFD*	$S(EFD) = \frac{(v_E+v_F)\tau}{2} + \frac{(v_F+v_D)9\tau}{2} = \frac{101a\tau^2 - 19g\tau^2}{2}$	2
5	Получение ответа	$\delta H = 9\tau^2(a+g)$	2

3. Космонавт бросил мяч в сторону космической станции так, что мяч начал двигаться со скоростью v относительно него. Неожиданно космонавт увидел, что удаляется от станции и не пристегнут к ней. К счастью, мяч упруго отскочил от корпуса станции и вновь попал в руки космонавта. С какой минимальной скоростью космонавт должен бросить мяч относительно себя, чтобы вернуться на станцию и спасти свою жизнь. Масса космонавта M, а мяча – $m < M$, *масса станции гораздо больше, чем M*.

Возможное решение

Закон сохранения импульса при броске (скорость мяча относительно станции u, скорость космонавта относительно станции V)

$$mu = MV, \qquad u + V = v. < 2 \text{ балла} >$$

Отсюда находим скорости <1 балл>

$$u = \frac{Mv}{M+m}, \qquad V = \frac{mv}{M+m}$$

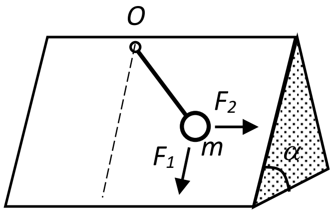
От тяжелой станции мяч отскакивает с той же по модулю скоростью <1 балл>.

При этом его импульс меняется на величину $\Delta P = 2mu$. Первоначальный импульс системы, состоящей из космонавта и мяча, равен нулю. Конечный ее импульс $P_{fin} = \Delta P < 2 \text{ балла} >$, причем в конечном состоянии космонавт приобретает незначительную скорость по направлению к станции, а мяч принимает на себя весь импульс системы, так что $mU_{min} \geq \Delta P < 2 \text{ балла} >$.

Ответ: $U_{min} = 2vM/(M+m). < 2 \text{ балла} >$

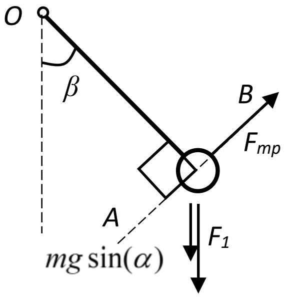
Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Записан закон сохранения импульса для первого броска	$mu = MV, \qquad u + V = v$	2
2	Найдены скорости мяча и космонавта	$u = \frac{Mv}{M+m}, \qquad V = \frac{mv}{M+m}$	1
3	Указано, что скорость мяча после отскока по модулю не изменяется		1
4	Определен импульс системы из мяча и космонавта после удара мяча	$P_{fin} = \Delta P, \Delta P = 2mu$	2
5	Указано, что мяч в конечном состоянии должен иметь импульс не меньше импульса системы	$mU_{min} \geq \Delta P$	2
6	Получен ответ	$U_{min} = \frac{2vM}{M+m}$	2

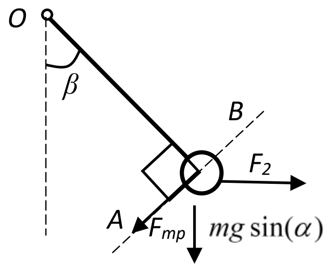


4. На дощатом настиле, наклоненном на угол α относительно горизонтали, лежит тело массой m, привязанное веревкой к вбитому в настил гвоздю O. Веревка натянута под некоторым углом к направлению вдоль склона. Для того, чтобы сдвинуть тело с места, нужно приложить минимальную силу F_1 вдоль склона вниз или минимальную силу F_2, если ее прикладывать вдоль склона горизонтально. Определите минимальную силу в плоскости склона, которой можно сдвинуть тело, если выбрать ее оптимальное направление.

Возможное решение



Сила трения действует на тело в направлении AB, противоположном его возможному перемещению и перпендикулярном веревке <3 балла>. В этом направлении скатывающая сила и сила, прикладываемая для перемещения тела, также имеют не нулевые проекции. Предположим, что веревка расположена под углом β к направлению вдоль склона вниз, а коэффициент трения μ. В первом случае проекция на AB силы тяжести $mg\sin(\beta)\sin(\alpha)$, силы $F_1, F_1\sin(\beta)$, и сила трения $F_{тр} = \mu mg\cos(\alpha)$, так что



$\mu mg\cos(\alpha) = mg\sin(\alpha)\sin(\beta) + F_1\sin(\beta)$. (1) <2 балла>.

