Решения задач первого этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2009-2010 уч.года
9 класс

9.1. Ответ: Да, в качестве искомого годится набор 1,2,4,5,6=(4+5)+(1+2+6)=(1+5)+(2+4)+6. Можно показать, что это минимальный набор, удовлетворяющий условию задачи.

9.2. Заметим, что четырёхугольники APMQ и MRCS тоже параллелограммы, поэтому треугольники ABC и ADC, APM и AQM, MRC и MSC - равны. В таком случае, параллелограммы PBRM и MSDQ получаются удалением из равновеликих треугольников ABC и ADC пар равновеликих треугольников APM и MRC, AQM и MSC соответственно. Следовательно, их площади равны.

9.3. Ответ: 105 градусов. Возьмём на стороне AC точку P такую, что угол AMP равен 15 градусам. Тогда угол MPC равен 30 градусам, следовательно, треугольники PAM и MPC равнобедренные и длины отрезков BP, PM, MC и MB равны. Значит, треугольник BPC – прямоугольный и M – середина его гипотенузы, а угол BMP равен 60 градусов. В таком случае треугольник BMP – равносторонний, а треугольник BPA – равнобедренный прямоугольный. Значит, величина угла ABC равно сумме величин углов ABP и PBM, то - есть 45+60=105 градусов.

9.4. Ответ: 31. Заметим, что сумма восьми произведений в условии задачи представляется в виде произведения трёх попарных сумм чисел, стоящих на трёх парах противоположных граней куба, каждая из этих сумм больше единицы. Используя разложение $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ в произведение простых чисел получаем, что эти три суммы равны, соответственно, 7, 11 и 13, а, значит, сумма всех чисел на гранях куба равно 7+11+13=31.

9.5. Ответ: 5. Добавляя к необходимым длинам 15, получаем задачу: как с помощью нескольких отметок на линейке и её концов (назовём отметки и концы зарубками) отмерить все длины от 1 до 15. Для этого нужно не менее шести зарубок, иначе общее количество пар зарубок будет меньше 15. Покажем, что шести зарубок не хватит. Пусть это не так, тогда число пар зарубок равно числу длин, которые нужно отмерить, поэтому расстояния между зарубками не повторяются. Следовательно, отметины разбивают отрезок на пять отрезков целой различной длины, то есть на отрезки длины от 1 до 5. При этом рядом с 1 может стоять только 5, давая в сумме 6,тогда рядом с 2 не могут располагаться 3 и 4.Значит, 1 и 2 должны быть крайними, а рядом с ними может быть только 5 — противоречие. Следовательно, нужно не менее семи зарубок, то есть пяти отметин. Этого достаточно, отметим точки со следующими координатами: 1,3,6,8,11,13, разбивающие линейку на отрезки длин 1,5,2,3,2,2.

Решения, 10 класс

10.1. $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}=\frac{(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)}{a+b+c}=a+b+c-2\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}$, далее вспоминаем, что разность целых чисел есть число целое.

10.2. Ответ: искомое ГМТ является объединением пары отрезков, соединяющих середины противоположных сторон квадрата. Решение может быть лобовым: введём систему координат с началом в вершине A, ось OX направим вдоль луча AD, ось OY – вдоль луча AB, сторону квадрата примем за единицу, координаты искомой точки M обозначим за (x, y). Тогда $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}$. Дважды возводя в квадрат и избавляясь от радикалов, получим $(1-2x)(1-2y)=0$, откуда и следует ответ.

10.3. Ответ: 105 градусов. Возьмём на стороне AC точку P такую, что угол AMP равен 15 градусам. Тогда угол MPC равен 30 градусам, следовательно, треугольники PAM и MPC равнобедренные и длины отрезков BP, PM, MC и MB равны. Значит, треугольник BPC – прямоугольный и M – середина его гипотенузы, а угол BMP равен 60 градусов. В таком случае треугольник BMP – равносторонний, а треугольник BPA – равнобедренный прямоугольный. Значит, величина угла ABC равно сумме величин углов ABP и PBM, то-есть 45+60=105 градусов.

10.4. Ответ: 31. Заметим, что сумма восьми произведений в условии задачи представляется в виде произведения трёх попарных сумм чисел, стоящих на трёх парах противоположных граней куба, каждая из этих сумм больше единицы. Используя разложение числа 1001 в произведение простых чисел $1001=7\cdot 11\cdot 13$ получаем, что эти три суммы равны, соответственно, 7, 11 и 13, а, значит, сумма всех чисел на гранях куба равно 7+11+13=31.

10.5. Рассмотрим 196 всевозможных попарных сумм красных и синих чисел, они лежат в интервале от 3 до 199, всего 197 возможностей. Если среди них нет совпадающих, значит среди них нет ровно одного числа из интервала от 3 до 199. Заменяя, если нужно, числа n на числа $201-n$, считаем, что все числа от 1 до100 представляются в виде сумм синего и красного чисел. Из представимости 3 следует, что 1 лежит в одном множестве выбранных чисел, скажем, синих, а 2 — в другом, соответственно, красных. Из представимости чисел от 4 до 17 тогда легко следует, что числа от 2 до 16 являются красными — противоречие с тем, что красных чисел всего 14.