Во втором случае

$\mu mg\cos(\alpha) = -mg\sin(\alpha)\sin(\beta) + F_2\cos(\beta)$. (2) <2 балла>.

Оптимальным является направление силы BA. В этом случае

$\mu mg\cos(\alpha) = mg\sin(\alpha)\sin(\beta) + F_{\min}$. (3) <1 балл>.

Из уравнений (1) и (3) $F_{\min} = F_1\sin(\beta)$

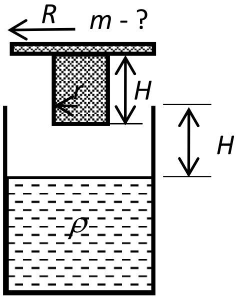
Из уравнений (1) и (2) $2mg\sin(\alpha)\sin(\beta) = F_2\cos(\beta) - F_1\sin(\beta)$, откуда находим

$$\frac{1}{\sin(\beta)} = \frac{\sqrt{(F_1 + 2mg\sin(\alpha))^2 + F_2^2}}{F_2}$$ и получаем ответ.

Ответ: $F_{\min} = \dfrac{F_1F_2}{\sqrt{(F_1 + 2mg\sin(\alpha))^2 + F_2^2}}$ <2 балла>.

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Утверждение: сила трения направлена перпендикулярно веревке		3
2	Условие равновесия при силе, направленной вниз	$\mu mg\cos(\alpha) = mg\sin(\alpha)\sin(\beta) + F_1\sin(\beta)$	2
3	Условие равновесия при силе, направленной горизонтально	$\mu mg\cos(\alpha) = -mg\sin(\alpha)\sin(\beta) + F_2\cos(\beta)$	2
3	Условие равновесия при оптимальном направлении силы	$\mu mg\cos(\alpha) = mg\sin(\alpha)\sin(\beta) + F_{\min}$	1
4	Получение ответа	$F_{\min} = \dfrac{F_1F_2}{\sqrt{(F_1 + 2mg\sin(\alpha))^2 + F_2^2}}$	2



5. В цилиндрический сосуд налита жидкость плотностью ρ. От ее поверхности до верхней кромки сосуда расстояние H. В сосуд вставляют поршень (см. рис.), имеющий в широкой части радиус R, равный внутреннему радиусу сосуда, а в узкой части радиус r. Высота узкой части поршня H. До прихода в равновесное состояние поршень опускается на высоту h от положения первого касания поверхности жидкости. Определите массу поршня, если атмосферное давление P_a. Температура постоянная.

Возможное решение

В равновесном состоянии на поршень массой m снизу и сверху действует сила давления воздуха, сила давления жидкости и сила тяжести.

Если давление воздуха под поршнем P, то, с учетом закона Паскаля,

$$mg = \pi R^2 (P - P_a) + \rho g \delta h \pi r^2$$ <3 балла>,

где δh - глубина погружения поршня в жидкость. Эта глубина $\delta h = h + h_1$, где высота подъема жидкости h_1 определяется из условия сохранения ее объема:

$$h_1 \pi (R^2 - r^2) = h \pi r^2$$ <2 балла>.

Таким образом, $\delta h = \dfrac{hR^2}{R^2 - r^2}$ Давление воздуха под поршнем найдем из закона Бойля-Мариотта

$$P_a V_0 = PV$$ <1 балл>.

Начальный объем воздуха $V_0 = \pi (R^2 - r^2) H$. Поскольку при опускании поршня меняется только объем воздуха, $V = V_0 - \pi R^2 h$. В результате

$$P = \frac{P_a (R^2 - r^2) H}{(R^2 - r^2) H - R^2 h}$$ <2 балла>.

Ответ: $m = \dfrac{\pi R^4 h P_a}{g\left((R^2 - r^2) H - R^2 h\right)} + \dfrac{\pi r^2 R^2 h \rho}{R^2 - r^2}$ <2 балла>

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Условие равновесия поршня	$mg = \pi R^2 (P - P_a) + \rho g \delta h \pi r^2$, $\delta h = h + h_1$	3
2	Условие сохранения объема жидкости	$h_1 \pi (R^2 - r^2) = h \pi r^2$	2
3	Формулировка закона Бойля-Мариотта	$P_a V_0 = PV$	1
3	Получение давления под поршнем из закона Бойля-Мариотта	$P = \dfrac{P_a (R^2 - r^2) H}{(R^2 - r^2) H - R^2 h}$	2
4	Получение ответа	$m = \dfrac{\pi R^4 h P_a}{g\left((R^2 - r^2) H - R^2 h\right)} + \dfrac{\pi r^2 R^2 h \rho}{R^2 - r^2}$	2