Решения, 11 класс

11.1. Ответ: все числа, делящиеся на 6. Ясно, что, если число равно сумме двух своих различных делителей, то каждый из этих делителей делит само число и меньше его половины. Пусть $n = 2(d_1 + d_2) = 2n(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}),\ a \square b$, откуда $3 \le a \le 4$. Лёгкий перебор показывает, что возможны только варианты $a = b = 4$ и $a = 3,\ b = 6$, первый случай не подходит, потому что соответствующие делители равны. Во втором случае от числа требуется только делимость на 6.

11.2. Ответ: сумма квадратов всех пяти сторон правильного пятиугольника больше суммы квадратов двадцати сторон правильного двадцатиугольника.

В правильном двадцатиугольнике вершины, взятые через одну, образуют правильный десятиугольник, а вершины этого десятиугольника, взятые через одну, образуют правильный пятиугольник. Заметим, что углы при вершинах правильного десятиугольника и правильного двадцатиугольника, равные соответственно 144 и 172 градуса, тупые. По теореме косинусов, сумма квадратов боковых сторон равнобедренного треугольника с тупым углом при вершине меньше квадрата его основания. Следовательно, квадрат стороны правильного пятиугольника больше суммы квадратов двух сторон правильного десятиугольника, составляющих с данной стороной равнобедренный треугольник, а квадрат стороны правильного десятиугольника больше суммы квадратов двух сторон правильного двадцатиугольника, составляющих с данной стороной равнобедренный треугольник, значит, квадрат стороны правильного пятиугольника больше суммы квадратов четырёх сторон правильного двадцатиугольника, составляющих с данной стороной пятиугольник. Следовательно, сумма квадратов всех пяти сторон правильного пятиугольника больше суммы квадратов двадцати сторон правильного двадцатиугольника.

11.3. Ответ: единственным. Запишем все наши числа в следующем порядке: 25,1,24,2,23,3,…,14,12,13. Ясно, что любые два из них равны в сумме 25 или 26 тогда и только тогда, когда являются в этой последовательности соседними. Таким образом, среди выбранных нами тринадцати чисел не должно быть соседних, откуда сразу получаем, что это должны быть все члены этой последовательности с нечётными номерами – выбор единственный .

11.4. Предположим, что в некоторой пирамиде такой вершины не найдётся. Выберем в пирамиде ребро максимальной длины a, с одного конца к нему примыкают рёбра b и c, с другого — рёбра d и e, по предположению $a > b + c$ и $a > d + e$. С другой стороны, рёбра a,b,d и a,c,e образуют треугольники — грани в пирамиде, поэтому $a < b + d$ и $a < c + e$. Складывая два первых неравенства, получим $2a > b + c + d + e$, складывая два последних неравенства, получим $2a < b + c + d + e$ - противоречие.

11.5. Сначала исключим из рассмотрения задачи, которые были решены только мальчиками или только девочками, они не влияют на образование пар общих задач у мальчиков и девочек в условии и на существование требуемой задачи. Далее, у произвольного мальчика есть по одной решённой задаче с каждой девочкой, а всего он решил не более пяти задач, значит, есть задача, которую решил он и не меньше двух девочек. Если у двух разных мальчиков такие задачи совпадают, то задача решена, поэтому дальше можно считать, что такие задачи у всех мальчиков различны и решены только ими самими. Точно так же и у каждой девочки есть задача, которую решила она и не меньше двух мальчиков, и у всех девочек такие задачи решены только ими самими. Разобьём все задачи на множество А, где задачи решены ровно одним мальчиком и не менее, чем двумя девочками, множество Б, где задачи решены ровно одной девочкой и не менее, чем двумя мальчиками и множество В, где задачи решены ровно одной девочкой и ровно одним мальчиком. Из сказанного выше следует, что в предположении не существования задачи, одновременно решённой двумя мальчиками и двумя девочками, в А и Б не меньше, чем по 10 задач и они не пересекаются. Пусть в А содержатся k задач, решённых соответственно $a_1, a_2, ..., a_k$ девочками, в Б содержатся l задач, решённых соответственно $b_1, b_2, ..., b_l$ мальчиками, в В содержится m задач. Подсчитав количество задач, решённых мальчиками и девочками, получим:

$a_1 + ... + a_k + l + m \le 50, b_1 + ... + b_l + k + m \le 60, k + l \ge 20$. Подсчитав количество пар общих задач у мальчиков и девочек, имеем: $a_1 + ... + a_k + b_l + ... + b_l + m = 100$, складывая первые два неравенства и третье с последним равенством, получим: $110 \ge a_1 + ... + a_k + b_l + ... + b_l + k + l + 2m \ge a_1 + ... + a_k + b_l + ... + b_l + k + l + m \ge 120$ - противоречие.